

数值予報モデルのための気象力学  
Dynamic Meteorology for  
Numerical Prediction Model

森川 靖大

Morikawa Yasuhiro

北海道大学大学院理学研究科 地球惑星科学専攻  
地球流体力学研究室

Division of Earth and Planetary Sciences,  
Graduate School of Science, Hokkaido University.  
Geophysical Fluid Dynamics Laboratory.

2006/01/27

## 要旨

ここに要旨を記述します。以下は単なる例です。

数値予報モデル, 特に大気大循環モデルの理解およびその作成には, 大気力学の理解が不可欠である。本論文では, “Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1979: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology. *John Wiley & Sons*, 477pp” をもとに, 数値予報/GCM のために必要となる気象力学の基礎を紹介する。

## 目次

1	はじめに	1
2	支配方程式系	2
2-1	渦度, 発散の式 . . . . .	2
3	まとめ	3
	謝辞	4
A	渦度方程式の各項の意味	5
A-1	発散項 (divergence term) . . . . .	5
A-2	立ち上り項 (tilting term) . . . . .	6
A-3	ソレノイド項 (solenoidal term) . . . . .	7
B	数学公式	8
B-1	ベクトル演算子 . . . . .	8
B-2	積分公式 . . . . .	9
B-3	一般的直交座標系での関係式 . . . . .	10
	参考文献	11

## 目 次

A-1	発散と収束による渦度の発生 (絶対渦度を正と仮定)	5
A-2	$v$ の $z$ 方向変化によって $x$ 方向に平行な渦管が生じ, それにさらに $w$ の $x$ 方向の変化によって立ち上がって鉛直方向の渦度成分を作る.	6

## 1 はじめに

ここでは、卒業論文や修士論文などで用いることを想定した $\text{\LaTeX}$ ファイルのサンプルを提供する。スタイルファイルとして $\text{\LaTeX}$ スタイル<sup>†1</sup>を利用している。

1 節はこの文章であり、2 節はサンプルとしての文章である。いくつか用例となるものも載っているので参照していただきたい。 $\text{\LaTeX}$ スタイルのコマンドに関する詳細は脚注<sup>†1</sup>を参照のこと。

---

<sup>†1</sup> <http://www.gfd-dennou.org/arch/cc-env/TeXmacro/dennou/SIGEN.htm>

## 2 支配方程式系

以下に、大規模大気での支配方程式系を示す。

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \mathbf{f} \times \mathbf{V} + \mathbf{F} \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \quad (3)$$

$$Q = c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} \quad (4)$$

### 2-1 渦度, 発散の式

まとめ

(1) を変形することで、渦度の式と発散の式を導出することができる。

これらの式は、大気大循環を記述するのに便利である。

以下が渦度の式である<sup>†2</sup>。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \eta + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\eta \nabla \cdot \mathbf{V} - \mathbf{k} \cdot \nabla w \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + \mathbf{k} \cdot \nabla p \times \nabla \alpha + \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F}. \quad (5)$$

なお、 $\zeta = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{V}$  である。また、発散の式は以下の式である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla D + w \frac{\partial D}{\partial z} + \nabla w \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + D^2 - 2J(u, v) + (\mathbf{k} \times \mathbf{V}) \cdot \nabla f \\ - f\zeta = -\nabla \cdot (\alpha \nabla p) + \nabla \cdot \mathbf{F} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $J(u, v) = (\partial u / \partial x)(\partial u / \partial y) - (\partial u / \partial y)(\partial v / \partial x)$  であり、 $D = \nabla \cdot \mathbf{V}$  である。

<sup>†2</sup>この式の各項の意味については付録 A を参照のこと。

### 3 まとめ

まとめましょう.

## 謝辞

感謝の言葉を述べましょう.



## A 渦度方程式の各項の意味

以下の渦度方程式 (2 節の (5) 式) の各項の意味について考える.

$$\frac{d(\zeta + f)}{dt} = -(\zeta + f)\nabla \cdot \mathbf{V} - \mathbf{k} \cdot \nabla w \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + \mathbf{k} \cdot \nabla p \times \nabla \alpha + \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F}. \quad (\text{A-1})$$

### A-1 発散項 (divergence term)

(A-1) の右辺第 1 項  $-(\zeta + f)\nabla \cdot \mathbf{V}$  は発散項 (*divergence term*) と呼ばれる. これは回転している質点が角運動量を保存しながら, その回転半径を変化させると角速度が変化することに似ている. 発散が正であることは, 質点の回転半径が増大することに相当する. ふつう天気図で見られるような大規模な運動では絶対渦度 ( $\zeta + f$ ) は正であるから, 発散は絶対渦度を減少させ, 収束は絶対渦度を増加させる (図 A-1 参照).

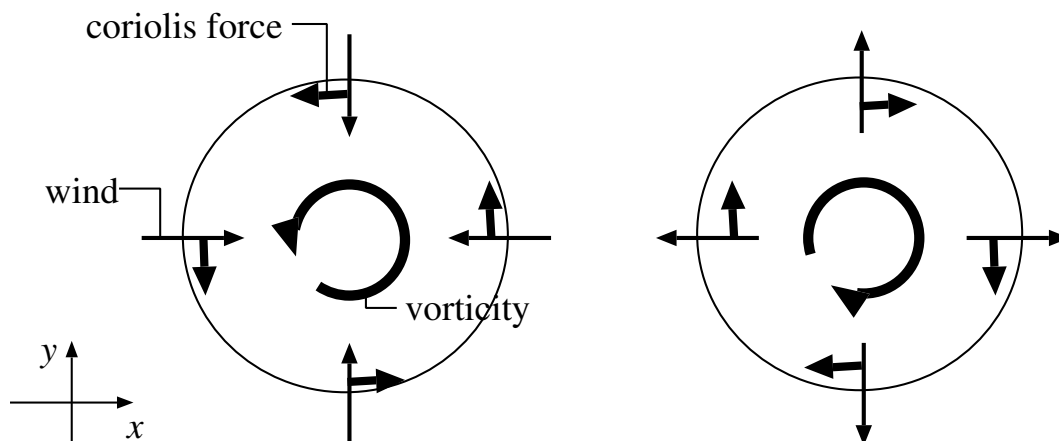


図 A-1: 発散と収束による渦度の発生 (絶対渦度を正と仮定)

### A-2 立ち上り項 (tilting term)

(A-1) の右辺第 2 項  $-k \cdot \nabla w \times \partial V / \partial z$  は立ち上り項 (*tilting term* or *twisting term*) と呼ばれる<sup>†1</sup>. 鉛直速度が平面内で一様でないため、始め水平方向に向いていた渦の軸が鉛直方向に立ち上がり、渦度の鉛直成分が変化する効果を示す<sup>†2</sup>.  $-k \cdot \nabla w \times \partial V / \partial z$  をスカラー表記すると  $-\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z}$  となる. まず、 $-\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z}$  の項を考える. ここでは  $v$  が上にいくにつれて減少し、 $w$  が  $x$  方向に増加している場合を考える. この場合、 $-\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z}$  は正となり、絶対渦度 ( $\zeta + f$ ) は増加する. これを図 A-2 で考えてみる.  $\partial v / \partial z$  が負であることから図にあるような  $x$  方向に伸び

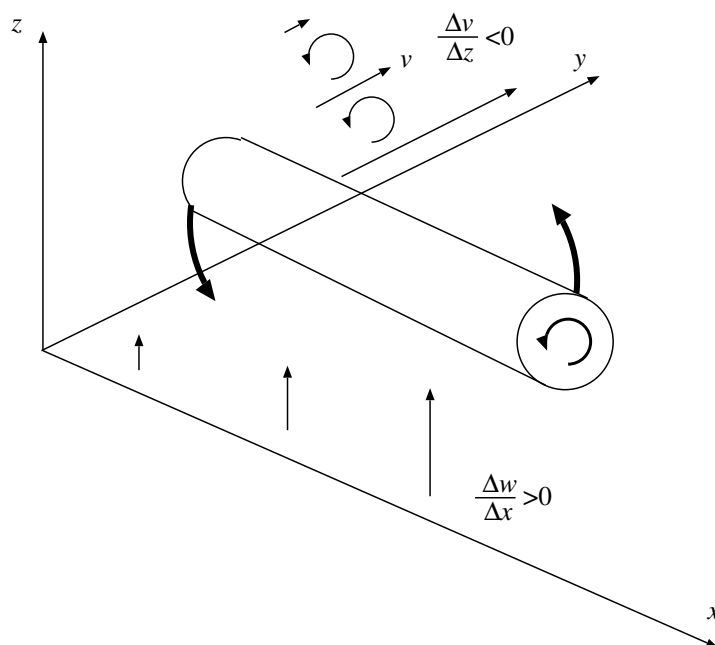


図 A-2:  $v$  の  $z$  方向変化によって  $x$  方向に平行な渦管が生じ、それがさらに  $w$  の  $x$  方向の変化によって立ち上がって鉛直方向の渦度成分を作る.

る渦の管ができる. さらに  $\partial w / \partial x$  が正であることからこの渦管が図の太矢印の方向に回転し、立ち上がる. 渦の回転方向から考えて、この結果渦度が増加することがわかるだろう.  $(\partial w / \partial y)(\partial u / \partial z)$  の項についても同様に考えることができる. ちなみにこの項はメソ気象の竜巻の発生を議論する時に重要な役割りを果たす...らしい.

<sup>†1</sup>傾斜項とも呼ばれる.

<sup>†2</sup>式からも自明なことだが鉛直速度が一様な場合は渦が立ち上がることも無いため、この項は消滅する.

### A-3 ソレノイド項 (solenoidal term)

(A-1) の右辺第 3 項  $\mathbf{k} \cdot \nabla p \times \nabla \alpha$  はソレノイド項 (*solenoidal term*) と呼ばれる。これは図??で考えると簡単である。(a) では等  $p$  面と等  $\alpha$  面が交差している。圧力勾配によって流れが生じる訳だが、この際に (a) のような密度構造になっていると、密度の差によって流れに差ができ、その結果として渦が生じる。これがソレノイド項の効果である。これに対して (b) では等  $p$  面と等  $\alpha$  面が平行になっている。この場合には流れに差はできず、渦は生じない。

ちなみに、鉛直座標に  $p$  をとった場合、当然のように  $\nabla_p p = 0$  となり、ソレノイド項は消滅する。これは本節の最後でも述べられていることである。

## B 数学公式

以下は, “Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1979: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology. *John Wiley & Sons*, 477pp” の巻末にある数学公式である.

### B-1 ベクトル演算子

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (\text{B-1})$$

$$\nabla \times \nabla a = 0, \quad \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (\text{B-2})$$

$$\nabla \cdot (a\mathbf{A}) = a\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla a \quad (\text{B-3})$$

$$\nabla \times (a\mathbf{A}) = a\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla a \quad (\text{B-4})$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} \\ + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (\text{B-5})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \quad (\text{B-6})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \quad (\text{B-7})$$

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = \nabla(\mathbf{V}^2/2) + (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V}, \quad (\text{3次元}) \quad (\text{B-8})$$

$$(\mathbf{V}_H \cdot \nabla)\mathbf{V}_H = \nabla(\mathbf{V}_H^2/2) + \zeta \mathbf{k} \times \mathbf{V}_H; \\ \zeta = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{V}_H, \quad (\text{2次元}) \quad (\text{B-9})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (\text{B-10})$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\chi + \mathbf{V}_\psi; \quad (\text{B-11})$$

$$\nabla \times \mathbf{V}_\chi, \quad \nabla \cdot \mathbf{V}_\psi = 0$$

$$\mathbf{V}_\chi = \nabla \chi, \quad \mathbf{V}_\psi = -\nabla \times \Psi$$

$$\nabla^2 \chi = \nabla \cdot \mathbf{V}_\chi = \nabla \cdot \mathbf{V}, \quad \nabla^2 \Psi = \nabla \times \mathbf{V}_\psi = \nabla \times \mathbf{V}.$$

## B-2 積分公式

### 定義

- $dv$  : 体積要素
- $V$  : 体積
- $d\sigma$  : 表面要素
- $\Sigma$  :  $V$  を囲む曲面
- $S$  : 平面の表面
- $C$  :  $S$  を囲む曲線
- $ds$  :  $C$  に沿った距離の要素
- $\mathbf{n}$  :  $\Sigma$  や  $C$  から垂直外向き  
への単位ベクトル
- $\mathbf{t}$  :  $C$  や  $S$  の単位接線ベクトル

### ガウスの発散定理

3次元

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv = \int_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (\text{B-12})$$

2次元

$$\int_S \nabla \cdot \mathbf{A} \, d\sigma = \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (\text{B-13})$$

### ストークスの定理

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A} \, dv = \int_{\Sigma} \mathbf{n} \times \mathbf{A} \, d\sigma \quad (\text{B-14})$$

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{A} \, d\sigma = \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, ds \quad (\text{B-15})$$

$$\int_V \nabla a \, dv = \int_{\Sigma} a \mathbf{n} \, d\sigma \quad (\text{B-16})$$

### B-3 一般的直交座標系での関係式

$s_1, s_2, s_3$  をスカラーの曲線距離,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  を座標系におけるそれぞれの方向の単位ベクトル,  $x_1, x_2, x_3$  と規格化因子 (スケール因子)  $h_j$  が  $ds_j = h_j dx_j$  という関係を持つとする.

$$\text{grad } A = \nabla A = \frac{\mathbf{a}_1}{h_1} \frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{\mathbf{a}_2}{h_2} \frac{\partial A}{\partial x_2} + \frac{\mathbf{a}_3}{h_3} \frac{\partial A}{\partial x_3} \quad (\text{B-17})$$

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 F_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 F_3) \right] \end{aligned} \quad (\text{B-18})$$

$$\nabla^2 A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial A}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial A}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial A}{\partial x_3} \right) \right] \quad (\text{B-19})$$

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{F} &= \frac{\mathbf{a}_1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 F_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} (h_2 F_2) \right] + \frac{\mathbf{a}_2}{h_3 h_1} \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 F_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} (h_3 F_3) \right] \\ &\quad + \frac{\mathbf{a}_3}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 F_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 F_1) \right] \end{aligned} \quad (\text{B-20})$$

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{dx_1}{dt} \frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dt} \frac{\partial A}{\partial x_2} + \frac{dx_3}{dt} \frac{\partial A}{\partial x_3} \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{v_1}{h_1} \frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{v_2}{h_2} \frac{\partial A}{\partial x_2} + \frac{v_3}{h_3} \frac{\partial A}{\partial x_3} = \frac{\partial A}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) A; \\ v_1 &= ds_1/dt = h_1 dx_1/dt, \text{ など}, \quad \mathbf{V} = v_1 \mathbf{a}_1 + v_2 \mathbf{a}_2 + v_3 \mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (\text{B-21})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{F}}{dt} &= \frac{dF_1}{dt} \mathbf{a}_1 + \frac{dF_2}{dt} \mathbf{a}_2 + \frac{dF_3}{dt} \mathbf{a}_3 + F_1 \frac{d\mathbf{a}_1}{dt} + F_2 \frac{d\mathbf{a}_2}{dt} + F_3 \frac{d\mathbf{a}_3}{dt} \\ &= \sum_{j=1}^3 \left[ \left( \frac{\partial F_j}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla F_j \right) \mathbf{a}_j + F_j \sum_{i=1}^3 \left( \frac{v_i}{h_i} \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B-22})$$

(例えば  $\mathbf{F} = \mathbf{V}$  である場合)

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \sum_{j=1}^3 \left[ \left( \frac{\partial v_j}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla v_j \right) + \sum_{i=1, i \neq j}^3 \left( \frac{v_j}{h_j} \frac{v_i}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial x_i} - \frac{v_i}{h_i} \frac{v_j}{h_j} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right) \right] \mathbf{a}_j \quad (\text{B-23})$$

例:

デカルト座標系:  $x, y, z; h_1 = h_2 = h_3 = 1; \mathbf{a}_1 = \mathbf{i}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{j}, \mathbf{a}_3 = \mathbf{k}$ .

球面座標系: 経度  $\lambda$ , 緯度  $\varphi$ , 動径距離  $r$ ; 規格化因子:  $h_\lambda = r \cos \varphi, h_\varphi = r, h_r = 1$ .

円筒座標系:  $\lambda, r, z; h_\lambda = r, h_r = h_z = 1$ .

## 参考文献

- 有馬 朗人 他, 1991: 物理のための数学入門 複素関数論. 共立出版, 220pp.
- 江沢 洋 他, 1995: 岩波講座 応用講座 14 [方法 5]. 岩波書店, 132pp.
- 小倉義光, 1984: 一般気象学. 東京大学出版会, 308pp.
- 岸保勘三郎 他, 1982: 大気科学講座 4 大気の大循環. 東京大学出版会, 256pp.
- 倉本圭, 1999: 北大理学部地球科学科 1999 年度前期講義 物理数学 I 演習, 第 4 回講義 (1999/05/10) ベクトル解析 1 (12. 回転の意味).  
<http://www.ep.sci.hokudai.ac.jp/pmath1ex/1999/0510/pub/No04.pdf>
- 後藤 憲一 他, 1979: 詳細 物理応用 数学演習. 共立出版, .
- 田中浩 他, 1975: 内部重力波の理論. 気象研究ノート, 126 1-46.
- 日本気象学会, 1998: 気象科学事典. 東京書籍, 637pp.
- 林祥介, 1990: GFD ノート /基礎/波動/線形波動の基礎.
- ランダウ = リフシッツ 著, 竹内 均 訳, 1970: 流体力学 1. 東京図書株式会社, 280pp.
- Charney, J. G., 1962: Integration of the primitive and balance equations. *Proc. Intern. Symp. Numerical Weather Prediction*, Tokyo.
- Charney, J. G., and Stern, M., 1962: On the stability of internal baroclinic jets in rotating atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **19**, 159-172.
- Drazin, P. G., and Reid, W. H. 1981: *Hydrodynamic Stability*, 4 Kelvin-Helmholtz instability. *Cambridge University Press*, 527pp.
- Green, J. S. A., 1960: A problem in baroclinic stability. *Quart J. Roy. Meteor. Soc.*, **86**, 237-251.
- Haltiner, G. J., and Martin, F. L., 1957: *Dynamical and Physical Meteorology*. *McGraw-Hill Book Co*, 470pp.
- Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1979: *Numerical Prediction and Dynamic Meteorology*. *John Wiley & Sons*, 477pp.
- Holton, J. R., 1975: *The Dynamic Meteorology of the Stratosphere and Mesosphere*. *American Meteorological Society*, 218pp.

- Hough, S. S., 1898: On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of tides, 2, On the general integracion of Laplace's dynamical equations. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A**, **191**, 139-185.
- Kasahara, A., 1974: Various vertical coordinate systems used for numerical weather prediction *Mon. Wea. Rev.*, **102** 504-522.
- Lorenz, E. N., 1955: Available potential energy and the maintenance of the general circulation. *Tellus*, **7** 157-167.
- Oort, A. H., 1964: On estimates of the atmospheric energy cycle. *Mon. Wea. Rev.*, **92**, 483-493.
- Pedlosky, J., 1964a: The stability of currents in the atmosphere and the ocean, Part I. *J. Atmos. Sci.*, **21**, 201-219.
- Pedlosky, J., 1964b: An initial value problem in the theory of baroclinic instability. *Tellus*, **16**, 12-17.
- Pedlosky, j., 1987: Geophysical Fluid Dynamics -Second Edition-. *Springer-Verlag New York*, 710pp.
- Peixoto, J. P. and A. H. Oort, 1992: Physics of Climate. *Springer-Verlag*, 520pp.
- Rayleigh, Lord, 1880: On the stability or instability, of certain fluid motions. *Scientific Papers, Vol. 3, Cambridge University Press*, 594-596.
- Richardson, L. F., 1922: Weather Prediction by Numerical Precess. *Cambridge University Press, reprinted Dover, 1965*, 236pp.
- Rossby, C. G., 1938: On the mutual adjustment of pressure and velocity distribution in certain simple current systems, II. *J. Marine Res.*, (Sears Foundation), 239-263.
- Rossby, C. G., 1939: Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action. *J. Marine Res.*, **2**, 38-55.
- von Neumann, J., and Richtmyer, R. D., 1950: A method for the numerical calculation of hydrodynamical shocks. *J. Atmos. Sci.*, **21** 232.