

# 原始惑星系円盤内における シアー不安定性

小野 智弘 (京大 D2)

武藤恭之 (工学院)、富田賢吾 (大阪大)、

野村英子 (東工大)、竹内拓

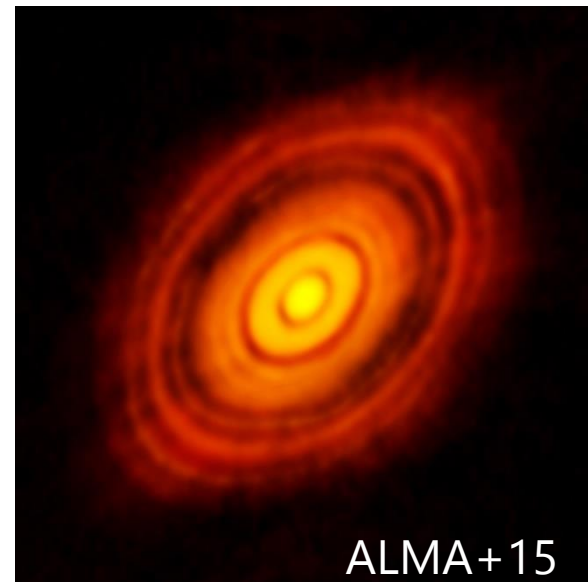
# ALMA

高度: 5000 m @ チリ

12 m × 54 + 7 m × 12

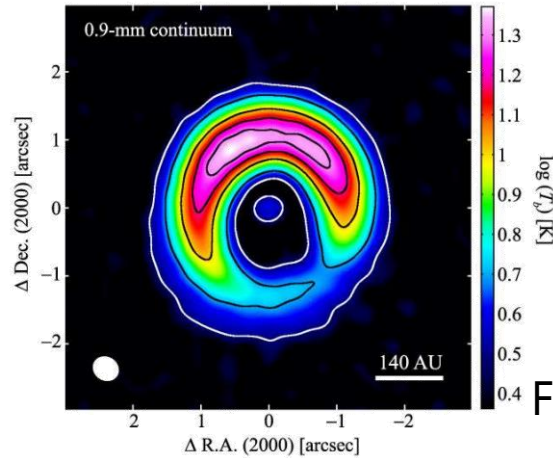
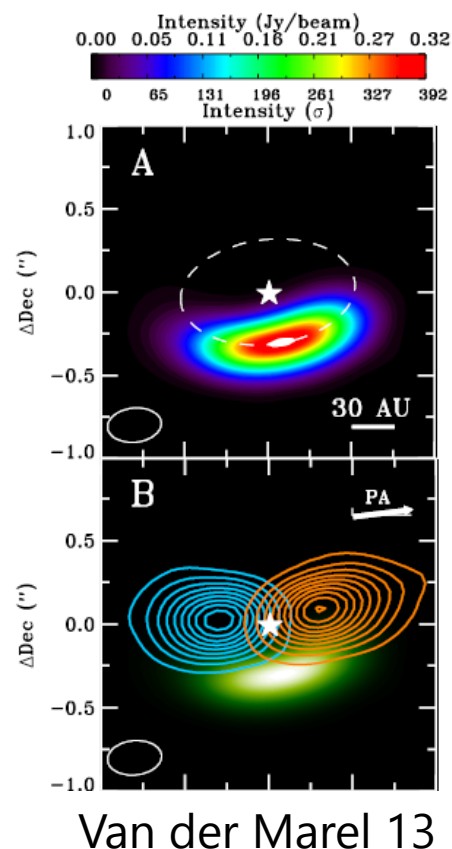
84 – 950 GHz (3~0.3 mm)

高分解能・高感度

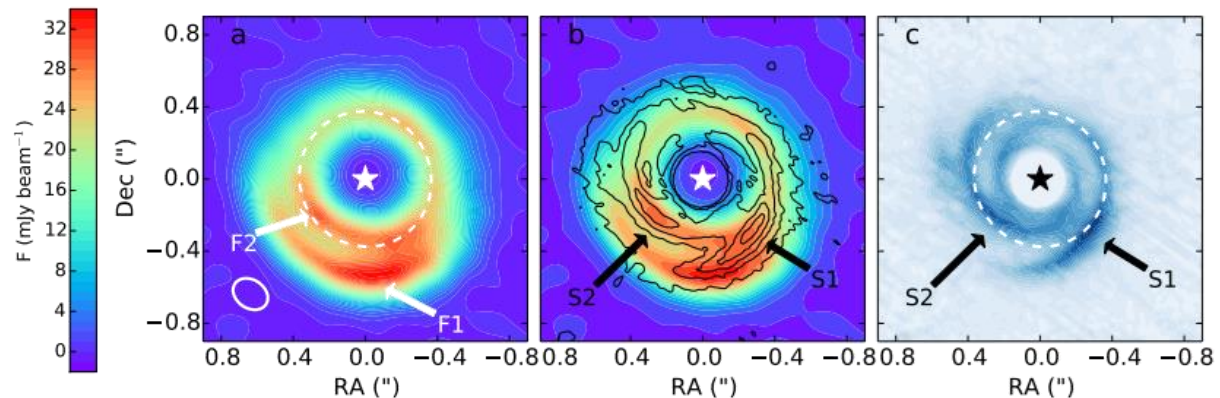


# 原始惑星系円盤中の構造

ALMAによって原始惑星系円盤中の  
 様々な構造 (リング・渦・スパイラル)の存在が  
 明らかになってきている



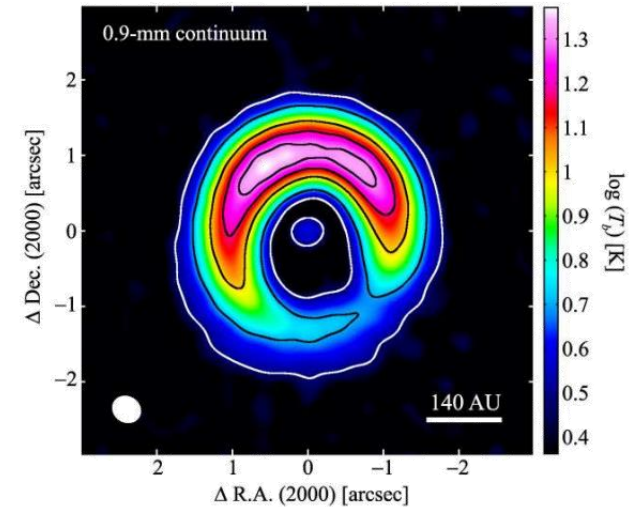
Van der Marel 16



# 原始惑星系円盤内の渦構造

## 観測

- 渦はダスト観測で確認されている
- ガス渦はダスト渦より弱いことが示唆されている



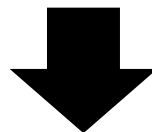
## 疑問

- 観測される渦構造はどのような物理メカニズムで形成されるのか？  
(磁場、流体不安定性、粘性、惑星...)
- 渦は惑星形成に影響を与えるのか？

# 流体不安定による渦形成

『観測されている渦の形成シナリオ』として  
漠然と受け入れられているのは

流体不安定によるガス渦の形成



ガス渦がダストを集積し、ダスト渦を形成

どんな流体不安定性？

“Rossby wave instability” (e.g., Lovelace+99, Li+00, 01)

“Baroclinic instability” (e.g., Klahr & Bodenheimer 03)

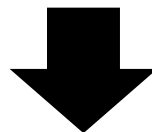
“Vertical shear instability” (e.g., Goldreich & Schubert 67, Fricke 68)

“Zombie vortex instability” (Marcus+13, 15)

# 流体不安定による渦形成

『観測されている渦の形成シナリオ』として  
漠然と受け入れられているのは

流体不安定によるガス渦の形成



ガス渦がダストを集積し、ダスト渦を形成

どんな流体不安定性？

“Rossby wave instability” (e.g., Lovelace+99, Li+00, 01)

“Baroclinic instability” (e.g., Klahr & Bodenheimer 03)

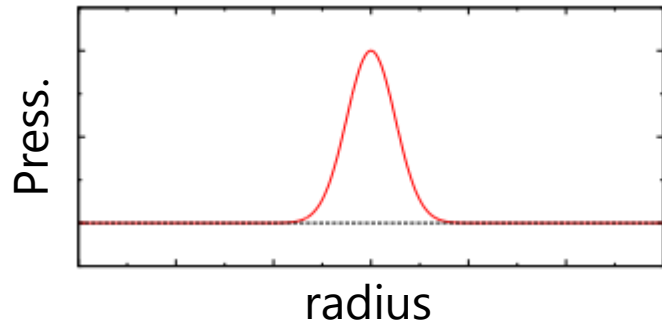
“Vertical shear instability” (e.g., Goldreich & Schubert 67, Fricke 68)

“Zombie vortex instability” (Marcus+13, 15)

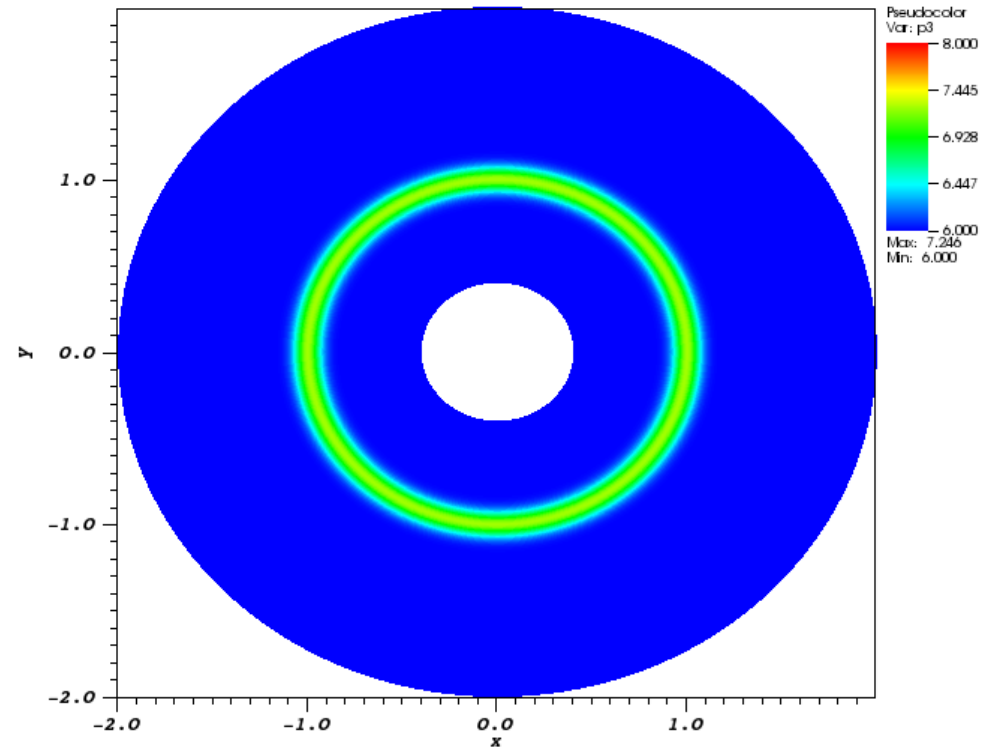
# ロスビー波不安定性

- 2Dの流体不安定性 (Lovelace+99, Li+00).
- 平衡軸対称円盤が  
圧力(密度)分布内に動径方向の急勾配を持つ時、  
不安定となり渦を形成する

ex) 軸対称圧力バンプ



回転速度は力学平衡で決まる  
中心星重力 = 遠心力 + 圧力勾配力

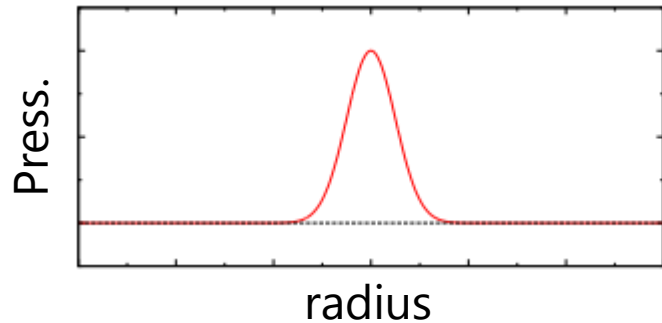


# ロスビー波不安定性

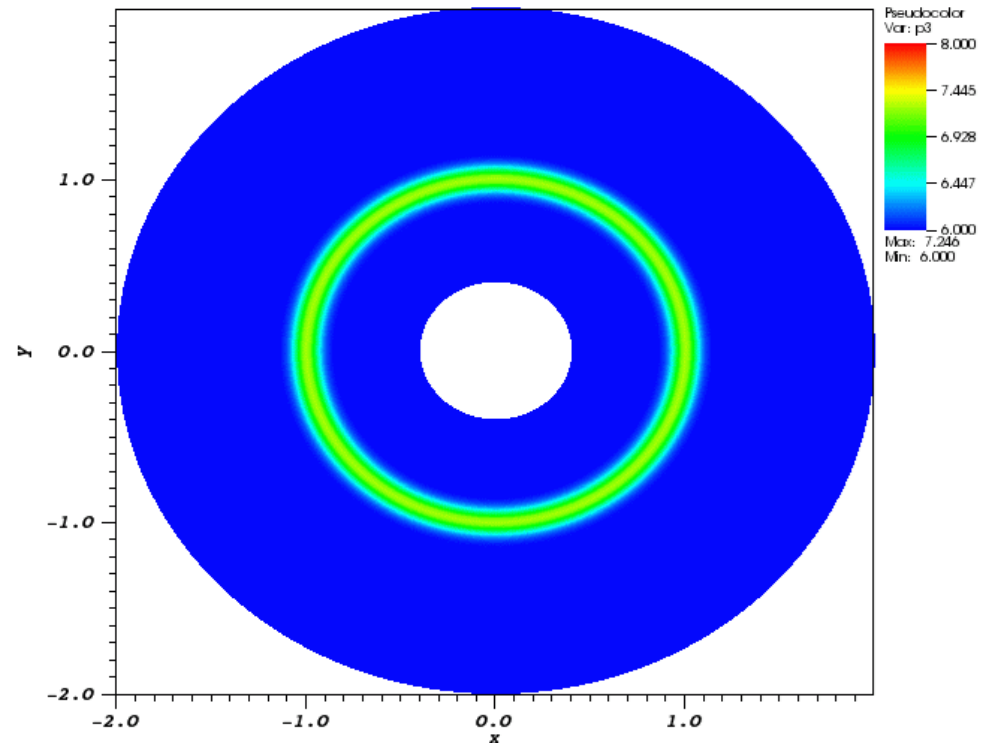
➤ 2Dの流体不安定性 (Lovelace+99, Li+00).

➤ 平衡軸対称円盤が  
圧力(密度)分布内に動径方向の急勾配を持つ時、  
不安定となり渦を形成する

ex) 軸対称圧力バンプ



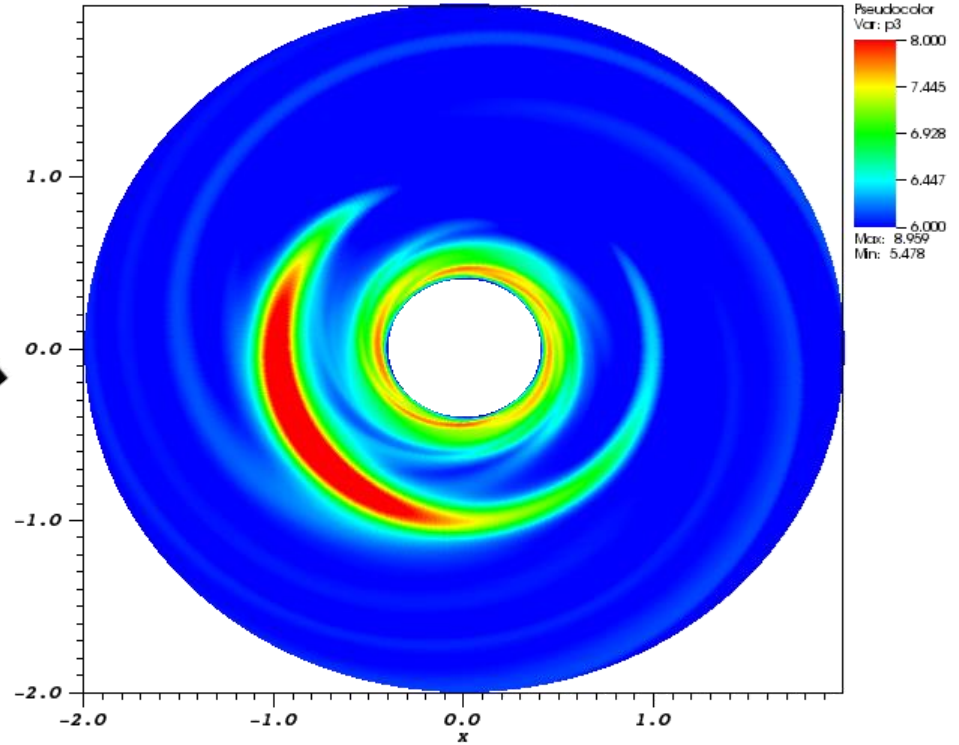
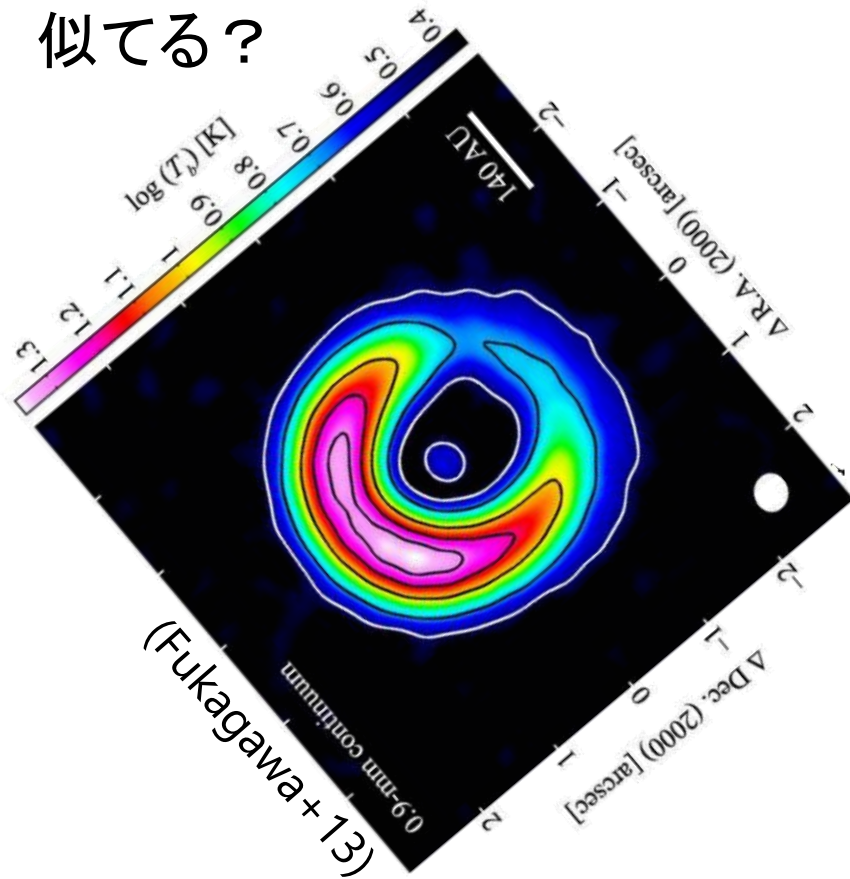
回転速度は力学平衡で決まる  
中心星重力 = 遠心力 + 圧力勾配力





# ロスビー波不安定性

似てる？



- ✓ ダストとガスで違う
- ✓ 渦の大きさが違う

# 基礎方程式

2D円筒座標  $(r - \varphi)$ 、外力は中心星重力

連続の式

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Sigma v_\varphi) = 0$$

運動方程式

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{GM}{r^2} - \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial r}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{r \Sigma} \frac{\partial P}{\partial \varphi}$$

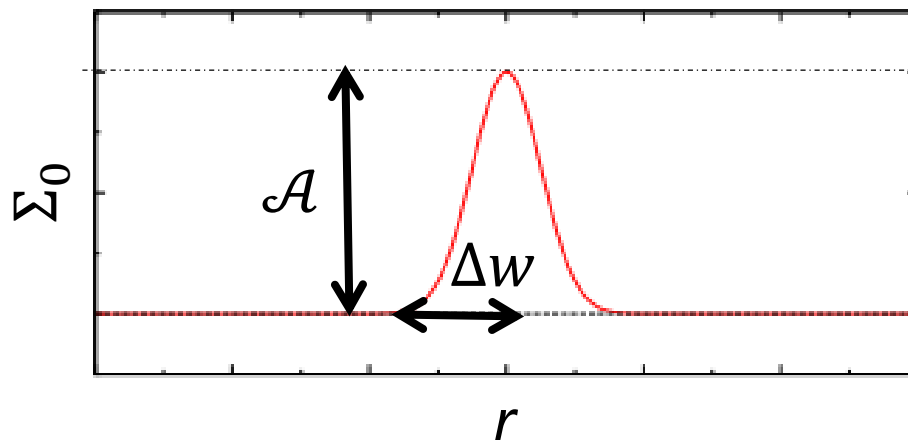
順圧を仮定

$$P \propto \Sigma^\Gamma \quad (\Gamma: \text{effective adiabatic index of gas})$$

# 背景流

背景流は定常・軸対称・平行流

- 動径速度:  $v_{r0} = 0$
- 面密度分布  
Gaussian bump (GB)



パラメータは  $A, \Delta w$  の2個

- 方位角速度:  $v_{\varphi 0}$  は動径方向の力のつり合いで決まる

# 摂動方程式

一次の摂動方程式を立てる

$$P_1 = c_0^2 \Sigma_1.$$

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma_0 v_{r1}) + \frac{\Sigma_0}{r} \frac{\partial v_{\varphi 1}}{\partial \varphi} + \Omega_0 \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial v_{r1}}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial v_{r1}}{\partial \varphi} - 2\Omega_0 v_{\varphi 1} + \frac{1}{\Sigma_0} \frac{\partial P_1}{\partial r} - \frac{1}{\Sigma_0^2} \frac{\partial P_0}{\partial r} \Sigma_1 = 0,$$

$$\frac{\partial v_{\varphi 1}}{\partial t} + \frac{\kappa_0^2}{2\Omega_0} v_{r1} + \Omega_0 \frac{\partial v_{\varphi 1}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \Sigma_0} \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} = 0,$$

# フーリエ分解する

$$\Sigma_1(r, \varphi, t) = \Sigma_1(r) \exp(\underline{im\varphi} - \underline{i\omega t})$$

$$P_1(r, \varphi, t) = P_1(r) \exp(\underline{im\varphi} - \underline{i\omega t})$$

$$v_{r1}(r, \varphi, t) = v_{r1}(r) \exp(\underline{im\varphi} - \underline{i\omega t})$$

$$v_{\varphi 1}(r, \varphi, t) = v_{\varphi 1}(r) \exp(\underline{im\varphi} - \underline{i\omega t}),$$

方位角モード:  $m$

固有振動数:  $\omega = \omega_r + i\gamma$

# 摂動方程式を並べる

$$i\Delta\omega\Sigma_1 = \left(\frac{\Sigma_0}{r} + \Sigma'_0\right)v_{r1} + \Sigma_0 v'_{r1} + ik_\varphi \Sigma_0 v_{\varphi 1},$$

$$i\Delta\omega v_{r1} + 2\Omega_0 v_{\varphi 1} = \frac{P'_1}{\Sigma_0} - \frac{P'_0}{\Sigma_0^2} \Sigma_1,$$

$$i\Delta\omega v_{\varphi 1} - \frac{\kappa_0^2}{2\Omega_0} v_{r1} = ik_\varphi \frac{P_1}{\Sigma_0},$$

ただし、

$$\Delta\omega(r) \equiv \omega - m\Omega_0(r)$$

$$k_\varphi \equiv m/r$$

epicyclic振動数  $\kappa_0^2 \equiv \frac{1}{r^3} \frac{d(r^4\Omega_0^2)}{dr}$

# エンタルピー摂動で式をまとめる

エンタルピー摂動:  $\Psi \equiv P_1/\Sigma_0$

$$\frac{1}{r} \left( \frac{r\mathcal{F}}{\Omega_0} \Psi' \right)' - \frac{k_\varphi^2 \mathcal{F}}{\Omega_0} \Psi = \left( \frac{\Sigma_0}{c_{s0}^2} + \frac{2k_\varphi \mathcal{F}'}{\Delta\omega} \right) \Psi,$$

ただし、

$$\mathcal{F}(r, \omega) \equiv \frac{\Sigma_0 \Omega_0}{\kappa_0^2 - \Delta\omega^2}$$

# もうちょっとまとめる

どうせなら定常Schrödinger方程式型にしよう

$$\Xi'' - D(r, \omega)\Xi = 0$$

$$\Xi(r) \equiv \sqrt{r \frac{F}{\Omega_0} \frac{P_1}{\Sigma_0}} : \text{perturbation}$$

$$D(r, \omega, m) \equiv \frac{B'}{2} + \frac{B^2}{4} - C$$

$$B(r, \omega, m) \equiv \frac{1}{r} + \frac{\mathcal{F}'}{\mathcal{F}} - \frac{\Omega_0'}{\Omega_0}$$

$$C(r, \omega, m) \equiv -k_\varphi^2 - \frac{\kappa_0^2 - \Delta\omega^2}{c_0^2} - 2k_\varphi \frac{\Omega_0}{\Delta\omega} \frac{\mathcal{F}'}{\mathcal{F}} \quad \mathcal{F}(r, \omega, m) \equiv \frac{\Sigma_0 \Omega_0}{\kappa_0^2 - \Delta\omega^2}$$

$$\kappa_0^2(r) \equiv \frac{(r^4 \Omega_0^2)'}{r^3}$$

$$\Delta\omega(r, \omega, m) \equiv \omega - m\Omega_0$$

$$k_\varphi(r, m) \equiv m/r$$

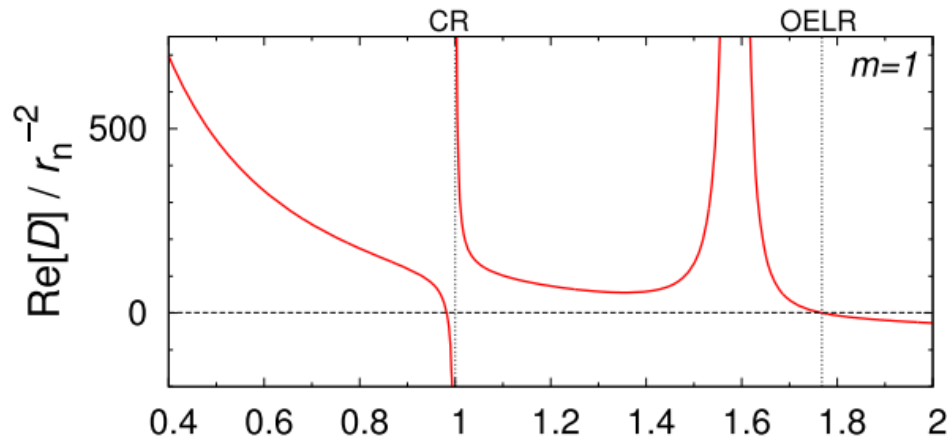
Note: the prime denotes d/dr

ちょっとお洒落な固有値問題を解くだけ



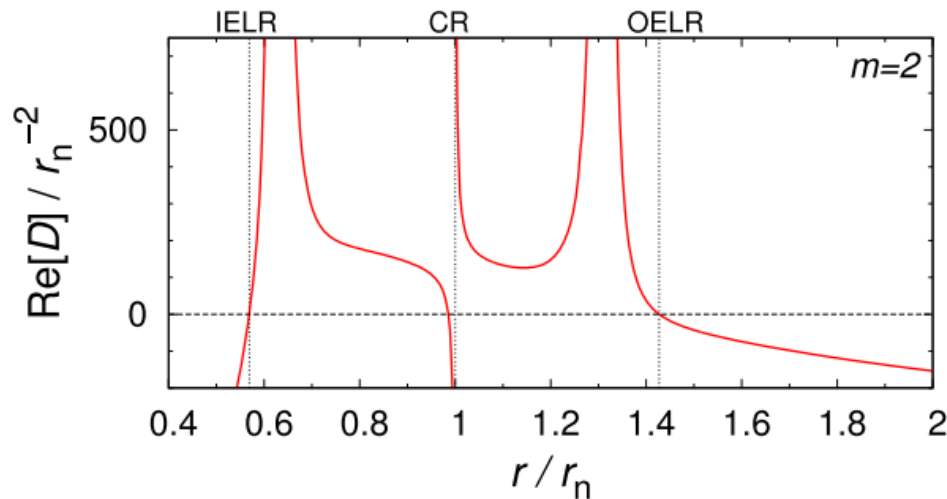
# 境界条件を考える前に

密度がフラットな時の有効ポテンシャルDを見ておく



$m = 1$ は内側の  
実効的リンドブラッド共鳴  
(IELR)が無い

不安定の時でも、  
ELRの外側は変わらない  
と期待される



# 境界条件

ということで  
境界条件は

$$\Xi'' - D(r, \omega)\Xi = 0$$

Trailing なWKB解に滑らかに接続する

$m = 1$ の時

$$\Xi' = \left[ \frac{1}{2r} + \sqrt{\frac{1}{4r^2} + D} \right] \Xi$$

$m \neq 1$ の時

$$\Xi' = i\sqrt{-D}\Xi$$

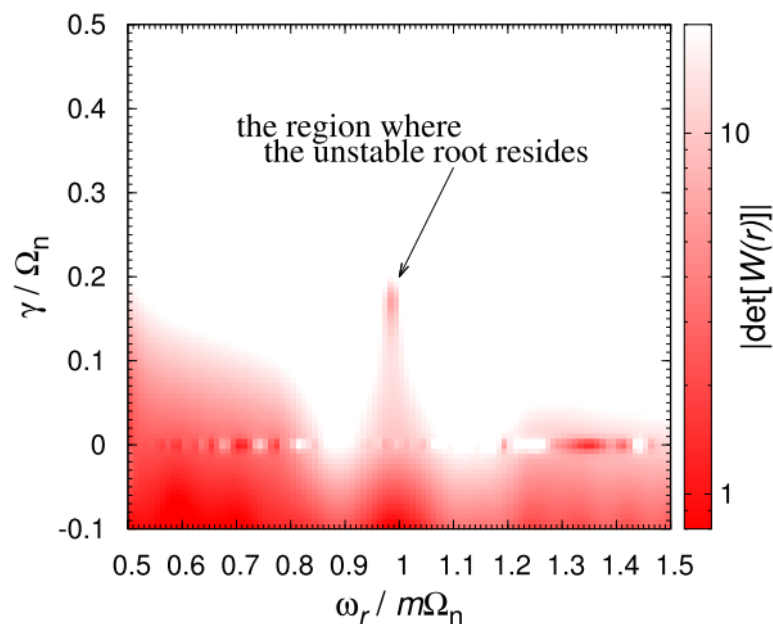
# 固有値の見つけ方

力技でやればいいんですよ！

## 1. 摂動方程式を離散化

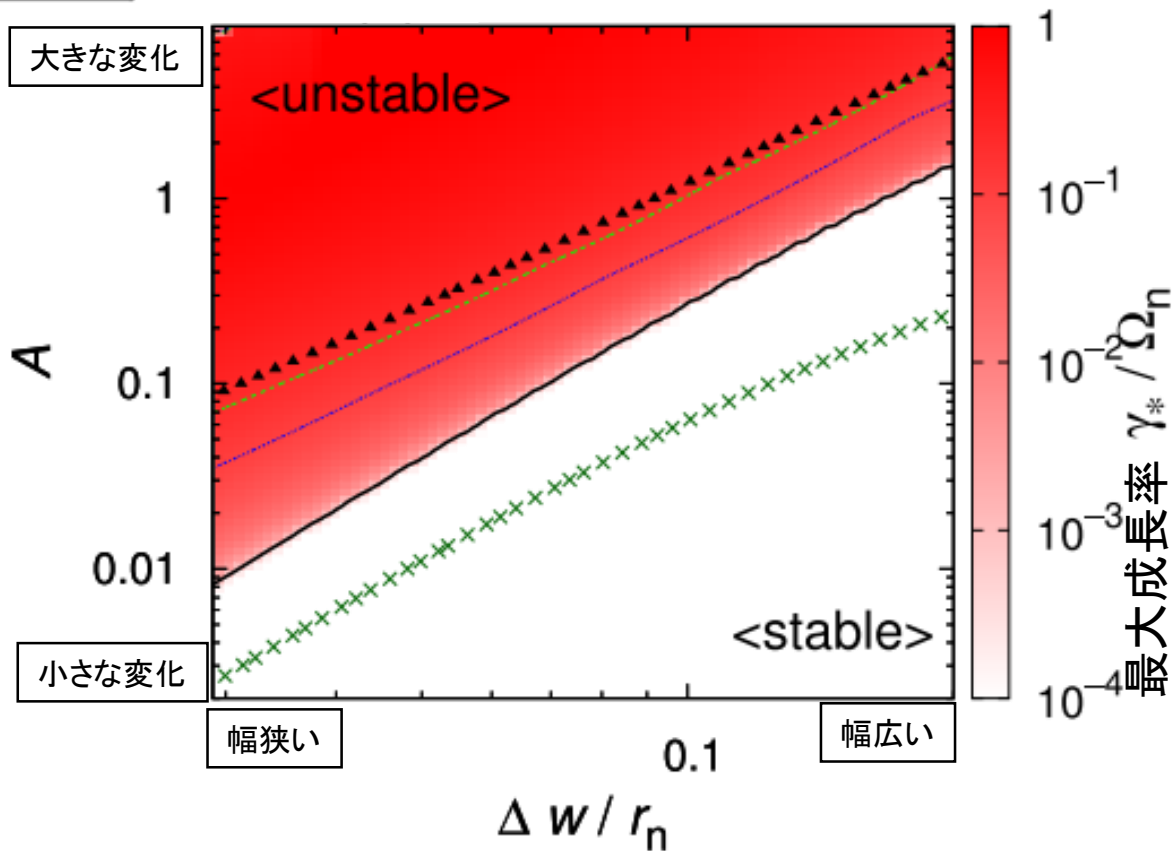
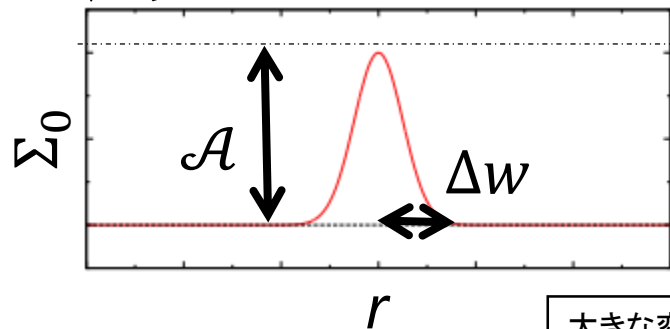
$$\sum_{j=0}^N W_{i,j}(\omega) \Xi(r_j) = 0$$

## 2. 行列Wの行列式が0となる固有値 $\omega_s$ を目で探す



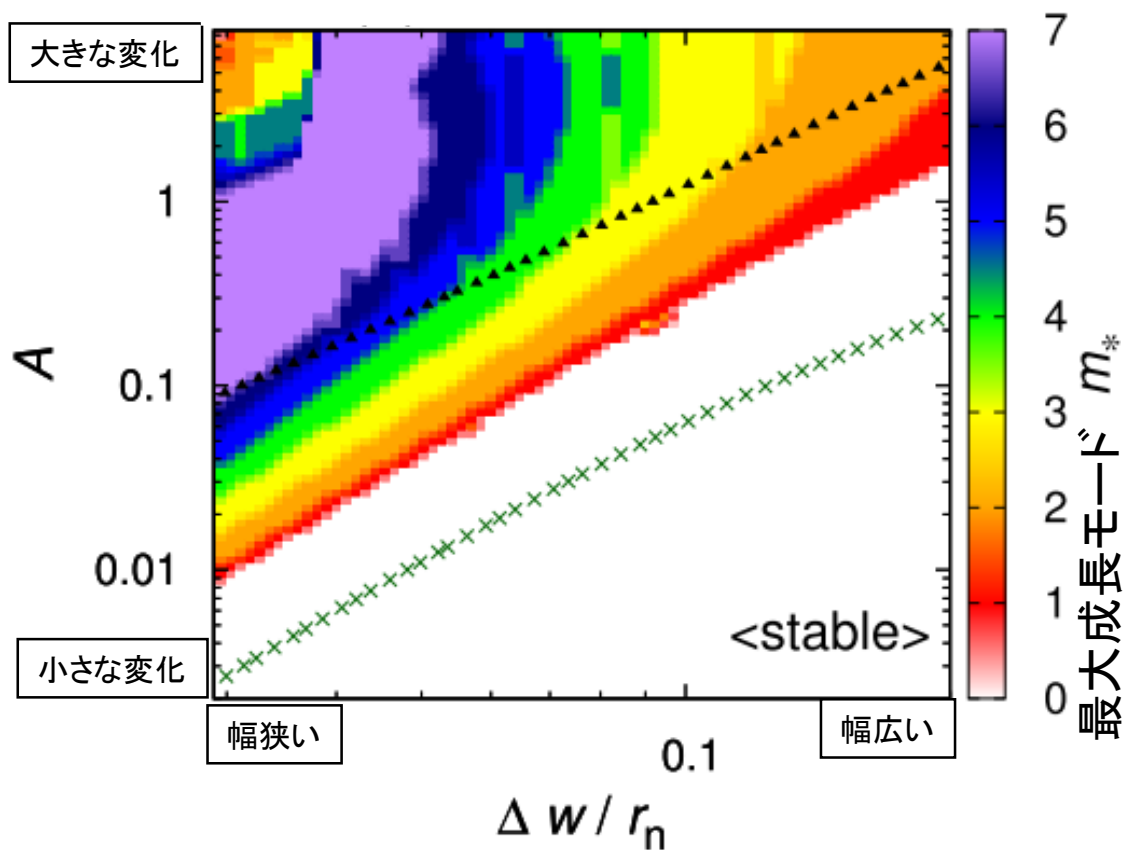
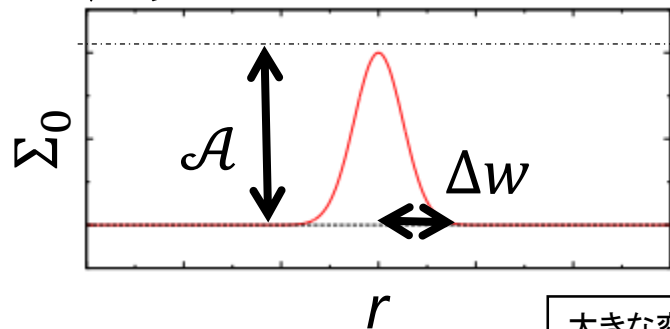
# 最大成長率

バンプ



# 最大成長モード

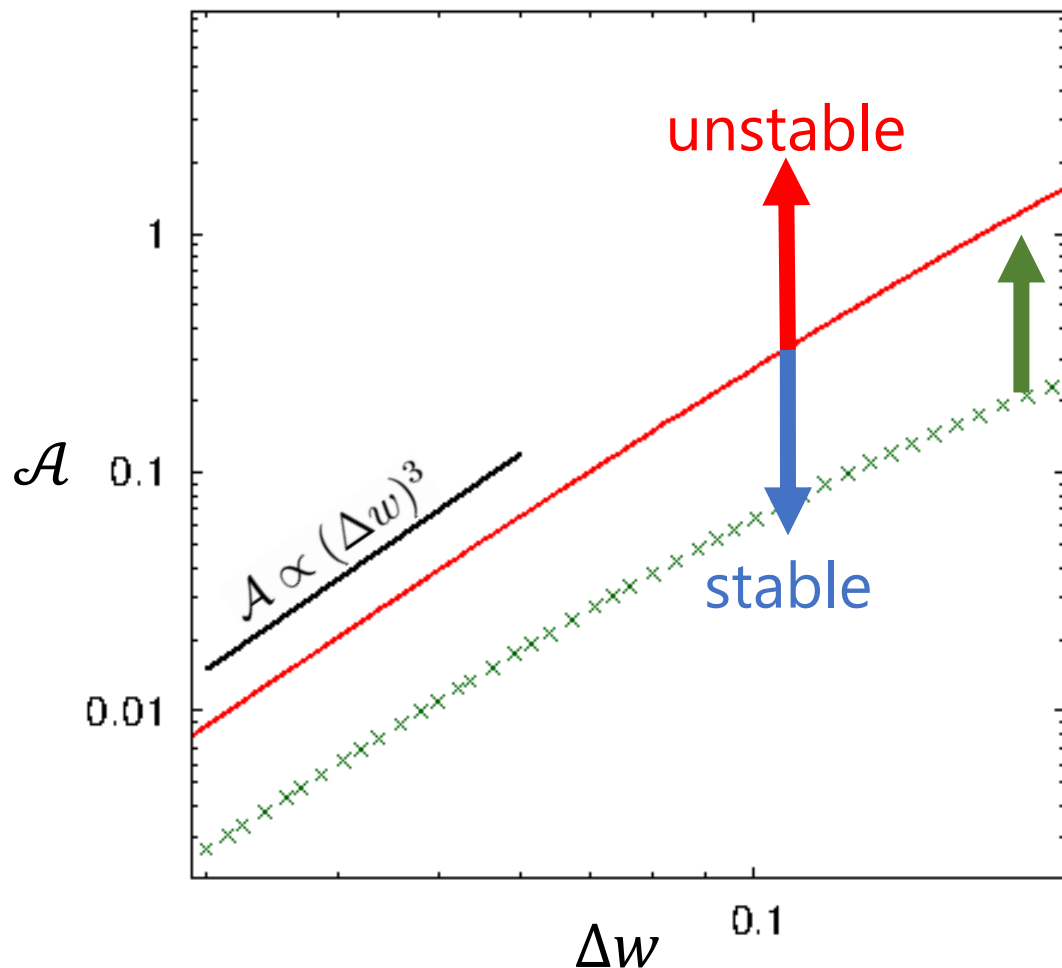
バンプ



# 中立安定とその近傍に着目しよう

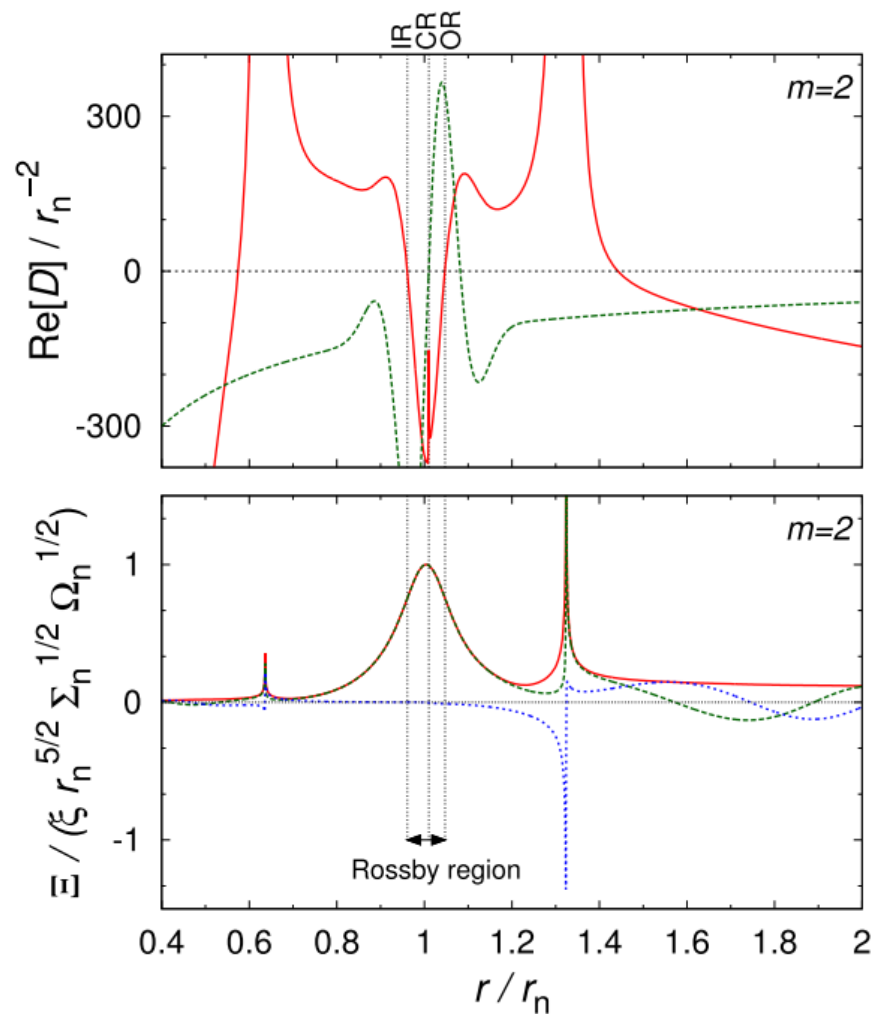
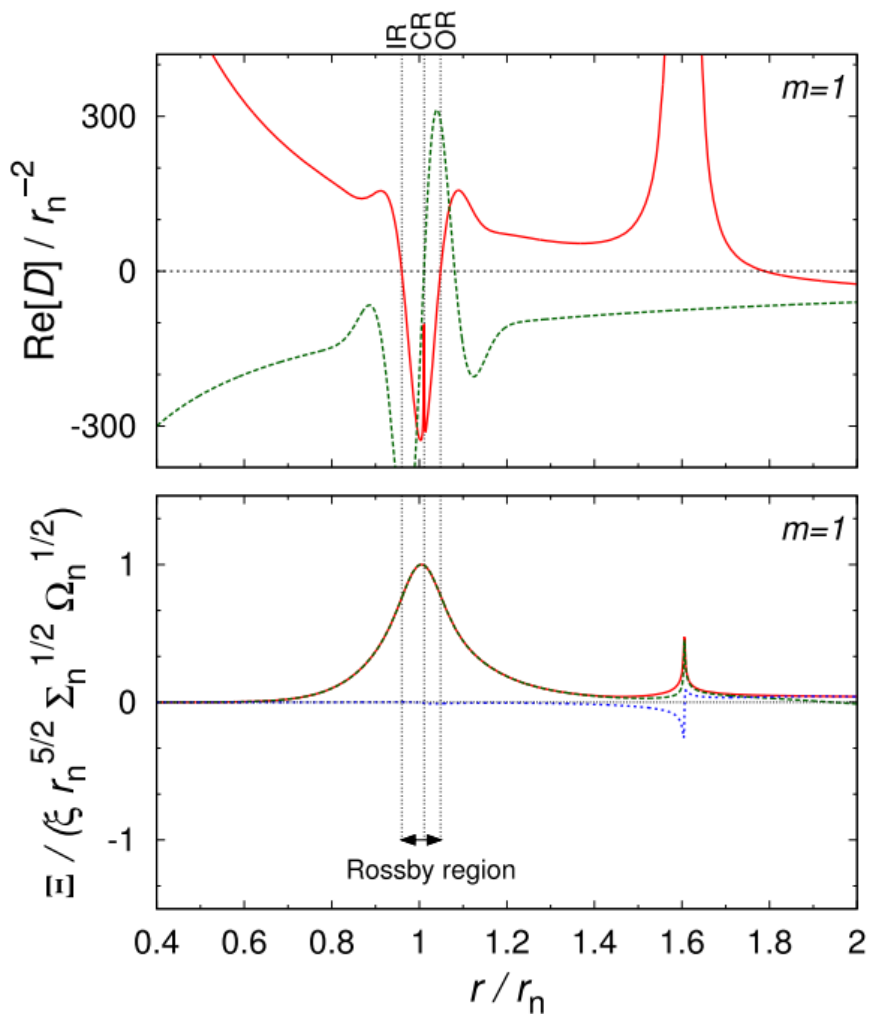
(成長率の小さく)  
不安定の際の  
✓ 有効ポテンシャル  
✓ 固有関数  
を調べる

中立安定線を  
簡単に求めたい

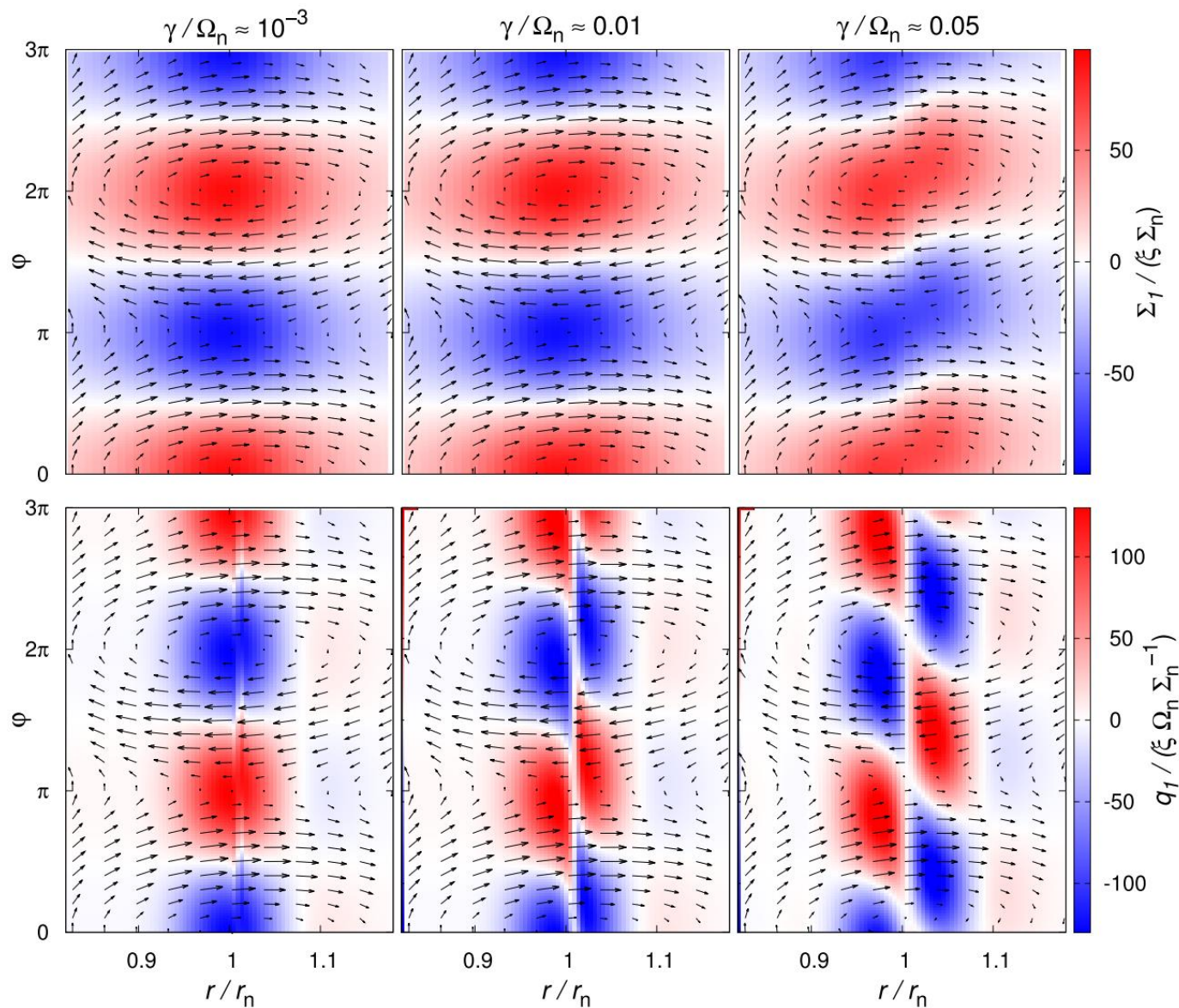


# 有効ポテンシャルと固有関数

成長率  $\gamma/\Omega_K = 0.001$

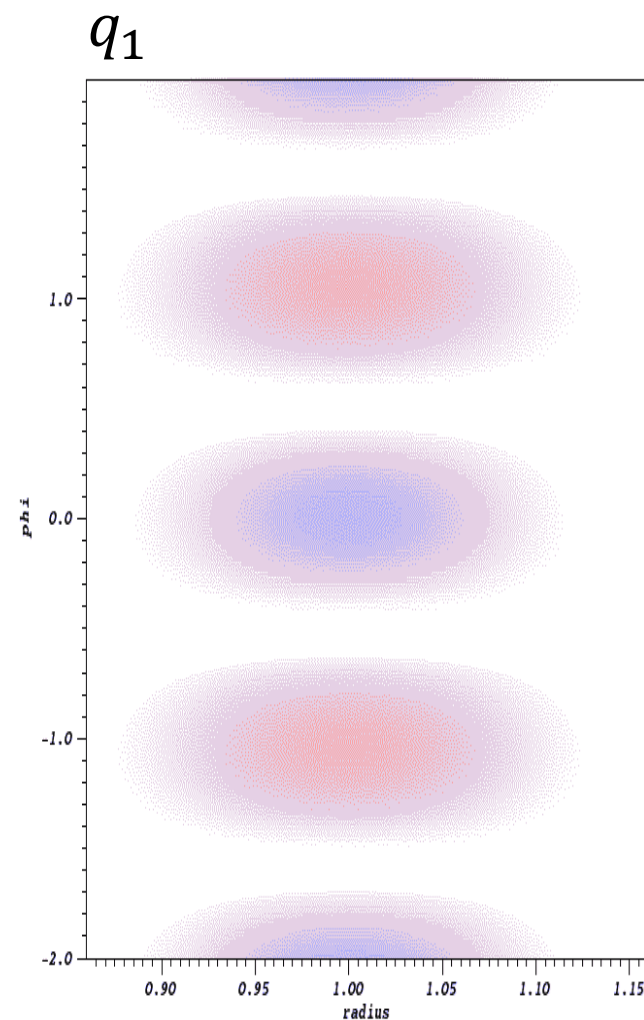
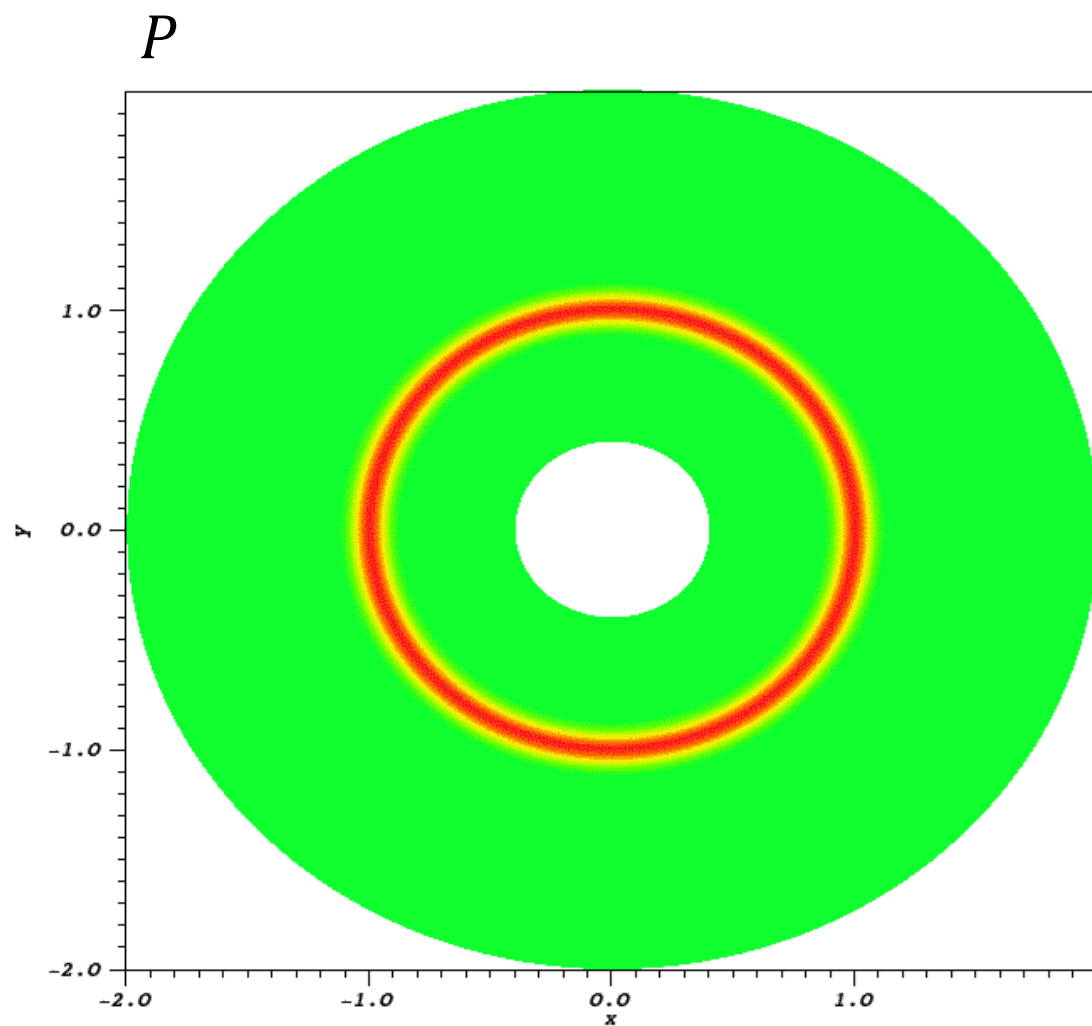


# 固有関数のマップを見ておこら





# Check Simulation



#Excite only  $m = 3$  mode

# 中立安定条件を求めてみよう

分からないもの

1. 中立不安定の際の有効ポテンシャル

$$D_{MS}(r, m) = D(r, \omega_{MS}, m)$$

2.  $\Xi''(r) - D_{MS}(r, m)\Xi(r) = 0$  を満たす  $\Xi(r)$

3. 中立安定となる  $(A, \Delta w)$

# 固有振動数と有効ポテンシャル

## 渦位摂動方程式

$$i(\omega - m\Omega_0(r))q_1 = v_{r1}q'_0(r)$$

中立安定時  
共回転共鳴で0

no node

共回転共鳴で0

よって

$$\omega = \omega_{\text{MS}} \equiv m\Omega_0([q'_0]^{\text{inv}}(0))$$

(  $[q'_0]^{\text{inv}}$  は  $q'_0(r)$  の逆関数)

後は放り込んだら

$$D_{\text{MS}}(r, m) \equiv D(r, \omega_{\text{MS}}, m)$$

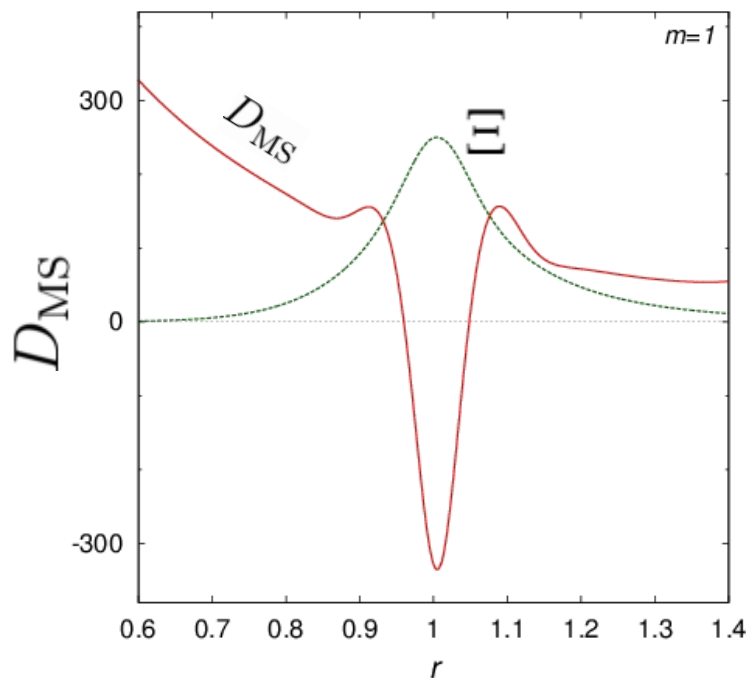
# 中立安定の時の固有関数

非自明な解 $\Xi(r)$  は

$\Xi''(r) - D_{MS}(r, m)\Xi(r) = 0$  を満たす

中立安定の時、

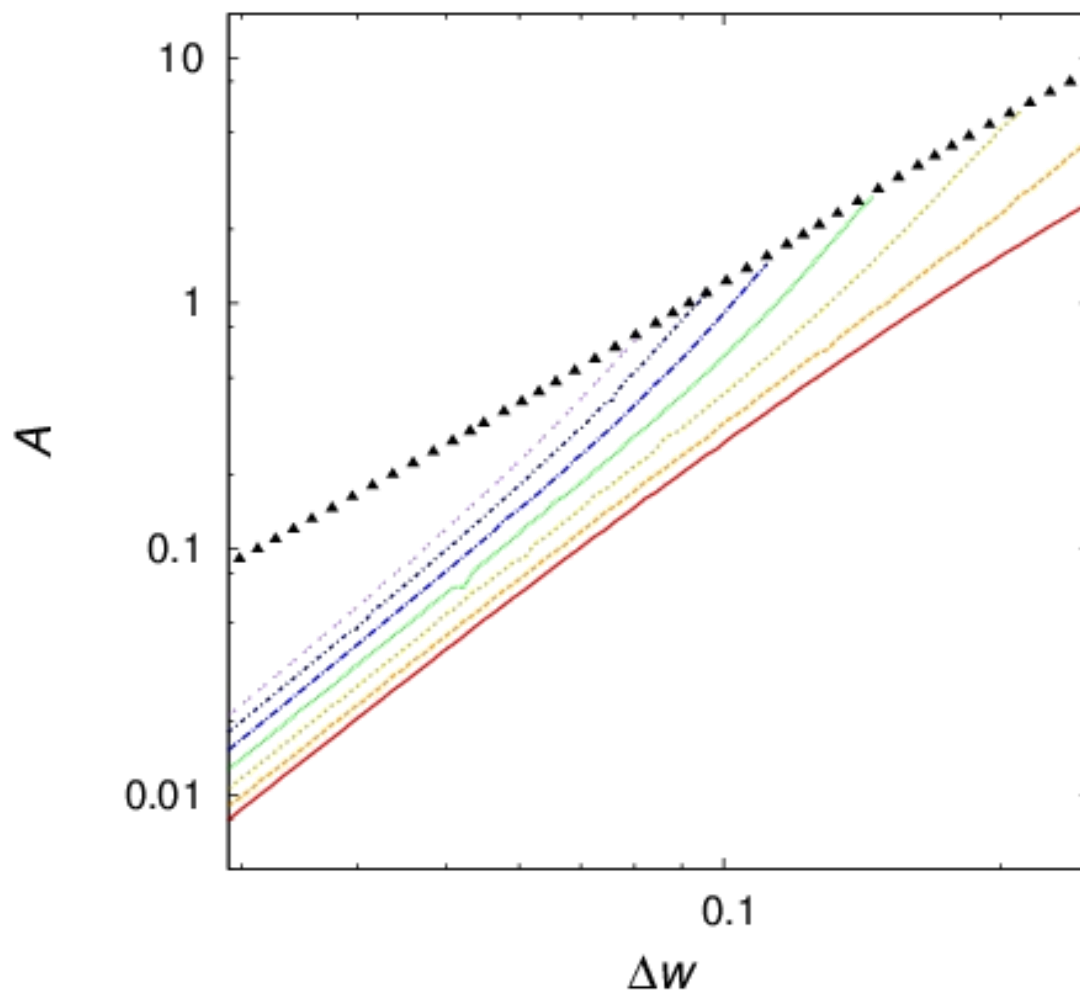
$\Xi(r)$  は  $D_{MS}(r, m)$  のポテンシャル井戸に  
node 0 のモードがトラップされる



パラメータを動かしながら

積分しまくれば中立安定線がかける

# 各モードでの中立安定線

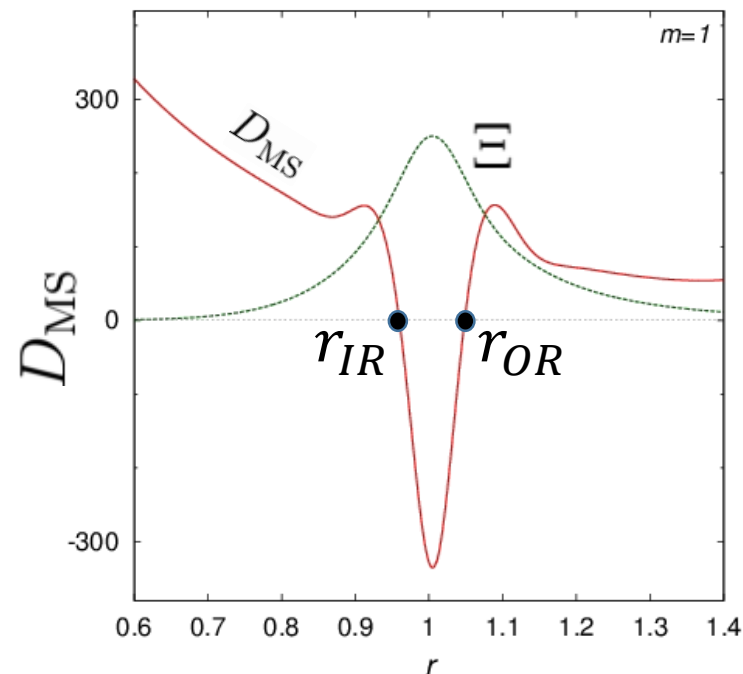
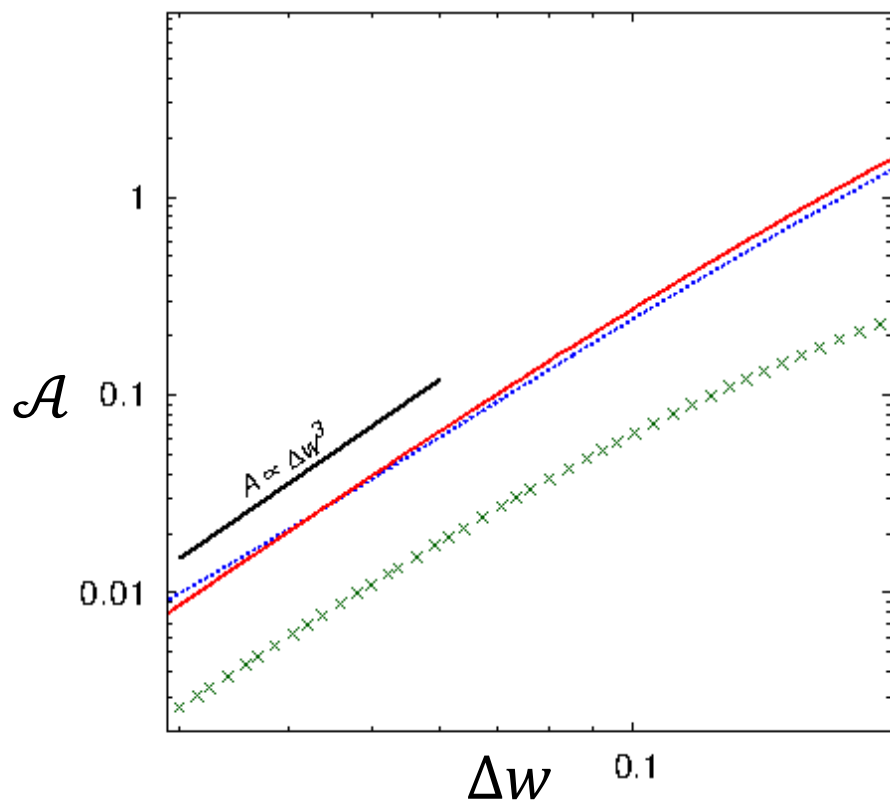


# Sommerfeld Quantization Condition

基底モードに対する  
Sommerfeld の量子化条件

$$\eta(m) \equiv \int_{r_{IR}}^{r_{OR}} \sqrt{-D_{MS}(r, m)} dr \geq \eta_{crit} \equiv \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

( $r_{IR}$ 、 $r_{OR}$  は  $D_{MS}$  の転換点)



中立安定線  
Sommerfeldの量子化条件

# 気にしなくてはいけないかな～って話

- 傾圧 (Lovelace+99, 00, Lin 13)  
あんまり影響は無いが、少し不安定になりやすい
- 3D (e.g., Lin 12, 13, Meheut+12, Richard+13)  
あんまり影響は無い
- 粘性 (Lin 14)  
ある程度レイノルズ数が低いと不安定の成長を阻害  
不安定のonsetも妨げられるのか?
- 自己重力 (Lovelace & Hohlfield 13)  
不安定のonsetを妨げる
- ダスト (Inaba & Barge 06)  
高気圧に集まる...が、渦を破壊する
- 磁場 (Guervilly+16)  
強すぎると渦の形成を阻害?

# まとめ

- 『Rossby波不安定性』というやつは円盤中のシアー不安定っぽい
- 理想流体における中立安定条件を半解析的に求めてみた
- 色々考えなあかん効果が沢山ある