

二次元定常ロスビー波の伝播  
Propagation of two dimensional steady rossby wave

高橋 こう子

TAKAHASHI Koko

北海道大学理学部地球科学科 地球物理  
地球流体力学研究室

2002 年 01 月 31 日

# 目次

<b>1</b>	<b>はじめに</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>平面上の2次元定常ロスビー波</b>	<b>5</b>
2.1	非発散順圧方程式 . . . . .	5
2.2	分散関係式, 群速度 . . . . .	7
2.3	群速度とエネルギー伝播 . . . . .	9
2.4	位相速度 . . . . .	10
2.5	定常波の解析解 . . . . .	10
2.6	定常波の数値解 . . . . .	12
<b>3</b>	<b>まとめ</b>	<b>26</b>
<b>4</b>	<b>謝辞</b>	<b>27</b>
<b>A</b>	<b>基礎方程式の導出</b>	<b>28</b>
A.1	質量保存則 . . . . .	28
A.2	運動方程式 . . . . .	29

## 概要

本論文は 2 次元定常ロスビー波の伝播パターンを理解するために、2 次元定常ロスビー波の線形論 (林, 1987) のレビューを行ったものである。

ロスビー波を記述するために  $\beta$  平面上の 2 次元非発散系における渦度方程式求めた。この場合の分散関係式と群速度、位相速度を求めた。波源として  $\delta$  関数型の地形を考え、ロスビー波がどのような伝播をするかを解析的、数値的に調べた。その結果、定常ロスビー波は波源から円形領域内で東側のみに伝播し、時間の経過とともに広がっていくことを理解した。その円形領域の半径は平均風の大きさと経過時間との積として与えられることがわかった。

## 1 はじめに

地球大気にはロスビー波という大規模波動が存在する．Rossby は 1937 年に偏西風の蛇行を発見し，1939 年にその性質を論文で発表した．アメリカでは 1935 年から測風気球による高度 3,000 m における月平均気圧図，月平均風向・風速分布図 (図 1) が作成されるようになった．当時，アメリカ大陸上には図 1 に見られるような波動が指摘されていた．Rossby は，Namias の協力を得て，船舶から得られた東太平洋，西大西洋上の気温，気圧分布から高層のデータを算出した．算出したデータと図 1 のような高層天気図とから，Rossby は偏西風が東西方向に蛇行していることを発見し，その蛇行を比較的波長の長い波と指摘した．この波を発見者 Rossby にちなんでロスビー波とよぶ．

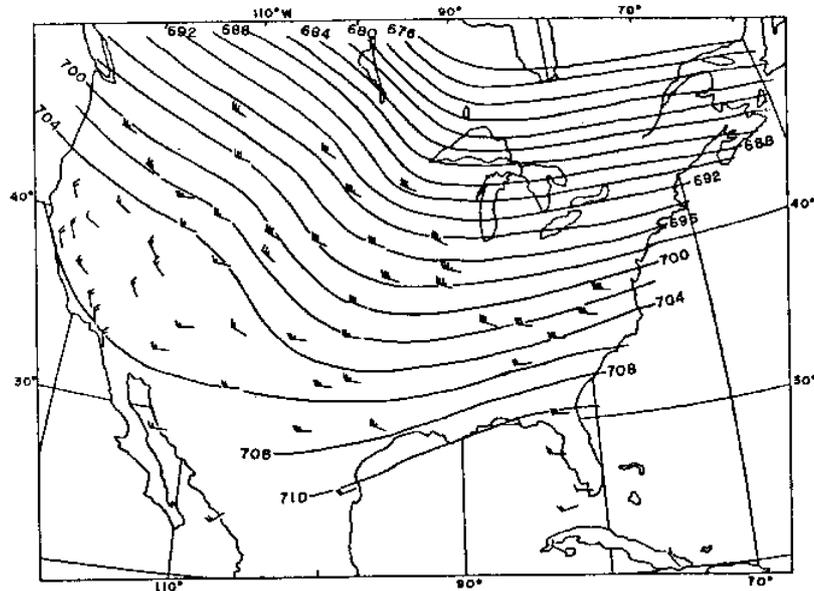


図 1: アメリカ大陸上の 1939 年 1 月の高度 3,000 m における月平均気圧図 (単位 mb) と月平均風向、風速分布図 (岸保，佐藤，1986)

ロスビー波は気象学上重要であるといわれる．なぜならばロスビー波は長期予報，気候予測する上で必要だからである．ロスビー波の伝播パターンはテレコネクションのパターンと似ているので，長期予報に役立てることができると考えられる．テレコネクションとは天気図解析における考え方のひとつで，ある地点と離れた地点とで気象要素 (気圧，気温など) 相関を表したものである．これら 2 地点間で高い相関を示すときテレコネクションがあるという．Wallace と Gutzler (1981) はテレコネクションのパターンをまとめ，Hoskins と Karoly (1981) はテレコネクションのパターンと定常ロスビー波のエネルギー伝播パターンが非常によく似ていることを指摘した．

テレコネクションについての例を日本付近に関するものを見ることができる．朝倉 (1966) が解析

した，冬の日本付近の寒波に関するもの(図2)である．図2は冬期間中の日本全国で低温が15日以上続いた例を5例集め，その半旬500 mb面の高度偏差の合成したものである．図2の(a), (b), (c)はそれぞれ低温になる15日前，5日前，当日の合成図である．(a)から(b)の過程ではグリーンランドの気圧の峰の発達によってヨーロッパの気圧の谷が発達している．(b)から(c)の過程ではヨーロッパの気圧の谷の発達に伴い，東経90度の気圧の峰が発達し，日本付近の気圧の谷が発達している．このように考えると，日本の寒波はヨーロッパからのロスビー波のエネルギー伝播によるものと理解できる(岸保，佐藤，1986)．また，図2は気圧変動の時間スケールが10日位で，グリーンランドと日本近傍における一種のテレコネクションを表している(岸保，佐藤，1986)．

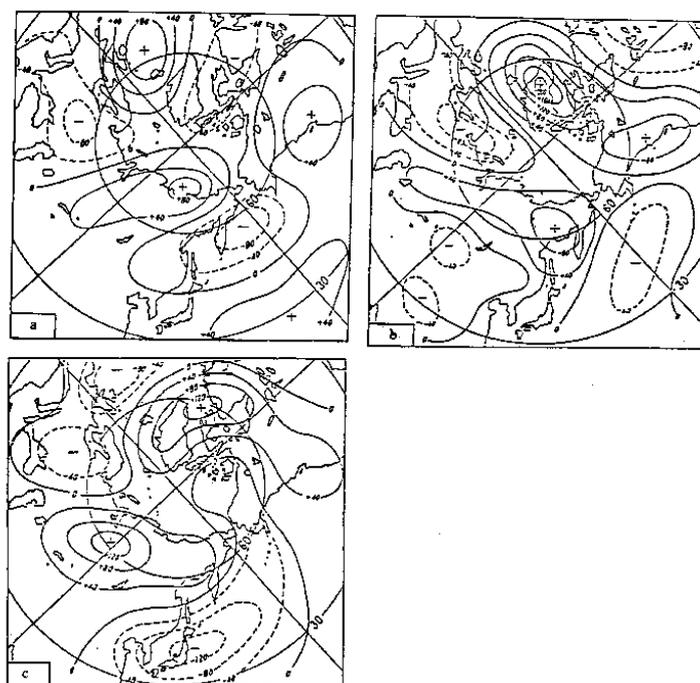


図2: テレコネクションの例．(a) 初期の半旬500 mb高度偏差図．(b) 10日後の半旬500 mb高度偏差図．(c) 15日後の半旬500 mb高度偏差図．(朝倉，1966)

ロスビー波の伝播パターンに関する研究はGrose and Hoskins (1979) や林 (1987) などによって行われている．ロスビー波の伝播は運動のスケールによって球面上あるいは平面上で考えることができる．全球スケールの運動を考える場合，球座標系を用いて球面上で考える必要がある．Grose and Hoskins (1979) は球面上の場合のロスビー波の伝播パターンを数値計算している(図3)．ロスビー波の特徴を調べるのに球面上で考えるには難しいので，局所直交直線座標系を用いて平面上で考える．平面上の場合は林 (1987) が計算している<sup>1</sup>(図4)．

<sup>1</sup>球面上についても計算している．

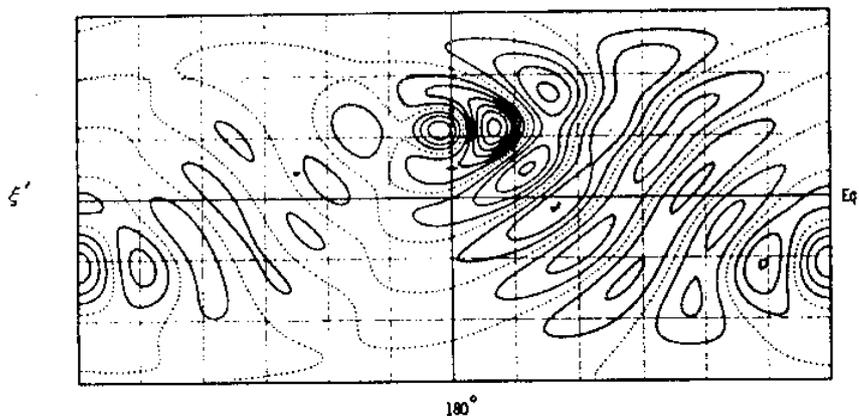


図 3: 球面上のロスビー波の数値解．地形は (30°N, 180°) に置かれており，その底面での直径は約 5,000 km (Grose and Hoskins, 1979) .

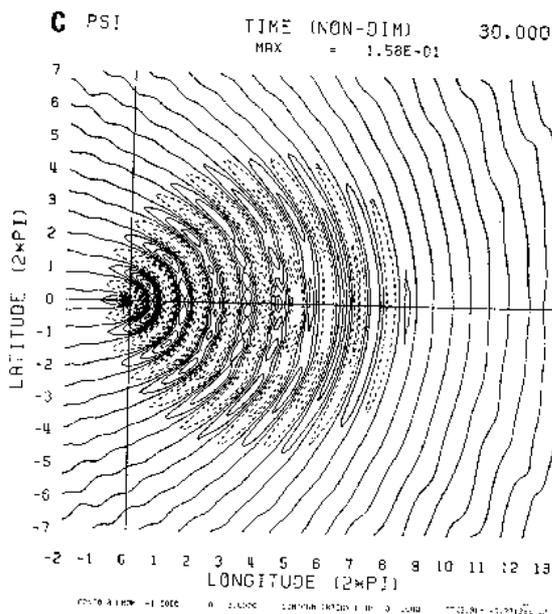


図 4:  $\beta$  平面上のロスビー波の数値解．地形は微小な円形地形  $\eta = e^{-\frac{x^2+y^2}{r_0^2}}$  ( $r_0 = 0.05\lambda_s$ ) で， $x = 0, y = 0$  に置かれている．横軸 (東西方向)，縦軸 (南北方向) の座標は定常波長  $\lambda_s$  でスケールされている (林, 1987) .

ここでは，林 (1987) の論文のレビューを行うことによって，定常ロスビー波がどのように伝播するかを調べる．平面の場合は球面に比べ計算が簡単なので，平面上の 2 次元定常ロスビー波について考える．

## 2 平面上の2次元定常ロスビー波

林 (1987) に従って, 2次元非発散大気中での渦運動を考える. 基本場として平均風  $\bar{u}(y)$  が  $\beta$  平面 ( $x$  は東向き,  $y$  は北向き) 上に存在するとする.

### 2.1 非発散順圧方程式

解くべき方程式は次のように表される (林, 1987). 線形, 密度一定, 摩擦なし, 剛体の上下境界, 浅水近似のもとでは, 運動方程式と質量保存則は,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} - \left( f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v}{\partial x} + f \bar{u} + f u = - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (2)$$

$$H_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \bar{u} \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

である. ここで  $u, v$  はそれぞれ  $x, y$  方向の速度,  $f (= f_0 + \beta y)$  はコリオリパラメータ,  $h$  は地形,  $H_0$  は大気の平均の厚さ,  $\psi$  はジオポテンシャルである.

運動方程式 (1), (2) と質量保存則 (3) から渦度方程式を求める. 式 (1), (2) の回転 ( $\nabla \times$ ) をとると,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \left( f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) v = 0, \quad (4)$$

となる. ただし,  $\zeta$  は渦度で

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (5)$$

である. 式 (4) と質量保存則 (3) とから渦度方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \left( \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) v = \left( f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{\bar{u}}{H_0} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (6)$$

が得られる.

取扱の便利のため, 渦度方程式を無次元化する. 速度のスケールとして一般流  $\bar{u}$  の大きさを代表するある値  $\bar{u}_0$  をとる. 時間のスケール, 空間のスケールをそれぞれ

$$T = \sqrt{\frac{1}{\beta \bar{u}_0}}, \quad (7)$$

$$L = \sqrt{\frac{\bar{u}_0}{\beta}}, \quad (8)$$

とすると，無次元化された渦度方程式は

$$\frac{\partial \zeta_*}{\partial t_*} + \bar{u}_* \frac{\partial \zeta_*}{\partial x_*} + \left(1 - \frac{\partial^2 \bar{u}_*}{\partial y_*^2}\right) v_* = \left(f_* - \frac{\partial \bar{u}_*}{\partial y_*}\right) \frac{\bar{u}_*}{H_{0*}} \frac{\partial h_*}{\partial x_*}, \quad (9)$$

となる．ただし添字 \* がついている量は無次元量を表す．以下簡単のため \* は省略する．

非発散系  $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0\right)$  を考えているので流線関数  $\psi$  を導入することができる． $u, v$  と  $\psi$  との関係は

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (10)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (11)$$

なので，渦度  $\zeta$  は

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \\ &= \nabla^2 \psi, \end{aligned} \quad (12)$$

と表される．したがって，渦度方程式 (9) を流線関数  $\psi$  で表すと，

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \left(1 - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = \left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) \frac{\bar{u}}{H_0} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (13)$$

となる．

ここで，上式 (13) の右辺の

$$\frac{f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}{H_0}, \quad (14)$$

は基本場におけるポテンシャル渦度である．渦度方程式 (13) の右辺は外力で，(14) は外力の大きさを決めるものである．ここでは簡単のため，地形の高さを規格化して (14) を

$$\frac{f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}{H_0} = 1 \quad (15)$$

とする．よって，解くべき渦度方程式は，

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \left(1 - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\bar{u} \frac{\partial \delta}{\partial x}, \quad (16)$$

となる．

## 2.2 分散関係式，群速度

WKBJ 近似 (波線理論) より分散関係式と群速度を求める．これらは後で定常波を理解する上での基礎となる．

渦度方程式 (16) の解  $\psi$  の形として実関数の位相関数  $\theta(x, y, t)$  が定義できるものについてだけ考える．このような解全てが波らしい解として意味があるわけではない．波らしい解を考えるために，振幅，波数，振動数の空間時間変化が位相の空間時間変化よりゆっくりなときについて考える．

このとき微小パラメータ  $\varepsilon$  で  $\psi$  を展開する．

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \psi_n e^{i\theta}. \quad (17)$$

ただし，

$$0 < \varepsilon \ll 1 \quad (18)$$

である．

ここで，振幅，波数，振動数のゆっくりさを表すために，新しい空間時間座標  $X, Y, T$  を導入する． $X, Y, T$  と  $x, y, t$  の関係は

$$(X, Y, T) = \varepsilon(x, y, t), \quad (19)$$

であるとする． $\psi_n, \theta$  は，それぞれ，

$$\psi_n = \psi_n(X, Y, T), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \theta &= \theta(X, Y, T), \\ &\equiv \frac{\Theta(X, Y, T)}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (21)$$

と表される．このとき，位相  $\Theta$  の変化のオーダーは 1 であり，振幅，波数，振動数の変化のオーダーは  $\varepsilon$  なので，振幅，波数，振動数の変化が位相の変化に比べてゆっくりであるという条件を満たす．展開式 (17) を新しい空間・時間座標  $X, Y, T$  で表すと，

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \psi_n(X, Y, T) e^{i \frac{\Theta(X, Y, T)}{\varepsilon}}, \quad (22)$$

となる．

ここで，局所的波数ベクトル  $\mathbf{K}$ ，局所的振動数  $\omega$  を以下のように定義する． $k, l$  はそれぞれ  $x, y$  方向の波数である．

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= (k, l), \\ &\equiv \left( \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y} \right), \\ &= \left( \frac{\partial \Theta}{\partial X}, \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right),\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}\omega &= -\frac{\partial \theta}{\partial t}, \\ &\equiv -\frac{\partial \Theta}{\partial T}.\end{aligned}\tag{24}$$

分散関係式を求める．外力がない場合を考える．渦度方程式は，式 (16) より，

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \left( 1 - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,\tag{25}$$

である．上式 (25) を新しい空間・時間座標  $X, Y, T$  で表すと，

$$\begin{aligned}\varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \psi + \bar{u} \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \psi, \\ + \left( 1 - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y^2} \right) \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial X} = 0,\end{aligned}\tag{26}$$

となる．式 (22) を式 (26) に代入して整理し， $O(\varepsilon^0)$  の項を考えると，

$$\begin{aligned}\left[ -\frac{\partial \Theta}{\partial T} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial X} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial X} + \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right) \right. \\ \left. - \bar{u} \frac{\partial \Theta}{\partial X} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial X} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial X} + \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right] \psi_0 = 0,\end{aligned}\tag{27}$$

となる．したがって，上式 (27) に波数 (23)，振動数 (24) を代入して整理すると，分散関係式

$$\omega = \bar{u}k - \frac{k}{k^2 + l^2},\tag{28}$$

が得られる．

群速度  $C_g$  は式 (28) を波数で微分して得られる． $C_{g_x}, C_{g_y}$  はそれぞれ  $X, Y$  方向の群速度とすると，

$$C_{g_x} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k},$$

$$= \bar{u} + \frac{k^2 - l^2}{(k^2 + l^2)^2}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} C_{gY} &\equiv \frac{\partial \omega}{\partial l}, \\ &= \frac{2kl}{(k^2 + l^2)^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

である .

### 2.3 群速度とエネルギー伝播

波のエネルギーが群速度で伝播することを示す .

外力がないときを考える . 式 (22) を式 (26) に代入して整理したものの  $O(\varepsilon^1)$  の項を導出する . まず , 式 (26) の両辺に  $\nabla^2 \psi^*$  を掛ける . ここで  $\psi^*$  は  $\psi$  の複素共役とする .

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \psi^* \left( \frac{\partial}{\partial T} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial X} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \psi \\ + \left( 1 - \varepsilon^3 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y^2} \right) \varepsilon \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial X} = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

上式 (31) とその複素共役とを足すと ,

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 \left( \frac{\partial}{\partial T} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial X} \right) \left[ \left| \left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) \psi \right|^2 \right] \\ + \left( 1 - \varepsilon^3 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y^2} \right) \varepsilon \frac{\partial}{\partial X} \left[ \left| \frac{\partial \psi}{\partial X} \right|^2 - \left| \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right|^2 \right] \\ + \left( 1 - \varepsilon^3 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Y^2} \right) \varepsilon \frac{\partial}{\partial Y} \left[ 2 \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial Y} \frac{\partial \psi}{\partial X} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

となる . 上式 (32) の左辺第 1 項を考える . [] 内は絶対値をとっており , 位相関数の  $e^{i\frac{\omega}{\varepsilon}}$  の部分が消える . 絶対値内の項に [] の外のオペレータを作用させても  $\varepsilon$  のオーダーは変わらない . したがって ,  $O(\varepsilon^1)$  の項については , [] 内の  $O(\varepsilon^1)$  の項について考えればよい . 上式 (32) の第 2, 3 項についても同様である . よって , 式 (22) , 波数 (23) と振動数 (24) を代入して整理すると ,  $O(\varepsilon^1)$  の項は ,

$$\left( \frac{\partial}{\partial T} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial X} \right) \left[ (k^2 + l^2)^2 \psi_0^2 \right] + \frac{\partial}{\partial X} \left[ (k^2 - l^2) \psi_0^2 \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[ 2kl \psi_0^2 \right] = 0, \quad (33)$$

である .

式 (29), (30) より , 上式 (33) を群速度  $C_g$  を用いると , 擬運動量保存則

$$\frac{\partial A}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} (C_{gX} A) + \frac{\partial}{\partial Y} (C_{gY} A) = 0, \quad (34)$$

が得られる．ただし，

$$A \equiv \frac{1}{2}(k^2 + l^2)^2 \psi_0^2, \quad (35)$$

である．

式 (34) は， $A$  という量が保存され，そのフラックスが  $C_g A$  であることを示している．つまり，波の活動度が群速度で運ばれることを表している．

## 2.4 位相速度

ここでは位相速度を求め，ロスビー波が進む方向を示す．東西方向の位相速度は， $c_X \equiv \omega/k$  なので，

$$c_X = \bar{u} - \frac{1}{k^2 + l^2}, \quad (36)$$

である．式 (36) から，波長が十分短い場合は波数  $k, l$  が大きいので，式 (36) の右辺第 2 項は平均流  $\bar{u}$  に対して無視できる．つまり，ロスビー波は平均流  $\bar{u}$  で東に流される．一方，波長が十分長い場合は波数  $k, l$  が小さいので，式 (36) の右辺第 2 項が平均流  $\bar{u}$  より大きくなる．つまり，ロスビー波は西進する．

位相速度が 0 になる場合は定常波である．定常波の場合の波長は，

$$k^2 + l^2 = \frac{1}{\bar{u}}, \quad (37)$$

で与えられる．

## 2.5 定常波の解析解

定常ロスビー波の数値解を求める前に，点源によって励起される定常波がどのようなパターンをもっているかおおよその形をつかむ．

定常波の伝播方向について考える．前節より，定常波は

$$k^2 + l^2 = \frac{1}{\bar{u}}, \quad (38)$$

のときである．このとき，式 (29), (30) より群速度は

$$C_g = 2\bar{u}^2 k(k, l), \quad (39)$$

である。したがって、群速度は波数ベクトル  $K$  に平行で、東にのみ伝播する ( $C_{gx} > 0$ ) ことがわかる (図 5)。定常応答は地形の風下側にのみ生じる。式 (38), (39) から、

$$(C_{gx} - \bar{u})^2 + C_{gy}^2 = \bar{u}^2, \quad (40)$$

なので、群速度は図 5 のように半径  $|\bar{u}|$  (平均風の大きさ) の円周上にある。真東向きの波束がもっとも大きな群速度をもち、北あるいは南にふれる程群速度が小さい。真北あるいは真南に伝播するには無限に時間がかかる。

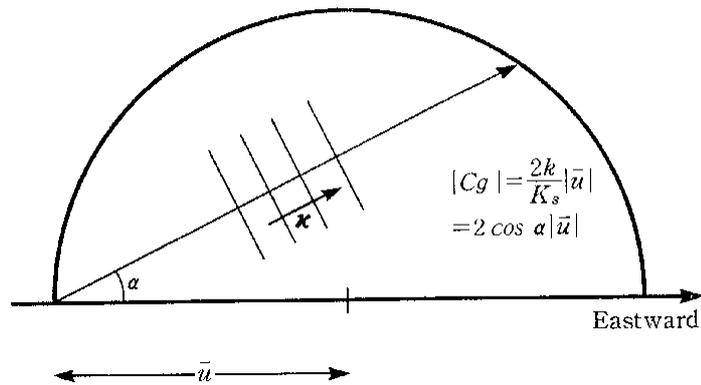


図 5: 群速度の方向依存性 (林, 1987)。

群速度の大きさは、式 (38), 群速度 (39) より

$$|C_g| = \frac{2k}{K_s} |\bar{u}|, \quad (41)$$

である。ただし  $K_s = \sqrt{k^2 + l^2}$  である。

もっとも単純な場合は基本場が  $y$  によらない ( $\bar{u} = \text{定数}$ ) 場合である。 $\bar{u} = 1$  とすると、解くべき方程式 (16) は

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \delta}{\partial x}, \quad (42)$$

となる。

定常波の場合の渦度方程式は、式 (42) から、

$$\frac{\partial}{\partial X} (\nabla^2 \psi + \psi + \delta) = 0, \quad (43)$$

である。

( )内は対称性のいい形をしているので，原点を中心とした等方的な解を選びたいが，群速度の考察から，東半平面にしか応答が得られないはずである．

地形を導入してから有限時間  $\Delta t$  が経過したとすると，定常解は  $|C_g|\Delta t$  の範囲内で到達されていると考えられる (図 6)．例えば，真東に進む波束について考える．群速度は

$$|C_g| = 2|\bar{u}|, \quad (44)$$

なので， $\Delta t$  時間後には  $2|\bar{u}|\Delta t$  まで進んでいる．

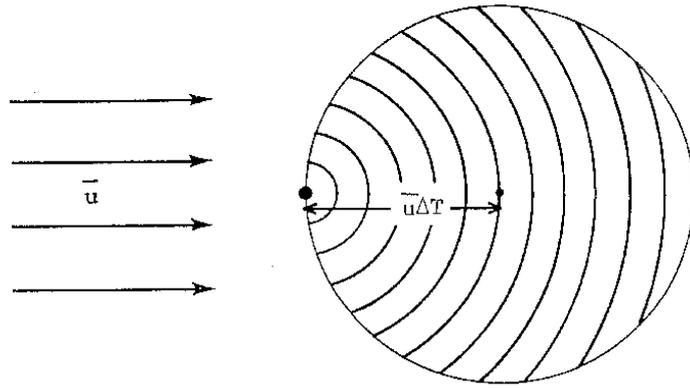


図 6: 分散関係と式 (43) の対称性から考えられる点源によって励起された定常波の応答 (Lighthill, 1966) .

## 2.6 定常波の数値解

さらに詳しくロスビー波の伝播パターンを知るために，渦度方程式 (16) を数値的に解く．

ここでは，簡単のため平均風  $\bar{u}$  が定数で  $\bar{u} = 1$  の場合を考える．このとき解くべき渦度方程式は，

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \delta}{\partial x}, \quad (45)$$

$$\zeta = \nabla^2 \psi, \quad (46)$$

である． $\delta$  関数では数値的に計算できないので，上式 (45) の外力項を

$$\delta \sim e^{-\frac{x^2+y^2}{r_0^2}} \quad (47)$$

とし，半径  $r_0 = 0.05$  の等方的なガウス型とする．外力の中心は  $x = 20, y = 50$  に置く．上式 (45) はスペクトル法を用いて解いた．切断波数は東西，南北共に 30 とした．計算には高

速フーリエ変換のプログラムである ISPACK を用いた．系の設定は以下のようにした．

計算領域について

- 領域：無次元化した距離で東西，南北共に 100
- 格子点数：東西，南北共に 64，等間隔
- 原点：計算領域の左隅

境界条件について

- 境界：南北，東西ともに周期境界条件を用い，2次元矩形領域内

計算結果は，以下の図 7 - 14 である．図 7, 9, 11, 13 はそれぞれ  $t = 10, 20, 30, 40$  における流線関数  $\psi$ ，図 8, 10, 12, 14 はそれぞれ  $t = 10, 20, 30, 40$  における渦度  $\zeta (= \nabla^2 \psi)$  である．また，図 15 - 18 は  $y = 50$  についてみた流線関数である．

以下の図 7 - 14 から，先で予想したように群速度で決まる円周内で到達しており，円は地形より東側にできていることが読みとれる．図 15 - 18 からわかるように，円の直径は  $2 \times$  平均流  $\bar{u} (= 1) \times$  経過時間にほぼ等しく，時間が経つにつれて大きく広がっている．

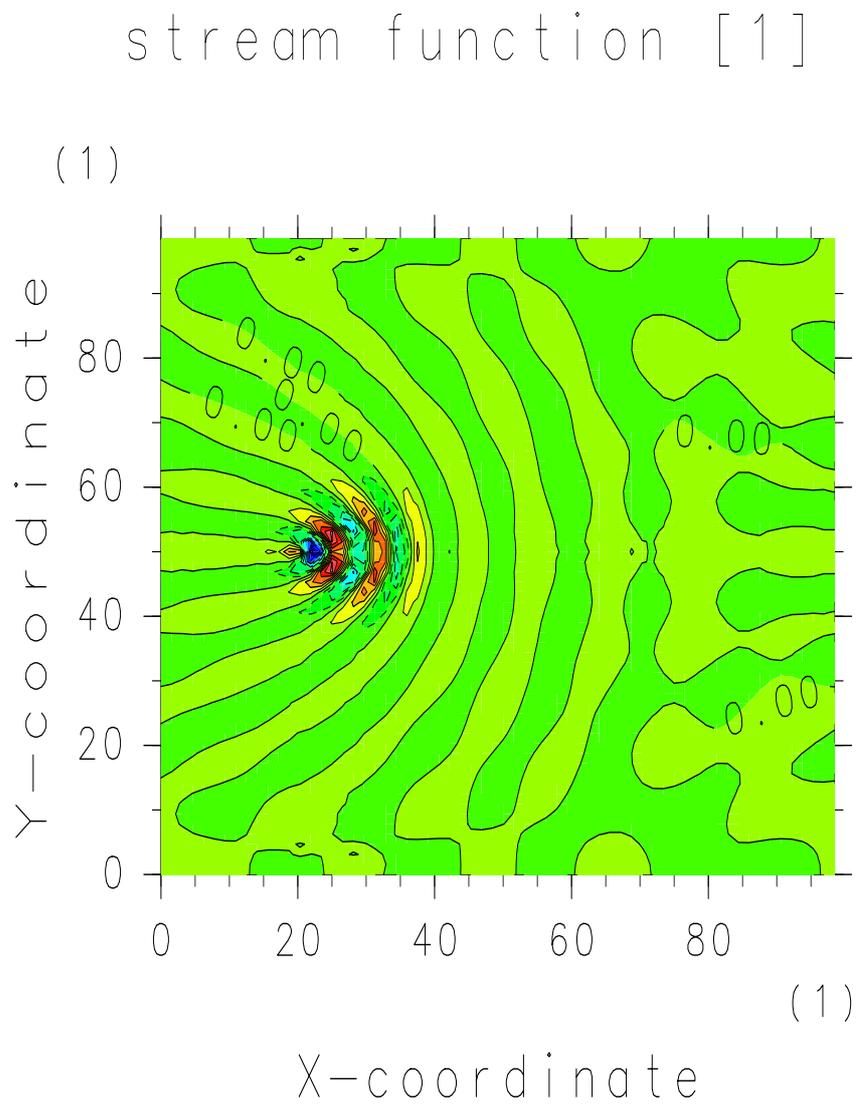


図 7:  $t = 10$  のときの流線. 等値線の間隔は 0.05

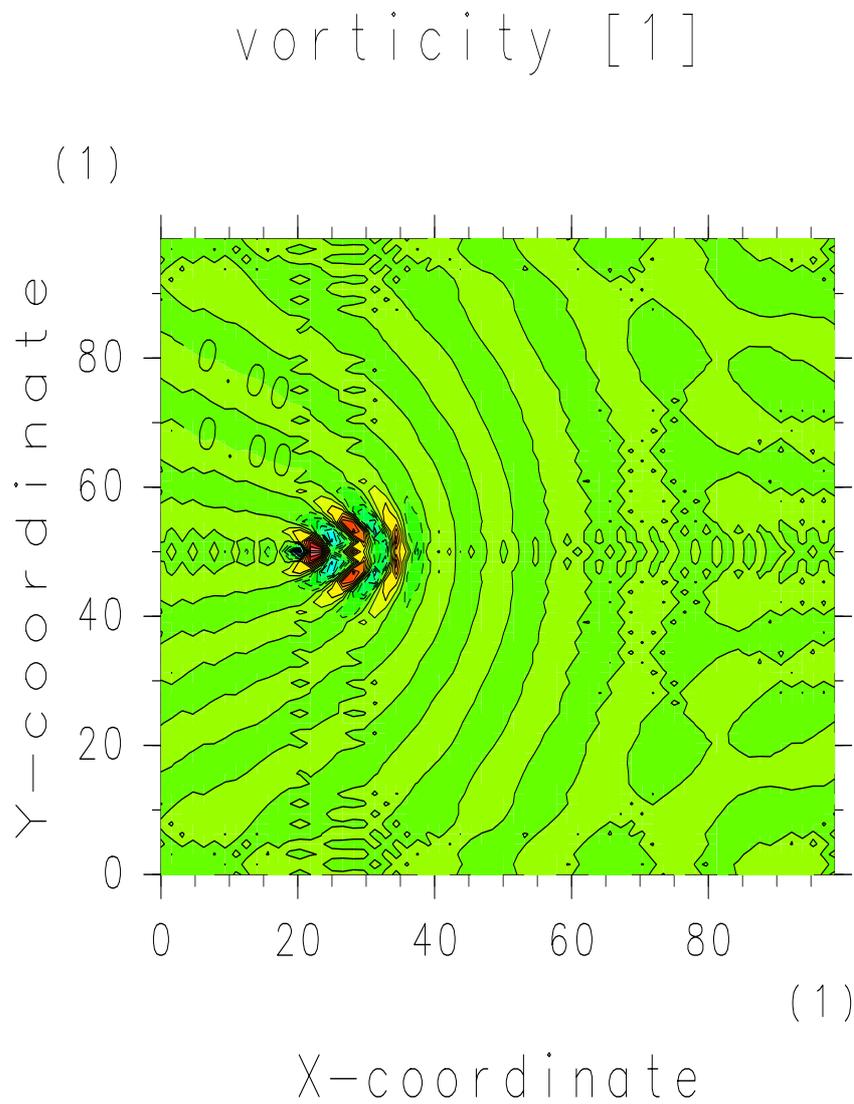


図 8:  $t = 10$  のときの渦度. 等値線の間隔は 0.05.

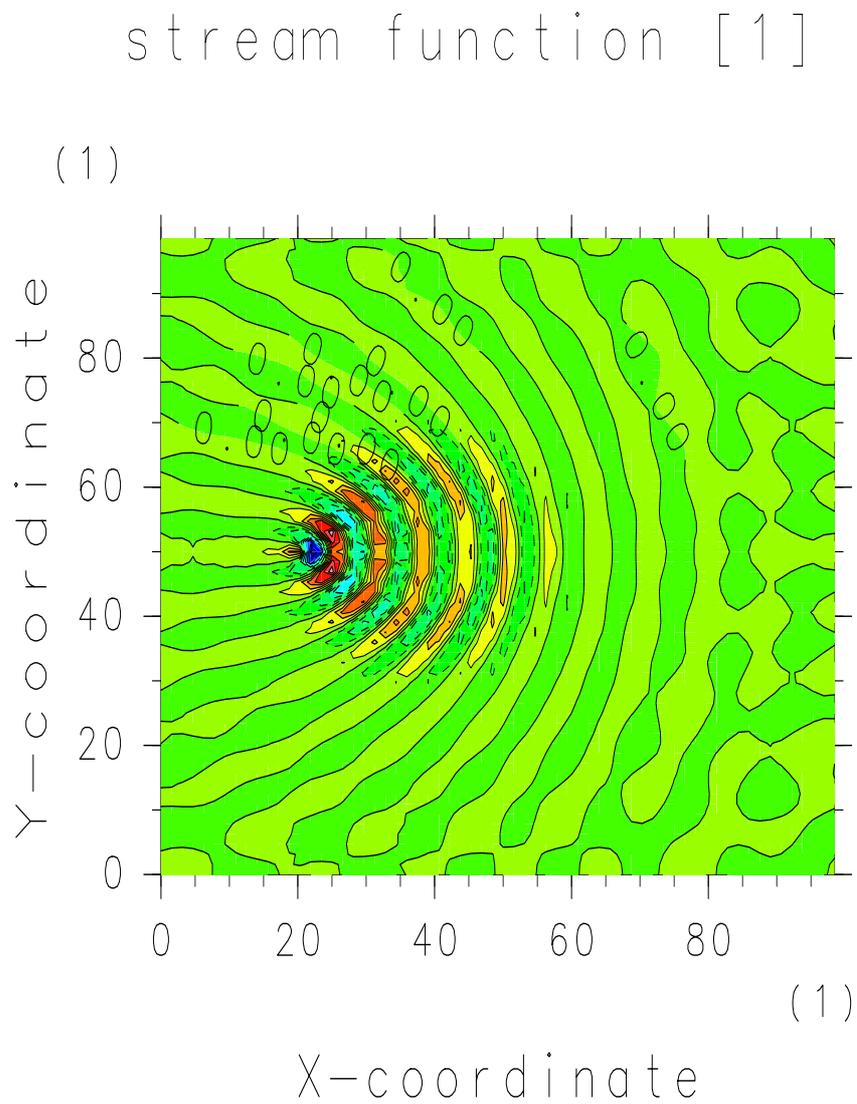
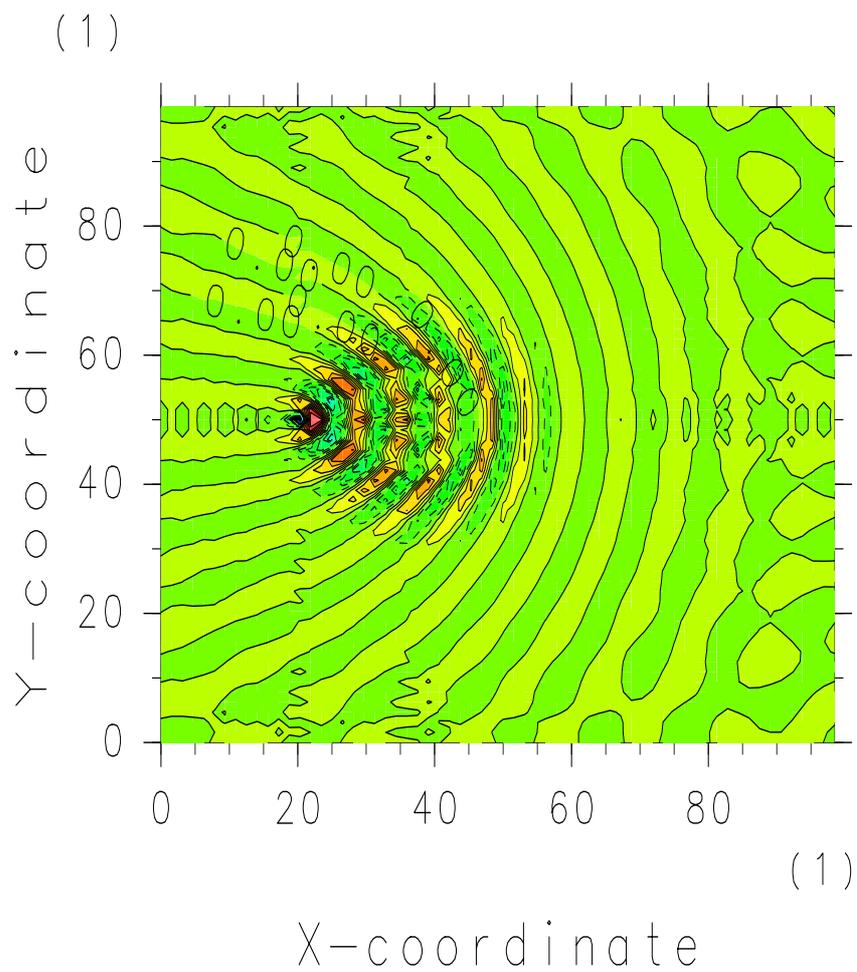


図 9:  $t = 20$  のときの流線. 等値線の間隔は 0.05

「

」

vorticity [1]

図 10:  $t = 20$  のときの渦度. 等値線の間隔は 0.05 .

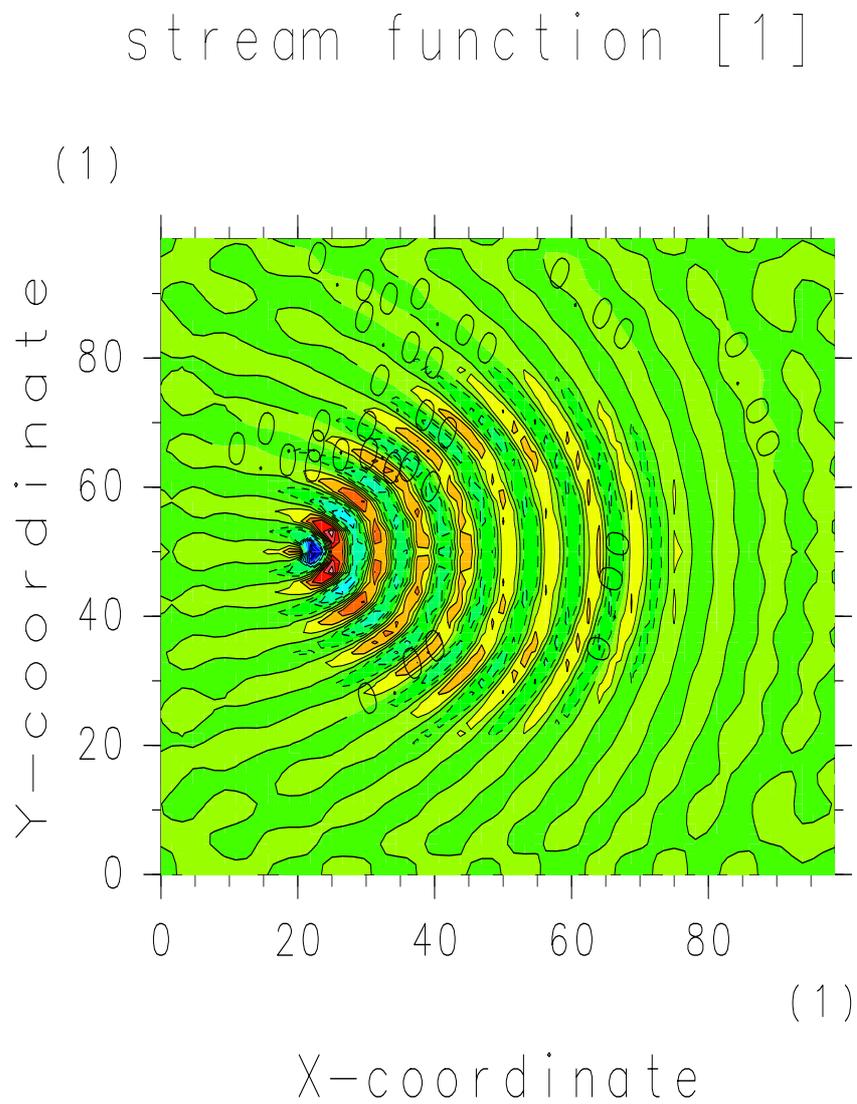
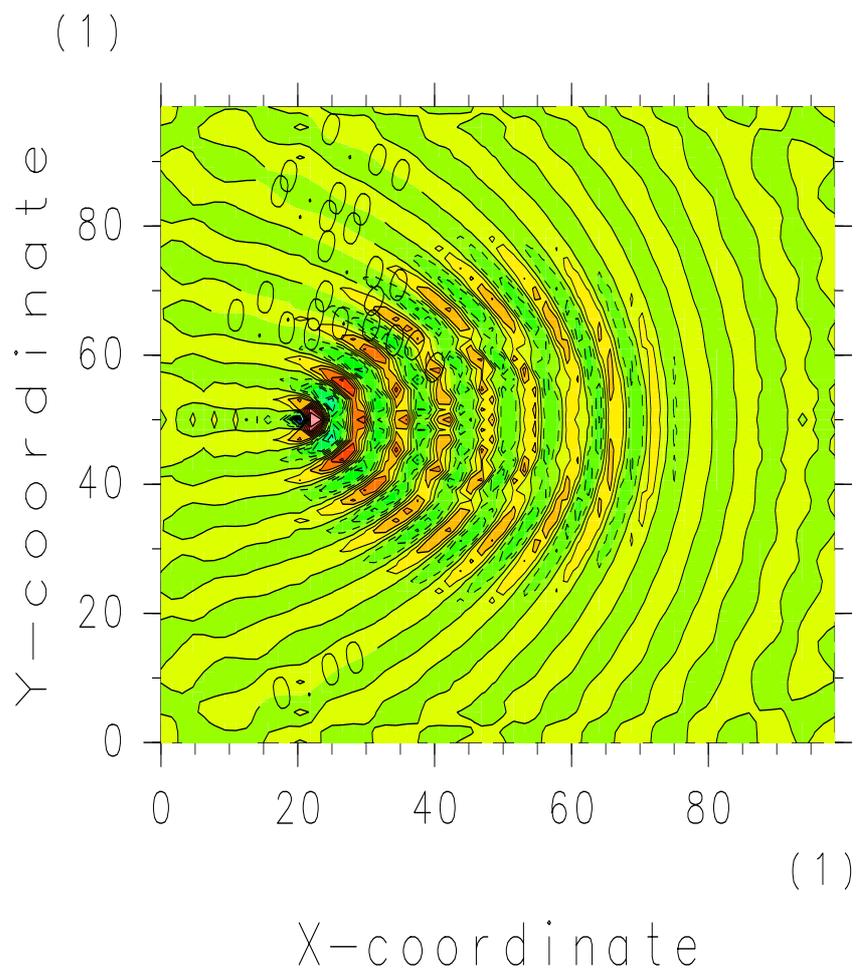


図 11:  $t = 30$  のときの流線. 等値線の間隔は 0.05

「

」

vorticity [1]

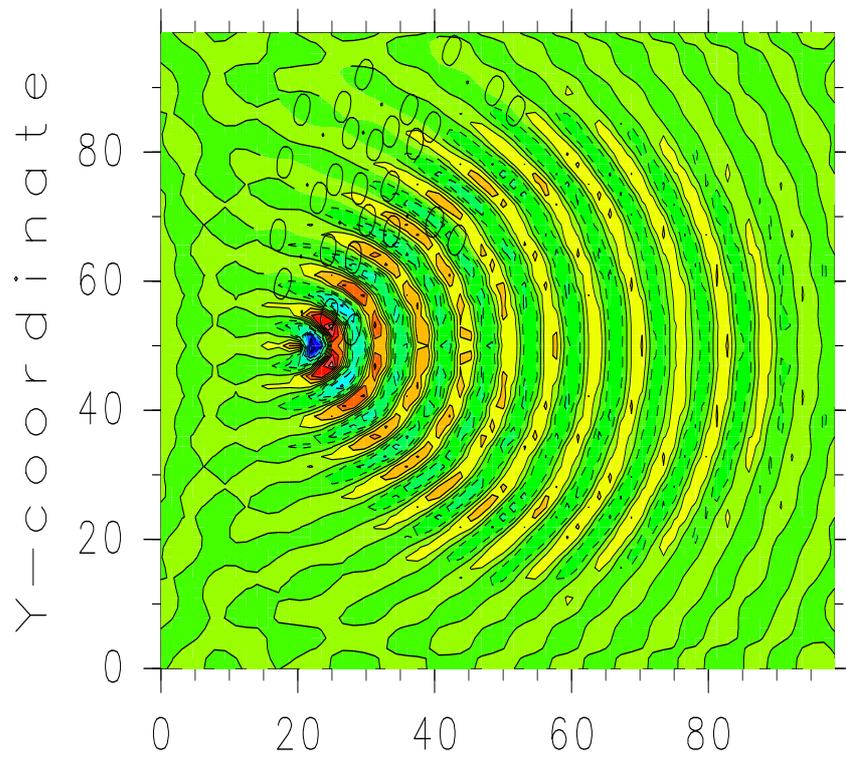
図 12:  $t = 30$  のときの渦度. 等値線の間隔は 0.05 .

「

stream function [1]

」

(1)



(1)

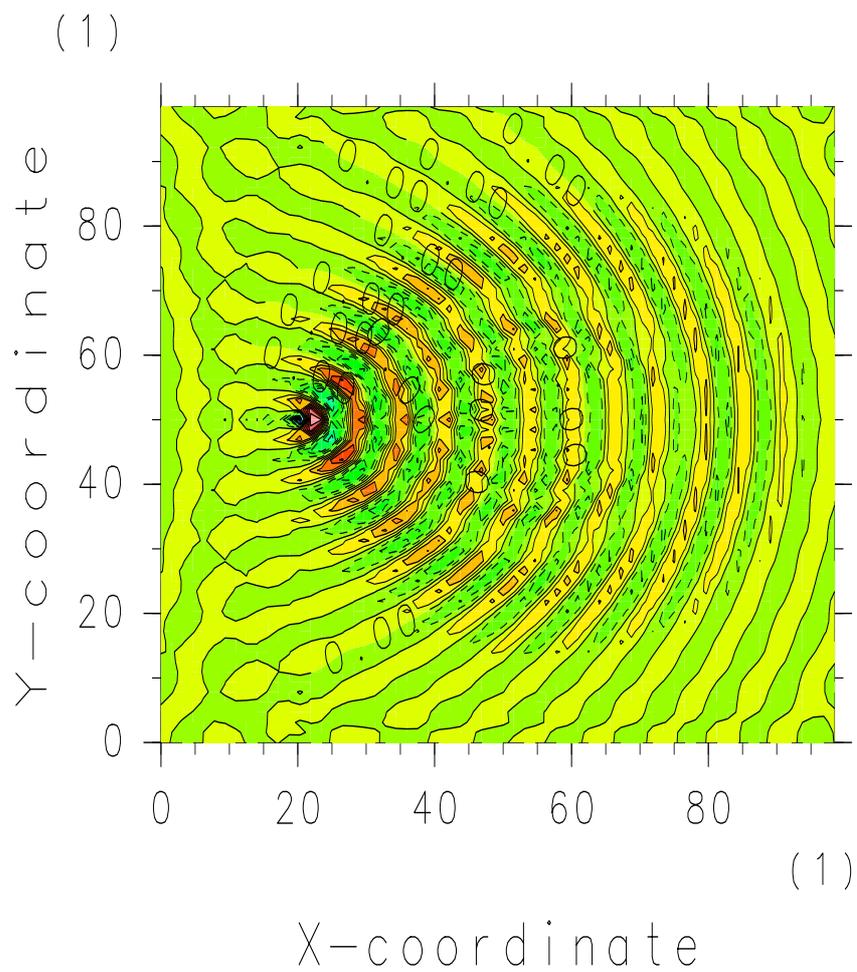
X-coordinate

図 13:  $t = 40$  のときの流線. 等値線の間隔は 0.05 .

「

」

vorticity [1]

図 14:  $t = 40$  のときの渦度. 等値線の間隔は 0.05 .

「

」

stream function [1]

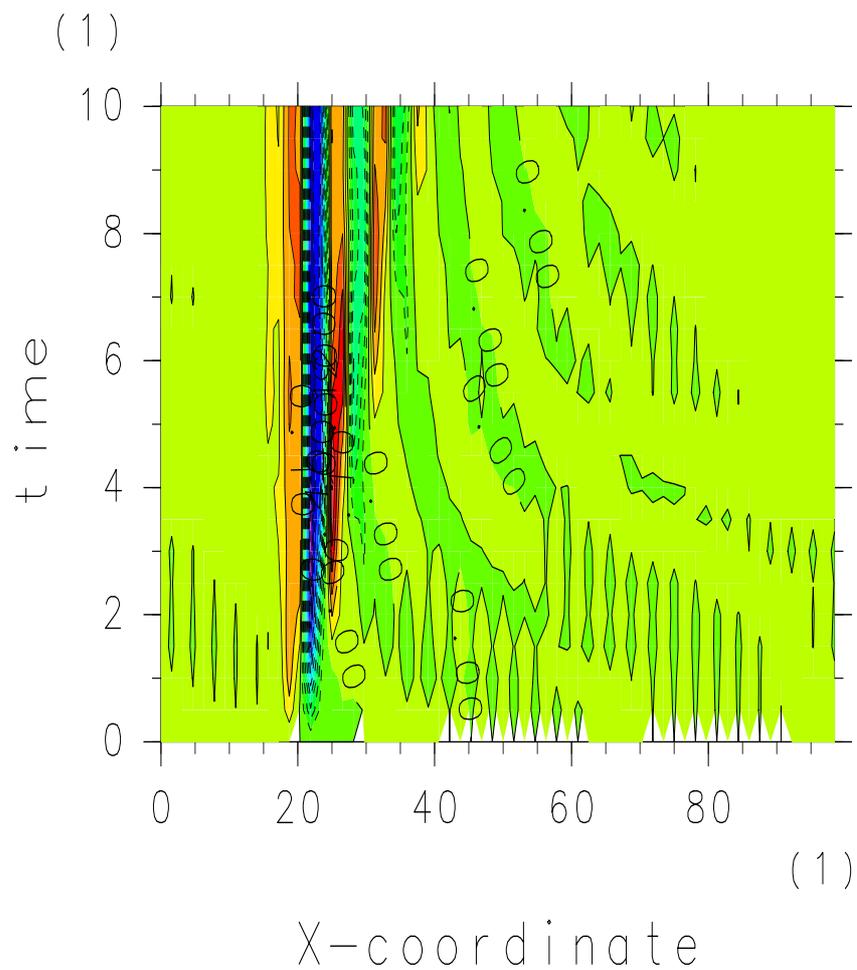


図 15:  $t = 10$  のときの  $y = 50$  における断面の流線関数

stream function [1]

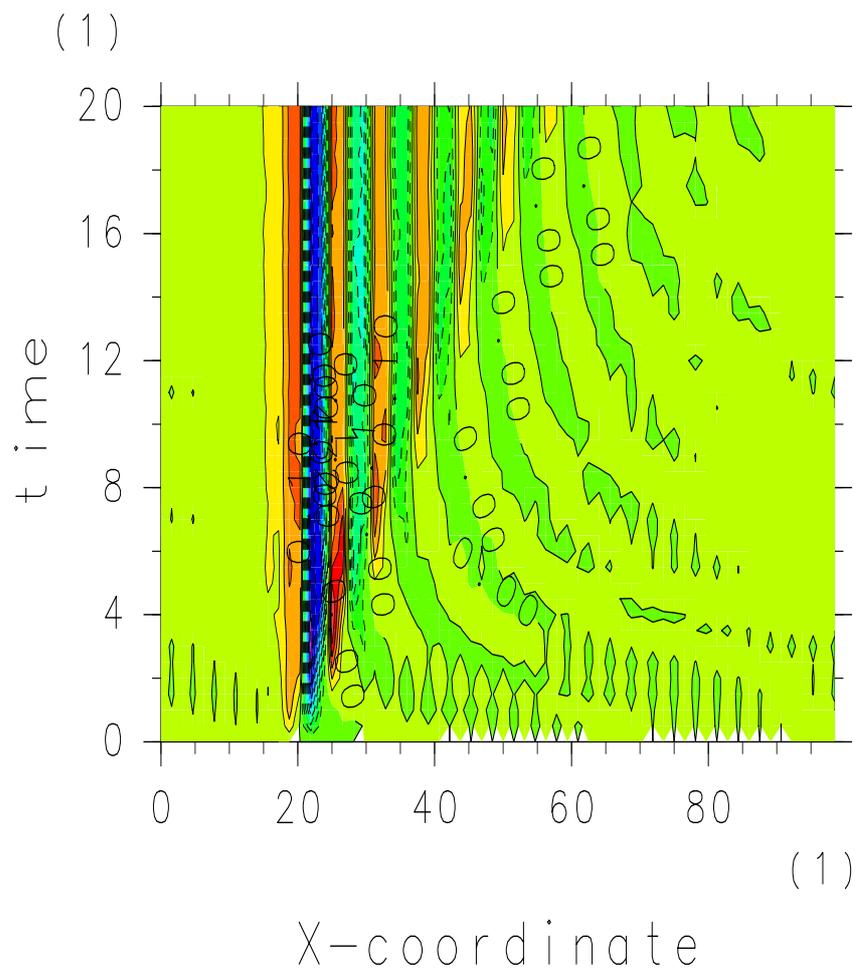


図 16:  $t = 20$  のときの  $y = 50$  における断面の流線関数

stream function [1]

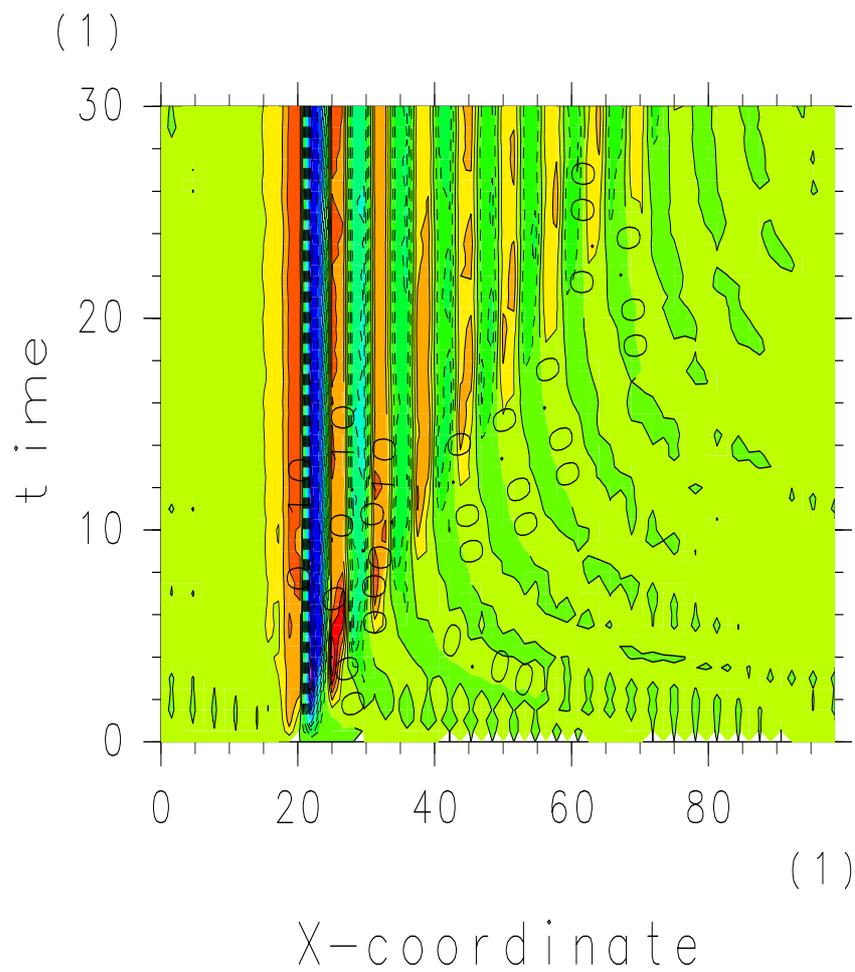


図 17:  $t = 30$  のときの  $y = 50$  における断面の流線関数

stream function [1]

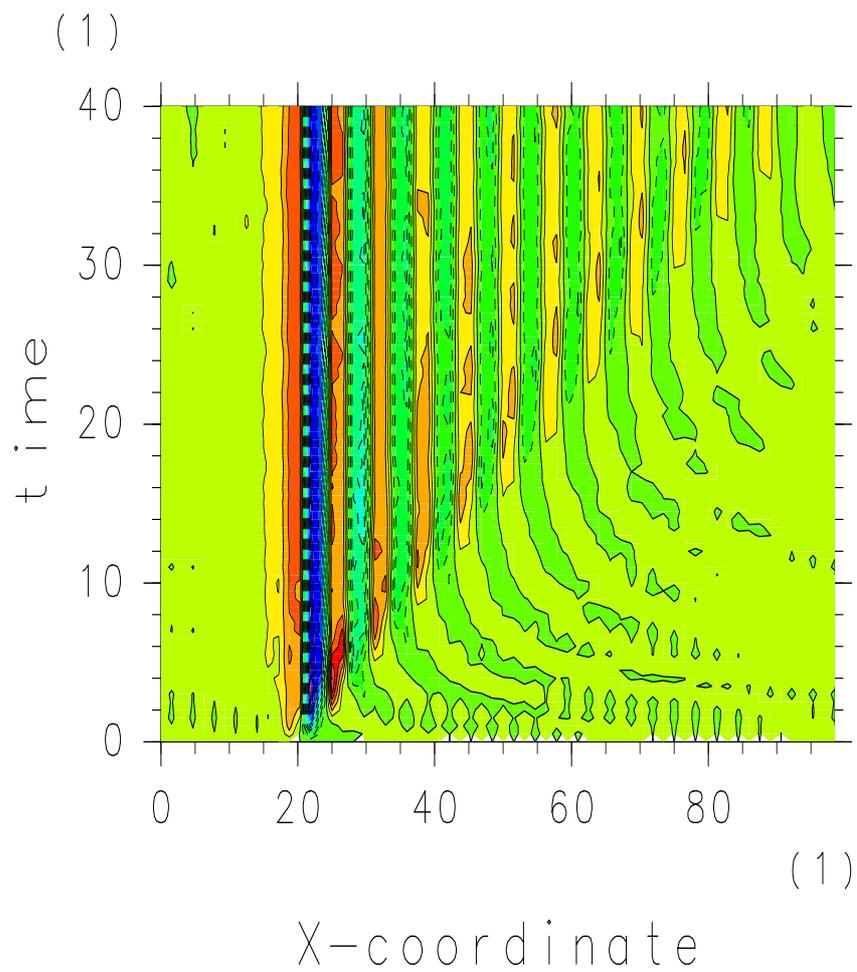


図 18:  $t = 40$  のときの  $y = 50$  における断面の流線関数

### 3 まとめ

2次元定常ロスビー波の伝播パターンを調べたことにより，以下のことを理解した．

ロスビー波は，位相速度

$$c_X = \bar{u} - \frac{1}{k^2 + l^2}, \quad (48)$$

で伝播する．波長の短いロスビー波は東進し，波長の長いロスビー波は西進することがわかる．位相速度がゼロの場合が定常波に相当する．定常波の場合，

$$k^2 + l^2 = \frac{1}{\bar{u}} \quad (49)$$

という関係式が成り立つ．

ロスビー波の活動度は，群速度

$$C_{gX} = \bar{u} + \frac{k^2 - l^2}{(k^2 + l^2)^2}, \quad (50)$$

$$C_{gY} = \frac{2kl}{(k^2 + l^2)^2}, \quad (51)$$

で伝播する．解析的に調べた結果，次のことが分かった．定常ロスビー波は東側のみ伝播し，波源から円形領域内で伝播する．この円形領域の半径は平均風の大きさと経過時間の積である．

数値計算した結果も，波源より東側に伝播し円形領域内で伝播していることを示していた．渦度も同様の形で伝播されることが数値計算によって分かった．

ここで考えた外力は地形のみである．平均風が吹き続ける限り，地形の風上で平均風の強制上昇，風下での強制下降が起こり，渦度が生成し続け，エネルギーは伝播し続ける．現実大気では熱源や摩擦による影響を無視できない．十分時間が経つと，地形や熱源によるエネルギー供給は摩擦によるエネルギーの散逸とつり合い，最終的にエネルギーの広がり止まる．エネルギー伝播が止まることを理解するためには，地形だけでなく熱源や摩擦の効果も考慮に入れる必要がある．

ここで考えてきたロスビー波は回転球面上のロスビー波を平面上に近似して考えてきたものである．全球スケールのロスビー波を考える場合は球座標系で考えなければならない．

## 4 謝辞

林 祥介教授，小高 正嗣助手，杉山 耕一朗さん，佐々木 洋平さんには右も左も分からない状態の私に気長につき合っ頂き本当に感謝しています．モデル作成時には，九州大学の竹広 真一先生の  $\beta$  面順圧系のプログラム b-plane.f90 (<http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/ispack-f90/n2pack/samples/>) を参考にさせて頂きました．また，東京大学の石岡 圭一先生が作成した ISPACK (<http://www.gfd-dennou.org/arch/ispack/index.htm>) ，気象庁の豊田 英司さんが開発したデータの可視化ツール gtool4 (<http://www.gfd-dennou.org/arch/gtool4/index.html>) を利用させて頂きました．この場をかりてお礼を申し上げます．

## A 基礎方程式の導出

### A.1 質量保存則

Taylor-Proudman の定理より ,

- 流体の密度一定
- 運動が定常
- 運動方程式が線形化できるくらい十分運動が遅い
- 摩擦が無視できる

とき , 回転流体中の運動は  $z$  の方向に依存しない 2 次元流になる . ここでは上記の 4 つの条件を満たし , 剛体の上下境界をもった大気を考える .

このとき質量保存則は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (52)$$

である . 以下で上式 (52) 中の鉛直速度成分  $w$  を消去し , 大気層の厚さ  $H$  を用いて表す .

境界条件は以下の 2 つである .

- 地表面  $z = h_B(x, y)$  での鉛直速度成分は  $w = w(x, y, h_B, t)$  である .
- 層の上端  $z = h_T(x, y)$  での鉛直速度成分は  $w = w(x, y, h_T, t)$  である .

運動が定常で  $z$  に依存しないので , 地表面の鉛直速度成分  $w(x, y, h_B, t)$  は ,

$$\begin{aligned} w(x, y, h_B, t) &= \frac{dh_B}{dt}, \\ &= \frac{\partial h_B}{\partial t} + u \frac{\partial h_B}{\partial x} + v \frac{\partial h_B}{\partial y} + w \frac{\partial h_B}{\partial z}, \\ &= u \frac{\partial h_B}{\partial x} + v \frac{\partial h_B}{\partial y}, \end{aligned} \quad (53)$$

と表すことができる . 同様に , 層の上端での鉛直速度速度  $w(x, y, h_T, t)$  は ,

$$w(x, y, h_T, t) = u \frac{\partial h_T}{\partial x} + v \frac{\partial h_T}{\partial y}, \quad (54)$$

と表すことができる .

また,  $u, v$  は  $z$  に依存しないので, 式 (52) を  $z$  で積分すると,

$$w(x, y, z, t) = -z \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tilde{w}(x, y, t), \quad (55)$$

となる. 上式 (55) に  $z = h_B$  を代入して, 式 (53) とから,

$$\tilde{w}(x, y, t) = h_B \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial h_B}{\partial x} + v \frac{\partial h_B}{\partial y}, \quad (56)$$

が得られる. 上式 (56) を式 (55) に代入すると,

$$w(x, y, z, t) = (h_B - z) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial h_B}{\partial x} + v \frac{\partial h_B}{\partial y}, \quad (57)$$

である. 上式 (57) に  $z = h_T$  を代入して, 式 (54) とから,

$$(h_B - h_T) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial h_B}{\partial x} + v \frac{\partial h_B}{\partial y} = u \frac{\partial h_T}{\partial x} + v \frac{\partial h_T}{\partial y}, \quad (58)$$

となる. したがって,  $H = h_B - h_T$  とすると,

$$H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad (59)$$

である.

大気の厚さを  $H = H_0 + h$  ( $H_0$  は大気平均の厚さ,  $h$  は微小な高さの地形) とし, 基本風  $\bar{u}(y)$  と微小変化  $u, v$  を考える. このとき,

$$h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad u \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (60)$$

は微小量  $u, v, h$  と比べ小さいので, 無視できる. よって, 質量保存則は

$$H_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad (61)$$

となる.

## A.2 運動方程式

密度一定, 運動が定常, 線形, 摩擦なしの大気を考える. 局所直角直線座標系における運動方程式は

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (62)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (63)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad (64)$$

である。ただし， $u, v$  はそれぞれ  $x, y$  方向の速度， $p$  は気圧， $f (= f_0 + \beta y)$  はコリオリパラメータ， $g$  は重力加速度である。

上式 (62), (63) をそれぞれ  $p$  座標系で表す。

ここで  $p$  座標系での水平微分 ( $x, y$  微分) を導出する。ある物理量  $\varphi$  の  $x$  微分は

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_p \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta x}, \quad (65)$$

と定義される。図 19 より

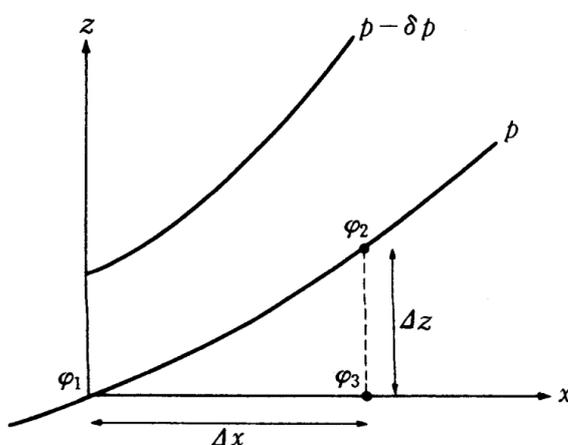


図 19:  $x - z$  平面内の断面 (小倉, 1978)

$$\frac{\varphi_3 - \varphi_1}{\Delta x} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta x} - \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{\Delta x} \frac{\Delta z}{\Delta x}, \quad (66)$$

である。微分の定義 (65) より，上式 (66) において  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$  とすると

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{y,z,t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{y,p,t} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{x,y,t} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,p,t}, \quad (67)$$

である。静水圧平衡が成り立っているとき，

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad (68)$$

である。このとき式 (67) は

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_p + \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p, \quad (69)$$

となる．ただし，添字の  $y, t$  は省略した． $\varphi = p$  とすると，式 (69) は

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z &= \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p, \\ &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p, \\ &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (70)$$

となる．ただし  $\psi$  はジオポテンシャルである． $y$  微分についても同様に求まる．

よって，運動方程式をジオポテンシャルで表すと，

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (71)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (72)$$

$$\frac{dw}{dt} = 0, \quad (73)$$

となる．

ここで浅水近似を考える．水平長さスケールを  $L$ ，鉛直長さスケールを  $D$ ，水平速度スケールを  $U$ ，鉛直速度スケールを  $W$ ，時間スケールを  $T$  とする．浅水近似の下では，

$$\delta = \frac{D}{L} \ll 1, \quad (74)$$

である．鉛直速度スケールと水平速度スケールの関係は

$$\begin{aligned} W &= \frac{D}{T}, \\ &= \frac{D L}{L T}, \\ &= \delta U \end{aligned} \quad (75)$$

なので，

$$W \ll U, \quad (76)$$

である．

摩擦がない場合の運動方程式をスケールで表すと，

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (77)$$

$$\frac{U}{T} fU = \frac{P}{\rho L},$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (78)$$

$$\frac{U}{T} fU = \frac{P}{\rho L},$$

$$\frac{dw}{dt} = 0, \quad (79)$$

$$\frac{W}{T},$$

である．不等式 (76) より，鉛直方向の運動方程式は水平方向に比べて十分小さく無視できる．したがって，浅水近似の運動を考える場合は水平方向の運動方程式のみで考えることができる．以下，浅水近似の下で考える．

Taylor-Proudman の定理より，運動方程式 (62), (63) は，

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (80)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (81)$$

ここで，基本風  $\bar{u}(y)$  と微小変化  $u, v$  を考えると，

$$u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (82)$$

の項は，微小変化  $u, v$  よりさらに微小なので無視できる．

よって，運動方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} - \left( f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (83)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v}{\partial x} + f\bar{u} + fu = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (84)$$

である．

## 参考文献

- [1] 朝倉正, 1966: 長期予報技術検討資料, 気象庁.
- [2] 地球流体電脳倶楽部, <http://www.gfd-dennou.org/>.
- [3] Hosikins, B. J., and D. J. Karoly, 1981: The steady linear response of a spherical atmosphere to thermal and orographic forcing, *J. Atmos. Sci.*, 38, 1179–1196.
- [4] 金子晃, 1998: 偏微分方程式入門, 基礎数学 12, 東京大学出版会.
- [5] 岸保勘三郎, 佐藤信夫, 1986: 新しい気象学, 第 II 期 気象学のプロムナード 1, 東京堂出版.
- [6] Gill, A. E., 1982: *Atmosphere-Ocean Dynamics*, Academic Press.
- [7] Grose, W. L. and B. J. Hoskins, 1979: On the influence of orography on large-scale atmospheric flow, *J. Atmos. Sci.*, 36, 223–234.
- [8] 林 祥介, 1987: 二次元定常ロスビー波の線形論, 気象研究ノート 第 156 号, 日本気象学会, 235-254, 0387–5369.
- [9] Lighthill, M. J., 1966: Dynamics of rotating fluids: a survey, *J Fluid Mech.*, 26, 411–431.
- [10] 小倉義光, 1978: 気象力学通論, 東京大学出版会.
- [11] Pedlosky, J., 1979: *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag.
- [12] 寺沢寛一, 1983: 自然科学者のための数学概論 [増訂版], 岩波書店.
- [13] Wallace, J. M. and D. S. Gutzler, 1981: Teleconnections in the geopotential height field during the northern hemisphere winter, *Mon. Wea. Rev.*, 109, 784–812.