

2次元乱流と地球流体.

Y-1

参考文献

柳瀬, 1984: 2次元乱流と地球流体
天文, 31, 389-400.

林, 1987: 乱流 1-1.

① 乱流研究の歴史

* 2つの方向

- ・ モデル方程式の 実験の再現
半現象論的, 半数値実験的

- ・ 理想化した山た乱流 (ex. 一様導方程式)
散密石取川投心.

* Batchelor (1953) The theory of homogeneous turbulence

* 2次元乱流の研究 (特有の性質)

Onsager, 1949: 渦糸の統計理論

Ogura, 1952: 大気への適用

Fjørtoft, 1953: "エネルギーの逆カスケード"

Ogura, 1963: 準正規分布(QN)理論への適用
真エネルギー空間

Kraichnan, 1967:

Leitch, 1968:

Batchelor, 1969:

} k^{-3} エネルギー空間

70年代:

- * NS 方程式的数值积分之近似理论与之比较.
- * Large eddy simulation (subgrid modeling)
- * Interimrangy (空间的不均匀性)
- * 拡張 (β 平面, 成層, ...)

* Rose & Sullivan (1978): Fully developed turbulence and statistical mechanics.

Rhines (1974): Geostrophic turbulence.

Kraichnan & Montgomery (1980): Two-dimensional turbulence.

Tatsumi (1980): Theory of homogeneous turbulence.

① 2次元乱流の概要

* 支配方程式

2次元 N-S 方程式
非圧縮

↓
速度方程式:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla(\omega, \psi) = \nu \Delta \omega \quad \dots (1)$$

渦度: $\omega = -\Delta \psi$

速度: $u = \nabla \times \psi \quad \left(u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$

渦度関数: ψ

粘性係数: ν

* 乱流の性質 (定義)

- 非定常で大規模自由度
- 空間的に断片的に連続な渦度

- 初期条件敏感性で予知不可能性

* 乱流の発生

→ 数理科学 1982-11 「乱流」

(1) $\nu \rightarrow \text{small}$

* 統計量

$$\cdot \text{エネルギー}: \quad E = \frac{1}{2} \iint (\nabla \psi)^2 dx dy \quad (2)$$

$$\cdot \text{インテグラル}: \quad Q = \frac{1}{2} \iint \omega^2 dx dy \quad (3)$$

$$\cdot \text{ノルム平方}: \quad P = \frac{1}{2} \iint (\nabla \omega)^2 dx dy \quad (4)$$

$$\iint \psi \cdot (1) dx dy$$

$$\frac{dE}{dt} = -2\nu Q \quad (5)$$

$$\iint \omega \cdot (1) dx dy :$$

$$\frac{dQ}{dt} = -2\nu P \quad (6)$$

$$\eta(t) = -\frac{dQ}{dt} = 2\nu P \quad (7)$$

• $\nu = 0$ の場合

$$dE/dt = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (8) \\ (9) \end{array} \right.$$

$$dQ/dt = 0$$

エネルギーとインテグラルは保存量

• $\nu > 0$ の場合

$$-P > 0 \text{ かつ } \frac{dQ}{dt} \leq 0 \quad (9)$$

インテグラルは有界

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{dE}{dt} = 0 \quad (10) \quad (\because Q \text{ finite})$$

c.f. 3次元乱流 - "非粘性散逸"

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} Q(t) \sim O(\nu^{-1})$$

* ノボシトール関数

• 調度ノボシトール関数: $\Omega(k, t) = \frac{\langle \hat{\omega}(k, t) \hat{\omega}(k', t) \rangle}{S(k+k')}$

(11)

$\hat{\omega}(k, t)$: $\omega(x, t)$ の T-11 変換

< \cdot > : 時間平均

$S(k)$: フェリクソノノ関数

• フェリクソノノ関数: $E(k, t) = \int_0^{2\pi} \Omega(k, t) d\theta$

(12)

$$k = (k \cos \theta, k \sin \theta)$$

* ノボシトール相似則

<1> Batchelor, 1969: 一樣等方 2次元乱流
非粘性フェリクソノノ保存則. Kolmogorov 相似則
2次元 $\eta^{-1/2}$

(I) 低波数: $k \approx O(1)$

$$E(k, t) = \varepsilon^{1/2} t g(\varepsilon^{1/2} k t) \dots (13)$$

g : 無次元関数

ε : フェリクソノノ (一定)

(II) 高波数: $k \gg O(\nu^{-1/2} \eta^{1/2})$

$$E(k, t) = \nu^{1/2} \eta^{1/2} k^{-2} f(k \nu^{1/2} \eta^{-1/2}) \dots (14)$$

f : 無次元関数

$\eta = -\frac{d\varepsilon}{dk}$ (Wirbelturnover 仮定)

$\nu^{1/2} \eta^{-1/2}$: 2次元 Kolmogorov 長さ

"2次元 Kolmogorov 相似則"

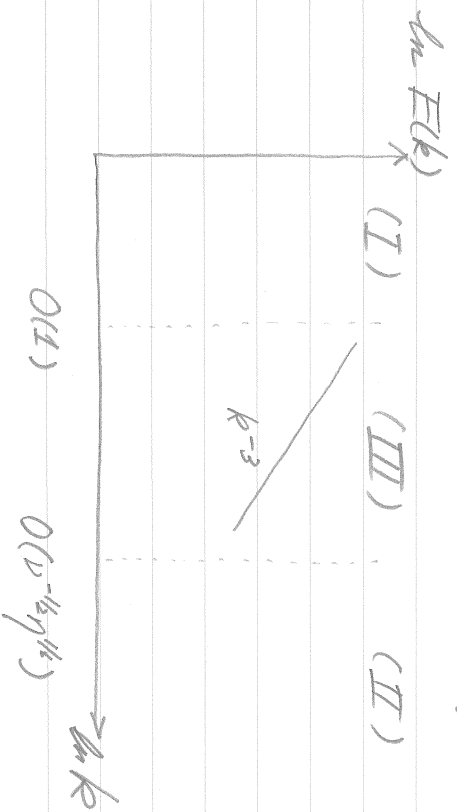
(I) (II) の領域 $\leq \gamma k$: $\rightarrow p(s), f(s)$

$$\gamma = \alpha A t^{-3} \dots (15)$$

(III) エンストロフ-慣性小領域

$$E(k, t) = C \gamma^{2/3} k^{-3} = C (\alpha A)^{2/3} t^{-2} k^{-3} \dots (16)$$

C: ある Kolmogorov 定数



$$E = \alpha k^{-3}$$

$$u_0 E = k_0 (\alpha k^{-3})$$

$$u_0 E = -3 k_0 \alpha k + k_0 \alpha$$

- エネルギーは $k \sim O(t^{-1})$ の領域に集中
時間スケール \sim 波数 k のスケールに集中
中心
- "逆カスケード"
- エネルギーは、単位時間あたり

(9) Kirschman, 1967:

波数空間での非線型相互作用のダイナミクス
波数空間における自己相似的輸送

(I) 低波数 : $k \ll k_L$

↑
イリキ-注入の波数

$$E(k, t) = C' \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \dots (19)$$

ϵ : イリキ-増加率 (イリキ-カスケード)

C' : Kolmogorov 定数

"イリキ-慣性領域"

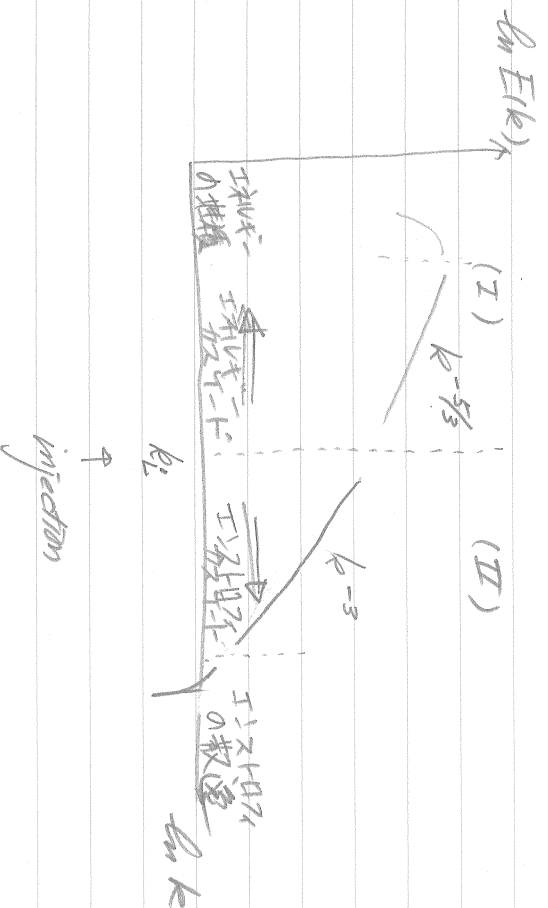
インテグ-輸送はゼロ

(II) 高波数 : $k \gg k_L$

$$E(k, t) = C \eta^{2/3} k^{-3} \dots (18)$$

"インテグ-慣性小領域"

イリキ-輸送はゼロ



- 領域 (II) の非局所相互作用
対称補正 (← Test Field Model)
(Kraichnan, 1971)

<3> Saffman, 1971:

$$E(k,t) \propto k^{-4} \quad \dots (19)$$

$$\eta \propto U^{2/3} \quad \dots (20)$$

- 稠度場 の 'ラビチ': 1st-order 乱流の PFD
- $\lim_{U \rightarrow 0} \eta = 0$: 有限 Reynolds 数の
局所的画像
エントロピーの非線形散逸 は

<4> その後の発展

- closure を使った近似理論
(Pouquet et al, 1975; Tsunemi & Yamse, 1981)

$$E \propto k^{-3}$$

- 数値実験 (Fomberg, 1977)

$$E \propto k^{-4}$$

- べき則の破れ (Salmon & Frisch, 1975)

* 数値実験

Lilly, 1969, ...: Arakawa Jacobian

Herring et al, 1994: Spectral transform method

Fornberg, 1997: "

Basdevant, et al, 1981:

McWilliams, 1984:

= エネルギー逆カスケード
Λ²スケール

= インスタレーション - 散逸率
 $\eta(t)$ $\eta(t) = 0 t^{-\alpha}$

= 空間構造
 $\omega(x, t)$ 

- * intermittency
- * isolated coherent vortices

= forced turbulence & decaying turbulence

2048

* 大気乱流の観測結果

Wim. Nielsen, 1967:

Debois, 1975:

Gage, 1979:

Lilly, 1983:

Lilly and Petersen, 1983:

Nashom & Gage, 1983:

...

Lilly, 1973: "Dynamic Meteorology"
(8455)

* 諸問題

. 乱流拡散問題

- 工藤 μ^u - 在 μ^u - μ^u 領域 (Obukhov, 1941)

$$\langle r(t)^2 \rangle \sim \epsilon t^3$$

 $r(t)$: 2粒子間の距離
- FISHA μ^u - μ^u - μ^u 領域 (Lin, 1992)

$$\ln \langle [r(t)/r(0)]^2 \rangle \sim \eta t$$

. interwifency

- Fractal 次元

(Frisk et al, 1998)

- 理論

(Kraichnan, 1995)

Mann & Taylor, 1995;

末田, 1982 ...)

* 統計理論 (closure 問題)

cut

地球流体分野の拡張

* 地球流体分野の特有の性質

- 回転系
- 球面
- 成層
- 表面地形

* β 効果

回転 + 球面

(1次元)

β 平面近似

稠度方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\omega, \varphi) = \nu \Delta \omega + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (2)$$

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad f = f_0 + \beta \varphi$$

- エネルギー保存, エンタルピー保存の実例
- $\frac{dE}{dt} = -\nu \Delta Q \quad (15)$
- $\frac{dQ}{dt} = -\nu \Delta P \quad (16)$

- エネルギー, エンタルピーの散逸空間での輸送の影響がある。

- key parameter: $\epsilon = \alpha \beta^2 U / \beta$

$$k_p = (\beta / 2U)^{1/2} \epsilon U^2$$

$$k \gg k_p \iff \epsilon \gg 1 \rightarrow \text{乱流 (逆カスケード)}$$

$$k \ll k_p \iff \epsilon \ll 1 \rightarrow \text{ロスビー波 (逆カスケード)}$$

- カスケード率 Γ

$$\frac{d \langle k \rangle^{-1}}{dt} = \Gamma U$$

NO.

Y-13

Rhines, 1975: 1979: 先驅

Holloway & Hendershott, 1977: DRC-級

Williams, 1978: 球面 → 木星

McWilliams & Gunt, 1986: Stewart vortex

* 成層効果

Charney, 1971: 先驅

Salmon, 1978.

Rhines, 1979.

地球流体 ZVA 2次元乱流

① 2次元乱流の数値計算

- forced (ex. Lilly, 1982, ...)

- decaying (ex. McWilliams, 1984)

一樣. 算方

② 回転系 ZVA 2次元乱流

四 f - 平面

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\omega + f, \psi) = \nu \Delta \omega \quad \dots (1)$$

$$\omega = -\Delta \psi$$

$$u = \nabla \times \psi \quad (u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x})$$

ψ : 流束関数

ν : 動粘性係数

f: コリオリ 107x-7 (202), 一定

- f が一定の時. 非回転の場合と同じ.

- 但し, (1) は, 遠心力項を著しく近似系 ZVA の近似.

(ψ は 変数分解の
慣例と異なり
ゼロを注意)

▣ β -平面

β

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\omega, \psi) - \left(\frac{d\mathcal{I}}{dt} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nu \Delta \omega \quad \dots (12)$$

$$- \beta \text{平面} \quad \beta = \frac{d\mathcal{I}}{dy} = \text{一定}$$

• 保存則:

$$- \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -2\nu Q \quad \dots (13)$$

$$- \frac{dQ}{dt} = -2\nu P \quad \dots (14)$$

$$\iint -\beta \frac{\partial \psi}{\partial x} \psi \, dx \, dy = -\beta \iint \frac{1}{2} \frac{\partial \psi^2}{\partial x} \, dx \, dy = 0$$

$$= \iint -\beta \frac{\partial \psi}{\partial x} \omega \, dx \, dy = \beta \iint \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta \psi \, dx \, dy = 0$$

$-\beta \frac{\partial}{\partial x} \nabla \psi \cdot \nabla \psi \, dx \, dy$

- 絕對溫度 Δ 保存

$$\mathcal{I} = \omega + f$$

$$\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t} + J(\mathcal{I}, \psi) = \nu \Delta \omega \quad \dots (15)$$

$$\text{例 11, } \mathcal{I} = \frac{1}{2} \iint \mathcal{I}^2 \, dx \, dy \quad \text{绝对量}$$

$$\frac{d\mathcal{I}}{dt} = -2\nu P \quad (16)$$

Q 是否独立保存量?

$$\omega^2 + 2\omega f + f^2$$

$$f_0 + \beta y$$

• 理論的考察

- (非線型項) \gg (β項)

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\omega, \psi) = \nu \Delta \omega \quad \dots (1)$$

非回転, 1-項と同じ.

- (非線型項) \ll (β項)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \Delta \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\nu \Delta^2 \psi \quad \dots (18)$$

“線型”

基本解 $\psi = \text{Re} [\psi_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)}] \sin z$
 $\nu = 0$ のとき

$$\omega = - \frac{\beta k_x}{|k|^2} \quad \dots (19)$$

$$k = (k_x, k_y)$$

ロスビー波の分散関係式

ω は実数なので、各基本解の振幅は時間には変化する。

$\pm(k)$ と時間 ν の影響

- key parameter \in : Rhines, 1975

$$E = \nu \langle k \rangle^2 \nu / \beta \quad \dots (10)$$

ν : 流速の root-mean-square

$\langle k \rangle$: IRIS キーノズルフィルの幅 $2L$
 $M \ll \text{平均波長}$

AD

$\epsilon \sim$ (非線型項) / (β 項)

$\epsilon \gg 1 \rightarrow$ 乱流 (逆カスケード)

$\epsilon \ll 1 \rightarrow$ 白噪音波 (= 雑音)

- 非線形性の出現

$\epsilon < 1$ 弱い非線型領域

$$\omega = \frac{-\beta}{k_x(1 + k_y^2/k_x^2)} \dots (11)$$

$k_y/k_x \ll 1$ なる逆カスケード

• 数値実験 (Rhines, 1975)

= シミュレーション

◦ 初期値: $\epsilon \gg 1$

◦ 逆カスケード

◦ $k > 1 \rightarrow$ 小

◦ $\epsilon \rightarrow$ 小

◦ $\epsilon \ll 1$ 白噪音波

- バック- β 保存性

- 結果

- $\psi(k, t)$, $\omega(k, t)$ の $x-t$ 断面
"Rossby 散射のシミュレーション" - β 依存性
- $\psi(k, t)$, $\omega(k, t)$ の $x-y$ プロット
"算術的カスケード" - β 依存性
- $E(k, t)$
バネ則とその時間変化。
カスケード率 - β 依存性。
- カスケード率
時間変化
 ϵ 依存性

・文献

- Rhines, 1975: JFM, 69, 417-448
- Rhines, 1979: Ann. Rev. Fluid Mech. 11, 407-44
- Williams, 1978: JAS, 35, 1399-142
- 林, 1987: 乱流1-1

球面

• 泊度方程式

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} \nabla^2 \psi + \frac{1}{a^2} J(\psi, \nabla^2 \psi) + \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\nu \nabla^2 \nabla^2 \psi \quad \dots (12)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} \right] \quad \dots (13)$$

$$J(\psi, \psi) = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \quad \dots (14)$$

λ : 經度

μ : 廿仁緯度

t : 時刻

$\mu = \sin \phi$, ϕ : 緯度

$$\psi: \text{流線函數} \quad u = -\frac{(1-\mu^2)^{1/2}}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} = -\frac{121}{a^2 \lambda}$$

$$v = \frac{1}{a(1-\mu^2)^{1/2}} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{121}{a^2 \lambda}$$

a : 惑星半径

Ω : 惑星自轉角速度

ν : 粘性係數

• 積分量

$$\text{- エネルギー: } E = \frac{a^2}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} (\nabla \psi)^2 d\lambda d\mu$$

$$\text{- エンタルピー: } Q = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\nabla^2 \psi)^2 d\lambda d\mu$$

$$\text{- 1101 エンタルピー: } P = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\nabla \psi)^2 d\lambda d\mu$$

• 保存則

- エネルギー -

$$\frac{dE}{dt} = \iint (\nabla \phi)^2 dA dx$$