

2次元ベナール・レイリー型対流の 数値シミュレーション

竹村 和人

神戸大学理学部地球惑星科学科
地球および惑星大気科学研究室

2008年2月3日

要旨

本研究では、熱対流の代表的な例であるベナール・レイリー型対流の数値シミュレーションを行った。まず、線形化した支配方程式を解析的に考察することによって、解の安定性について調べた。次に、非線形の支配方程式を数値的に解くプログラムを作成し、そのプログラムが適切であることを確かめるための、予備的実験を行った。さらに、予備的実験の結果が線形安定論に矛盾しなかったことから、プログラムが適切であるとし、いくつかの数値的実験を行った。その結果、流体の性質を表す量を含む無次元数であるレイリー数 Ra が高いほど、対流が熱輸送により寄与することがわかった。また、自分のプログラムでの計算結果を比較した結果と、地球流体電脳倶楽部の SPMODEL を用いたシミュレーション結果の相対誤差は約 2 % にとどまることがわかった。

目次

要旨	1
第1章 序論	5
1.1 研究の背景と動機	5
1.2 本論文の構成	7
1.3 ベナール対流とは	8
第2章 対流の基礎理論	10
2.1 ブシネスク近似	10
2.2 支配方程式の導出	15
2.3 レイリーの線形安定論	20
第3章 対流の数値計算	25
3.1 計算手法	25
3.2 状況設定と実験条件	30
3.3 予備的実験その1	33
3.4 予備的実験その2	40
3.5 予備的実験その3	50

Benard Convection	3
第4章 実験	55
4.1 対流と熱伝導による熱輸送の割合	55
4.2 SPMODEL での計算結果との比較	60
4.3 積雲対流を模した対流の数値シミュレーション	65
第5章 まとめ	72
謝辞	73
参考文献	74
付録1 ヤコビ法の手順	75
付録2 格子点法	79
付録3 時間差分スキーム	81
付録4 支配方程式の無次元化	83
付録5 臨界レイリー数と擾乱の水平方向の波数の関係	84
付録6 熱力学方程式の導出について	85
付録7 荒川ヤコビアン	87
付録8 初期条件について	96
付録9 離散フーリエ変換	99

Benard Convection	4
付録 10 ニュートン・ラフソン法	103
付録 11 絶対誤差と相対誤差	107

第1章 序論

1.1 研究の背景と動機

熱対流とは、流体中において温度差が生じているときに、流体がその温度差を解消するために運動を起こす現象のことである。熱対流に関する研究の始まりは、フランスのベナール (Benard) が 1900 年に行った実験である。ベナールは、実験で厚さが約 1 mm の静止した水平な高粘性係数の流体層の下面を一様に加熱した。すると、ある臨界状態に達したとき、六角形状のセルが形成されることを発見した^{*1}。その後、1916 年にレイリー (Rayleigh) がベナールの実験の理論的な考察を行った。熱対流に関する研究は、今述べたように、100 年近くもさかのぼることのできる古典的な問題ではあるが、最近のコンピュータによる流体運動の数値シミュレーション技術の発達によって、今日でもその研究はさかんに行われている。

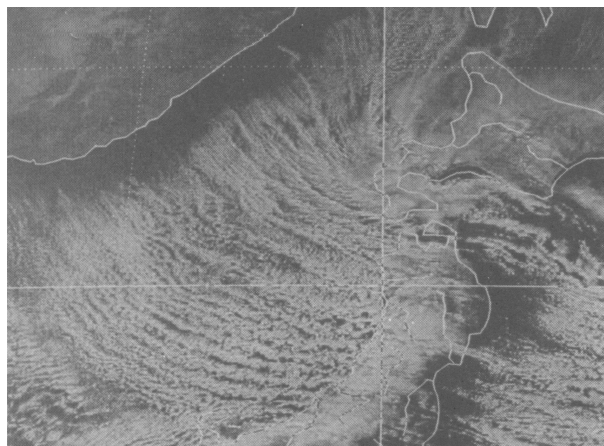


図 1.1.1: 冬季, 日本海上に発生する筋状の雲の衛星写真。(浅井 (1996) より)

^{*1}しかし、この六角形のセルは、流体層が非常に浅く、上面が空気と接しているときに現われる形であり、流体の浮力が駆動力となって生じたものではなく、表面張力が駆動力となって生じたものであると推定されている。

対流現象は、実際の大気中においても重要である。冬季、ユーラシア大陸から日本海に寒気が流れこんだときに発生する筋状の雲も対流現象の 1 つの例である。図 1.1.1 は日本海に筋状の雲が発生している様子である。雲が発生している部分は上昇流が発生している部分であるので、上昇部分と下降部分が筋状に並ぶ形になっていることになる。しかしながら、対流の形状は筋状だけでなく、様々ある。また、実際の大気中には水蒸気を含み、その相変化による潜熱の効果加わるため、熱対流よりも複雑である。

本研究では、対流に関する研究の第一歩として、熱対流に焦点をあて、その中でも代表的な例であるベナール・レイリー型対流を取り上げることとする。以後、簡単な言い方として、この対流を「ベナール対流」と呼ぶことにする。また、簡単化のために現象を 2 次元で考えることにする。本論文では、まず 2 次元ベナール対流の基礎理論について簡単に紹介し、流体の運動方程式をコンピュータを用いてシミュレーションし、その結果について議論を行う。

1.2 本論文の構成

本論文では、まず、第 2 章で対流の基礎理論について紹介する。作業流体をブシネスク流体とし、2.1 節において圧縮性流体の方程式のブシネスク近似を行う。次に 2.2 節において、ブシネスク流体に関する方程式から 2 次元ベナール対流を記述する非線形の支配方程式を導出する。2.3 節では方程式を線形化し、解の安定性についての議論である「レイリーの線形安定論」を紹介する。

第 3 章では 2.2 節で導出したベナール対流の支配方程式のシミュレーション手法について紹介する。3.1 節、3.2 節では、本研究における計算手法および計算条件について紹介する。そして、この計算方法に従って方程式を数値的に解くプログラムが適切であることを確かめるために行った予備的実験について、3.3 節、3.4 節、3.5 節で紹介する。

第 4 章では、第 3 章で述べた手法に従って計算を行うプログラムを用いて、様々な実験を行った結果について紹介する。4.1 節では、熱伝導と対流が熱輸送にどれだけ寄与しているのかを調べる実験を行う。4.2 節では、ベナール対流をスペクトルモデルで計算した結果との比較実験を行う。さらに、4.3 節では、議論を発展させ、支配方程式に潜熱に模した加熱項を加えることによって流れがどのように変化するかを調べることにする。

1.3 ベナール対流とは

本節ではベナール対流とはどんな対流であるかについて紹介する。

ベナール対流は、熱対流、つまり水蒸気の効果を考慮しない対流、のもっとも簡単な例である^{*2}。図1.3.1のような状況を考える。すなわち、簡単化のために2次元 xz 平面を考え、 z 軸を鉛直上向きにとり、厚さ d の薄い流体層を考える。

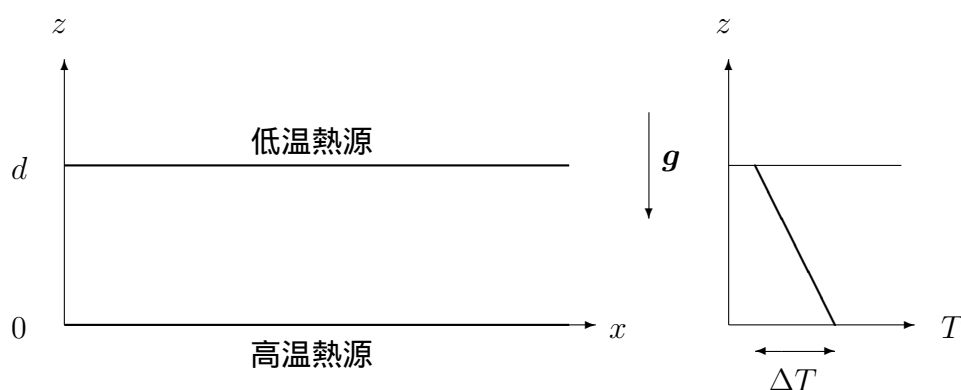


図1.3.1. 考える xz 平面内の領域. x 方向には流体が無限に続いていると考える。

薄い流体層の上面 $z = d$ に低温熱源、下面 $z = 0$ に高温熱源をおく。高温熱源と低温熱源の温度差を ΔT とする。すると、定常状態における温度の z 方向の分布は図のように直線的になる。ここで、次のような2つのパターンについて考えよう。

- 温度差 ΔT がある臨界値よりも小さい場合、熱伝導という方法で熱を上方へ輸送する。そのときの模式図を図1.3.2に示す。ただし、図中の矢印は熱の伝わる方向を示していることに注意しよう。

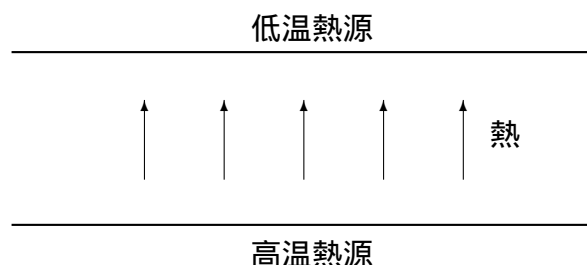


図1.3.2. 温度差 ΔT がある臨界値よりも小さい場合の熱伝導の模式図

^{*2}これに対して、水蒸気の効果を考慮する対流は積雲対流と呼ばれる。現実の大気中では、水蒸気の凝結や昇華、さらには放射による加熱、冷却が絶えず生じている。よって、熱対流は現実大気の対流を最も簡単化したものであり、対流現象の基本であるといえる。

- 温度差 ΔT がある臨界値を超えると, もはや熱伝導だけでは熱の輸送が間に合わなくなり, 流体自身が動くことによって熱を輸送する. これが対流の正体である. つまり, この場合には, 熱伝導と対流という2つの方法で熱を輸送するのである. そのときの模式図を図1.3.3に示す. ただし, 図中に円形に描いた矢印は流体の運動のおおまかな様子を示していることに注意しよう.

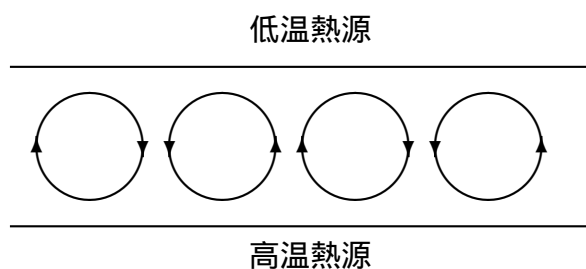


図 1.3.3. 温度差 ΔT がある臨界値よりも大きい場合の熱伝導+対流の模式図

しかし, 対流が発生する臨界状態は, 上で述べたように温度差だけで決まるのではなく, 流体の性質である, 体膨張係数 α , 動粘性係数 ν , 温度伝導率 κ や, 重力加速度 g , 流体層の厚さ d にも依存する. そこで, 一般的には, これらの量を含む無次元数である, レイリー数,

$$Ra = \frac{\alpha g \Gamma d^4}{\kappa \nu} \quad (1.3.1)$$

がある臨界値を超えると, 対流が発生することが知られている. この臨界レイリー数はどれくらいの値をとるのだろうか. このことについては, 第3章のレイリーの線形安定論で議論する.

第2章 対流の基礎理論

この章では、ベナール対流の数値計算に必要な支配方程式を導出するために、基礎方程式を近似、変形していく。本研究で扱う流体はブシネスク流体であることから、2.1節では、まず圧縮性流体を記述する基礎方程式のブシネスク近似を行う。そして、2.2節でブシネスク近似を行った方程式から、数値計算をするための支配方程式を導出する。また、2.3節では、レイリーの線形安定論を紹介することによって、第1章で軽く議論した臨界レイリー数を求める。

2.1 ブシネスク近似

ブシネスク流体の性質は次の通りである。

- 音波が無限の速さで伝わる、非圧縮性流体の性質をもつ。音速を c とすると、

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \quad (2.1.1)$$

と書ける。ここで、添え字 s はエントロピーが一定であることを意味する。よって、音速が無限大であるとき、

$$\frac{1}{c^2} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s = 0 \quad (2.1.2)$$

となることから、エントロピー一定のもとで圧力変化による密度変化はないということになる。

- 温度変化によって密度が変化する。

このような条件のもとで方程式を近似することをブシネスク近似という。本節では、ブシネスク近似について紹介するために、圧縮性流体に関する方程式から議論を始める。

密度 ρ が一様でない圧縮性流体を記述する方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad (2.1.3a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \left\{ \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right\} + \mathbf{g}, \quad (2.1.3b)$$

$$C_V \frac{DT}{Dt} + p \frac{D(1/\rho)}{Dt} = C_V \kappa \nabla^2 T, \quad (2.1.3c)$$

$$f(p, \rho, T) = 0 \quad (2.1.3d)$$

である。第1式は連続の式、第2式はニュートン流体に関するナビエ・ストークスの方程式、第3式は粘性散逸による加熱を無視した熱力学方程式^{*1}、第4式は状態方程式である。ここで、 \mathbf{u} は速度ベクトル、 p は圧力、 κ は温度伝導率、 \mathbf{g} は重力加速度ベクトルであり、 \mathbf{k} を鉛直方向の単位ベクトルとして、

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$$

とする。

対流現象では、温度変化に起因する密度変化が圧力変化に起因する密度変化に比べて非常に重要となる。また、

- 熱力学変数 p, ρ, T の変化量は十分に小さい
- 熱力学変数のうち、圧力 p は他の熱力学変数と独立に変化する

という条件が成り立つ運動を考える。密度の変化量は小さいので、 ρ は定数部分 ρ_0 とそれからのずれ ρ' の和として、

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad (2.1.4)$$

と書くことができる。ただし、 $\rho_0 \gg \rho'$ である。すると、連続の式 (2.1.3a) の第1, 2項目は非常に小さくなる。よって主要な項は第3項のみとなるので、連続の式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1.5)$$

と近似できる。

次に圧力を、密度 ρ_0 に対する静水圧 $p_B(z)$ とそれからのずれ p' との和として、

$$p = p_B(z) + p', \quad (2.1.6a)$$

$$\frac{dp_B}{dz} = -\rho_0 g \quad (2.1.6b)$$

^{*1}この式は熱力学第1法則から導出できる。詳しくは付録6を参照すること。

と書くことができる. (2.1.4), (2.1.5), (2.1.6a), (2.1.6b) を (2.1.3b) に代入すると, 圧力傾度力と重力加速度の項は,

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} &= -\frac{1}{\rho_0 + \rho'}\nabla(p_B(z) + p') + \mathbf{g} \\
 &= -\frac{1}{\rho_0(1 + \rho'/\rho_0)}(\nabla p_B(z) + \nabla p') + \mathbf{g} \\
 &\simeq -\frac{1}{\rho_0}\left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right)(\nabla p_B(z) + \nabla p') + \mathbf{g} \\
 &= -\frac{1}{\rho_0}\nabla p_B(z) + \frac{\rho'}{\rho_0}\frac{1}{\rho_0}\nabla p_B(z) - \frac{1}{\rho_0}\nabla p' + \frac{\rho'}{\rho_0}\frac{1}{\rho_0}\nabla p' + \mathbf{g} \\
 &= -\mathbf{g} + \frac{\rho'}{\rho_0}\mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0}\nabla p' + \frac{\rho'}{\rho_0}\frac{1}{\rho_0}\nabla p' + \mathbf{g} \\
 &\simeq -\frac{1}{\rho_0}\nabla p' + \frac{\rho'}{\rho_0}\mathbf{g}
 \end{aligned}$$

となり, ナビエ・ストークスの方程式は,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\rho'}{\rho_0}\mathbf{g} \quad (2.1.7)$$

と近似できる.

一方, 状態方程式 (2.1.3d) について, ρ は p と T の関数なので,

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p dT$$

と書くことができ, この式に

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = -\alpha\rho$$

の関係^{*2}を用いると,

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T dp - \alpha\rho dT$$

^{*2}この関係を導出する. 体膨張率 α について,

$$\begin{aligned}
 \alpha &\equiv \frac{(\partial V/\partial T)_p}{V} = \frac{(\partial(1/\rho)/\partial T)_p}{1/\rho} = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho}\right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \\
 &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p
 \end{aligned}$$

となるので, このような関係が導かれる.

となる。ただし、 α は体膨張率である。ここで、圧力 p は他の変数とは独立に変化するという仮定^{*3} より、

$$d\rho = -\alpha\rho dT$$

となる。さらに、密度の変化が小さい範囲内で上の式の係数の部分が定数であるとして、

$$\rho' = -\alpha_0\rho_0 T' \quad (2.1.8)$$

となる。この式を使って (2.1.7) は、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \alpha T' \mathbf{g} \quad (2.1.9)$$

と変形できる。ただし、(2.1.8) の α_0 は α と書きなおしてある。

次に、(2.1.3c) を変形すると、

$$\begin{aligned} C_V \frac{DT}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} &= C_V \kappa \nabla^2 T \\ \Leftrightarrow C_V \frac{DT}{Dt} + \frac{p}{\rho^2} \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= C_V \kappa \nabla^2 T \end{aligned}$$

^{*3}この仮定を用いるには、(2.1.2)、

$$\frac{1}{c^2} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S = 0$$

から、

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = 0$$

を示す必要がある。ここで、このことを証明してみよう。上の式の左辺を変形し、(2.1.2) を用いて 0 となることを示す。なお、変形はヤコビ行列式を用いて行うことにする。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T &= \frac{\partial(\rho, T)}{\partial(p, T)} \frac{\partial(\rho, S)}{\partial(p, S)} \frac{\partial(p, S)}{\partial(\rho, S)} \\ &= \frac{\partial(\rho, S)}{\partial(p, S)} \frac{\partial(p, S)}{\partial(p, T)} \frac{\partial(\rho, T)}{\partial(\rho, S)} \\ &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_\rho \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{C_p}{T} \frac{T}{C_v} = \frac{C_p}{C_v} \frac{1}{c^2} \end{aligned}$$

となる。(2.1.2) より、 $1/c^2 = 0$ であるので、

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = 0$$

となる。よって、状態方程式の近似として用いることができる。

となり, (2.1.5) より, 左辺第 2 項は消去でき,

$$\begin{aligned}\frac{DT}{Dt} &= \kappa \nabla^2 T \\ \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \kappa \nabla^2 T\end{aligned}\quad (2.1.10)$$

と近似できる. 以上より, ブシネスク流体に関する方程式は, (2.1.5), (2.1.9), (2.1.10) より,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1.11a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \alpha g T' \mathbf{k}, \quad (2.1.11b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \kappa \nabla^2 T \quad (2.1.11c)$$

となる.

2.2 支配方程式の導出

前節で、ブシネスク流体を記述する方程式を導出した。本節では、その方程式をさらに変形し、ベナール対流の数値計算に用いる支配方程式を導出する。

前節で得られたブシネスク流体に関する方程式中の各変数を基本場とそこからわずれに分けて考えよう。こうすることは運動方程式を扱う上で非常に都合がよい。基本場とは運動がない状態での変数の値であるので、 u の基本場を u_B とすると、

$$u_B = 0$$

となるので、 u は基本場からのずれを u' として、

$$u = u' \quad (2.2.1)$$

と書きなおすことができる。圧力 p の基本場 p_B については静水圧平衡とし、密度 ρ の基本場 ρ_0 を用いて (2.1.6b) のように表わされる。圧力と密度の基本場からのずれについては、すでに導入したようにそれぞれ、 p' 、 ρ' で表す。次に温度 T の基本場を T_B 、それからのずれを T' とすると、

$$T = T_B + T' \quad (2.2.2)$$

と書ける。さらに、 T_B は水平方向、つまり x 方向に一様とし、

$$\begin{aligned} T_B &= T_0 + \Gamma z, \\ \frac{dT_B}{dz} &= \Gamma \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

と表すことができるとする。ここで、 T_0 は基準高度での固定温度、 Γ は高度による温度勾配である^{*4}。

(2.1.11a), (2.1.11b) に (2.2.1) を代入すると、

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (2.2.4a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u}' + \alpha g T' \mathbf{k} \quad (2.2.4b)$$

となる。ここで、今後の議論につなげるために、考えている運動が x, z 平面内の 2 次元であるとする、 \mathbf{u}' を i を x 方向の単位ベクトル、 \mathbf{k} を z 方向の単位ベクトルとして、

$$\mathbf{u}' = u' \mathbf{i} + w' \mathbf{k} \quad (2.2.5)$$

^{*4}つまり、温度の基本場の鉛直方向の勾配は一定としている。

と書ける. すると, (2.2.4a), (2.2.4b) は,

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (2.2.6a)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \nabla^2 u', \quad (2.2.6b)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + u' \frac{\partial w'}{\partial x} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \alpha g T' + \nu \nabla^2 w' \quad (2.2.6c)$$

となる. また, (2.1.11c) に (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3), (2.2.5) を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(T_B + T') + (\mathbf{u}' \cdot \nabla)(T_B + T') &= \kappa \nabla^2 (T_B + T') \\ \Leftrightarrow \frac{\partial T'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla)T' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla)T_B &= \kappa \nabla^2 T_B + \kappa \nabla^2 T' \\ \Leftrightarrow \frac{\partial T'}{\partial t} + u' \frac{\partial T'}{\partial x} + w' \frac{\partial T'}{\partial z} + w \frac{\partial T_B}{\partial z} &= \kappa \frac{\partial^2 T_B}{\partial z^2} + \kappa \nabla^2 T' \\ \Leftrightarrow \frac{\partial T'}{\partial t} + u' \frac{\partial T'}{\partial x} + w' \frac{\partial T'}{\partial z} + w \Gamma &= \kappa \nabla^2 T' \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

となり, (2.2.7) が得られる^{*5}.

現象が y 方向に一樣とし, x, z 方向の 2 次元としたとき, ブシネスク流体に関するナビエ・ストークスの方程式は,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \nabla^2 u, \quad (2.2.8a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \alpha g T + \nu \nabla^2 w \quad (2.2.8b)$$

となり, 熱力学方程式は,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} + w \Gamma = \kappa \nabla^2 T \quad (2.2.9)$$

となる. ただし, 式を見やすくするために u, w, T のプライム記号は省略している. 温度の基本場 $T_B(z)$ は高度とともに低くなるので,

$$\Gamma \equiv -\frac{dT_B}{dz} > 0 \quad (2.2.10)$$

と定義しなおすと,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} - w \Gamma = \kappa \nabla^2 T \quad (2.2.11)$$

^{*5}途中の計算で出てくる, T_B の z に関する 2 回微分の項の計算については, (2.2.3) を用いている.

$$\kappa \frac{\partial^2 T_B}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T_B}{\partial z} \right) = \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = 0.$$

となる. 連続の式は,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.2.12)$$

である. また, 境界条件は,

$$u = 0, w = 0, T = 0 \quad (z = 0, d) \quad (2.2.13)$$

とする^{*6}. 4つの未知変数 u, w, T, p' に関する方程式が (2.2.8a), (2.2.8b), (2.2.11), (2.2.12) の4つあり, 系は閉じている. しかし, 渦度や流線関数を導入することによって, 未知変数を2つにすることができ, 方程式を簡単化できるので, ここからさらに式変形を行うことにする.

ブシネスク流体の運動を記述する方程式を再び書くと, ナビエ・ストークスの方程式は,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \nabla^2 u, \quad (2.2.14a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \alpha g T + \nu \nabla^2 w \quad (2.2.14b)$$

であり, 熱力学方程式は,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} - w \Gamma = \kappa \nabla^2 T \quad (2.2.15)$$

であり, 連続の式は,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.2.16)$$

となる.

式中出现してくる圧力の基本場からのずれ p' は独立に求めることができないので, 消去したい. (2.2.14a) の両辺の z 微分をとったものから, (2.2.14b) の両辺の x 微分をとったものを引くと,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\alpha g \frac{\partial T}{\partial x} + \nu \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

となり, 連続の式 (2.2.16) より, 式の左辺最終項は消去できる. 次に, 渦度の y 成分 η を次のように導入する.

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (2.2.18)$$

^{*6}ここでは, すべりなし条件としており, $u = 0$ としている. また, 境界 $z = 0$ を貫く流れがないことから, $w = 0$, さらに温度の基本場からのずれはないとして, $T = 0$ としている.

すると, (2.2.17) は

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + w \frac{\partial \eta}{\partial z} = -\alpha g \frac{\partial T}{\partial x} + \nu \nabla^2 \eta \quad (2.2.19)$$

となる.

(2.2.14a), (2.2.14b), (2.2.15), (2.2.16) の 3 式には, 4 変数 η, u, w, T が含まれている. ところが, 3 式でこの 4 変数を求めるのは不可能であるので, ここで流線関数を導入する. 流線関数 ψ を

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.2.20)$$

と定義すると, 1 変数 u と w を 1 変数で表すことができる. このとき, 連続の式 (2.2.16) は,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} = 0 \quad (2.2.21)$$

となり, ψ を導入することにより, 連続の式を自動的に満たすことができることがわかる.

渦度の y 成分 η と流線関数 ψ の関係は,

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \nabla^2 \psi$$

つまり,

$$\eta = \nabla^2 \psi \quad (2.2.22)$$

となる. 以上より, 基礎方程式を 2 変数 T, ψ で書き直すと,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} = -\alpha g \frac{\partial T}{\partial x} + \nu \nabla^2 \eta \quad (2.2.23a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \Gamma = \kappa \nabla^2 T \quad (2.2.23b)$$

$$\eta = \nabla^2 \psi \quad (2.2.23c)$$

となる.

次に (2.2.23a), (2.2.23b), (2.2.23c) を無次元化する. 無次元変数を次のように導入する.

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\kappa}{d^2} \eta_*, & \psi &= \kappa \psi_*, & T &= \Gamma d T_*, & t &= \frac{d^2}{\kappa} t_*, \\ x &= dx_*, & z &= dz_*, & \nabla &= \frac{1}{d} \nabla_*. \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

ただし, d は長さのスケールとする. これを, (2.2.23a) に代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2}{d^4} \frac{\partial \eta_*}{\partial t_*} + \frac{\kappa^2}{d^4} \frac{\partial \psi_*}{\partial z_*} \frac{\partial \eta_*}{\partial x_*} - \frac{\kappa^2}{d^4} \frac{\partial \psi_*}{\partial x_*} \frac{\partial \eta_*}{\partial z_*} &= -\alpha g \Gamma \frac{\partial T_*}{\partial x_*} + \frac{\kappa \nu}{d^4} \nabla_*^2 \eta_* \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \eta_*}{\partial t_*} + \frac{\partial \psi_*}{\partial z_*} \frac{\partial \eta_*}{\partial x_*} - \frac{\partial \psi_*}{\partial x_*} \frac{\partial \eta_*}{\partial z_*} &= -\frac{\alpha g \Gamma d^4}{\kappa^2} \frac{\partial T_*}{\partial x_*} + \frac{\nu}{\kappa} \nabla_*^2 \eta_* \end{aligned}$$

となる. ここで, プラントル数 Pr とレイリー数 Ra を

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (2.2.25a)$$

$$Ra = \frac{\alpha g \Gamma d^4}{\kappa \nu} \quad (2.2.25b)$$

と定義すると,

$$\frac{\partial \eta_*}{\partial t_*} + \frac{\partial \psi_*}{\partial z_*} \frac{\partial \eta_*}{\partial x_*} - \frac{\partial \psi_*}{\partial x_*} \frac{\partial \eta_*}{\partial z_*} = -Pr Ra \frac{\partial T_*}{\partial x_*} + Pr \nabla_*^2 \eta_* \quad (2.2.26)$$

となる. 同様にして, (2.2.23b) に代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma \kappa}{d} \frac{\partial T_*}{\partial t_*} + \frac{\Gamma \kappa}{d} \frac{\partial \psi_*}{\partial z_*} \frac{\partial T_*}{\partial x_*} - \frac{\Gamma \kappa}{d} \frac{\partial \psi_*}{\partial x_*} \frac{\partial T_*}{\partial z_*} + \frac{\Gamma \kappa}{d} \frac{\partial \psi_*}{\partial x_*} &= \frac{\Gamma \kappa}{d} \nabla_*^2 T_* \\ \Leftrightarrow \frac{\partial T_*}{\partial t_*} + \frac{\partial \psi_*}{\partial z_*} \frac{\partial T_*}{\partial x_*} - \frac{\partial \psi_*}{\partial x_*} \frac{\partial T_*}{\partial z_*} + \frac{\partial \psi_*}{\partial x_*} &= \nabla_*^2 T_* \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

となる. (2.2.23c) についても,

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{d^2} \eta_* &= \kappa \frac{1}{d^2} \nabla_*^2 \psi_* \\ \Leftrightarrow \eta_* &= \nabla_*^2 \psi_* \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

となる. よって無次元化した方程式は, (2.2.26), (2.2.27), (2.2.28) より,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} = -Pr Ra \frac{\partial T}{\partial x} + Pr \nabla^2 \eta, \quad (2.2.29a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nabla^2 T, \quad (2.2.29b)$$

$$\eta = \nabla^2 \psi \quad (2.2.29c)$$

となる^{*7}. ただし, 式を見やすくするためにアスタリスク記号を省略した. 今後の式の表現についても, アスタリスク記号は省略することにする.

^{*7}(2.2.25) とは異なる形の無次元変数を導入した場合, どのような方程式になるのだろうか. 一応のため計算した. 詳しくは付録 4 を参照すること.

2.3 レイリーの線形安定論

この節では、前節で導出した支配方程式から、擾乱が成長も減衰もしないような臨界状態を求める。本節の議論によって、第1章で議論した臨界レイリー数が導出される。

無次元化した支配方程式を再び書くと、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} = -PrRa \frac{\partial T}{\partial x} + Pr \nabla^2 \eta, \quad (2.3.1a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nabla^2 T, \quad (2.3.1b)$$

$$\eta = \nabla^2 \psi \quad (2.3.1c)$$

である。

擾乱が小さいとき、非線形の項が他の項に比べ小さくなるので無視できる。非線形の項を無視すれば、(2.3.1a), (2.3.1b), (2.3.1c) は、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -PrRa \frac{\partial T}{\partial x} + Pr \nabla^2 \eta, \quad (2.3.2a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nabla^2 T, \quad (2.3.2b)$$

$$\eta = \nabla^2 \psi \quad (2.3.2c)$$

となる。ここで (2.3.2c) を (2.3.2a) に代入し整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi &= -PrRa \frac{\partial T}{\partial x} + Pr \nabla^2 \nabla^2 \psi \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} - Pr \nabla^2 \right) \nabla^2 \psi &= -PrRa \frac{\partial T}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

となる。一方、(??) の両辺を x に関して微分し整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \nabla^2 \frac{\partial T}{\partial x} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \frac{\partial T}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

となる。(2.3.3) を (2.3.4) に代入することによって、 T の項を消去すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - Pr \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \nabla^2 \psi = PrRa \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (2.3.5)$$

となる^{*8} .

(2.3.5) は Pr, Ra の値の組み合わせや初期擾乱の与え方に依存して, 擾乱が成長したり減衰したりする. 以下では, 擾乱が成長も減衰もしない臨界的な状態について議論する. このような状態である場合, 時間変化がないので, $\partial/\partial t$ のつく項は 0 となるので (2.3.5) は,

$$\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \psi = Ra \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (2.3.6)$$

となる. 今考えている対流の擾乱は水平方向に周期的であると仮定する. それに似せて

$$\psi = \Phi(z) \sin kx \quad (2.3.7)$$

とおく. ここで, k は x 方向の波数である. (2.3.7) を (2.3.6) に代入すると,

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^3 \Phi = -k^2 Ra \Phi \quad (2.3.8)$$

となる^{*9} .

境界条件は (2.2.13) より,

$$u = 0, w = 0, T = 0 \quad (z = 0, 1) \quad (2.3.9)$$

である. u に関して,

$$u = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (2.3.10)$$

^{*8}ここでの無次元変数の導入方法は 2.2 節で行った導入方法に合わせている. この方法とは異なる方法で導入した無次元変数を用いた場合も考えた. 詳細は付録 4 を参照すること.

^{*9}

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\ &= -k^2 \Phi(z) \sin kx + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \\ &= \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \Phi(z) \sin kx \end{aligned}$$

であるので,

$$\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \psi = \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^3 \Phi(z) \sin kx$$

となる. よって (2.3.6) は

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^3 \Phi(z) \sin kx &= -k^2 Ra \Phi(z) \sin kx \\ \Leftrightarrow \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^3 \Phi &= -k^2 Ra \Phi \end{aligned}$$

となる.

となる. 一方, w に関しては,

$$w = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (2.3.11)$$

となるので, ψ は $z = 0, 1$ で一定でなければならない. この条件を満たすために,

$$\Phi = 0 \quad (2.3.12)$$

とすればよい. なぜならば, 0 とすることによって (2.3.7) の sine の項が効かなくなるからである. また,

$$T = 0 \Leftrightarrow T = 0 \quad (z = 0, 1) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (2.3.13)$$

ここで, 今の状況設定より (2.3.5) の時間微分の項を消去すると,

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi = Ra \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.3.14)$$

となる. よって,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \nabla^2 \nabla^2 \psi = 0 \Rightarrow \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^2 \Phi = 0 \quad (2.3.15)$$

となる. (2.3.10), (2.3.12), (2.3.15) より境界条件は,

$$\Phi = 0, \frac{d\Phi}{dz} = 0, \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^2 \Phi = 0 \quad (z = 0, 1) \quad (2.3.16)$$

と書きかえられる.

レイリーはこの後の考察をより簡単なものにするために, $d\Phi/dz = 0$ の代わりに $d^2\Phi/dz^2 = 0$ を用いた^{*10}. すると, 境界条件は,

$$\Phi = 0, \quad \frac{d^2\Phi}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^4\Phi}{dz^4} = 0 \quad (z = 0, 1) \quad (2.3.17)$$

となる^{*11}. Φ_0 を定数として,

$$\Phi = \Phi_0 \sin n\pi z \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (2.3.18)$$

^{*10}

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{du}{dz} = 0 \quad (z = 0, 1)$$

である. 流体が固体面に与える応力 τ_x は粘性係数を μ として,

$$\tau_x = \mu \frac{du}{dz}$$

で表されるので, $du/dz = 0$ は自由すべり条件を意味する. (2.2.13) で粘着条件としたが, 議論を単純化するためにここで自由すべり条件に変更したと解釈できる.

^{*11}(2.3.17) の第 3 式は (2.3.16) の第 3 式を展開し, (2.3.17) の第 1, 2 式を代入することによって得られる.

とおくと, (2.3.17) は満たされることがわかる. (2.3.18) を (2.3.8) に代入すると,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)^3 \Phi_0 \sin n\pi z &= -k^2 Ra \Phi_0 \sin n\pi z \\ \Leftrightarrow \{k^2 + (n\pi)^2\}^3 \Phi_0 \sin n\pi z &= k^2 Ra \Phi_0 \sin n\pi z \\ \Leftrightarrow Ra &= \frac{\{k^2 + (n\pi)^2\}^3}{k^2} \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

となり, レイリー数 Ra と x 方向の波数 k との関係が求まった. さて, $n = 1$ とおいたときのこの関係を図 2.3.1 に示す^{*12}.

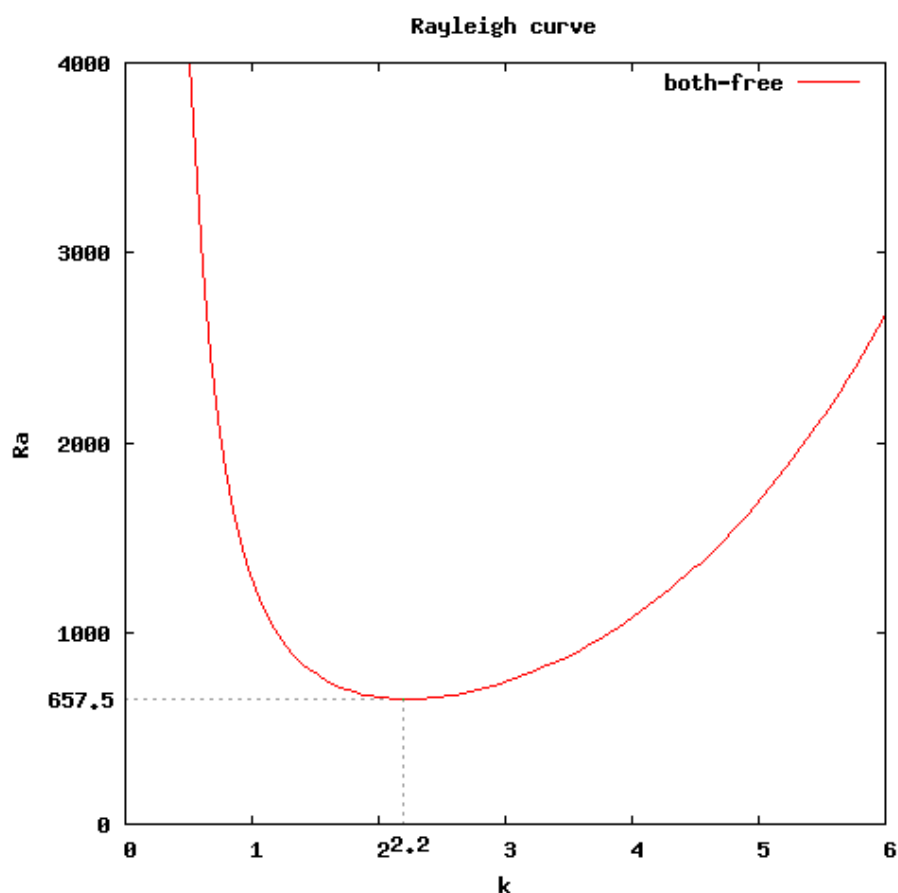


図 2.3.1: $n = 1$ としたときの臨界レイリー数 Ra と水平方向の波数 k の関係

^{*12} $n = 1$ のとき (2.3.19) は,

$$\Phi = \Phi_0 \sin \pi z$$

となる. Φ の z 方向に節のない分布をとる. $n = 2, 3, \dots$ の場合については付録 5 を参照すること.

図 2.3.1 に示すような曲線をレイリー曲線と呼ぶ。この曲線は波数 $k = 2.2 \dots$ のときに最小値 657.5 をとる^{*13}。この最小値を臨界レイリー数 Ra_c 、そのときの波数を臨界波数 k_c と呼ぶ。さて、レイリー数 Ra を少しずつ上げていく状況を考える。レイリー数が Ra_c より小さい値をとるうちは、どんな波数をもつ擾乱も減衰するので、対流は発生しない。レイリー数が Ra_c に達すると、臨界波数 k_c をもつ擾乱のみが中立となる。さらに、レイリー数が Ra_c を超えると、 k_c のまわりの波数をもつ擾乱が発達する。

本節で行った議論は、3.4 節で行う数値シミュレーション結果の考察に用いる。

^{*13}この最小値を求める方法を紹介する。(2.3.19)の式に $n = 1$ を代入した式を書くと、

$$Ra = \frac{(k^2 + \pi^2)^3}{k^2}$$

となる。 $k^2 = K$ とおくと、

$$Ra = \frac{(K + \pi^2)^3}{K}$$

となる。この式より、 Ra を K に関して微分してやると、

$$\frac{\partial Ra}{\partial K} = \frac{3K(K + \pi^2)^2 - (K + \pi^2)^3}{K^2} = \frac{(K + \pi^2)^2(2K - \pi^2)}{K^2}$$

となることから、 Ra は $K = \pi^2/2$ のとき最小値をとる。このことから、 Ra は $k = \pi/\sqrt{2} \simeq 2.2$ のとき、最小値 $27\pi^4/4 \simeq 657.5$ をとる。

第3章 対流の数値計算

3.1 計算手法

第2章で導出した無次元変数の方程式は、時間および空間微分を含む偏微分方程式である。ベナール対流を理解するためには、これらの偏微分方程式を解かねばならない。ところが、方程式は非線形であるので、解析的に解くことは不可能である。本章では、得られた非線形方程式を数値的に解く方法を考える。

ここでは、数値計算の方法として、格子点(差分)法^{*1}を採用する。方程式の空間微分の項は中央差分で近似し、時間差分の項は1回目の積分ではオイラースキーム、2回目からはアダムス・バッシュホーススキームで近似する^{*2}。

まず、渦度方程式(2.2.29a)を差分近似するために、変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} &= -PrRa \frac{\partial T}{\partial x} + Pr \nabla^2 \eta \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} - PrRa \frac{\partial T}{\partial x} + Pr \nabla^2 \eta \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

となる。空間差分の間隔は、 x, z 方向ともに Δd 、時間差分の間隔は Δt とし、右肩に (k) をつけた変数を時間 $t = k\Delta t$ における変数の近似値とし、この式を差分近似する。

^{*1}領域に有限個の格子点を考える方法。詳しくは付録2を参照すること。

^{*2}時間差分スキームについては、付録3を参照すること。

非線形 (移流) 項の差分近似

(3.1.1) の右辺第 1, 2 項目の非線形項については,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \eta \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \eta \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\psi \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

とする. (3.1.2) の左辺を J とおき, 右辺に関して,

$$J^{[1]} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad (3.1.3a)$$

$$J^{[2]} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \eta \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \eta \right) \quad (3.1.3b)$$

$$J^{[3]} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\psi \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \quad (3.1.3c)$$

とそれぞれおくと,

$$J = \frac{1}{3}(J^{[1]} + J^{[2]} + J^{[3]}) \quad (3.1.4)$$

と書ける. $J^{[1]}$ を中央差分によって差分近似すると,

$$\begin{aligned} J_{m,n}^{[1]} \simeq & \frac{\psi_{m,n+1} - \psi_{m,n-1}}{2\Delta d} \frac{\eta_{m+1,n} - \eta_{m-1,n}}{2\Delta d} \\ & - \frac{\psi_{m+1,n} - \psi_{m-1,n}}{2\Delta d} \frac{\eta_{m,n+1} - \eta_{m,n-1}}{2\Delta d} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

となる. ただし, $J^{[1]}$ の右下につけた m, n は格子点の位置を示すパラメータとする. $J^{[2]}$ を中央差分によって差分近似すると,

$$\begin{aligned} J_{m,n}^{[2]} \simeq & \left(\frac{\psi_{m+1,n+1} - \psi_{m+1,n-1}}{2\Delta d} \eta_{m+1,n} - \frac{\psi_{m-1,n+1} - \psi_{m-1,n-1}}{2\Delta d} \eta_{m-1,n} \right. \\ & \left. - \frac{\psi_{m+1,n+1} - \psi_{m-1,n+1}}{2\Delta d} \eta_{m,n+1} + \frac{\psi_{m+1,n-1} - \psi_{m-1,n-1}}{2\Delta d} \eta_{m,n-1} \right) / 2\Delta d \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

となる. $J^{[3]}$ についても同様に,

$$\begin{aligned} J_{m,n}^{[3]} \simeq & \left(\psi_{m,n+1} \frac{\eta_{m+1,n+1} - \eta_{m-1,m+1}}{2\Delta d} - \psi_{m,n-1} \frac{\eta_{m+1,n-1} - \eta_{m-1,n-1}}{2\Delta d} \right. \\ & \left. - \psi_{m+1,n} \frac{\eta_{m+1,n+1} - \eta_{m+1,n-1}}{2\Delta d} - \psi_{m-1,n} \frac{\eta_{m-1,n+1} - \eta_{m-1,m-1}}{2\Delta d} \right) / 2\Delta d \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

と差分近似できる. ここで, (3.1.4) の J は時間 $t = \Delta t$ における変数とし, また, ある格子点の位置 (m, n) で離散化したものであるので,

$$J = J_{m,n}^{(k)} \quad (3.1.8)$$

と表現する*3.

拡散項の差分近似

(3.1.1) の右辺最終項の拡散項については, 中央差分によって差分近似する. つまり,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \eta &= \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \\ &\simeq \frac{(\eta_{m+1,n} - \eta_{m,n})/\Delta d - (\eta_{m,n} - \eta_{m-1,n})/\Delta d}{\Delta d} \\ &\quad + \frac{(\eta_{m,n+1} - \eta_{m,n})/\Delta d - (\eta_{m,n} - \eta_{m,n-1})/\Delta d}{\Delta d} \\ &= \frac{\eta_{m+1,n}^{(k)} + \eta_{m-1,n}^{(k)} + \eta_{m,n+1}^{(k)} + \eta_{m,n-1}^{(k)} - 4\eta_{m,n}^{(k)}}{(\Delta d)^2} \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

と差分近似できる.

時間差分近似

$f_{m,n}^{(k)}$ を次のようにおく.

$$\begin{aligned} f_{m,n}^{(k)} &= -J_{m,n}^{(k)} \\ &\quad - Pr Ra \frac{T_{m+1,n}^{(k)} - T_{m-1,n}^{(k)}}{2\Delta d} \\ &\quad + Pr \frac{\eta_{m+1,n}^{(k)} + \eta_{m-1,n}^{(k)} + \eta_{m,n+1}^{(k)} + \eta_{m,n-1}^{(k)} - 4\eta_{m,n}^{(k)}}{(\Delta d)^2} \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

すると, 時間スキームをオイラースキームとしたとき (3.1.1) は,

$$\frac{\eta_{m,n}^{(k+1)} - \eta_{m,n}^{(k)}}{\Delta t} = f_{m,n}^{(k)}$$

*3このような差分近似を行う理由については付録7を参照すること.

と近似できるので、この式より $\eta_{m,n}^{(k+1)}$ について解くと、

$$\eta_{m,n}^{(k+1)} = \eta_{m,n}^{(k)} + f_{m,n}^{(k)} \Delta t \quad (3.1.11)$$

となる。また、時間スキームをアダムス・バッシュホーススキームとしたとき (3.1.1) は、

$$\frac{\eta_{m,n}^{(k+1)} - \eta_{m,n}^{(k)}}{\Delta t} = \frac{3}{2} f_{m,n}^{(k)} - \frac{1}{2} f_{m,n}^{(k-1)}$$

と近似できるので、この式より $\eta_{m,n}^{(k+1)}$ について解くと、

$$\eta_{m,n}^{(k+1)} = \eta_{m,n}^{(k)} + \left(\frac{3}{2} f_{m,n}^{(k)} - \frac{1}{2} f_{m,n}^{(k-1)} \right) \Delta t \quad (3.1.12)$$

となる。

熱力学方程式 (2.2.29b) についても同様に差分近似する。 $g^{(k)}$ を次のようにおく。

$$\begin{aligned} g_{m,n}^{(k)} = & - J_{m,n}^{(k)} \\ & - \frac{\psi_{m+1,n}^{(k)} - \psi_{m-1,n}^{(k)}}{2\Delta d} \\ & + \frac{\eta_{m+1,n}^{(k)} + \eta_{m-1,n}^{(k)} + \eta_{m,n+1}^{(k)} + \eta_{m,n-1}^{(k)} - 4\eta_{m,n}^{(k)}}{(\Delta d)^2} \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

すると、時間スキームをオイラースキームとしたとき、

$$T_{m,n}^{(k+1)} = T_{m,n}^{(k)} + g_{m,n}^{(k)} \Delta t$$

と近似でき、時間スキームをアダムス・バッシュホーススキームとしたとき、

$$T_{m,n}^{(k+1)} = T_{m,n}^{(k)} + \left(\frac{3}{2} g_{m,n}^{(k)} - \frac{1}{2} g_{m,n}^{(k-1)} \right) \Delta t \quad (3.1.14)$$

と近似できる。

渦度 η と流線関数 ψ の関係は (2.2.29c) で与えられる。(??) を差分近似すると、

$$\eta_{m,n} = \frac{\psi_{m+1,n} + \psi_{m-1,n} + \psi_{m,n+1} + \psi_{m,n-1} - 4\psi_{m,n}}{(\Delta d)^2} \quad (3.1.15)$$

となる。この式から、 $\psi_{m,n}$ は、

$$\psi_{m,n} = \frac{\psi_{m+1,n} + \psi_{m-1,n} + \psi_{m,n+1} + \psi_{m,n-1} - \eta_{m,n}(\Delta d)^2}{4} \quad (3.1.16)$$

となる。よって、ある格子点での流線関数の値は、その四方の格子点での流線関数の値、およびその格子点での渦度の値によって決定されることがわかる。

ところが、これは多変数の連立一次方程式である。この種の方程式の解法はいくつかあるが、今回は反復させて解く方法を採用する。また、反復計算の方法として、ヤコビ法を選択した。この方法では、 k 回目の計算によって求めた流線関数 $\psi^{[k]}$ 、渦度 $\eta^{[k]}$ を用いて $k + 1$ 回目の計算を行い、 $\psi^{[k+1]}$ を求める。式で書くと、

$$\psi_{m,n}^{[k+1]} = \frac{\psi_{m+1,n}^{[k]} + \psi_{m-1,n}^{[k]} + \psi_{m,n+1}^{[k]} + \psi_{m,n-1}^{[k]} - \eta_{m,n}^{[k]}(\Delta d)^2}{4} \quad (3.1.17)$$

と書ける。この計算を繰り返し行うに従い、各格子点での流線関数の値が収束していき、真の値に近づいていく。ゆえに、反復計算の回数が多いほど、より正確な値が求まることがわかる。しかし、回数を我武者羅に多くしすぎると計算に非常に時間がかかるので、今回の数値計算では予備的実験の結果より、反復計算回数を 200 回とした決定した^{*4}。

^{*4}ヤコビ法のより詳細な手順、および反復計算の回数を 200 回と決定した予備的実験については、付録 1 を参照すること。

3.2 状況設定と実験条件

前節では, ベナール対流をシミュレーションするために, 導出した方程式の差分近似の方法について議論した. 本章では, これらの方程式を解く領域と実験条件について述べる.

図 3.2.1 のような 2 次元領域を考える. 低温熱源をおいた上部境界を $z = 1$, 高温熱源をおいた下部境界を $z = 0$ とし, x 方向には $0 \sim 8$ の有限の領域を考え, y 方向には現象は一様とする^{*5}.



図 3.2.1 考える 2 次元領域. 上部境界を $z = 1$, 下部境界を $z = 0$ とし, x 方向には $0 \sim 8$ の有限領域とする.

ベナール対流をシミュレーションするために, 温度擾乱 T , 渦度 η , 流線関数 ψ の時間発展を以下の条件で計算した.

- 空間差分の間隔 $\Delta d = 0.05$ とし, 差分法は 2 次の精度をもつ中央差分法を選択した.
- ただし, 移流項の差分に関しては, 荒川ヤコビアン (Arakawa, 1966) を選択した.
- 時間差分の間隔 $\Delta t = 0.0002$ とし, 差分法はアダムス・バッシュフォース法を選択した^{*6}.
- プラントル数 $Pr = 1$ とし, レイリー数については次節より様々に変化させるため, ここでは決定しない.

^{*5} x 方向には有限領域を考えているが, この有限領域で x 方向に無限に広がるような領域を考慮することができるように設定を工夫する. この設定については次節で述べる.

^{*6}ただし, 1 回目の時間積分はオイラー陽解法を用いている. 詳しくは付録 3 を参照すること.

境界条件

境界条件について述べる. $z = 0, 1$ にはそれぞれ高温熱源, 低温熱源を与えているので, この二平面において温度擾乱は発生しない. よって,

$$T = 0 \quad (z = 0, 1) \quad (3.2.1)$$

とする. また, 熱源は固定壁と考えることができるので, 当然, その壁を貫く流れはない. よって,

$$w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (z = 0, 1) \quad (3.2.2)$$

となり, 流線関数 ψ については,

$$\psi = \text{const} \quad (z = 0, 1) \quad (3.2.3)$$

を満たす必要がある. 数値計算をするためには, この式の右辺の定数を決める必要がある. そこで, レイリーの線形安定論で導出した (2.3.18) に合わせるために,

$$\psi = 0 \quad (z = 0, 1) \quad (3.2.4)$$

とする. 一方, 渦度の y 成分, η に関しては,

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.2.5)$$

であるが, (3.2.2) より, w は上下境界 $z = 0, 1$ で 0 で一定, つまり,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (z = 0, 1) \quad (3.2.6)$$

である. また, 流体が固定壁に与える応力の x 成分 τ_x は, 流体の粘性係数を μ とし,

$$\tau_x = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.2.7)$$

となるが, ここでは自由すべり条件とし,

$$\tau_x = 0 \quad (z = 0, 1) \quad (3.2.8)$$

とする. よって,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (z = 0, 1) \quad (3.2.9)$$

となるので, η の境界条件は,

$$\eta = 0 \quad (z = 0, 1) \quad (3.2.10)$$

となる. (3.2.1), (3.2.4), (3.2.10) より, 上下の境界条件は,

$$T = \psi = \eta = 0 \quad (z = 0, 1) \quad (3.2.11)$$

とする.

また, 側方の境界 $x = 0, 8$ に関しては, 周期的境界条件^{*7} とした.

初期条件

初期条件について述べる. ただし, m, n をそれぞれ x, z 方向の格子点の位置を表す座標として, (m, n) のように表すことにする.

- 考えている領域 (格子点) において,

$$\eta = \psi = 0 \quad (z = 0, 1) \quad (3.2.12)$$

とする.

- 温度擾乱 T については, x 方向に設定した格子点数を M , z 方向に設定した格子点数を N とすると, 格子点 $((M-1)/2, (N-1)/2)$ に

$$T = 0.01 \quad (3.2.13)$$

の微小擾乱^{*8} を与え, それ以外の格子点では,

$$T = 0 \quad (3.2.14)$$

の温度擾乱を与える.

とした.

^{*7}周期的境界条件は数値計算を行う上で非常に都合がよい. もし, 側方の境界条件にこの境界条件を考えなかった場合, 側方境界での η, ψ といった変数の値を何らかの方法で決めてやらなければならない. しかし, 周期的境界条件とすると, 計算領域は有限であるが, その方向に無限に続くような領域を自然に考えることができるのである. また, 少し発展的な話になるが, 周期的境界条件はスペクトル法で計算する場合, 非常に有効である.

^{*8}このような微小擾乱を与える必要がある理由については付録 8 を参照.

3.3 予備的実験その 1

2.3 節で吟味したレイリーの線形安定論の結果より, 対流が発生する最小のレイリー数, つまり, 臨界レイリー数 Ra_c は $657.5\dots$ の値をとることがわかった. よって, 組み立てた計算プログラム (モデル) に誤りがない限り, レイリー数をこの臨界値よりも小さく設定すれば, 対流は発生しないはずである. そこで, プログラムが正確であることを確かめるための予備的実験として, $Ra = 600$ と設定してシミュレーションすることによって, 対流が発生しないことを確かめる. 計算結果は, $t = 10$ まで行った.

図 3.3.1 に温度擾乱場, 図 3.3.2 に温度場, 図 3.3.3 に渦度場, 図 3.3.4 に流線関数の, $t = 5$ までの時間発展の様子を示す. ただし, 温度場は温度擾乱場と基本場を足し合わせたものである.

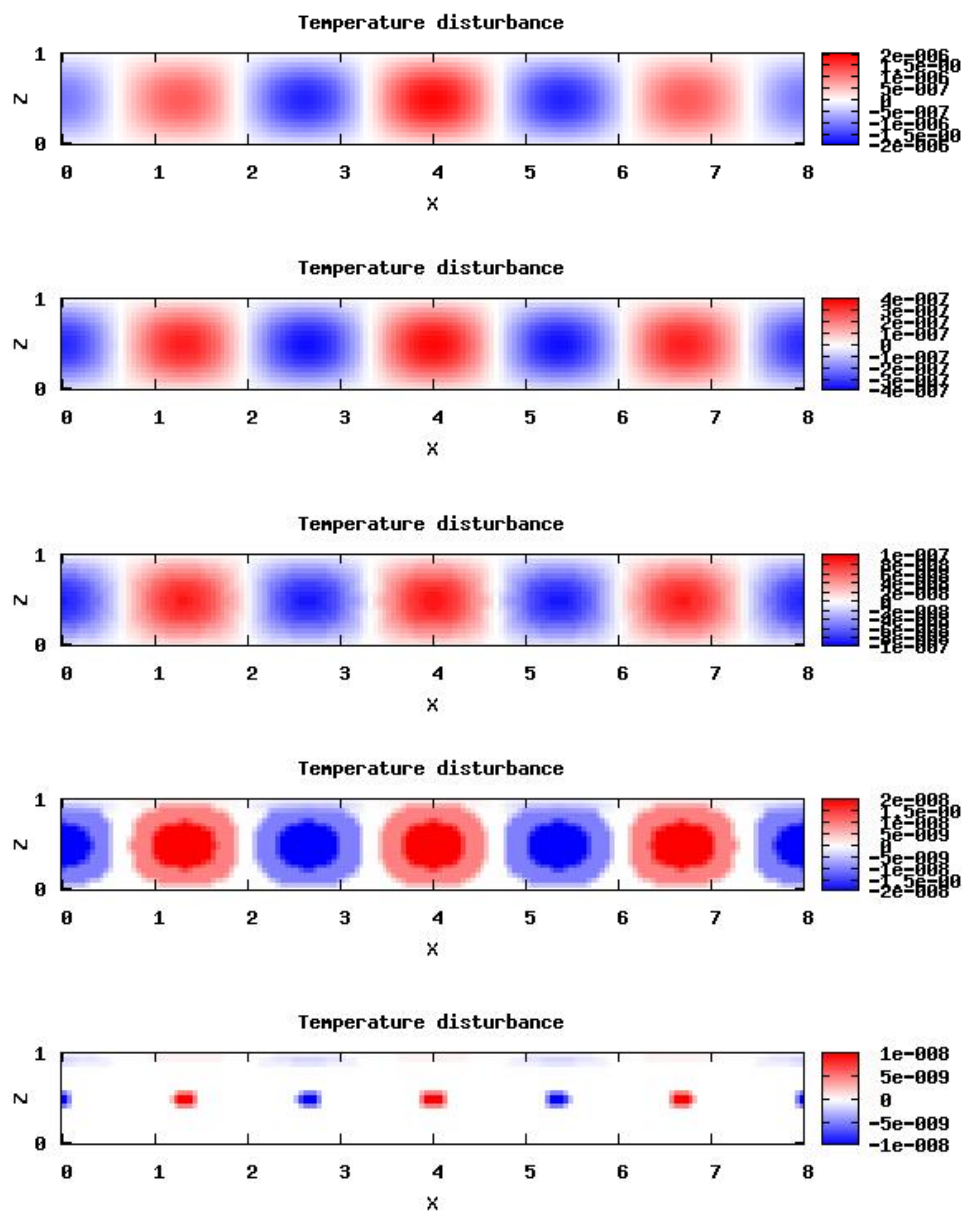


図 3.3.1: 温度擾乱場の時間発展. 上から順に, $t = 1, 2, 3, 4, 5$ における場である.

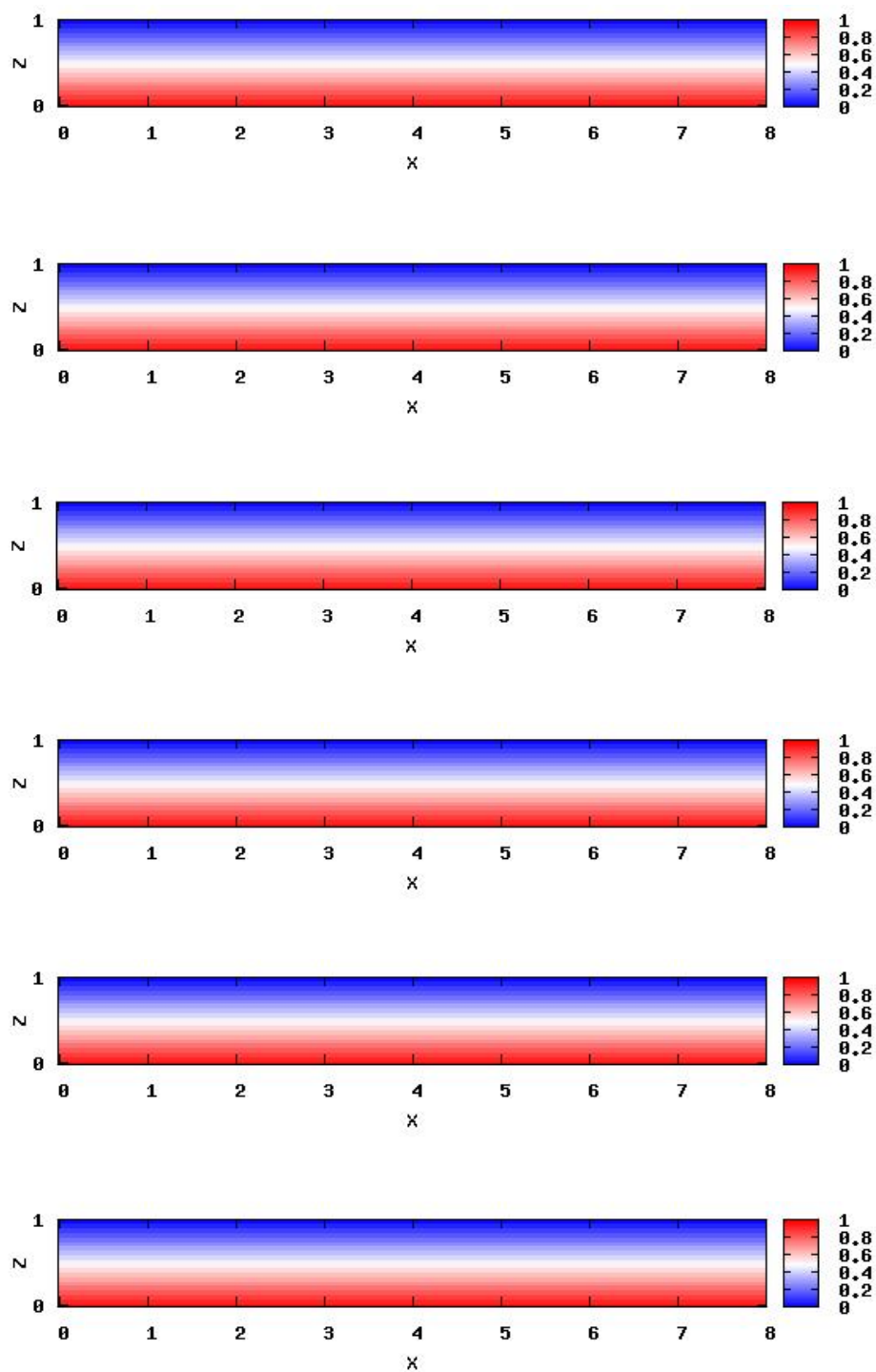


図 3.3.2: 温度場の時間発展. 上から順に, $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ における場である.

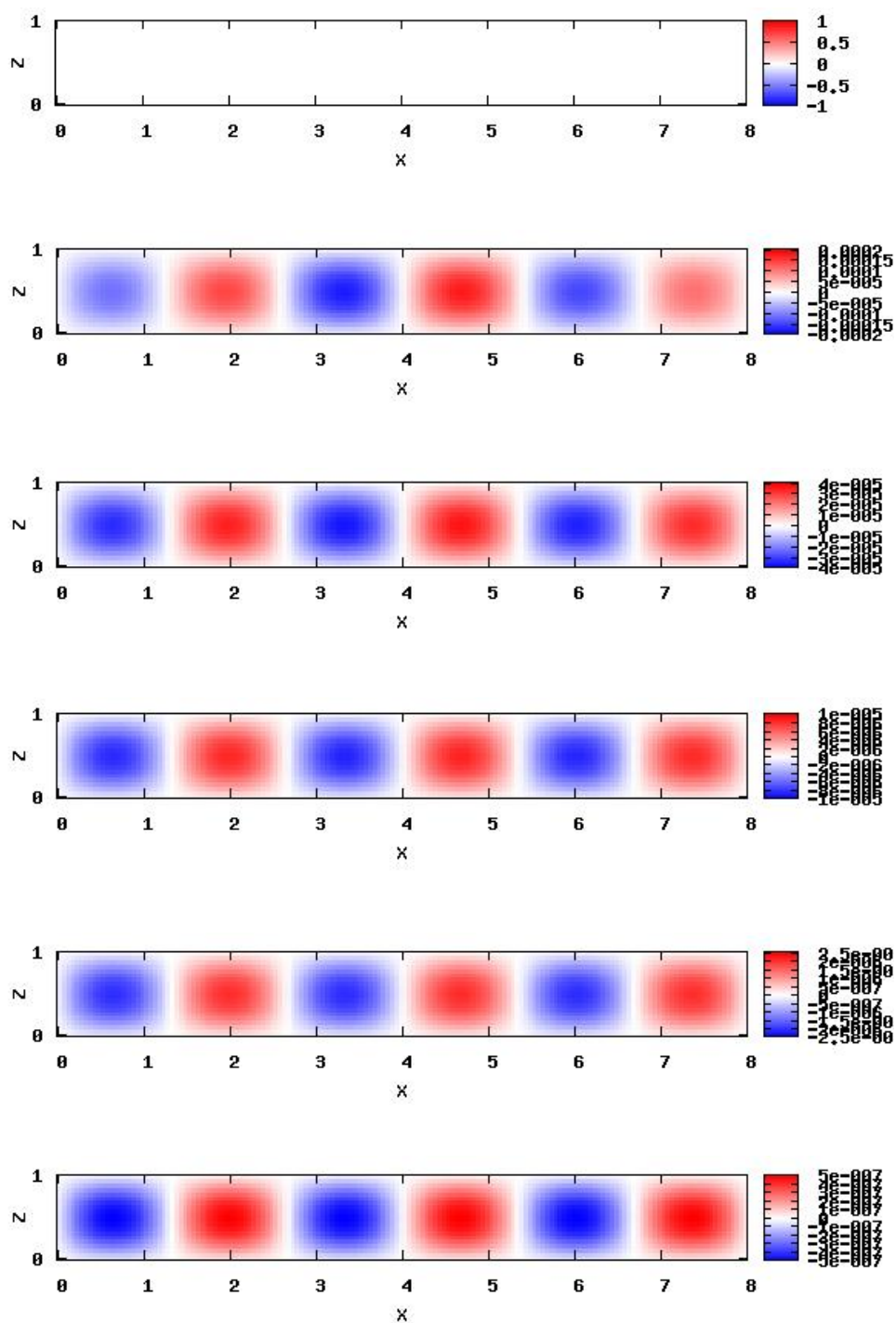


図 3.3.3: 渦度場の時間発展. 上から順に, $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ における場である.

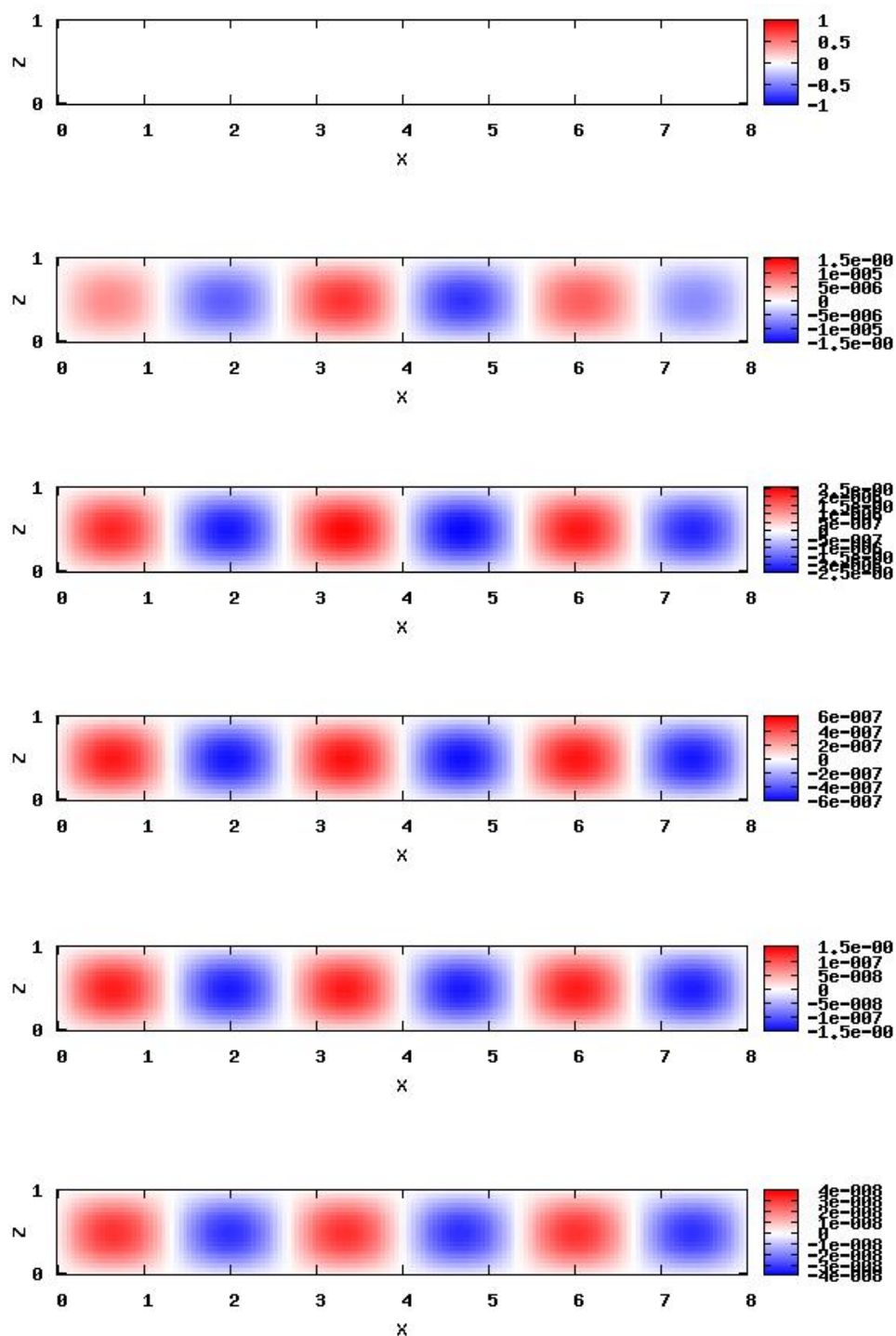


図 3.3.4: 流線関数の時間発展. 上から順に, $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ における場である.

図 3.3.1 ~ 図 3.3.4 の温度擾乱場, 渦度場, 流線関数の時間発展を見ると, 時間とともに減衰していくのがわかる. また, $t = 5$ の流線関数の値は $O(10^{-8})$ と非常に小さく, 流れが非常に弱まっていることがわかる. よって, $Ra = 600$ と設定すると, 非常に弱い流れは生じたものの, 擾乱は発達せず, 適切な結果が得られたと考えられる.

ここで, 擾乱が減衰していく様子をエネルギーの観点から見てみよう. 運動エネルギーは速度の 2 乗で与えられるので, 流線関数 ψ の値から運動エネルギーを求めることができる. ある格子点位置 (m, n) での水平方向の速度を $u_{m,n}$, 鉛直方向の速度を $w_{m,n}$, 流線関数を $\psi_{m,n}$ とし, エネルギーに相当する物理量 $e_{m,n}$ を,

$$\begin{aligned} e_{m,n} &= u_{m,n}^2 + w_{m,n}^2 \\ &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{m,n}^2 + \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{m,n}^2 \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

とおく. ただし, e を領域内で積分したものを E とすると,

$$E = \int \int e \, dx dz = \sum_{m,n} e_{m,n} \quad (3.3.2)$$

と書ける. (3.3.2) において, 和をとる格子点の範囲については, $z = 0, 1$ 上の格子点を除くすべての格子点とする. これは, $z = 0, 1$ 上の格子点は上下境界に位置するため, 水平速度 u の値が得られないためである. この方法に従って計算した E の時間変化を図 3.3.5 に示す.

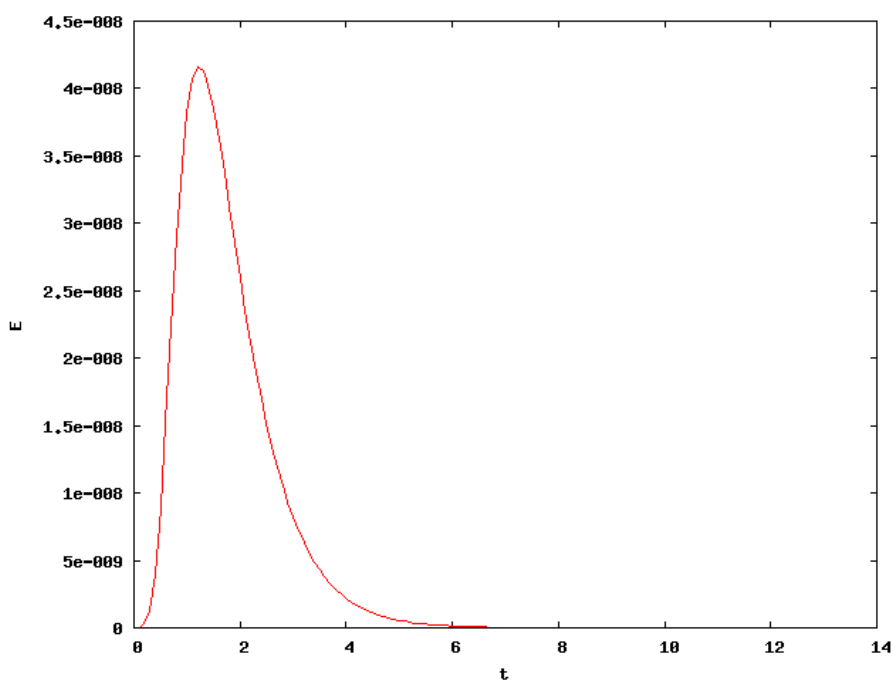


図 3.3.5: $Ra = 600$ のときの運動エネルギー E の時間変化. ただし, 横軸に時間 t , 縦軸に E をとっている.

図 3.3.5 より, はじめのうちは, 時間とともに E は増加している. しかし, $O(10^{-8})$ の非常に小さな極大値をとった後, E は時間とともに減少していくことがわかる. したがって, エネルギーの観点からも, $Ra = 600$ と設定した場合に擾乱は発達しないことが示された.

3.4 予備的実験その2

レイリーの線形安定論より, レイリー数 Ra が $657.5\dots$ を超えると, 対流が発生することがわかっている. そこで, 本節では臨界レイリー数よりも少し超えたレイリー数で対流が発生することを, 自分のプログラムを用いて確かめる. ただし, 後で述べるように, 水平方向, すなわち x 方向の計算領域の設定が, 対流の発生に影響を与えることに注意しなければならない.

レイリーの線形安定論で得られた臨界レイリー数 Ra_c と水平方向の波数 k との関係を再び書くと,

$$Ra = \frac{(k^2 + \pi^2)^3}{k^2} \quad (3.4.1)$$

である. ただし, (3.4.1) は $n = 1$, つまり流線関数が $0 < z < 1$ において, z 方向に節をもたない構造をとる場合の関係である. 擾乱の波長を λ とすると, 水平方向の波数 k との関係は,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (3.4.2)$$

である. (3.4.2) を (3.4.1) に代入することによって, レイリー数 Ra と波長 λ の関係を求めると,

$$Ra = \frac{\{(2\pi/\lambda)^2 + \pi^2\}^3}{(2\pi/\lambda)^2} = \frac{\lambda^2\pi^4}{4} \left(\frac{4}{\lambda^2} + 1 \right)^3 \quad (3.4.3)$$

となる. この関係のグラフを図 3.4.1 に示す.

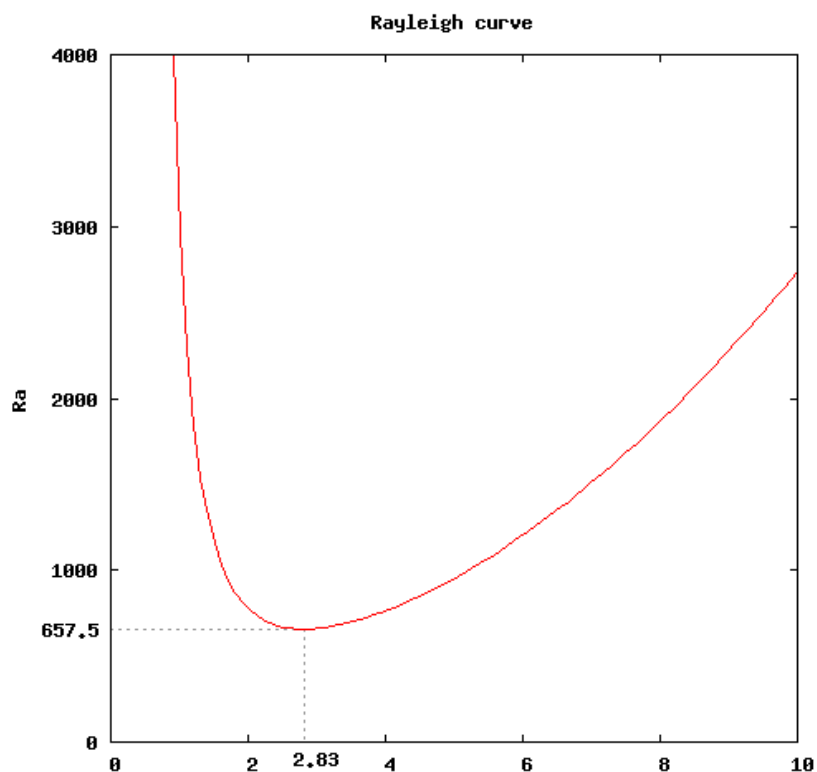


図 3.4.1: レイリー数 Ra と波長 λ の関係. 横軸のラベルは表示されていないが, 横軸は λ である.

レイリー数 Ra が臨界レイリー数 Ra_c をとるときの波長^{*9} は約 2.83 である.

さて, レイリー数 Ra が臨界レイリー数 Ra_c を超えた値をとったときの現象について議論してみよう. 図 3.4.1 から臨界レイリー数付近の範囲を拡大した図を図 3.4.2 に示す.

^{*9}レイリー数 Ra が臨界レイリー数 Ra_c をとるときの水平方向の波数を臨界波数と呼んでいることから, そのときの波長は「臨界波長」と呼んでもよいであろうか.

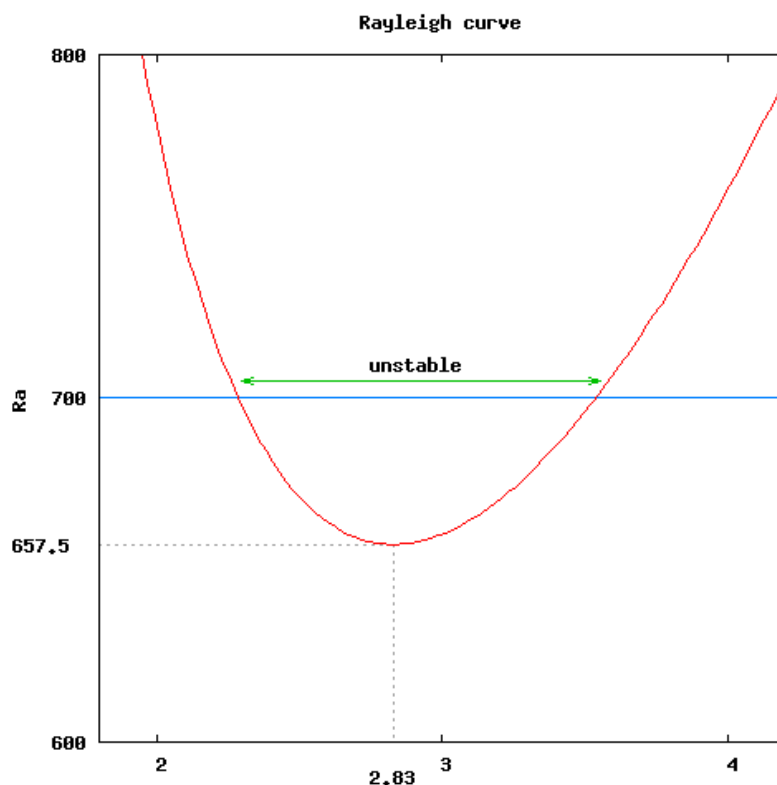


図 3.4.2: 図 3.4.1 から臨界レイリー数 Ra_c 付近の部分拡大した図. 横軸は λ である. ただし, 赤線はレイリー曲線, 青線は $Ra = 700$ の線である.

図 3.4.2 について, 赤色で示した曲線は臨界レイリー数 Ra_c と臨界波長 λ_c の関係を示したレイリー曲線, 青色で示した直線は $Ra = 700$ の線を表している. レイリー数 Ra を 700 と設定した場合について考えよう. $Ra = 700$ の直線とレイリー曲線との交点の λ は,

$$\lambda = 2.29 \dots, 3.53 \dots \quad (3.4.4)$$

であることから^{*10}, 約 2.29 ~ 3.53 の波長の擾乱が不安定で発達することがわかる. 実際に計算することによって, この波長領域の擾乱が発生することを確認してみる. 計算は $t = 30$ まで行った.

^{*10}ここでは, レイリー曲線と $Ra = 700$ との交点の λ をニュートン・ラフソン法を用いて求めた. この方法については付録 10 を参照すること.

図 3.4.3 に温度擾乱場, 図 3.4.4 に温度場, 図 3.4.5 に渦度場, 図 3.4.6 に流線関数の, $t = 30$ までの時間発展の様子を示す.

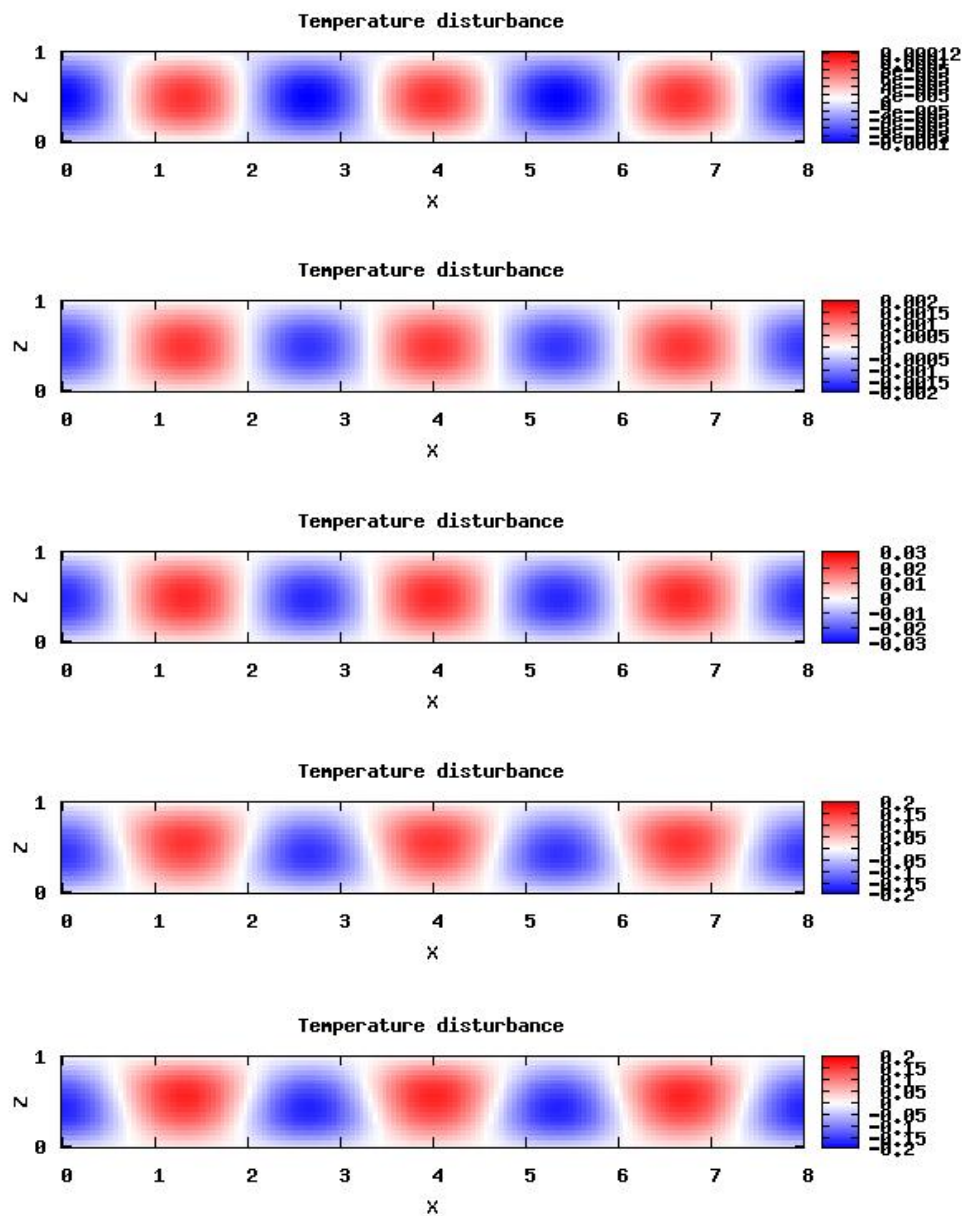


図 3.4.3: 温度擾乱場の時間発展. 上から順に, $t = 6, 12, 18, 24, 30$ の場である.

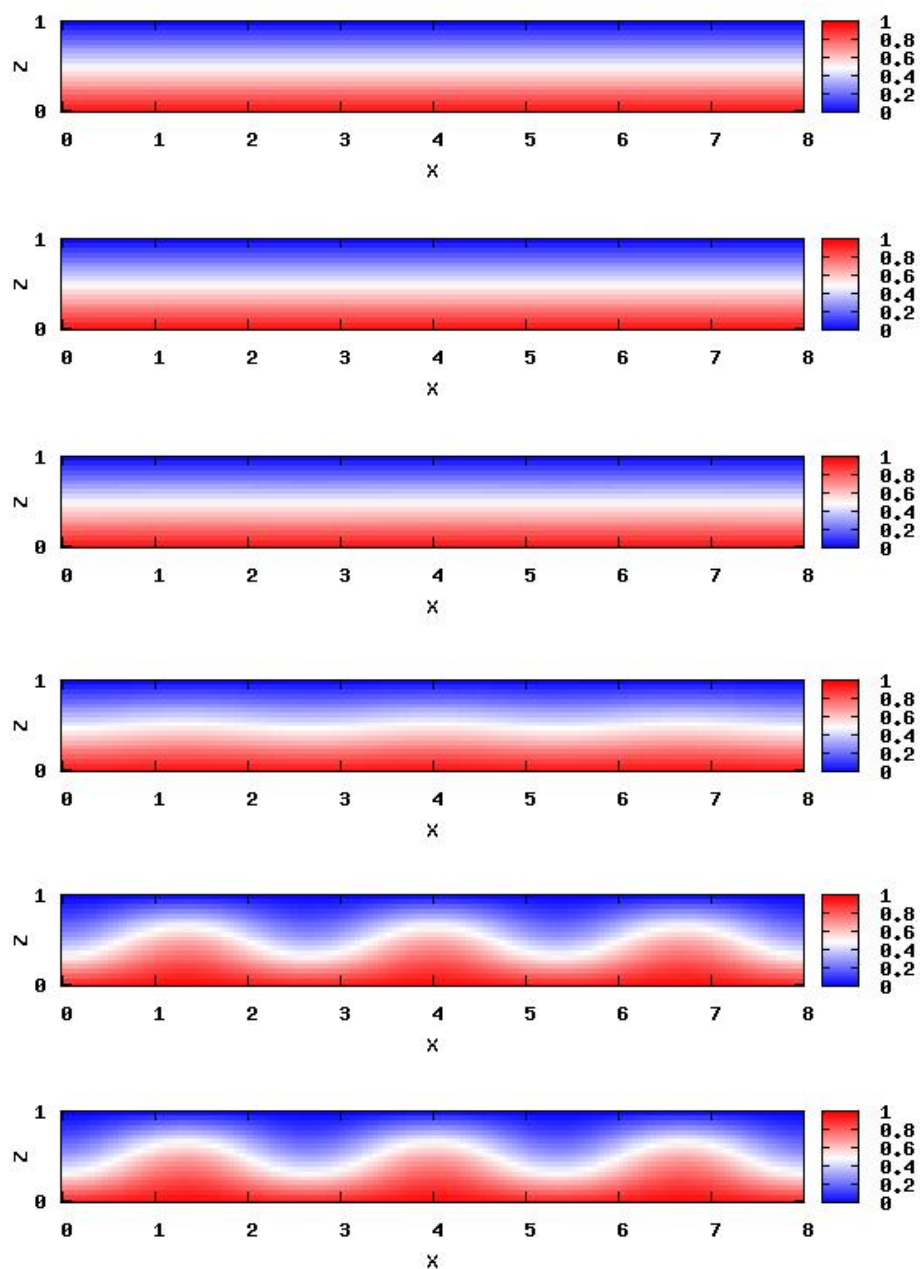


図 3.4.4: 温度場の時間発展. 上から順に, $t = 0, 6, 12, 18, 24, 30$ の場である.

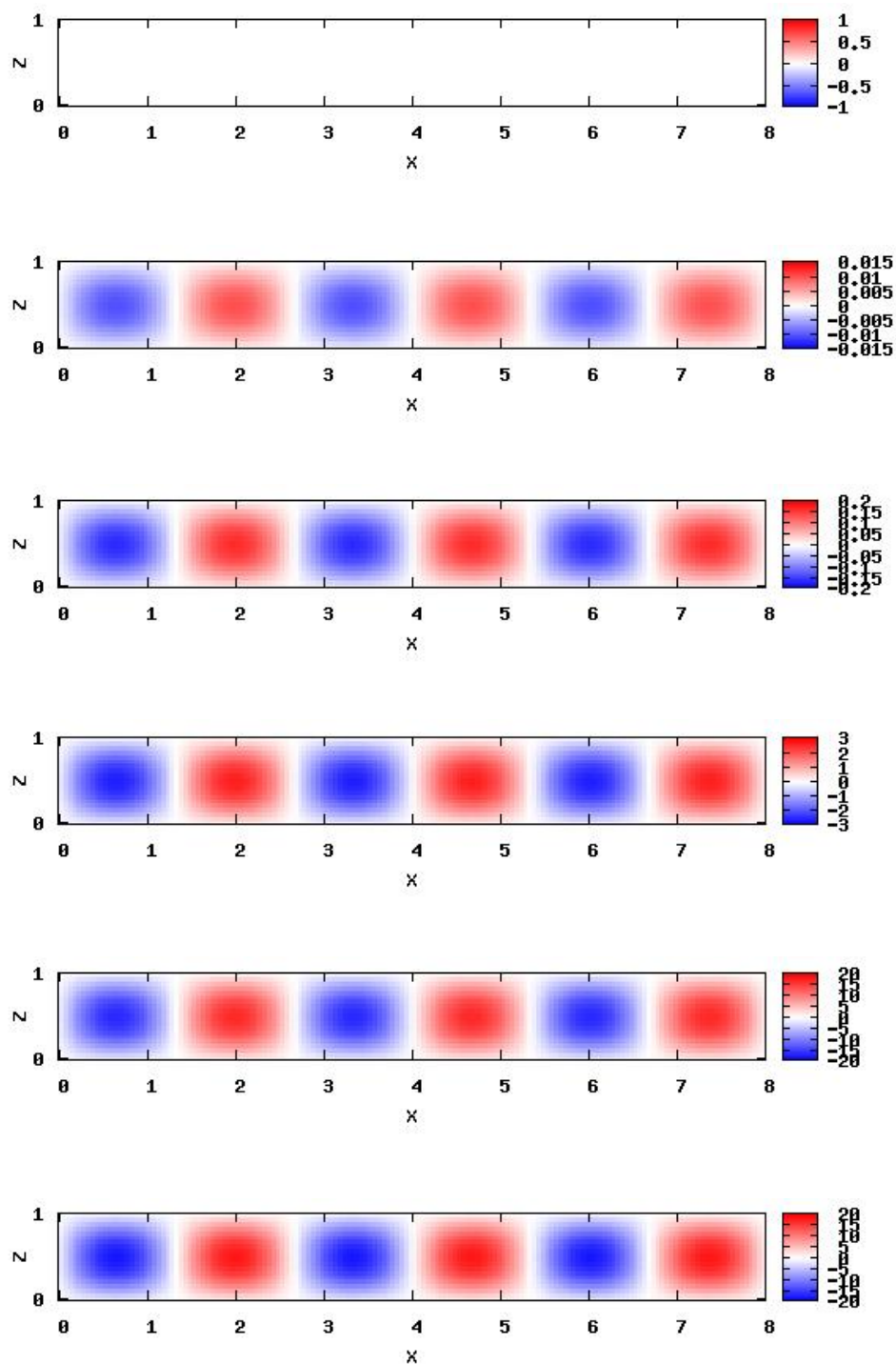


図 3.4.5: 渦度場の時間発展. 上から順に, $t = 0, 6, 12, 18, 24, 30$ の場である.

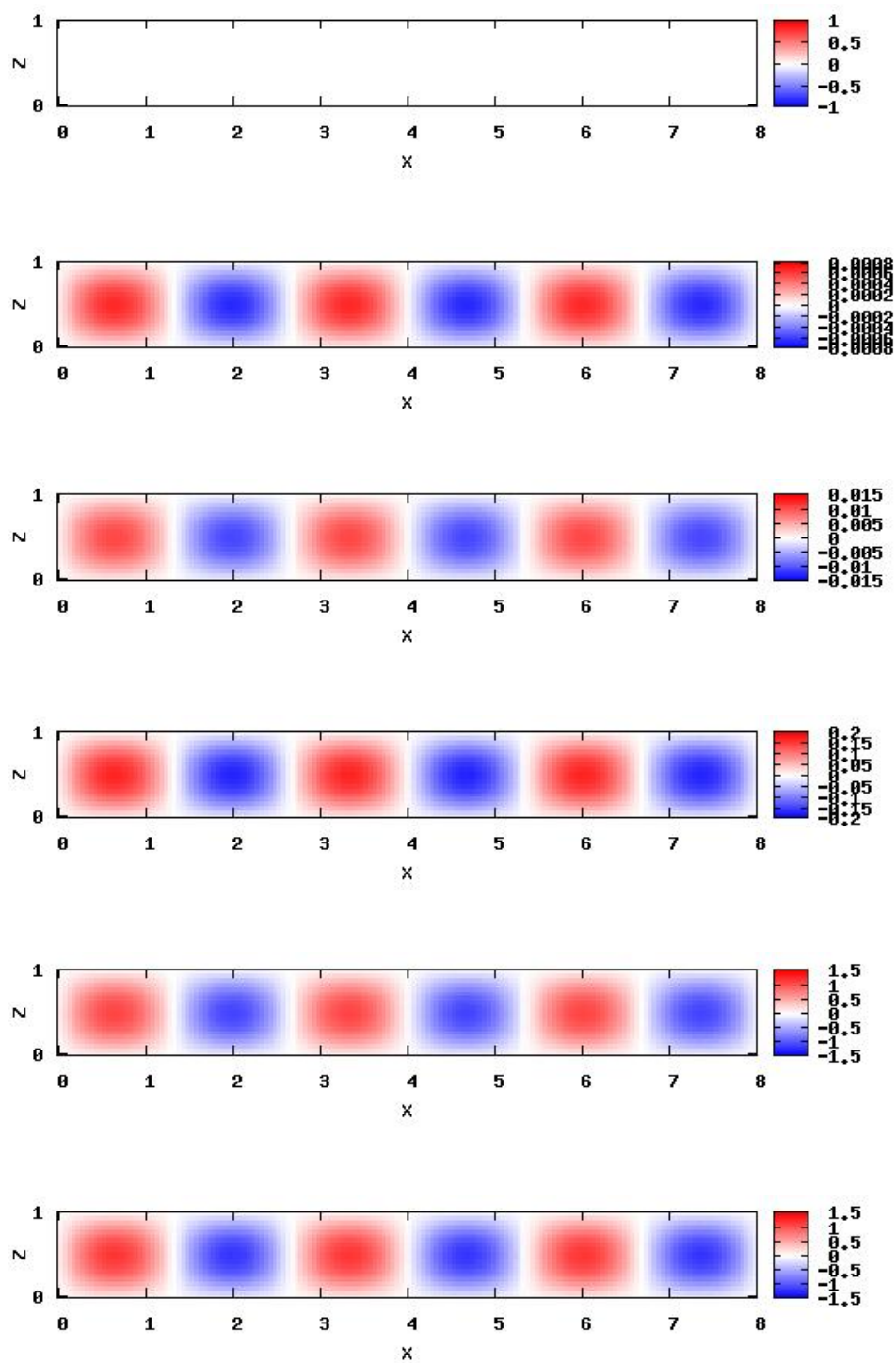


図 3.4.6: 流線関数の時間発展. 上から順に, $t = 0, 6, 12, 18, 24, 30$ の場である.

図 3.4.3 の温度擾乱場の時間発展を見ると, ゆるやかな波状に温度擾乱が発達しているのがわかる. また, 流れがほぼ定常状態となった $t = 30$ の流線関数の値は $O(1)$ であり, $Ra = 600$ の場合の値と比べると, 非常に大きいことがわかる.

擾乱が発達した初期時刻から $t \sim 23$ までの時間帯のうち, $t = 3$ の流線関数の出力データを離散フーリエ変換することにより, 発達している擾乱の波長を調べた. その結果, 波長は, 2.67 の値をとることがわかった^{*11}. この結果をレイリー曲線の図にプロットしたものを図 3.4.7 に示す. $Ra = 700$ の直線上では, プロットした波

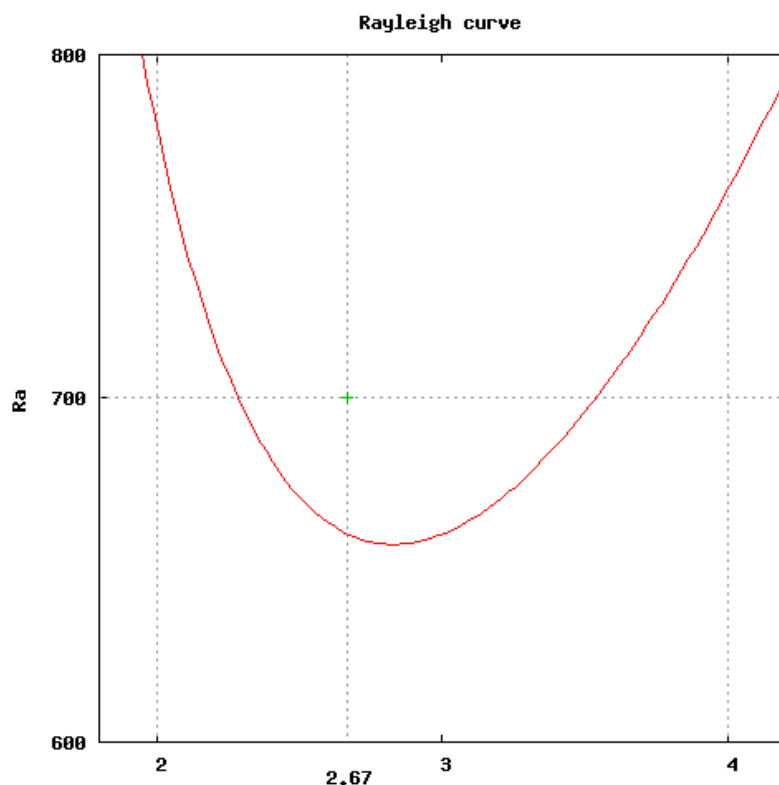


図 3.4.7: $Ra = 700$ として計算した結果, 発生した擾乱の波長を図 3.4.2 上にプロットした図. プロットは緑色の「+」印で示している.

長をもつ擾乱は不安定であり, 本節で行った計算は適切な結果を示していることがわかる.

また, 発生する擾乱は, 設定した計算領域によって影響を受ける. 今回設定した計算領域は, $0 \leq x \leq 8$ であり, 側端は周期的境界条件としている. よって, 発生する

^{*11}出力データの離散フーリエ変換の方法については付録 9 を参照すること.

擾乱の波長が一樣, すなわち, 対流が規則正しく発生し, その波長を λ_d とすると,

$$\lambda_d = \frac{8}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.4.5)$$

を満たす必要がある. $n = 2, 3, 4$ を代入したときの λ_d を図 3.4.7 に点線として示している. 図より, 今回の設定では, レイリー数 $Ra = 700$ のとき, $\lambda = 2, 4$ の波長をもつ擾乱は発生せず, $\lambda = 2.67$ の波長をもつ擾乱に限られることがわかる. このことは, 図 3.4.9 に「+」印でプロットした計算結果とほぼ一致していることがわかる.

ここで, 前節と同様に擾乱が発達していく様子をエネルギーの観点から見てみよう. 同じ方法で運動エネルギー E の時間変化を図 3.4.8 に示す.

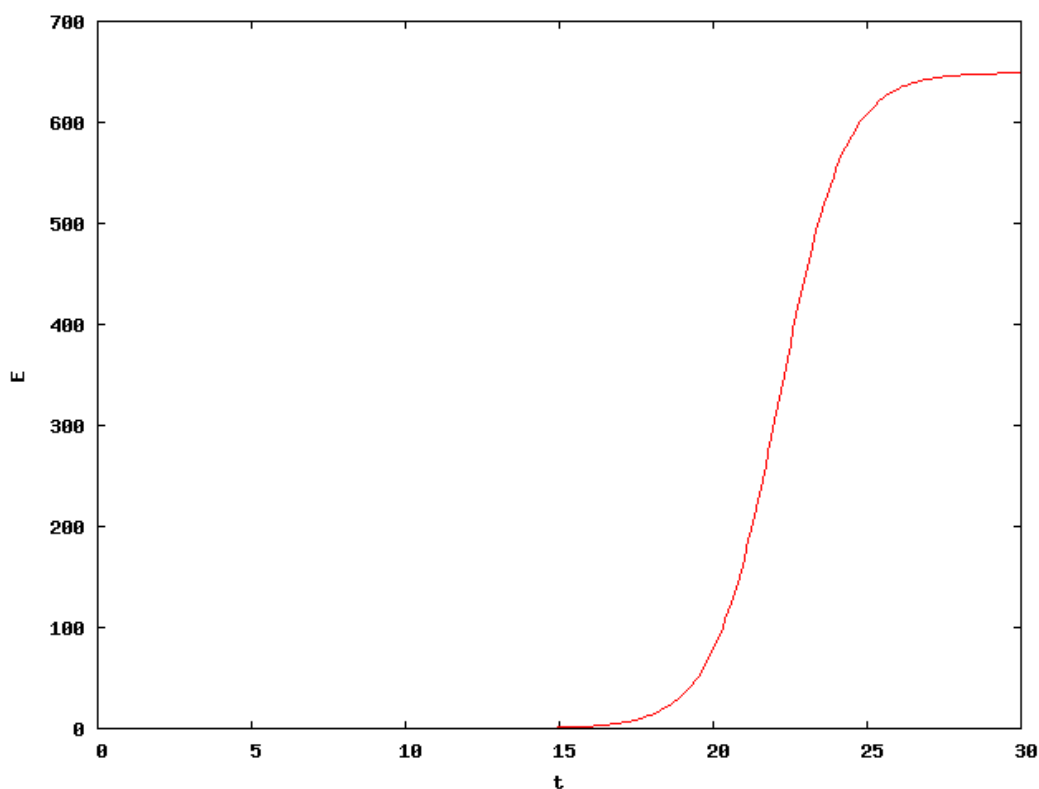


図 3.4.8: $Ra = 700$ のときの運動エネルギー E の時間変化. ただし, 横軸に時間 t , 縦軸に E をとっている.

図 3.4.8 より, $t = 15$ あたりから E は急激に増加し, $O(10^2)$ から $O(10^3)$ に達し, その後, 一定値に近づいている. また, グラフからは読み取ることができないが, 初期時刻 $t = 0$ から E が急激に増加しはじめる時間にかけても, E は単調に増加している. したがって, エネルギーの観点より, $Ra = 700$ と設定した場合, 擾乱は発

達することが示された. さらに, $Ra = 600$ と設定したときの E の時間変化と比較するために, $0 \leq t \leq 8$ の時間範囲における, $Ra = 600$ と $Ra = 700$ の場合の E の時間変化を図 3.4.9 に示す. ただし, $Ra = 600$ のときの時間変化を赤線, $Ra = 700$ のときの時間変化を緑線で示している.

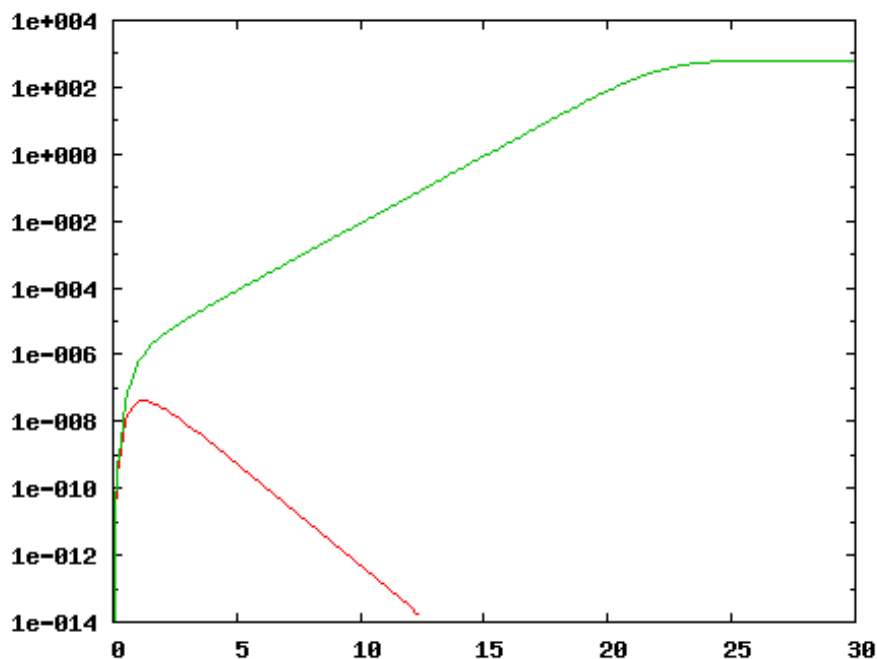


図 3.4.9: $Ra = 600$ と $Ra = 700$ のときの運動エネルギー E の時間変化. ただし, $Ra = 600$ は赤線, $Ra = 700$ は緑線である.

図 3.4.9 を見ると, $Ra = 700$ のとき, E は初期時刻 $t = 0$ から急激に増加していることがわかる. この 2 つの結果から, 擾乱の発達する場合と減衰する場合のエネルギーの時間変化の様子が大きく異なることがわかった.

3.5 予備的実験その3

前節では、予備的実験として $Ra = 700$ と設定して計算し、発生した擾乱の波長がレイリーの線形安定論に矛盾しないことを確かめた。本節では、その予備的実験の延長として、レイリー数を様々に変化させたときに現われる擾乱の波長を調べる。

まず、 $Ra = 800$ と設定し計算した。ただし、その他の設定や条件は、3.3 節で設定したものと同じにした。流れがほぼ定常状態となった $t = 20$ の温度場を図 3.5.10 に示す。

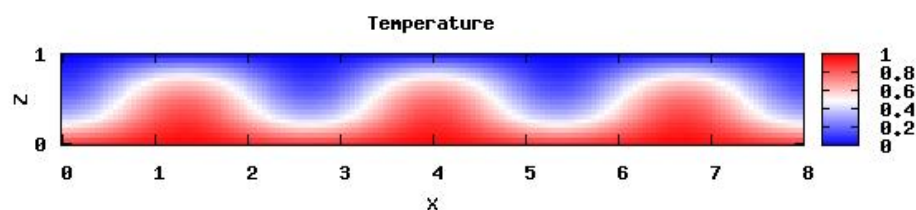


図 3.5.10: $Ra = 800$ のときの温度場のスナップショット。ただし、 $t = 20$ の場である。

擾乱が発達している時間帯のうち $t = 2$ の流線関数のデータを離散フーリエ変換^{*12} することによって、水平方向の卓越波数を調べた結果、発生した擾乱の波長は、 $Ra = 700$ のときと変わらず、 $\lambda = 2.65$ であった。

同様にして、

$$Ra = 900, 1000, 2000, 3000, 4000, \\ 5000, 10000, 20000, 50000$$

のときについても計算した。擾乱が発達した時間帯のうち、 $Ra = 900$ については $t = 10$ 、 $Ra = 1000$ については $t = 5$ 、 $Ra = 2000$ については $t = 2$ 、 $Ra = 3000, 4000, 5000$ については $t = 1$ 、 $Ra = 10000$ については $t = 0.5$ 、 $Ra = 20000, 50000$ については $t = 0.4$ の温度場を図 3.5.11 ~ 図 3.5.19 に示す。

^{*12}離散フーリエ変換については付録 9 を参照すること。

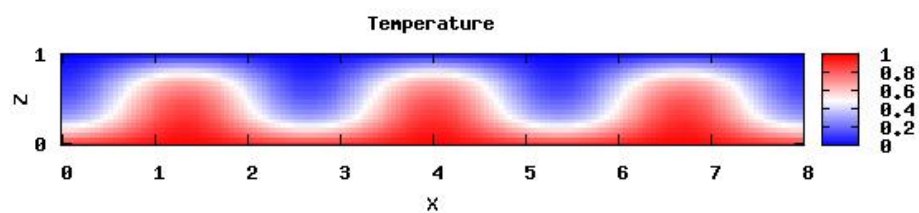


図 3.5.11: $Ra = 900$ のときの温度場のスナップショット. ただし, $t = 10$ の場である.

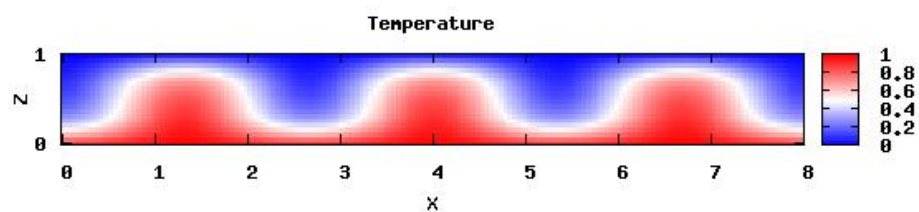


図 3.5.12: $Ra = 1000$ のときの温度場のスナップショット. ただし, $t = 5$ の場である.

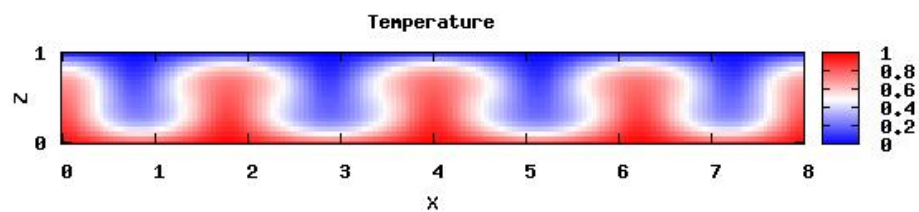


図 3.5.13: $Ra = 2000$ のときの温度場のスナップショット. ただし, $t = 2$ の場である.

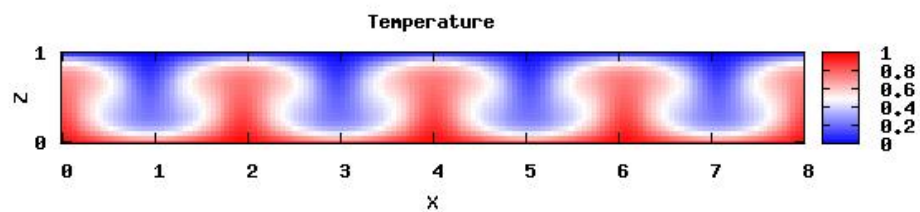


図 3.5.14: $Ra = 3000$ のときの温度場のスナップショット. ただし, $t = 1$ の場である.

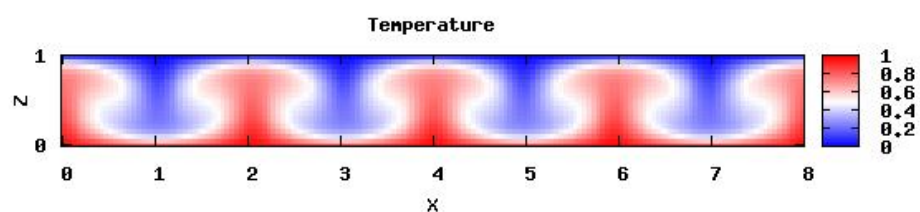


図 3.5.15: $Ra = 4000$ のときの温度場のスナップショット. ただし, $t = 1$ の場である.

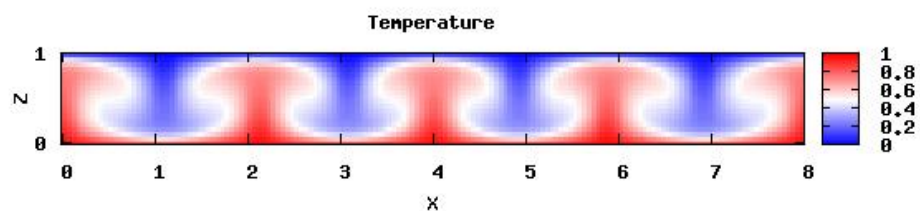


図 3.5.16: $Ra = 5000$ のときの温度場のスナップショット. ただし, $t = 1$ の場である.

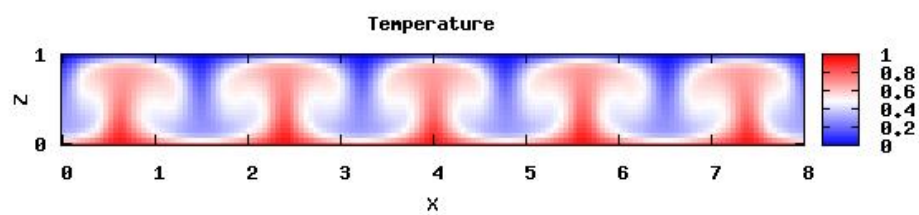


図 3.5.17: $Ra = 10000$ のときの温度場のスナップショット. ただし, $t = 0.5$ の場である.

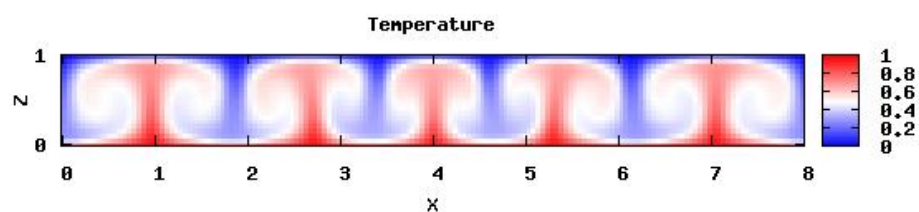


図 3.5.18: $Ra = 20000$ のときの温度場のスナップショット. ただし, $t = 0.4$ の場である.

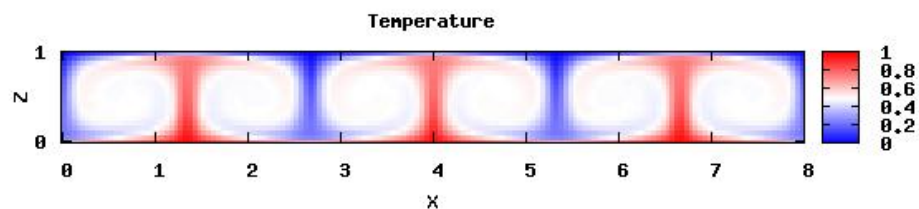


図 3.5.19: $Ra = 50000$ のときの温度場のスナップショット. ただし, $t = 0.4$ の場である.

$Ra = 800$ の場合と同様に, それぞれのレイリー数の流線関数のデータをフーリエ変換し, 卓越している擾乱の波長を調べた. その結果をレイリー曲線を表すグラフ上にプロットしたものを図 3.5.20 に示す. プロットされた点がいずれも,

$$Ra > \frac{(k^2 + \pi^2)^3}{k^2} \quad (3.5.1)$$

の範囲にあり, 得られた結果がレイリーの線形安定論に矛盾していないことがわかった.

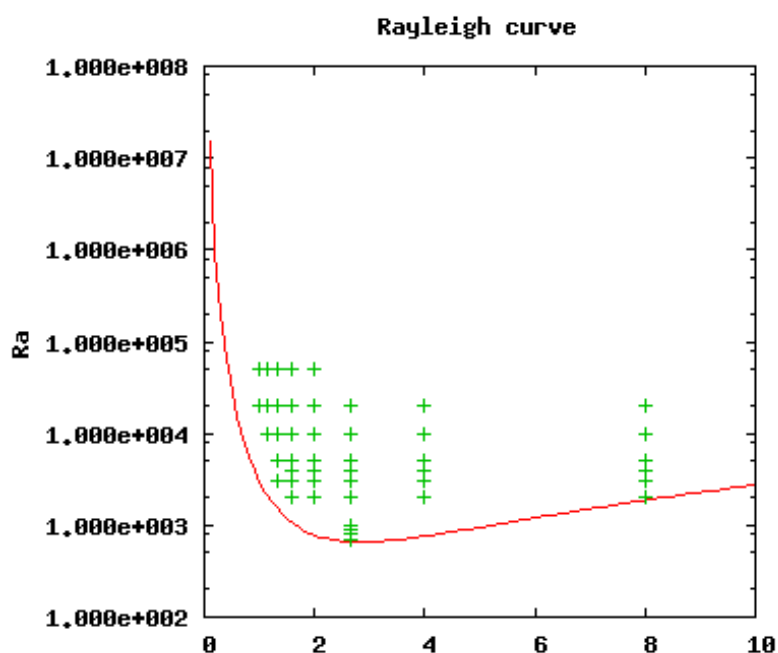


図 3.5.20: レイリー数を様々に変化させて計算した結果, 発生した擾乱の波長 をプロットした図. プロットは緑色の「+」印で示している.

第4章 実験

前章では、ベナール対流の数値計算を行うためのプログラムを構築し、その計算プログラムが適切であるかを確認するために、様々な予備的実験を行った。本章では、予備的実験の結果として、そのプログラムが適切であることが証明できたので、様々な実験を行うことにする。

4.1 対流と熱伝導による熱輸送の割合

1.3 節でベナール対流とはどんな現象であるか紹介した。そこで、上下の熱源の温度差（一般的にいうとレイリー数）がある臨界値を超えると、熱伝導と対流という2つの方法で上方へ熱を輸送すると述べた。このとき、対流と熱伝導はどれだけ熱輸送に貢献しているのだろうか。本節では、このことについて調べてみよう。

2.1 節で導出したブシネスク流体に関する熱力学方程式を再び書くと、(2.1.11c)より、

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)T = \kappa \nabla^2 T \quad (4.1.1)$$

である。温度 T を基本場 T_B とそれからのずれ T' に分けて、

$$T = T_B + T' \quad (4.1.2)$$

と表現できるので、(4.1.1) は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= -\mathbf{u}' \cdot \nabla(T_B + T') + \kappa \nabla^2(T_B + T') \\ &= (T_B + T')\nabla \cdot \mathbf{u}' - \nabla \cdot \{(T_B + T')\mathbf{u}'\} + \nabla \cdot \{\kappa \nabla(T_B + T')\} \\ &= -\nabla \cdot \{(T_B + T')\mathbf{u}' - \kappa \nabla(T_B + T')\} \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

と変形できる。ただし、最後の式変形には (2.2.4a) を用いた。(4.1.3) の $\{\}$ で括った部分の第1項目は対流による熱フラックスを表す項であり、第2項目は熱伝導

による熱フラックスを表す項である. これらを, それぞれ Q_1, Q_2 とおくと,

$$Q_1 = (T_B + T')\mathbf{u}' \quad (4.1.4a)$$

$$Q_2 = -\kappa \nabla(T_B + T') \quad (4.1.4b)$$

となる. ここで, 鉛直上向きの熱輸送について調べる目的のために, Q_1, Q_2 の z 成分のみを取り出す. それらを, それぞれ Q_{1z}, Q_{2z} とおくと,

$$Q_{1z} = (T_B + T')w = -(T_B + T')\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.1.5a)$$

$$Q_{2z} = -\kappa \frac{\partial(T_B + T')}{\partial z} = \kappa \left(\Gamma - \frac{\partial T'}{\partial z} \right) \quad (4.1.5b)$$

となる. ここで, 無次元変数を次のように導入する.

$$x = dx_*, \quad z = dz_*, \quad \psi = \kappa \psi_*, \quad T_B = \Gamma dT_{B*},$$

$$T' = \Gamma dT'_*, \quad t = \frac{d^2}{\kappa} t_*, \quad Q_{1z} = \kappa \Gamma Q_{1z*}, \quad Q_{2z} = \kappa \Gamma Q_{2z*}.$$

これらを (4.1.5a), (4.1.5b) に代入すると,

$$\kappa \Gamma Q_{1z*} = -\Gamma d \frac{\kappa}{d} (T_{B*} + T'_*) \frac{\partial \psi_*}{\partial x_*}$$

$$\Leftrightarrow Q_{1z*} = -(T_{B*} + T'_*) \frac{\partial \psi_*}{\partial x_*} \quad (4.1.6a)$$

$$\kappa \Gamma Q_{2z*} = \kappa \Gamma \left(1 - \frac{\partial T'_*}{\partial z_*} \right)$$

$$\Leftrightarrow Q_{2z*} = 1 - \frac{\partial T'_*}{\partial z_*} \quad (4.1.6b)$$

となり, 無次元の対流, 熱伝導による熱フラックスが求まった.

ある格子点 (m, n) での対流と熱伝導による z 方向の熱フラックスを比較する指標として, 次のようなパラメータ q を定義しよう.

$$q(m, n) = \frac{|Q_{1z*} + Q_{2z*}|}{Q_{2z*}}. \quad (4.1.7)$$

$q(m, n)$ は, 格子点 (m, n) での, 対流と熱伝導による熱フラックスの, 熱伝導による熱フラックスに対する比である. よって, 対流が発生していないとき, $q = 1$ となることがわかる. q を領域内のすべての格子点で平均したものを, Q とおくと,

$$Q = \frac{\int \int_S q dS}{\int \int_S dS} = \frac{1}{N} \sum_{m,n} q(m, n) \quad (4.1.8)$$

と書くことができる. ここで, N は領域内の格子点数である. Q は, 熱輸送における熱伝達と熱伝導の比率である. 対流がより熱輸送に寄与しているほど, Q は大きな値をとるので, レイリー数 Ra が大きいほど, Q は大きな値をとるはずである. このことを確かめてみることにする.

まず, あるレイリー数で計算した, 温度, 温度擾乱, 流線関数のデータより, Q_{1z^*} , Q_{2z^*} を計算し, (4.1.7) より各格子点での $q(m, n)$ を求める. 次にそれらを (4.1.8) より計算領域で積分し, Q を求める. なお, 積分する格子点の範囲については, 上端 ($z = 1$) と下端 ($z = 0$) での格子点を除くすべての格子点範囲とした^{*1}. また, 時間的にも平均化された Q を求めるために, 定常状態となっているある時間幅で Q を平均した. ここでは, その時間幅 T_{mean} を次のように決定した.

- 流れが定常となった後も, 非常に小さな流れの変動が生じている可能性がある. もし, この変動があるならば, それに伴って Q も大小するだろう.
- そこで, まず, この微小な変動の周期 T_W を調べよう. 周期が領域内のある流体粒子がセル上を 1 周する時間とすると, 周期は 1 周の長さを流体粒子の速度で割ったものである.
- 今回, 流体粒子の速度は定常状態となったある時間における領域内の鉛直速度の最大値 w_{max} , 1 周の長さは $0 \leq z \leq 1$ の範囲内の往復距離, すなわち 2 とした. このとき, 周期 T_W は,

$$T_W = \frac{2}{w_{\text{max}}} \quad (4.1.9)$$

と決定される.

- Q を平均する時間 T_{mean} は,

$$T_{\text{mean}} \geq T_W \quad (4.1.10)$$

を満たすように決定する. これは, 少なくとも一変動周期以上の時間範囲で Q を平均するためである.

計算結果に用いたデータのレイリー数 Ra , そのレイリー数における微小変動の周期 T_W , 平均する時間幅 T_{mean} , そして, Q の平均を求めるのに用いた時間範囲を表にまとめたものを以下に示す.

^{*1}これは, 上下の境界の点においては, その 1 つ上あるいは下の格子点がないため, z 微分の項を含む Q_{2z^*} が計算できないからである.

レイリー数 Ra	微小変動の周期 T_W	平均する時間幅 T_{mean}	時間範囲
600	26258205.6	-	-
700	0.720086577	1	$29 \leq t \leq 30$
800	0.381183204	1	$19 \leq t \leq 20$
900	0.287281133	1	$9 \leq t \leq 10$
1000	0.237960513	1	$4 \leq t \leq 5$
2000	0.106378891	0.2	$1.8 \leq t \leq 2$
3000	0.0749438474	0.1	$0.9 \leq t \leq 1$
4000	0.0587383562	0.1	$0.9 \leq t \leq 1$

$Ra = 600$ のときの微小変動の周期 T_W を計算した結果, $O(10^8)$ と非常に大きな値をとった. よって, 適当な結果を得るためには, 平均する時間幅 T_{mean} を $O(10^8)$ とする必要がある. しかし, それだけの時間分の計算を行うには, 膨大な時間を要する. よって, $Ra = 600$ については, 上で述べた条件を満たさず不適切ではあるが, 次のように T_{mean} と時間範囲を設定する.

$$T_{\text{mean}} = 1,$$

$$9 \leq t \leq 10.$$

図 4.1.1 に Q を計算した結果を示す. ただし, 横軸にレイリー数 Ra , 縦軸に Q をとっている. 図 4.1.1 に見ると, $Ra = 600$ のとき, すなわち熱輸送が熱伝導によって行われ, 擾乱が発達しない場合, 対流による熱輸送はなく, $Q = 1$ となっていることがわかる. しかし, 臨界レイリー数よりも少し大きい $Ra = 700$ では, Q は 1 をわずかに超え, 対流が熱輸送に少し寄与していることがわかる. そこからさらにレイリー数を上げるにつれ, Q もさらに大きな値をとっており, 対流の熱輸送への寄与がより大きくなっている.

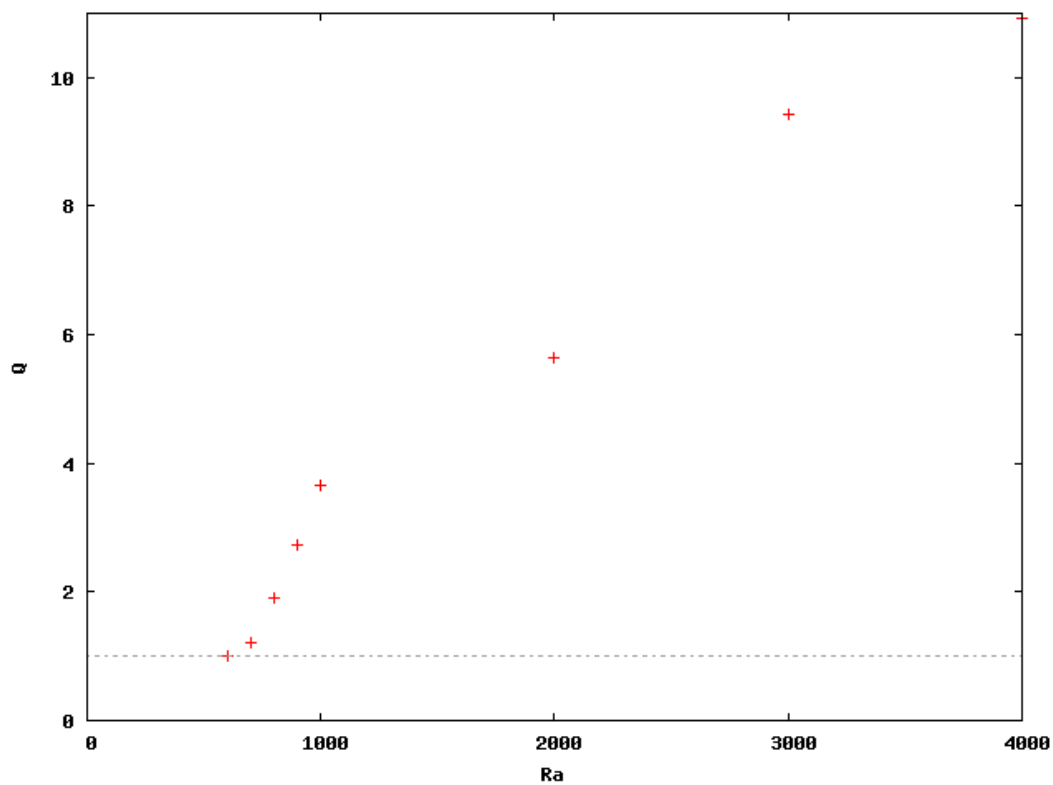


図 4.1.1: レイリー数と Q の関係. 横軸はレイリー数 Ra , 縦軸は Q である. レイリー数が大きいほど, Q の値が大きな値をとっていることがわかる.

4.2 SPMODEL での計算結果との比較

ここまで自分でつくった計算プログラムを用いて、ベナール対流をシミュレーションしてきた。このプログラムは、ベナール対流の支配方程式を差分法で解くものである。しかし、偏微分方程式の解法は差分法だけではなく、様々ある。その方法の 1 つがスペクトル法である。計算結果の精度の点では、スペクトル法は差分法よりも優れている^{*2}。では、ベナール対流を、差分法で解いた結果と、スペクトル法で解いた結果に大きな差は現われるのだろうか。本節では、このことについて議論を行う。なお、スペクトル法で解く手段として、地球流体電脳倶楽部のスペクトルモデル (SPMODEL) を用いた。

一応のため、差分法での計算条件を再び書くと、

- 格子点間隔 $\Delta d = 0.05$ とし、差分法は中央差分法とする。
- ただし、移流項の差分に関しては、荒川ヤコビアン法を選択した。
- 時間差分の間隔 $\Delta t = 0.0001$ とし、差分法はアダムス・バッシュホース法を選択した
- プラントル数 $Pr = 1$, レイリー数 $Ra = 5000$ とする。
- 境界条件, 初期条件は第 3 章で説明したものと同一とする。

である。一方、スペクトル法での計算条件は、

- 格子点間隔 $\Delta d = 0.05$ とし、切断波数は x 方向については 40, z 方向については 15 とした。
- ただし、移流項に関しては、荒川ヤコビアン法を選択した。
- 時間差分の間隔 $\Delta t = 0.0001$ とし、差分法はアダムス・バッシュホース法を選択した
- プラントル数 $Pr = 1$, レイリー数 $Ra = 5000$ とする。

^{*2}スペクトル法にも短所はある。その短所をいくつか挙げる。

- 物理量の急激な変化を表現できない。
- 境界の形状が複雑であると、スペクトル法による計算は難しくなる。

よって、方程式の解法は状況によって選ぶ必要がある。

- 境界条件, 初期条件は第 3 章で説明したものと同一とする.

とする. また, SPMODEL を用いた計算には, 地球流体電脳倶楽部の 2 次元ベナール・レイリー型対流の計算のサンプルプログラム (<http://www.gfd-dennou.org/library/spmodel/2d-channel-esc/boussinesq/sample-tt/f90/bsncnv-tt-2.f90>) を, 状況設定に合わせるために, 一部改造したものをを用いた. 改造した点を以下に示す.

- 切断波数の設定を x 方向については 40, y 方向^{*3}については 15 とした.
- 格子点の設定については x 方向には 160, y 方向については 20 とした.
- 時間差分の方法をオイラー法からアダムス・バッシュホース法にした.

自分のプログラムで計算した温度場の時間発展の様子と, SPMODEL で計算した温度場の時間発展の様子を図 4.2.1 に示す. それぞれ $t = 0.6$ まで載せている.

^{*3}自分のプログラムでは鉛直方向に z をとったが, SPMODEL のプログラムでは鉛直方向に y をとっている. しかし, このことは計算結果に影響を及ぼすことはないので, 問題はない.

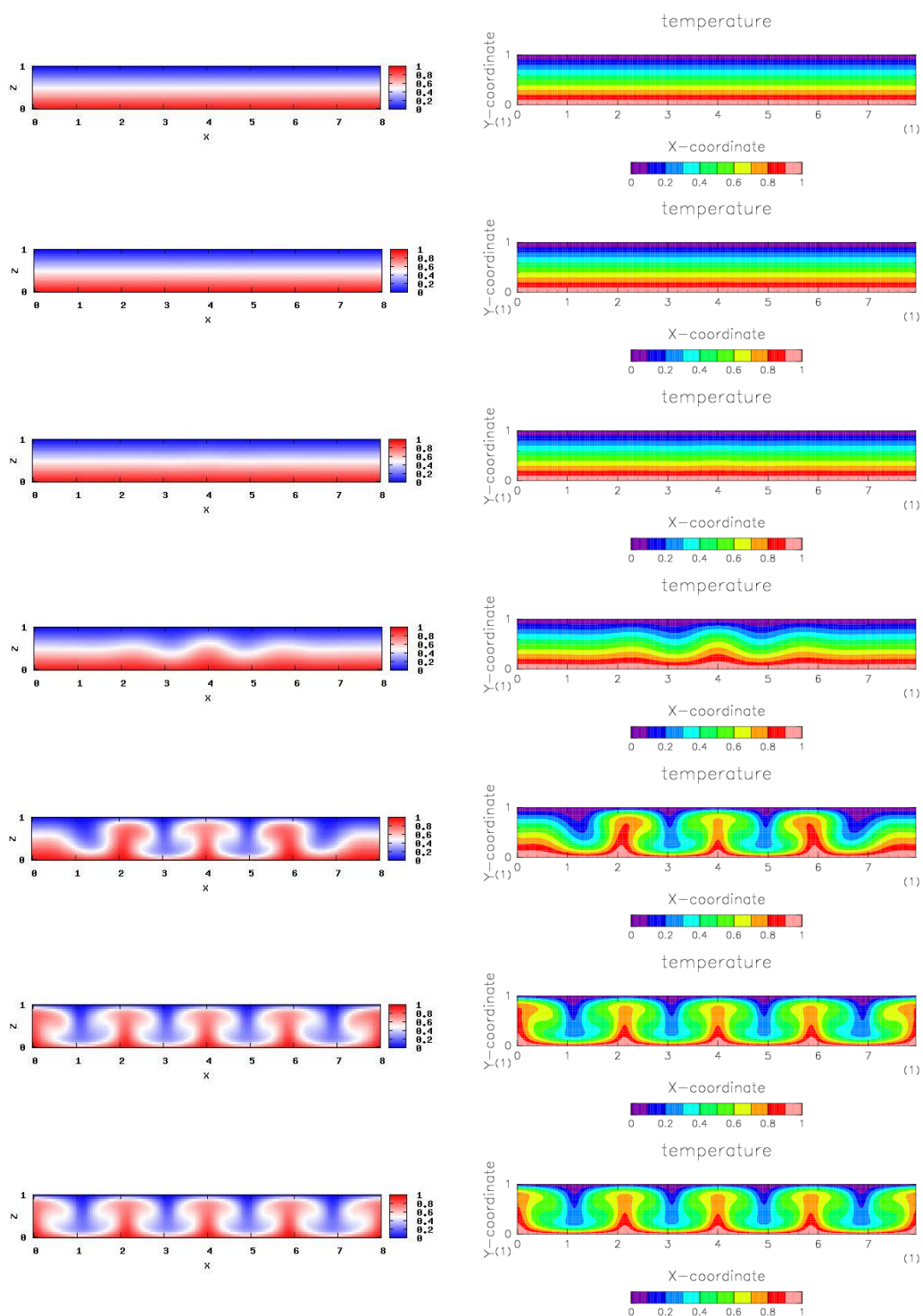


図 4.2.1: 上から順に $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$ の温度場. 左が自分でつくったプログラムでの計算結果で, 右が SPMODEL を使って計算した結果である.

両方の時間発展を見比べると, ほとんど同じ流れになっていることがわかる. さらに, 詳しく調べるために, $0 \leq t \leq 1$ の時間範囲において, 両者の温度の値を比較し

てみよう. 自分のプログラムで計算したある時間 t での温度の格子点値を $T_{\text{or } m,n}(t)$, SPMODEL で計算した時間 t での温度の格子点値を $T_{\text{sp } m,n}(t)$ とし, その相対誤差^{*4}

$$d_{m,n}(t) = \frac{T_{\text{or } m,n}(t) - T_{\text{sp } m,n}(t)}{T_{\text{sp } m,n}(t)} \quad (4.2.1)$$

を各格子点で計算する. 次に, この差の大きさ $|d_{m,n}(t)|$ を計算領域の全格子点で平均する. その平均値を $D(t)$ とすると,

$$D(t) = \frac{\int \int_S |d_{m,n}(t)| dS}{\int \int_S dS} = \frac{1}{N} \sum_{m,n} |d_{m,n}(t)| \quad (4.2.2)$$

と書ける. ただし, S は計算領域, N は全格子点数とする. $D(t)$ が大きな値をとるほど, 時間 t における自分のプログラムの計算結果と SPMODEL の計算結果の差が大きいことを意味する.

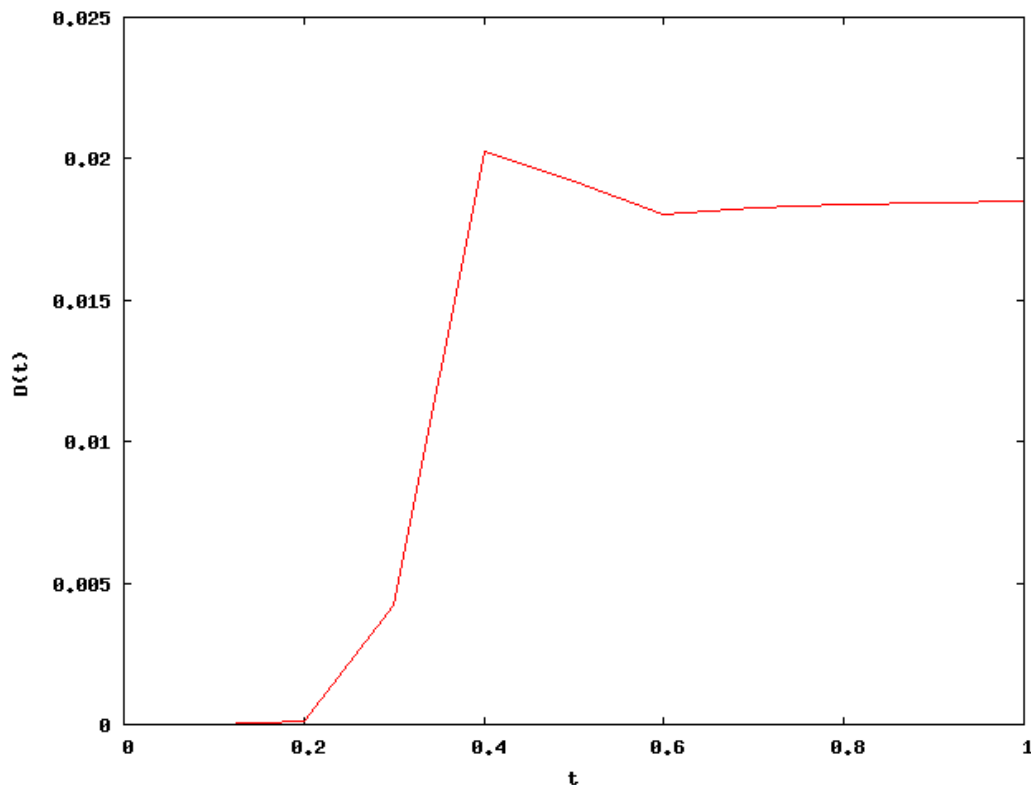


図 4.2.2: レイリー数 $Ra = 5000$ のときの, 時間範囲 $0 \leq t \leq 1$ における, 自分のプログラムでの計算結果と SPMODEL での計算結果の差. 時間 t を横軸に, 差の絶対値の空間平均 $D(t)$ を縦軸にとっている.

^{*4}ここでは, 2 つのデータの誤差を表す方法として絶対誤差を用いた. 詳しくは付録 11 を参照すること.

そこで, $Ra = 5000$ のときの時間範囲 $0 \leq t \leq 1$ での $D(t)$ を $t = 0.1$ 間隔で計算した. その結果を図 4.2.2 に示す. ただし, 横軸に時間 t , 縦軸に $D(t)$ をとっている. 図 4.2.2 より, D は時間 $0 \leq t \leq 1$ の範囲内において, 最大でも $O(10^{-2})$ であり, 両データに大きな差は生じていないことがわかる. また, D の時間変化を見ると, $0 \leq t \leq 0.2$ の時間では, 両者の差はほとんどないが, $0.2 \leq t \leq 0.4$, とりわけ $0.3 \leq t \leq 0.4$ の時間帯において差が急激に大きくなっている. しかし, $t = 0.4$ より後の時間では, 両者の差はほとんど変化していないことがわかる. 時間範囲 $0 \leq t \leq 1$ における両データの誤差が最大となったのは $t = 0.4$ の約 2% であり, 小さかった.

図 4.2.2 に示される結果は興味深いものである. $Ra = 5000$ のとき, 擾乱が成長する時間帯は $0.2 \leq t \leq 0.4$ であり^{*5}, 両者の結果の差 D が急激に増加する時間帯と一致する. 両者にこのような差が生じた原因はよくわからなかったが, 次のようなものが考えられるだろう.

- 差分法とスペクトル法の精度の違いから両者の差が生じた.
- ポアソン方程式,

$$\eta = \nabla^2 \psi$$

を解く際, SPMODEL ではこの種の方程式を解くサブルーチンを用いた. 一方, 自分のプログラムではヤコビ法で解いており, ヤコビ法の反復計算回数を予備的実験^{*6} から決定している. もし, 決定した回数だけ計算した結果が十分収束していなければ, そのデータは適切とはいえない. このような状態が生じた場合, 両者の結果に差が生じる.

^{*5}このことは図 4.2.1 を見るとよくわかる. $0.2 \leq t \leq 0.4$ が, 温度場が波打ち, 擾乱が成長していく時間帯であることがわかる.

^{*6}その予備的実験については付録 1 を参照すること.

4.3 積雲対流を模した対流の数値シミュレーション

ここまで水蒸気の効果を考慮しない熱対流について議論してきた。本節では、今考えている対流を積雲対流により近づけるために、潜熱に相当する熱を加えてみる。この操作によって、対流の形状がどのように変化するかを調べてみる。

ベナール対流に関する無次元化した支配方程式を再び書くと、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} = -PrRa \frac{\partial T}{\partial x} + Pr \nabla^2 \eta, \quad (4.3.1a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nabla^2 T, \quad (4.3.1b)$$

$$\eta = \nabla^2 \psi \quad (4.3.1c)$$

である。このうち熱力学方程式 (4.3.1b) において、粘性によるエネルギーの散逸による加熱、内部熱源による加熱といった、非断熱項は無視している。内部熱源の代表的な例としての水蒸気の凝結に伴って放出される潜熱がある。積雲対流では、水蒸気が上昇し、凝結を起こす際に潜熱（凝結熱）を放出し、周囲の温度を上昇させる。そこで、今考えている熱力学方程式に潜熱に似せた加熱項を加えてみる。各格子点での計算について、その格子点での鉛直速度

$$w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.3.2)$$

が正ならば、熱力学方程式 (4.3.1b) の右辺に熱 Q を加えるという条件を考える。 $\theta(w)$ をヘビサイド関数とすると、

$$\theta(w) = \begin{cases} 1 & w \geq 0 \text{ のとき} \\ 0 & w < 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (4.3.3)$$

と書くことができ、熱力学方程式 (4.3.1b) は、

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nabla^2 T + Q\theta(w) \quad (4.3.4)$$

とする。

このような条件を加えると、上昇流、すなわち $w > 0$ の部分に加熱が加わることによって、その部分の上昇流はさらに強められるだろう。よって、加熱を与えなかった場合と比較すると、次のような変化が現れると予想される。

- 上昇部が加熱されることによって、擾乱の発達が早まる。

- 局所的に上昇流が強くなるために、流線関数の等値線が密になる部分が現われる。

計算条件は、

- 格子点間隔 $\Delta d = 0.05$ とし、差分法は中央差分法とする。
- ただし、移流項の差分に関しては、荒川ヤコビアン法を選択した。
- 時間差分の間隔 $\Delta t = 0.0001$ とし、差分法はアダムス・バッシュホース法を選択した
- プラントル数 $Pr = 1$, レイリー数 $Ra = 5000$ とする。
- 格子点での鉛直速度 w が正ならば、熱力学方程式に加熱項 Q を加える。
- 加熱項については、 $Q = 1$ を与えて計算する。
- 境界条件、初期条件は第 3 章で説明したものと同一とする。

とする。

$Q = 1$ を与えたときの計算結果を以下に示す. ただし, 左側が $Q = 1$ のときの温度場の時間発展, 右側が加熱項を加えなかった場合の温度場の時間発展である. 結果は $t = 0.5$ まで載せている.

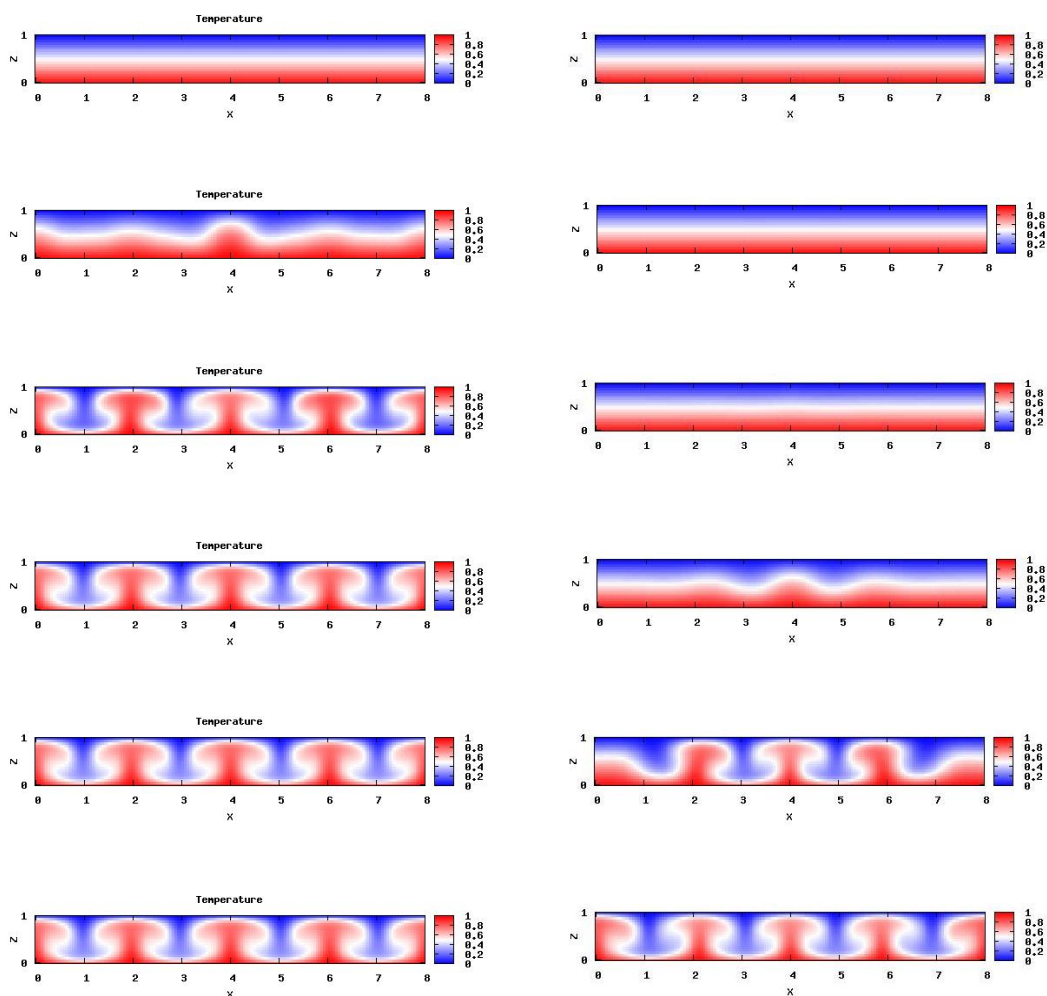


図 4.3.1: 左については加熱項 $Q = 1$ を加えた場合の, 右については加熱項を加えなかった場合の温度の時間発展. ただし, 上から順に $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ の場である.

$Q = 1$ の温度場の分布を見ると, $Q = 0$, つまり加熱を加えなかった場合に比べて, 高温域^{*7} が水平方向に広がるような分布をとり, 加熱項が効いている. また, $Q = 1$ を与えた場合は, 加熱を与えなかった場合に比べ, 擾乱の発達がより早く生じていることがわかる.

次に, 図 4.3.2 に流れがほぼ定常状態となったときの加熱項を加えなかった場合の流線関数の分布, 図 4.3.3 に $Q = 1$ を与えた場合の流線関数の分布を示す. さらに, その時間での流線関数のデータを離散フーリエ変換^{*8} した結果を, $Q = 0$ については図 4.3.4 に, $Q = 1$ については図 4.3.5 に示す. ただし, 加熱項を与えなかった場合については時間 $t = 1$, $Q = 1$ については時間 $t = 0.5$ のデータである.

^{*7}ここでは, 高温域という表現を漠然とした意味で用いている. たとえば, 温度が 0.5 より高い領域を高温域, 0.5 より低い領域を低温域と呼ぶことにすると, 図 4.3.1 では赤色で塗られた部分が高温域, 青色で塗られた部分が低温域となる. このとき, $Q = 0$ の場合では, 低温域 (青色) の下降と高音域 (赤色) の上昇が交互に, 対称的に生じているのに対し, $Q = 2$ の場合では, 下降と上昇は交互ではあるが, 非対称的である.

^{*8}本研究における離散フーリエ変換の方法については付録 9 を参照すること.

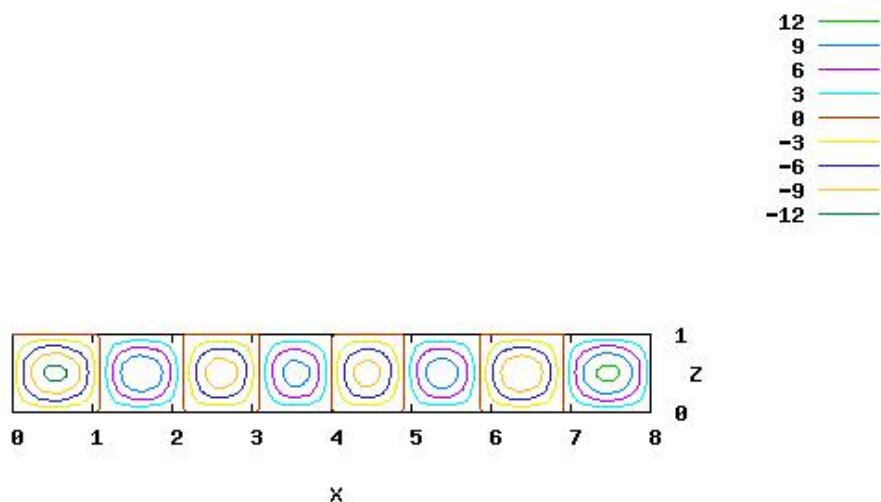


図 4.3.2: 流線関数のスナップショット. ただし, 加熱項を $Q = 0$ としたときの $t = 1$ の場である. 見やすいように等高線で表示している.

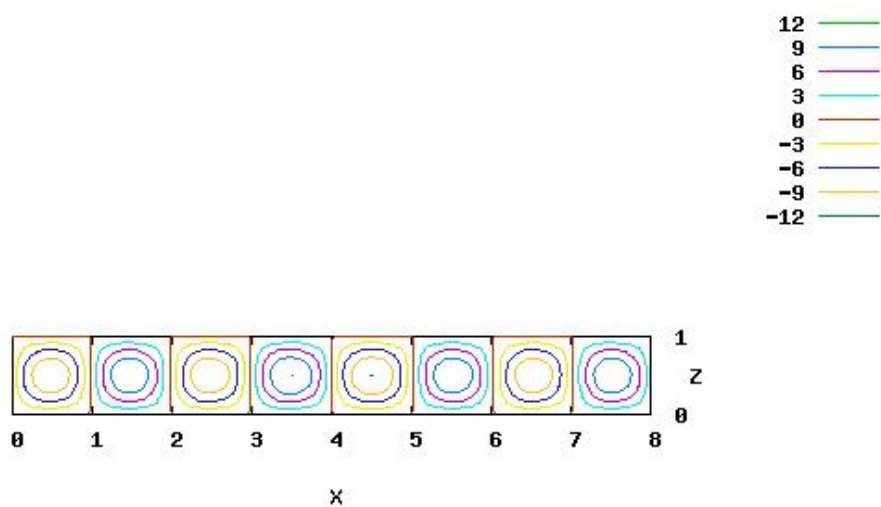


図 4.3.3: 流線関数のスナップショット. ただし, 加熱項を $Q = 1$ としたときの $t = 0.5$ の場である. 見やすいように等高線で表示している.

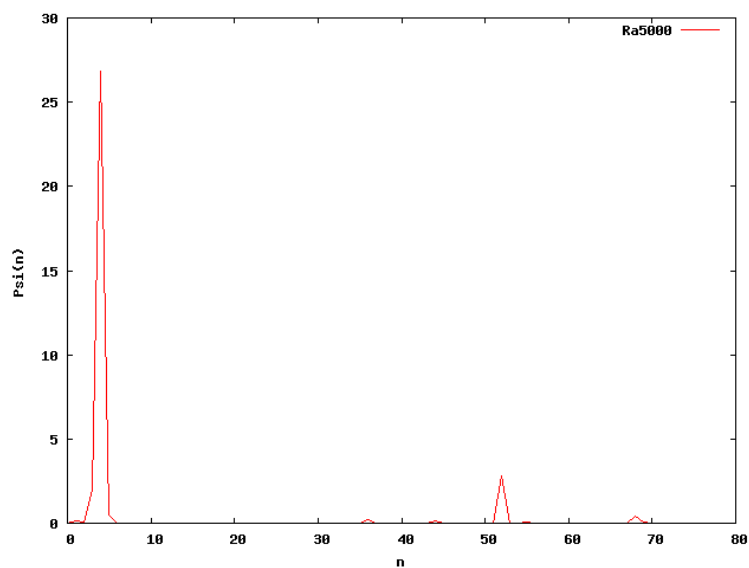


図 4.3.4: $Q = 0$ のときの流線関数のデータを離散フーリエ変換した結果.

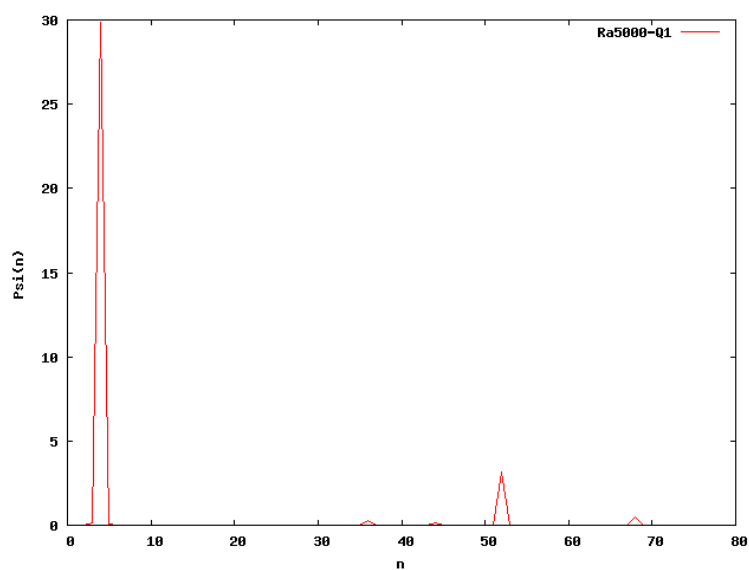


図 4.3.5: $Q = 1$ のときの流線関数のデータを離散フーリエ変換した結果.

これら 4 つの図から両者を比較した結果, 次のようなことがわかった.

- 流線関数の分布が両者で異なっている. 対流のセルの幅に着目すると, Q の値によって空間的に異なっている.
- 離散フーリエ変換した結果の図より, 両者の発生した擾乱の卓越波長は同じであるが, その擾乱の振幅は $Q = 1$ のほうが大きい.

これら 2 つの結果のうち, 後者は加熱項を加えることによって擾乱が全体的に強まることを示している. しかしながら, 上昇部分において流線関数の等値線が密になる, すなわち局所的に上昇流が強まるという結果は得られなかった.

第5章 まとめ

本研究では, 2次元ベナール・レイリー型対流を記述する方程式を数値的に解くプログラムを作成し, いくつかの予備的実験の結果, そのプログラムを用いて計算した結果がレイリーの線形安定論と矛盾しないことを確かめることができた. ここで, 予備的実験の結果を簡単にまとめると,

- レイリー数を $Ra = 600$ に設定して計算した場合, 初期条件として与えた微小擾乱によって, 無視できるほどの微小な流れが生じたが, 擾乱は単調に減衰していった. この結果は, レイリーの線形安定論に矛盾するものではなかった.
- レイリー数を $Ra = 700$ に設定して計算した結果, 波長 $\lambda = 2.67$ をもつ擾乱が時間をかけてゆっくりと成長した. この結果は, レイリーの線形安定論に矛盾するものではなかった.
- 同様にしてレイリー数 $Ra = 800, 900, 1000$ と設定して計算した結果, いずれも線形安定論に矛盾する結果ではなかった.

となる. また, 予備的実験の結果を計算プログラムが適切である証拠とし, このプログラムを用いて様々な実験を行った. その実験の結果をまとめると,

- 対流と熱伝導による熱輸送の割合を調べるために, 鉛直 z 方向の熱伝達の熱伝導に対する比を計算した. その結果, 臨界レイリー数より小さいとき, 比は 1 となり, 対流による熱輸送は生じないことがわかった. また, 臨界レイリー数よりも大きく設定したとき, Ra が大きく設定するほどこの比は大きな値をとり, 対流が熱輸送により寄与することがわかった.
- 2次元ベナール対流をスペクトル法で計算した結果と, 差分法で計算した結果の比較を行った結果, 両者の相対誤差は約 2%にとどまり, 大きな差は生じなかった.

となる.

謝辞

本論文を作成するにあたり, 指導教員である岩山隆寛准教授にいつも優しく指導をしていただきました. また, 博士課程の佐々木洋平氏には, 本研究を進める上での様々な助言をいただき, 博士課程の森川靖大氏には, 計算のための実験機の操作について丁寧に教えていただきました. また, 日頃のセミナーを通して, 研究室の皆様からも多くのアドバイスをいただきました. ここに深く御礼申し上げ, 感謝致します.

なお, 本論文の文書作成には \LaTeX を使い, スタイルファイルとして地球流体電脳倶楽部版 \TeX スタイルファイルを使用させていただきました. また, 数値計算プログラムの作成には G77, 地球流体電脳倶楽部の SPMODEL を使い, 計算結果の描画には GNUPLOT 4.2.1 および DCL (地球流体電脳倶楽部ライブラリ) を用いました.

参考文献

- [1] Arakawa, A. ,1966: Computational design for long-term numerical integrations of the equations of atmospheric motion. J.Comput.Phys., 1, 119-143.
- [2] Takehiro, S., Odaka, M., Ishioka, K., Ishiwatari, M., Hayashi, Y.-Y., SP-MODEL Development Group, 2006: SPMODEL: A series of Hierarchical Spectral Models for Geophysical Fluid Dynamics, Nagare, 25, Nagare Multimedia 2006, <http://www.nagare.or.jp/mm/2006/spmodel/>
- [3] 浅井 富雄, 1996: 気象の教室 2 ローカル気象学, 東京大学出版会, 102-107 pp
- [4] 大関 誠, 2006: スペクトルモデル入門, 日本気象学会, 3-4 pp, 13-15 pp
- [5] 小倉 義光, 1999: 一般気象学, 東京大学出版会, 203-207 pp
- [6] 川上 一郎, 1998: 数値計算, 岩波書店, 50-55 pp
- [7] 木村 竜治, 1983: 気象学のプロムナード 13 地球流体力学入門, 東京堂出版, 123-131 pp
- [8] 九州大学大学院総合理工学府 大気海洋環境システム学専攻 編, 2001: 地球環境を学ぶための流体力学, 201-204 pp

付録1 ヤコビ法の手順

次のような連立一次方程式をヤコビ法で解く.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n &= b_i, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

この式を書きかえ,

$$\begin{aligned} x_1^{[k+1]} &= (b_1 - a_{12}x_2^{[k]} - a_{13}x_3^{[k]} - \cdots - a_{1n}x_n^{[k]})/a_{11} \\ x_2^{[k+1]} &= (b_2 - a_{21}x_1^{[k]} - a_{23}x_3^{[k]} - \cdots - a_{2n}x_n^{[k]})/a_{22} \\ &\dots\dots\dots \\ x_i^{[k+1]} &= (b_i - a_{i1}x_1^{[k]} \cdots a_{i,i-1}x_{i-1}^{[k]} \\ &\quad - a_{i,i+1}x_{i+1}^{[k]} - \cdots - a_{in}x_n^{[k]})/a_{ii} \\ &\dots\dots\dots \\ x_n^{[k+1]} &= (b_n - a_{n1}x_1^{[k]} - a_{n2}x_2^{[k]} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{[k]})/a_{nn} \end{aligned}$$

とする. 上の式の第 i 式には, まず x_i について解き, それに $k+1$ という添え字をつけ, 一方右辺の x には k という添え字をつけた. これらの式をまとめると,

$$x_i^{[k+1]} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{[k]} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{[k]})/a_{ii} \quad (\text{a.1})$$

となる. これがヤコビ法の公式である. この式を使って,

(0) 最初に $k=0$ として, $x_1^{[0]}, x_2^{[0]}, \dots, x_n^{[0]}$ を適当に与え, 公式を使って,

$$x_1^{[1]}, x_2^{[1]}, \dots, x_n^{[1]}$$

を求める.

(1) 次に $k = 1$ として, 求めた $x_1^{[1]}, x_2^{[1]}, \dots, x_n^{[1]}$ を公式の右辺に代入し,

$$x_1^{[2]}, x_2^{[2]}, \dots, x_n^{[2]}$$

を求める.

(2) 次に $k = 2$ として, 求めた $x_1^{[2]}, x_2^{[2]}, \dots, x_n^{[2]}$ を公式の右辺に代入し,

$$x_1^{[3]}, x_2^{[3]}, \dots, x_n^{[3]}$$

を求める.

.....

(k) この計算を繰り返し行い, ある k に対して,

$$x_1^{[k+1]}, x_2^{[k+1]}, \dots, x_n^{[k+1]}$$

がその前の $x_1^{[k]}, x_2^{[k]}, \dots, x_n^{[k]}$ に必要な精度まで一致したら, そのときの

$$x_1^{[k+1]}, x_2^{[k+1]}, \dots, x_n^{[k+1]}$$

を x_1, x_2, \dots, x_n の解とする.

計算の回数を決定するために, 次のような実験を行った. 反復計算の回数を, 10, 50, 100, 200, 500 回とした 4 つのプログラムを実行することによって, 5000 ステップ後の流線関数 ψ のデータを 4 つ用意する. この 4 つのデータの値のうち, 最も真の解に近いのは 500 回であることは明らかであるので, このデータを基準とし, 残りの 10, 50, 100, 200 回の ψ のデータと, 500 回の ψ のデータの差をとってみた. その結果を図 a.1 に示す.

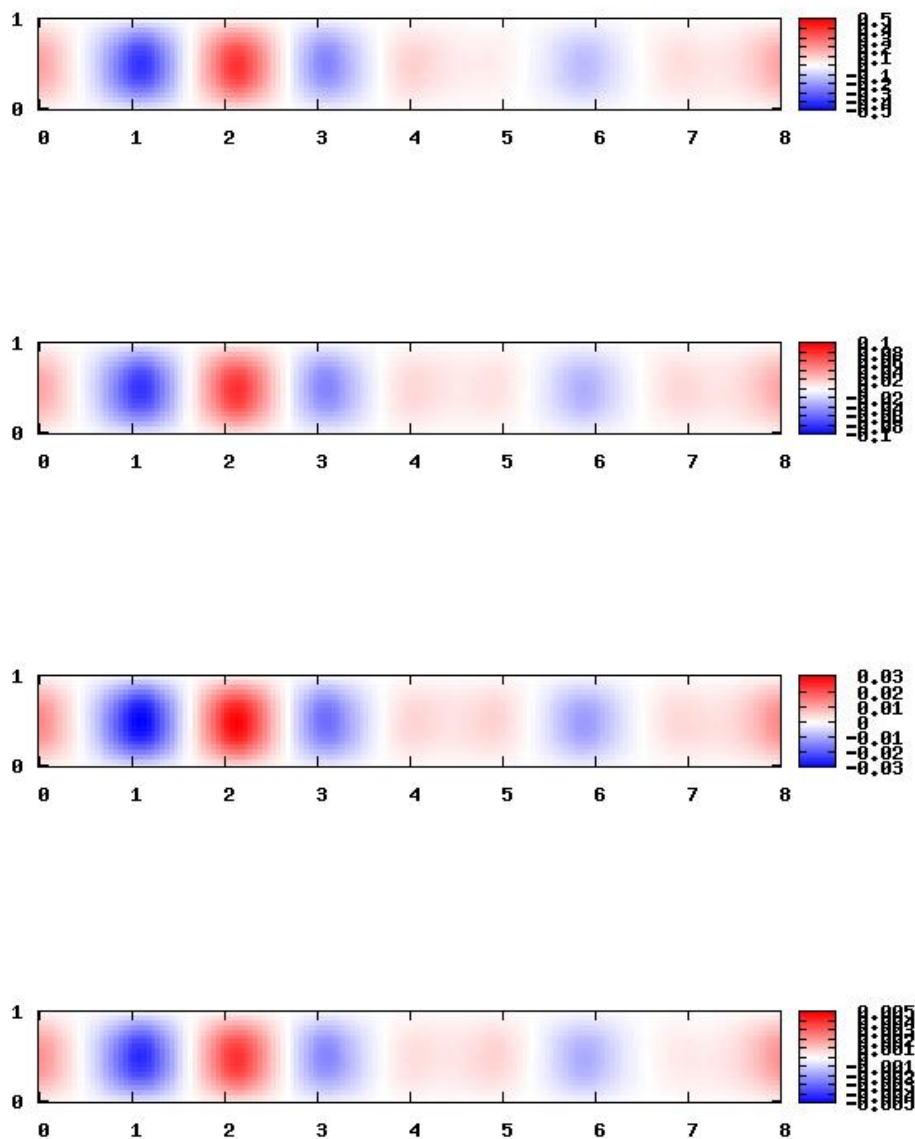


図 a.1: 上から準に,10 回計算したデータと 500 回計算したデータとの差, 50 回計算したデータと 500 回計算したデータとの差, 100 回計算したデータと 500 回計算したデータとの差, 200 回計算したデータと 500 回計算したデータとの差を表すグラフである. 反復計算の回数を増やしていくほど, 解がより収束していることがわかる.

結果, 10 回計算したデータと 500 回計算したデータの差が $O(1)$ になるのに対し, 100 回計算したデータと 500 回計算したデータの差は $O(10^{-1})$, さらに 200 回計算したデータと 500 回計算したデータの差は $O(10^{-2})$ にとどまることがわかった. この結果より, 200 回反復計算したデータと 500 回反復計算したデータの違いは非常に小さく, 200 回計算した時点でほぼ収束したと考えることができる. よって, 今回の数値計算では反復計算の回数を 200 回に決定した.

付録2 格子点法

格子点法では, 方程式中の微分は格子点値のみを使って表現するので, 微分を差分で近似する. 差分近似の方法は前方差分, 後方差分, 中央差分の3つがある. ここでは, 最も簡単な例として,

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (\text{b.1})$$

をそれぞれの方法で差分近似してみよう. テイラーの定理より,

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x)(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x)(\Delta x)^3 + \dots \quad (\text{b.2a})$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - f'(x)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x)(\Delta x)^2 - \frac{1}{3!}f^{(3)}(x)(\Delta x)^3 + \dots \quad (\text{b.2b})$$

となる.

(1) 前方差分

(b.2a) 式より,

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f''(x)\frac{\Delta x}{2!} - f^{(3)}(x)\frac{(\Delta x)^2}{3!} - f^{(4)}(x)\frac{(\Delta x)^3}{4!} - \dots \quad (\text{b.3a})$$

$$\simeq \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{b.3b})$$

となる. ただし, (b.3b) の近似には $|\Delta x| \ll 1$ であるという条件を用いた. つまり, この差分法ではある格子点での微分値の評価に, その格子点値とその前方の格子点値を用いるやり方である.

この差分法の近似の精度を吟味してみよう. 差分近似した式 (b.3b) から微分式 (b.3a) をひいたものを切断誤差 ε と呼ぶ. すると,

$$\varepsilon = f''(x)\frac{\Delta x}{2!} + f^{(3)}(x)\frac{(\Delta x)^2}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{(\Delta x)^3}{4!} + \dots \quad (\text{b.4})$$

となり, 差分近似の精度を切断誤差 ε における Δx の最低次数とすると, 前方差分近似の精度は $O(\Delta x)$ となる.

(2) 後方差分

(b.2b) 式より,

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + f''(x) \frac{\Delta x}{2!} - f^{(3)}(x) \frac{(\Delta x)^2}{3!} + f^{(4)}(x) \frac{(\Delta x)^3}{4!} - \dots \quad (\text{b.5})$$

$$\simeq \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (\text{b.6})$$

となる. つまり, この差分法ではある格子点での微分値の評価に, その格子点値とその後方の格子点値を用いるやり方である.

切断誤差 ε は,

$$\varepsilon = -f''(x) \frac{\Delta x}{2!} + f^{(3)}(x) \frac{(\Delta x)^2}{3!} - f^{(4)}(x) \frac{(\Delta x)^3}{4!} + \dots \quad (\text{b.7})$$

となるので, 後方差分近似の精度は $O(\Delta x)$ となる.

(3) 中央差分

(b.2a) から (b.2b) をひき, $2\Delta x$ で割り, 整理すると,

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} - f^{(3)}(x) \frac{(\Delta x)^2}{3!} - f^{(5)}(x) \frac{(\Delta x)^4}{5!} - \dots$$

$$\simeq \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (\text{b.8})$$

となる. つまり, ある格子点での微分値の評価にその格子点の両側の格子点値を用いる方法を中央差分という.

切断誤差 ε は,

$$\varepsilon = f^{(3)}(x) \frac{(\Delta x)^2}{3!} + f^{(5)}(x) \frac{(\Delta x)^4}{5!} + \dots \quad (\text{b.9})$$

となるので, 中央差分近似の精度は $O(\Delta x^2)$ となる.

以上より, $|\Delta x| \ll 1$ のとき, 中央差分近似の誤差がもっとも小さく, 精度が良いことがわかる. よって, 本研究では, 空間差分の方法として中央差分を採用した.

付録3 時間差分スキーム

数値計算で変数の時間発展を求めるために、時間微分についても差分近似をする必要がある。ここでは、本研究で採用する2つの時間差分スキームについて説明する。

常微分方程式

$$\frac{dU}{dt} = f(U, t) \quad , \quad U = U(t) \quad (\text{c.1})$$

を差分法を使って解く方法を考える。ここで、 U はある変数、 t は時間である。

(c.1) をオイラースキームで解く場合、式の右辺の f は $t = n\Delta t$ での値と考え、また、左辺の時間微分の項は、 $t = n\Delta t$ と、 $t = (n+1)\Delta t$ での変数 U で表し、

$$\begin{aligned} \frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\Delta t} &= f^{(n)} \\ \Leftrightarrow U^{(n+1)} &= U^{(n)} + f^{(n)} \Delta t \end{aligned} \quad (\text{c.2})$$

と近似する。このスキームでは2つのタイムレベル $t = n\Delta t$, $(n+1)\Delta t$ の値を使うことから、2タイムレベルスキームの1種である。

一方、(c.1) をアダムス・バッシュホーススキームで解く場合、式の右辺の f は $t = (n-1)\Delta t$, $n\Delta t$ での値を用い、左辺の時間微分の項はオイラースキームと同じく $t = n\Delta t$ と、 $t = (n+1)\Delta t$ での変数 U で表し、

$$\frac{U^{(n+1)} - U^{(n)}}{\Delta t} = \frac{3}{2}f^{(n)} - \frac{1}{2}f^{(n-1)} \quad (\text{c.3})$$

$$\Leftrightarrow U^{(n+1)} = U^{(n)} + \Delta t \left(\frac{3}{2}f^{(n)} - \frac{1}{2}f^{(n-1)} \right) \quad (\text{c.4})$$

と近似する。このスキームでは3つのタイムレベル $t = (n-1)\Delta t$, $n\Delta t$, $(n+1)\Delta t$ の値を使うことから、3タイムレベルスキームの1種である。

アダムス・バッシュホーススキームでは、3つの時間の変数を扱うため、はじめの積分には使うことができない。本研究の数値計算では、はじめの積分の1ステッ

プはオイラースキームで計算し, その次のステップからアダムス・バッシュホーススキームで計算する.

付録4 支配方程式の無次元化

支配方程式を (2.2.25) とは異なった形の無次元変数を導入して無次元化してみよう. 無次元変数を次のように導入する.

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\nu}{d^2} \eta_*, & \psi &= \nu \psi_*, & T &= \Gamma d T_*, & t &= \frac{d^2}{\nu} t_*, \\ x &= dx_*, & z &= dz_*, & \nabla &= \frac{1}{d} \nabla_*. \end{aligned} \quad (\text{d.1})$$

ただし, d は長さのスケールとする. (d.1) を (2.2.23a), (2.2.23b), (2.2.23c) に代入し, 整理すると,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} = -\frac{\alpha g \Gamma d^4}{\nu^2} \frac{\partial T}{\partial x} + \nabla^2 \eta, \quad (\text{d.2a})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\kappa}{\nu} \nabla^2 T, \quad (\text{d.2b})$$

$$\eta = \nabla^2 \psi \quad (\text{d.2c})$$

となる. ただし, 式を見やすくするために, 変数のアスタリスク記号は省略している. ここで, プラントル数 Pr とグラシヨフ数 Gr を

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (\text{d.3a})$$

$$Gr = \frac{\alpha g \Gamma d^4}{\nu^2} \quad (\text{d.3b})$$

と定義すると, (d.2a), (d.2b), (d.2c) は,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} = -Gr \frac{\partial T}{\partial x} + \nabla^2 \eta, \quad (\text{d.4a})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T, \quad (\text{d.4b})$$

$$\eta = \nabla^2 \psi \quad (\text{d.4c})$$

となる. (2.2.29a), (2.2.29b), (2.2.29c) と比較すると, 無次元数のつく項が異なっていることがわかる.

付録5 臨界レイリー数と擾乱の水平方向の波数の関係

図 2.3.1 は $n = 1$ とした場合の臨界レイリー数 Ra と水平方向の波数 k の関係を表すグラフである。では、 $n = 2, 3 \dots$ の場合のグラフはどのようなになるだろうか。ここでは、 $n = 1, 2, 3$ の場合のグラフを下の図に示した。

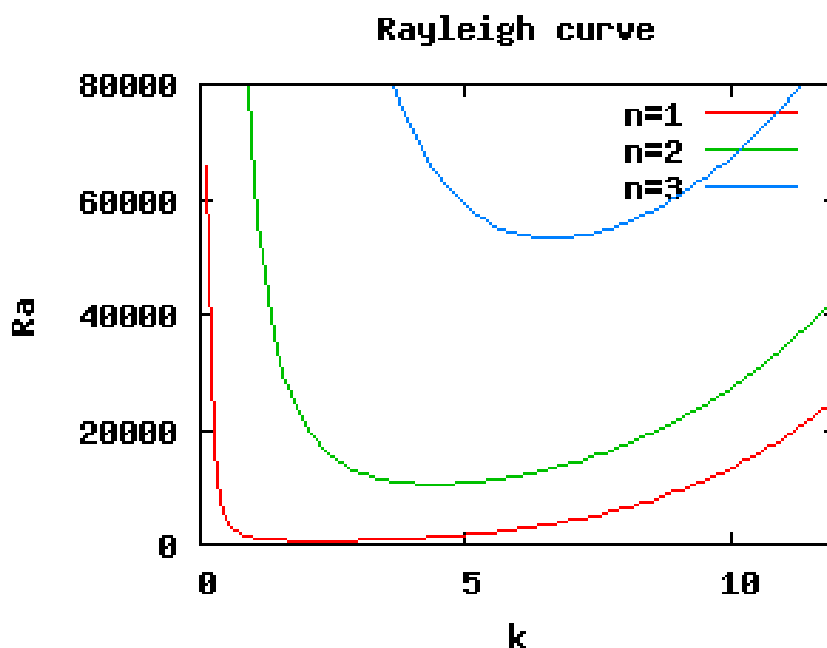


図 e.1: 臨界レイリー数 Ra と水平方向の波数 k の関係

図 e.1 より、 $n \geq 2$ の場合の臨界レイリー数は、 $n = 1$ の場合のそれよりも非常に大きい。よって、流線関数 Φ_* の z_* 方向に節をもつような分布をとりにくいことがわかる。

付録6 熱力学方程式の導出について

準静的変化を仮定し, ある系に外からなされる仕事を δW , 外から入る熱量を δQ とすると, その系の内部エネルギーの変化を dU とすると,

$$dU = \delta Q + \delta W \quad (\text{f.1})$$

と書くことができる. 仕事が外からの圧力 p によるものならば, それによる体積の変化を dV として,

$$\delta W = -pdV \quad (\text{f.2})$$

と書けるので,

$$dU = \delta Q - pdV \quad (\text{f.3})$$

となる. このように, 圧力 p が一定のもとで加熱した場合, U は T, V の関数となるので,

$$\begin{aligned} dU &= \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV \\ &= C_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV \end{aligned} \quad (\text{f.4})$$

となる. ただし, C_V は定積比熱である. ここで, 理想気体では, U は T だけの関数となり, V にはよらないという条件を用いると, (f.5) の右辺の第2項目は消え,

$$dU = C_V dT \quad (\text{f.5})$$

となる. よって, (f.3) は,

$$C_V dT + pdV = \delta Q \quad (\text{f.6})$$

と書くことができ, 今考えている系が単位質量であるとするので,

$$C_V dT + pd \left(\frac{1}{\rho} \right) = \delta Q \quad (\text{f.7})$$

となる. 式中の変数の微小な変化を時間 t に関する Lagrange 微分で置きかえると,

$$C_V \frac{DT}{Dt} + p \frac{D(1/\rho)}{Dt} = \frac{DQ}{Dt} \quad (\text{f.8})$$

となる. (f.8) の右辺の項に関して, 粘性散逸や放射の効果による加熱を無視すると, 温度 T の拡散を表す項のみに書き換えることができ, その結果,

$$C_V \frac{DT}{Dt} + p \frac{D(1/\rho)}{Dt} = C_V \kappa \nabla^2 T \quad (\text{f.9})$$

と書ける.

付録7 荒川ヤコビアン

(2.3.1a) の渦度方程式を再び書くと,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} = -PrRa \frac{\partial T}{\partial x} + Pr \nabla^2 \eta \quad (\text{g.1})$$

である. この式の右辺の各項を消去すると,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \quad (\text{g.2})$$

となる.

方程式の移流項はエンストロフィー, エネルギーを生成・消滅しない項である. 一方, (g.2) で消去した右辺の各項はそれらを生成・消滅する. このことを証明してみよう.

次のような領域 S を考える.

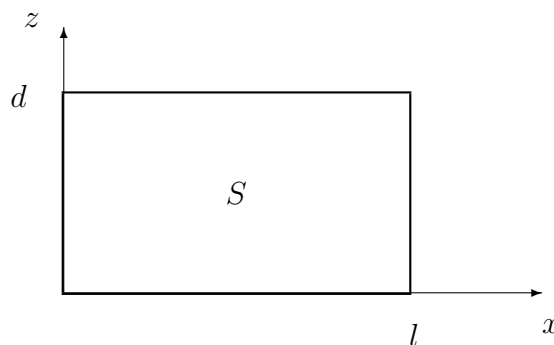


図 g.1. 考える $x - z$ 平面内の領域. 側方の境界条件は周期的境界条件とする.

ただし, この図において, $x = 0, l$ での境界条件は, 周期的境界条件とし, また, $z = 0, d$ での境界条件は今回の数値計算での上下の境界条件に合わせて,

$$\psi = \eta = 0 \quad (z = 0, d)$$

とする.

この図をふまえて、まず (g.2) の移流項がエンストロフィーを保存することを示す。エンストロフィー N は次のように定義される。

$$N = \int \int \left(\frac{1}{2} \eta^2 \right) dS = \int \int \left(\frac{1}{2} \eta^2 \right) dx dz. \quad (g.3)$$

エンストロフィーを保存することを示すには、(g.2) について、

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt} \int \int \left(\frac{1}{2} \eta^2 \right) dx dz = 0 \quad (g.4)$$

となることを示せばよい。ただし、 $dS = dx dz$ である。(g.2) の両辺に η をかけ、 S に関して面積分したものは、

$$\int \int \eta \frac{\partial \eta}{\partial t} dx dz + \int \int \eta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) dx dz = 0 \quad (g.5)$$

となる。(g.5) の左辺第 1 項目に関しては、

$$\begin{aligned} \int \int \eta \frac{\partial \eta}{\partial t} dx dz &= \int \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \eta^2 \right) dx dz \\ &= \frac{d}{dt} \int \int \left(\frac{1}{2} \eta^2 \right) dx dz \end{aligned} \quad (g.6)$$

と変形できる。一方、左辺第 2 項に関しては、

$$\begin{aligned} \int \int \eta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) dx dz &= \int \int \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \eta^2 \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \eta^2 \right) \right\} dx dz \\ &= \int \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right\} dx dz \\ &= \int \left[\frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{x=0}^{x=l} dz - \int \left[\frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{z=0}^{z=d} dx \end{aligned} \quad (g.7)$$

と変形でき、ここで、側方の境界条件は周期的境界条件であるので、(g.7) の右辺第 1 項目は消去できる。また、今回の数値計算における上下の境界条件を適用すると、

$$w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (g.8)$$

であることから、 $z = 0, d$ において η は 0 となるので、(g.7) の右辺第 2 項目も消去できる。よって、

$$\int \int \eta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) dx dz = 0 \quad (g.9)$$

となる。よって、(g.5) は、

$$\frac{d}{dt} \int \int \left(\frac{1}{2} \eta^2 \right) dx dz = \frac{dN}{dt} = 0 \quad (g.10)$$

と変形できる. よって, 移流項はエンストロフィーを保存することが示された.

次に (g.2) の移流項がエネルギーを保存することを示す. エネルギーを E とおく. エネルギーは速度の 2 乗で与えられるので,

$$\begin{aligned} E &= \int \int (u^2 + w^2) dx dz \\ &= \int \int \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dz \\ &= \int \left[\psi \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{z=0}^{z=d} dx - \int \int \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} dx dz + \int \left[\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=l} dz - \int \int \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx dz \end{aligned} \quad (g.11)$$

と書ける^{*1}. ここで, 側方の境界条件は周期的境界条件としているので, (g.11) の第 3 項目は消去でき, また, 上下の境界では $\psi = 0$ としているので, 第 1 項目も消去できる. よって,

$$\begin{aligned} E &= - \int \int \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} dx dz - \int \int \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx dz \\ &= - \int \int \psi \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) dx dz \\ &= - \int \int \psi \eta dx dz \end{aligned} \quad (g.12)$$

となる. よって, エネルギーを保存するには, (g.2) について,

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{d}{dt} \int \int \psi \eta dx dz = 0 \quad (g.13)$$

となることを示せばよい. (g.2) の両辺に ψ をかけ, S に関して面積分したものは,

$$\int \int \psi \frac{\partial \eta}{\partial t} dx dz + \int \int \psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) dx dz = 0 \quad (g.14)$$

^{*1}(g.11) の 2 行目の式から 3 行目の式への変形は複雑に見えるが, 次のような基本的な式変形を行っているだけである.

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

となる. (g.14) の左辺第 1 項目に関しては,

$$\begin{aligned}
\int \int \psi \frac{\partial \eta}{\partial t} dx dz &= \int \int \left(\frac{\partial}{\partial t} (\psi \eta) - \eta \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dx dz \\
&= \frac{d}{dt} \int \int \psi \eta dx dz - \int \int \frac{\partial \psi}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) dx dz \\
&= \frac{d}{dt} \int \int \psi \eta dx dz - \int \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=l} dz - \int \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{z=0}^{z=d} dx \\
&\quad + \int \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dz + \int \int \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} dx dz \quad (\text{g.15a}) \\
&= \frac{d}{dt} \int \int \psi \eta dx dz + \int \int \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} dx dz \\
&= \frac{d}{dt} \int \int \psi \eta dx dz + \frac{1}{2} \int \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) dx dz \\
&= \frac{d}{dt} \int \int \psi \eta dx dz + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \int (u^2 + w^2) dx dz \\
&= -\frac{dE}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{dE}{dt} \quad (\text{g.15b})
\end{aligned}$$

と変形できる. ただし, (g.15a) において側方の周期的境界条件より, (g.15a) の第 2 項目は消去し, また, $z = 0, d$ においては ψ は常に 0 であり, $\partial \psi / \partial t = 0$ となることから, 第 3 項目も消去している. よって,

$$\int \int \psi \frac{\partial \eta}{\partial t} dx dz = -\frac{1}{2} \frac{dE}{dt} \quad (\text{g.16})$$

となる. 一方, (g.14) の左辺第 2 項に関しては,

$$\begin{aligned}
\int \int \psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) dx dz &= \int \int \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \psi^2 \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \psi^2 \right) \frac{\partial \eta}{\partial z} \right\} dx dz \\
&= \int \int \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \psi^2 \right) \right\} dx dz - \int \int \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \psi^2 \right) \right\} dx dz \\
&= \int \left[\eta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \psi^2 \right) \right]_{x=0}^{x=l} dz - \int \left[\eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \psi^2 \right) \right]_{z=0}^{z=d} dx \quad (\text{g.17})
\end{aligned}$$

と変形でき, ここで, 側方の境界条件は周期的境界条件であるので, (g.17) の右辺第 1 項目は消去できる. また, 今回の数値計算における上下の境界条件より,

$$\eta = 0 \quad (z = 0, d) \quad (\text{g.18})$$

であるので, (g.17) の右辺第 2 項目も消去できる. よって,

$$\int \int \psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) dx dz = 0 \quad (\text{g.19})$$

となる. よって, (g.14) は,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int \int \psi \eta dx dz = 0 \quad (\text{g.20})$$

と変形できる. よって, 移流項はエネルギーを保存することが示された.

さて, 以上の議論から移流項はエンストロフィー, エネルギーを保存するので, 当然, 移流項を離散化した式もそれらを保存していなければならない. ここで, 渦度方程式の移流項を中央差分によって差分近似するために, 次のように離散化したとする.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ &= \frac{\psi_{m,n+1} - \psi_{m,n-1}}{2\Delta d} \frac{\eta_{m+1,n} - \eta_{m-1,n}}{2\Delta d} - \frac{\psi_{m+1,n} - \psi_{m-1,n}}{2\Delta d} \frac{\eta_{m,n+1} - \eta_{m,n-1}}{2\Delta d} (= J^{[1]}) \end{aligned} \quad (\text{g.21})$$

この差分近似した式を $J^{[1]}$ とする. このとき, 格子点の位置を表すパラメータを x 方向に関しては m , z 方向に関しては n とすると,

$$\begin{aligned} \int \int \eta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) dx dz &\simeq \sum_{m,n} \eta_{m,n} J^{[1]}_{m,n} \\ &= \frac{1}{4(\Delta d)^2} \sum_{m,n} \left\{ \eta_{m,n} (\psi_{m,n+1} - \psi_{m,n-1}) (\eta_{m+1,n} - \eta_{m-1,n}) \right. \\ &\quad \left. - \eta_{m,n} (\psi_{m+1,n} - \psi_{m-1,n}) (\eta_{m,n+1} - \eta_{m,n-1}) \right\} \\ &= \frac{1}{4(\Delta d)^2} \sum_{m,n} \left\{ \eta_{m,n} \eta_{m+1,n} \psi_{m,n+1} - \eta_{m,n} \eta_{m-1,n} \psi_{m,n+1} \right. \\ &\quad - \eta_{m,n} \eta_{m+1,n} \psi_{m,n-1} + \eta_{m,n} \eta_{m-1,n} \psi_{m,n-1} \\ &\quad - \eta_{m,n} \eta_{m,n+1} \psi_{m+1,n} + \eta_{m,n} \eta_{m,n-1} \psi_{m+1,n} \\ &\quad \left. + \eta_{m,n} \eta_{m,n+1} \psi_{m-1,n} - \eta_{m,n} \eta_{m,n-1} \psi_{m-1,n} \right\} \end{aligned} \quad (\text{g.22})$$

となる. ただし, 右下に m, n のついた変数は, その位置での変数値であることを意味する. こうして領域内のすべての格子点での和を計算しても, 項を消しあうことなく, 結果, 0 にはならない. よってエンストロフィーを保存せず, このような差分近似は正しくないことがわかる. では, いったいどのように差分近似すればエンストロフィーの保存を満たすことができるのだろうか. 答えから言うと, 以下のよう

に差分近似してやればよい。まず,

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \eta \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \eta \right) \right. \quad (\text{g.23a})$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\psi \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \right\} \quad (\text{g.23b})$$

と変形することができることは明らかである。(g.23) の右辺, (g.23a), (g.23b) を差分近似したものを, それぞれ $J^{[2]}$, $J^{[3]}$ とすると,

$$J^{[2]} = \left(\frac{\psi_{m+1,n+1} - \psi_{m+1,n-1}}{2\Delta d} \eta_{m+1,n} - \frac{\psi_{m-1,n+1} - \psi_{m-1,n-1}}{2\Delta d} \eta_{m-1,n} \right. \\ \left. - \frac{\psi_{m+1,n+1} - \psi_{m-1,n+1}}{2\Delta d} \eta_{m,n+1} + \frac{\psi_{m+1,n-1} - \psi_{m-1,n-1}}{2\Delta d} \eta_{m,n-1} \right) / 2\Delta d \quad (\text{g.24})$$

$$J^{[3]} = \left(\psi_{m,n+1} \frac{\eta_{m+1,n+1} - \eta_{m-1,m+1}}{2\Delta d} - \psi_{m,n-1} \frac{\eta_{m+1,n-1} - \eta_{m-1,n-1}}{2\Delta d} \right. \\ \left. - \psi_{m+1,n} \frac{\eta_{m+1,n+1} - \eta_{m+1,n-1}}{2\Delta d} + \psi_{m-1,n} \frac{\eta_{m-1,n+1} - \eta_{m-1,m-1}}{2\Delta d} \right) / 2\Delta d \quad (\text{g.25})$$

と書ける。移流項は, $J^{[1]}$, $J^{[2]}$, $J^{[3]}$ を使って,

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{3} (J^{[1]} + J^{[2]} + J^{[3]}) \quad (\text{g.26})$$

と差分近似してやればよいのである。この式がエンストロフィーの保存を満たして

いるか確かめてみよう.

$$\begin{aligned}
& \int \int \eta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) dx dz \simeq \sum_{m,n} \eta_{m,n} \frac{1}{3} (J^{[1]}_{m,n} + J^{[2]}_{m,n} + J^{[3]}_{m,n}) \\
& = \frac{1}{12(\Delta d)^2} \sum_{m,n} \left\{ \eta_{m,n} (\psi_{m,n+1} - \psi_{m,n-1}) (\eta_{m+1,n} - \eta_{m-1,n}) \right. \\
& \quad - \eta_{m,n} (\psi_{m+1,n} - \psi_{m-1,n}) (\eta_{m,n+1} - \eta_{m,n-1}) \\
& \quad + \eta_{m,n} \eta_{m+1,n} (\psi_{m+1,n+1} - \psi_{m+1,n-1}) - \eta_{m,n} \eta_{m-1,n} (\psi_{m-1,n+1} - \psi_{m-1,n-1}) \\
& \quad - \eta_{m,n} \eta_{m,n+1} (\psi_{m+1,n+1} - \psi_{m-1,n+1}) + \eta_{m,n} \eta_{m,n-1} (\psi_{m+1,n-1} - \psi_{m-1,n-1}) \\
& \quad + \eta_{m,n} \psi_{m,n+1} (\eta_{m+1,n+1} - \eta_{m-1,n+1}) - \eta_{m,n} \psi_{m,n-1} (\eta_{m+1,n-1} - \eta_{m-1,n-1}) \\
& \quad \left. - \eta_{m,n} \psi_{m+1,n} (\eta_{m+1,n+1} - \eta_{m+1,n-1}) + \eta_{m,n} \psi_{m-1,n} (\eta_{m-1,n+1} - \eta_{m-1,n-1}) \right\} \\
& = \frac{1}{12(\Delta d)^2} \sum_{m,n} \left\{ (\eta_{m,n} \eta_{m+1,n} \psi_{m,n+1} - \eta_{m,n} \eta_{m-1,n} \psi_{m-1,n+1}) \right. \tag{g.27a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (\eta_{m,n} \eta_{m-1,n} \psi_{m,n+1} - \eta_{m,n} \eta_{m+1,n} \psi_{m+1,n+1}) \\
& - (\eta_{m,n} \eta_{m+1,n} \psi_{m,n-1} - \eta_{m,n} \eta_{m-1,n} \psi_{m-1,n-1}) \\
& + (\eta_{m,n} \eta_{m-1,n} \psi_{m,n-1} - \eta_{m,n} \eta_{m+1,n} \psi_{m+1,n-1}) \\
& - (\eta_{m,n} \eta_{m,n+1} \psi_{m+1,n} - \eta_{m,n} \eta_{m,n-1} \psi_{m+1,n-1}) \\
& + (\eta_{m,n} \eta_{m,n-1} \psi_{m+1,n} - \eta_{m,n} \eta_{m,n+1} \psi_{m+1,n+1}) \\
& + (\eta_{m,n} \eta_{m,n+1} \psi_{m-1,n} - \eta_{m,n} \eta_{m,n-1} \psi_{m-1,n-1}) \\
& - (\eta_{m,n} \eta_{m,n-1} \psi_{m-1,n} - \eta_{m,n} \eta_{m,n+1} \psi_{m-1,n+1}) \tag{g.27b}
\end{aligned}$$

$$+ (\eta_{m,n} \eta_{m+1,n+1} \psi_{m,n+1} - \eta_{m,n} \eta_{m-1,n-1} \psi_{m-1,n}) \tag{g.27c}$$

$$\begin{aligned}
& - (\eta_{m,n} \eta_{m-1,n+1} \psi_{m,n+1} - \eta_{m,n} \eta_{m+1,n-1} \psi_{m+1,n}) \\
& - (\eta_{m,n} \eta_{m+1,n-1} \psi_{m,n-1} - \eta_{m,n} \eta_{m-1,n+1} \psi_{m-1,n}) \\
& + (\eta_{m,n} \eta_{m-1,n-1} \psi_{m,n-1} - \eta_{m,n} \eta_{m+1,n+1} \psi_{m+1,n}) \left. \right\} \tag{g.27d}
\end{aligned}$$

と変形できる. 最後の式変形において, 括弧でくくった2項は, 各格子点での和をとった結果, 互いに打ち消しあう部分である. たとえば, (g.27a) の部分の括弧の中身を例にあげてみよう. ある格子点 (m, n) での第1項目の値は,

$$\eta_{m,n} \eta_{m+1,n} \psi_{m,n+1} \tag{g.28}$$

である. 一方, その格子点より1つ右の格子点 $(m+1, n)$ での第2項目の値は,

$$\eta_{m+1,n} \eta_{m,n} \psi_{m,n+1} \tag{g.29}$$

である. (g.28) と (g.29) の値は同じであるので, 互いに消しあう部分であることがわかる. 他の括弧でくくった部分も同様に考えることができる. また, 境界での値に

関してであるが、側方には周期的境界条件としているので、 m つまり x 方向に和をとることによって消去できる項は問題ない。上下の境界では、

$$\eta = \psi = 0 \quad (z = 0, d) \quad (\text{g.30})$$

であることから、境界での η, ψ の値を含む項は 0 となるので、 n つまり z 方向に和をとることによって消去できる項についても問題は解決する。以上より、

$$\int \int \eta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) dx dz = 0 \quad (\text{g.31})$$

となり、(g.26) のように差分近似するとエンストロフィーの保存を満たすことが示された。

また、(g.27) の式中の (g.27a) から (g.27b) までの各項には、 $J^{[1]}$ と $J^{[2]}$ を差分近似したものが混ざっている。一方、(g.27c) から (g.27d) までの各項は $J^{[3]}$ を差分近似したもののみである。したがって、 $J^{[1]}$ と $J^{[2]}$ の和でもエンストロフィーを保存しており、また、 $J^{[3]}$ のみでそれを保存していることがわかる。

さて、エネルギーについても (g.26) のように差分近似してやると、保存する。これは、今までの計算と同様にして証明できる。ただし、エンストロフィー保存の場合と違って、 $J^{[1]}$ と $J^{[3]}$ の和でエネルギーを保存しており、 $J^{[2]}$ のみでもそれを保存している。

以上の議論から、エンストロフィー、エネルギーをともに保存するような差分近似の方法は (g.26)、つまり、

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{3}(J^{[1]} + J^{[2]} + J^{[3]}) \quad (\text{g.32})$$

が正しい。

ここまで、渦度方程式の移流項について議論してきたが、熱力学方程式の移流項に関しても、同様に差分近似してやればよい。このことを証明するためには、

$$\int \int T \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dz = 0, \quad (\text{g.33a})$$

$$\int \int \psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dz = 0 \quad (\text{g.33b})$$

を示すことによって、移流項が何らかの物理量^{*2}を保存することを示してやればよい。しかし、それはここまでやってきた計算において、 η を T に置き換えてやるだけでよいし、また、計算の途中で、

$$\eta = \nabla^2 \psi \quad (\text{g.34})$$

^{*2}その物理量は、渦度方程式でいうエンストロフィーやエネルギーにあたる。

という関係を用いないために, 計算の途中で不都合が生じることはない. よって, その証明はここでは割愛する.

ここで紹介した移流項の差分近似の方法は, 荒川ヤコビアン法と呼ばれる.

付録8 初期条件について

本研究の数値計算における初期条件を再び書くと,

- 考えている領域 (格子点) において,

$$\eta = \psi = 0 \quad (\text{h.1})$$

とする.

- 温度擾乱 T については領域の真ん中の 1 格子点に

$$T = 0.01 \quad (\text{h.2})$$

の微小擾乱を与え, それ以外の格子点では,

$$T = 0 \quad (\text{h.3})$$

とする.

である. ここでは, (h.2) のように微小な擾乱場を与える理由について考える. 一見, 初期条件を, 流れがまったくなく, 擾乱もまったくないような状態, つまり考えているすべての格子点で,

$$\eta = \psi = T = 0 \quad (\text{h.4})$$

と設定しても, 不安定な状態を解消するために対流が発生しそうである. しかし, このように設定すると, 流れはまったく発生しなくなる. このことを支配方程式を使って説明する. 導出した渦度方程式, 熱力学方程式を再び書くと,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial z} = -PrRa \frac{\partial T'}{\partial x} + Pr \nabla^2 \eta, \quad (\text{h.5a})$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T'}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T'}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nabla^2 T' \quad (\text{h.5b})$$

である.

初期条件を (h.4) のように設定した場合, すべての格子点において, ψ, η, T の空間微分も 0 となるので, (h.5a) の移流項, 拡散項および, 右辺第 1 項目は 0 となる。よって,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (\text{h.6})$$

となり, η は時間発展しない。(h.5b) についても同様に考えると,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (\text{h.7})$$

となり, T も時間発展しない。よって, 初期条件を (h.4) のように設定すると, 流れは発生しないことがわかる。

一方, 初期条件を (h.1), (h.2), (h.3) のように設定すると, (h.5a) については移流項, 拡散項は 0 となるが, 右辺第 1 項目は, 中央差分によって差分近似しているがゆえに, 微小擾乱を与えた格子点のまわりの 4 点においては 0 ではない。よって, η は時間発展する。また, (h.5b) については, 移流項と左辺最終項は 0 となるが, 拡散項は格子点とそのまわりの 4 点においては 0 ではなく, T も時間発展する。そして, 時間積分を重ねていくごとに, この擾乱は格子点を伝わるようにして広がっていき, 何らかの流れが発生する。

この 2 つの状態をわかりやすい例を用いて説明する。1 つのダルマを考え, このダルマを逆さにする。ダルマの中心線が鉛直線と完全に一致していれば, 不安定ではあるが, ダルマは逆さのまま静止するだろう。これが前者のような状態のよい例である。次にそのダルマが逆さになって静止している状態から, ほんの少しか傾けてみる。すると, ダルマは不安定な状態を解消すべく, 動き出し, 安定な状態になろうとする。これが, 後者のよい例である。実際の大気中では, 前者のような状態はまず実現しない。以上の議論から, わかったことをあげると,

- 今回の数値計算における初期条件では, T に微小な擾乱を与えたが, η や ψ に与えても問題はない。
- 微小な擾乱を与える位置 (格子点) は領域の真ん中である必要はまったくない。
- 擾乱を与える点は当然, 複数であっても構わない。
- 微小擾乱の数値は +0.01 である必要はない。ただ, あまりにも大きい数値 (今回の状況設定では $O(10^{-1})$ を超えるような数値) を与えるのは問題があるだろう。

となる. 1つ目に書いたことについて, 仮に ψ に微小な数値を与えた場合, η と ψ には,

$$\eta = \nabla^2 \psi \quad (\text{h.8})$$

という関係があるので, この式を満たすように η の初期値を決めてやる必要があり, T に微小な数値を与える場合に比べ, 少々面倒となってしまう.

以上の理由から, 今回の計算における初期条件は (h.1), (h.2), (h.3) のように設定した.

付録9 離散フーリエ変換

数値計算の結果, 発生した擾乱の波数, あるいは波長を調べるために, 本研究では, 得られた流線関数のデータをフーリエ変換することによって, どの波数が卓越しているかを解析した. ここでは, この解析方法について説明する.

発生した擾乱の水平方向の波数を求めるために, 任意の時間での流線関数にデータにおいて, z 方向の格子点を任意に 1 つ選び, そこでの x 方向に並んだ流線関数の格子点値 $\psi(x)$ をフーリエ変換し, それを z に関して領域の範囲で積分することによって, 卓越波数の平均を求める.

図 i.1 のように, x 軸上の $-L \leq x \leq L$ の範囲に $N + 1$ 個の格子点を考える.

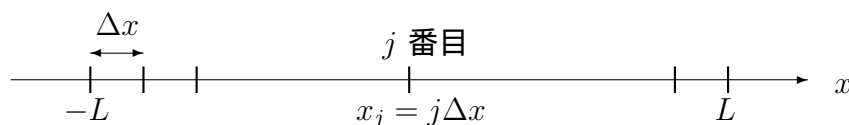


図 i.1 領域 $-L \leq x \leq L$ に等間隔に並んだ格子点

格子点間隔を Δx とすると,

$$2L = N\Delta x \quad (\text{i.1})$$

という関係が成り立つ. ここで, $\psi(x)$ が x 方向に周期的であり, その周期を $2L$ と

する. このとき, $\psi(x)$ をフーリエ変換したものを $\Psi(n)$ とすると,

$$\begin{aligned}\Psi(n) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \psi(x)(\cos k_n x + i \sin k_n x) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \psi(x) e^{-ik_n x} dx \\ &= \frac{1}{N\Delta x} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta x \psi(j) \exp\left(-i \frac{n\pi}{N\Delta/2} j \Delta x\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \psi(j) \exp\left(-\frac{2n\pi i j}{N}\right)\end{aligned}\quad (\text{i.2})$$

となる. ここで, k_n については,

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (\text{i.3})$$

という関係を用いている. このように, 格子点値のデータ, つまり離散的なデータをフーリエ変換するやり方を, 離散フーリエ変換 (DFT) という. ここで, 離散フーリエ逆変換 (IDFT) の式を書くと,

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(n) e^{ik_n x} dn \\ &= \sum_{n=-N/2}^{N/2} \Psi(n) \exp\left(\frac{2n\pi i j}{N}\right)\end{aligned}\quad (\text{i.4})$$

である. つまり, $\psi(x)$ は, n に関して, $-N/2$ から $N/2$ までの和で与えられる. この $N/2$, $-N/2$ という値は, Nyquist の定理^{*3} から決まる.

さて, 離散フーリエ変換を計算結果に適用する方法について考えよう. $0 \leq x \leq 8$ に領域をとっており, かつ周期的境界条件としているので, 周期 $2L$ は,

$$2L = 8 \quad (\text{i.5})$$

である. ある z での x 方向の流線関数の離散データを $\psi(j)$ とする. このとき, j は図 i.1 の左端の点, つまり, $x = 0$ から何番目の格子点値であるかを示すパラメータとする. $\psi(j)$ の離散フーリエ変換を行うと,

$$\Psi(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \psi(j) \exp\left(-\frac{2n\pi i j}{N}\right) \quad (\text{i.6})$$

^{*3}領域内に設定している格子点数と, 考慮する波数の範囲は同じでなければならないという定理. 今考えている格子点数は $N + 1$ であるので, Nyquist の定理より, n についても $-N/2$ から $N/2$ まで考えることによって, 合計 $N + 1$ の波数範囲を設定する必要がある.

となる. こうして求まった $\Psi(n)$ は, 複素数である. 卓越波数を調べるためには, この虚数部分も調べる必要があるために, $\Psi(n)$ の大きさを考えることにする. $\Psi(n)$ の絶対値の 2 乗は,

$$|\Psi(n)|^2 = \Psi(n)\Psi^*(n) \quad (\text{i.7})$$

で求まる. ただし, アスタリスク記号は複素共役を意味する. 次に領域全体で平均してどの波数が卓越しているのかを知るために, $|\Psi(n)|$ を z に関して 0 から 1 まで積分することによって, $|\Psi(n)|$ の全領域での平均を求める. z 方向にとった格子点数を $M+1$ とし, 格子点間隔を Δy とすると,

$$1 = M\Delta y \quad (\text{i.8})$$

という関係が成り立つ. このとき, $|\Psi(n)|$ の平均 $|\hat{\Psi}(n)|$ は,

$$|\hat{\Psi}(n)|^2 = \int_0^1 |\psi(n)|^2 dz / \int_0^1 dz = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M |\psi(n)|^2 \quad (\text{i.9})$$

となる.

さて, $Ra = 700$ のときの $t = 30$ の流線関数のデータから卓越波数を求めてみよう. その結果を, n を横軸, $|\Psi(n)|^2$ を縦軸にとったものを図 i.2 に示す.

図より, $n = 3$ のとき $|\hat{\Psi}|^2$ が他の n に比べて大きな値をとっていることから, 卓越波数は (i.3) を使って,

$$k_3 = \frac{3\pi}{4} \quad (\text{i.10})$$

と書くことができる. よって, 発生した擾乱の卓越波長 λ_{\max} は,

$$\lambda_{\max} = \frac{2\pi}{k_3} \simeq 2.67 \quad (\text{i.11})$$

と求まる.

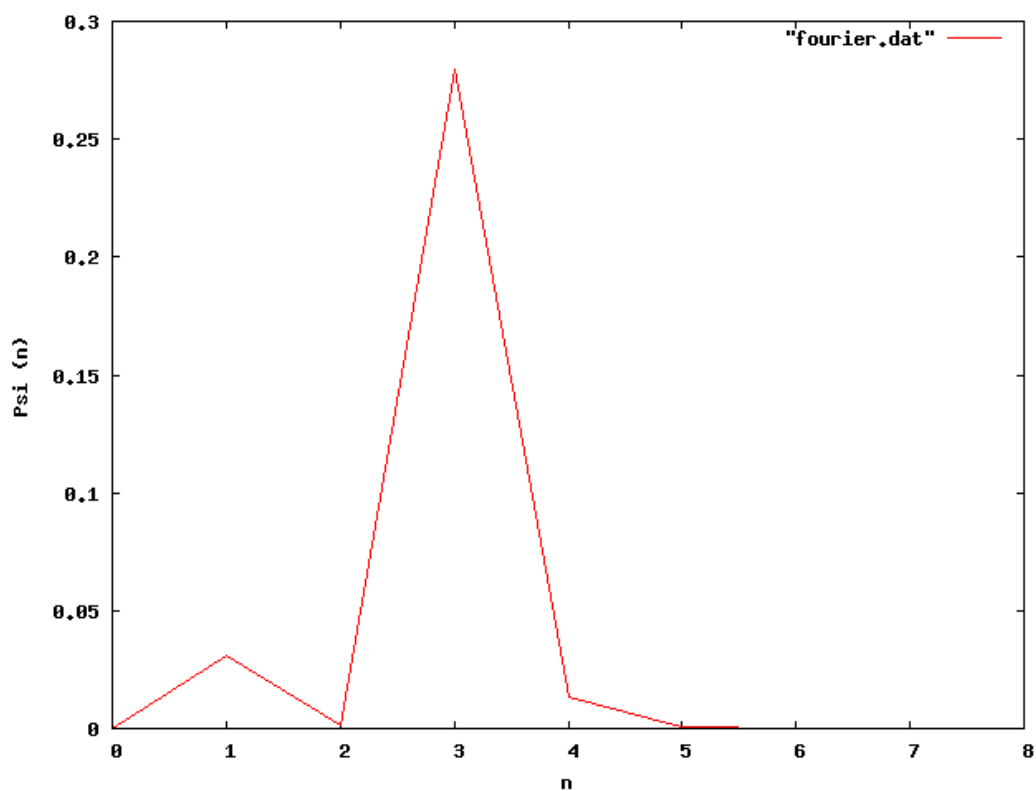


図 i.2: $Ra = 700$ と設定したときの $t = 30$ での波数分布. 横軸に n , 縦軸に $|\hat{\Psi}(n)|^2$ をとっている. 図より, $n = 3$ のとき $|\hat{\Psi}|^2$ がより大きな値をとっていることがわかる.

付録10 ニュートン・ラフソン法

$n = 1$ のときのレイリー数 Ra と水平方向の波数 λ との関係を再び書くと,

$$Ra = \frac{\{(2\pi/\lambda)^2 + \pi^2\}^3}{(2\pi/\lambda)^2} = \frac{\lambda^2\pi^4}{4} \left(\frac{4}{\lambda^2} + 1 \right)^3 \quad (\text{j.1})$$

である. Ra を y とし, λ を x と置き換えると,

$$y = \frac{x^2\pi^4}{4} \left(\frac{4}{x^2} + 1 \right)^3 \quad (\text{j.2})$$

となる. $Ra = 700$ の直線との交点の λ を求めるためには, $y = f(x)$ とし,

$$f(x) = \frac{x^2\pi^4}{4} \left(\frac{4}{x^2} + 1 \right)^3 - 700 = 0 \quad (\text{j.3})$$

を解くことによって, x を求めればよい. $f(x)$ は非線形方程式であり, 解析的に解くのは困難であることが多い. そこで, この非線形方程式をニュートン・ラフソン (Newton Raphson) 法という方法を用いて解くことを考える.

まず, ニュートン・ラフソン法について説明する. ある非線形の関数 $y = f(x)$ を考え, x と y の関係をグラフにすると, 図 j.1 のようになるとする. 方程式 $f(x) = 0$ の根を求めてみよう. ここで, x の値を任意に決め, その値を x_0 とする. x_0 を根の第 0 近似とする. $x = x_0$ の直線とレイリー曲線 (図 j.1 の赤線) との交点の座標は $(x_0, f(x_0))$ である. この交点における接線 (図 j.1 の青線) を引き, その接線と x 軸との交点の座標を $(x_1, 0)$ とする. このとき,

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \quad (\text{j.4})$$

という関係が成り立ち, この関係より x_1 は,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (\text{j.5})$$

と書ける. x_1 は x_0 よりも $f(x) = 0$ の根に近い値となる. この操作をもう一度行くと, x_1 から x_2 が求まる.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (\text{j.6})$$

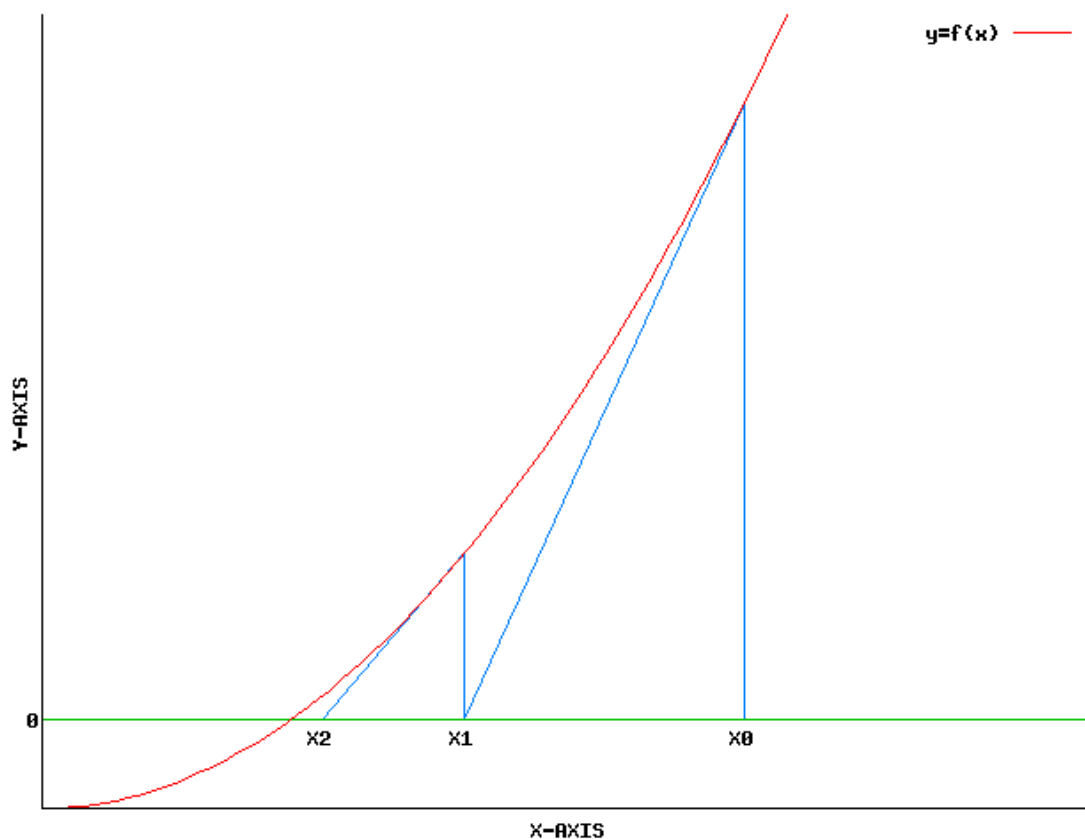


図 j.1: ニュートン・ラフソン法で解くことにとって, 解が収束していくのがわかる.

この操作を n 回繰り返すことによって, 第 n 近似 x_n が求まっているとき, 第 $n+1$ 近似 x_{n+1} は,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (\text{j.7})$$

と求まる. この式がニュートン・ラフソン法の一般式である. 繰り返しの回数 n を増やすほど, x_n の値は根に近づいていく. しかし, 回数をどれだけ増やしても根に一致することはないので, x_n と x_{n+1} の差がある小さな値より小さくなった時点で, 解を決定する. つまり,

$$|x_{n+1} - x_n| = \varepsilon \quad (\text{j.8})$$

を初めて満たしたとき, x_{n+1} を求める根とする. ただし, ε はある微小量とする^{*4}. これが, ニュートン・ラフソン法の原理である.

$y = f(x)$ が 2 つ以上の根をもつ場合には, 注意が必要となる. それは, 第 0 近似 x_0 の与え方によって, 異なる根が得られるからである. その簡単な例として, 下に

^{*4}本研究では, ε の値を 0.0001 とした. この値を小さな値に設定するほど, 高精度の根が得られる.

凸の 2 次関数 $y = g(x)$ を考えてみる. $g(x) = 0$ の解は 2 つあるとし, $g(x)$ が最小値をとるときの x の値を x_{\min} とする. このとき, 2 解のうち 1 つ (x_- とする) は $x_- < x_{\min}$ を満たし, もう 1 つ (x_+ とする) は $x_+ > x_{\min}$ を満たす. この 2 解を求める際, 第 0 近似 x_0 が $x_0 < x_{\min}$ であるとき, 解は x_- に収束していき, $x_0 > x_{\min}$ であるとき, 解は x_+ に収束していく. よって, 求めたい根のおおよその値を知った上で, その値に近い値を第 0 近似として用いるべきである.

ニュートン・ラフソン法を用いて, 方程式 (j.3) を解いてみよう. レイリー曲線, すなわち $y = f(x)$ のグラフを再び書くと, 図 j.2 のようになる.

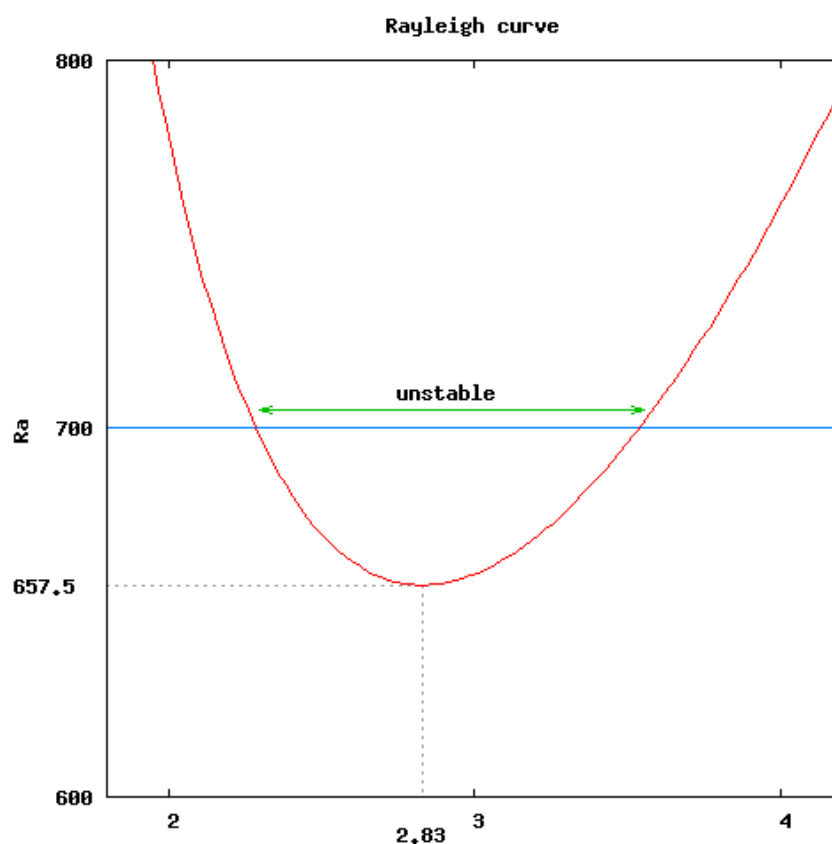


図 j.2: レイリー数と擾乱の水平波長との関係. 横軸は λ , 縦軸はレイリー数である. ただし, 赤線はレイリー曲線, 青線は $Ra = 700$ の線である.

図 j.2 より, 求める 2 解はそれぞれ,

$$2 < x < 2.5, 3 < x < 4 \quad (\text{j.9})$$

の範囲内にあることがわかる^{*5}.そこで, 2 解の第 0 近似として, それぞれ,

$$x = 2.4, 3.5 \quad (\text{j.10})$$

を選択する. なお, ニュートン・ラフソン法の式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (\text{j.11})$$

の中の $f'(x_n)$ の計算については, 2 次の精度をもつ中央差分法で近似した. つまり,

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n + \Delta x) - f(x_n - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (\text{j.12})$$

と近似した. ただし, 今回の計算では, $\Delta x = 0.00001$ とした. 結果, x は次の値に収束した.

$$x_n = 2.28729838, 3.5344399 \quad (\text{j.13})$$

よって, レイリー曲線と $Ra = 700$ との交点の λ はおよそ,

$$\lambda = 2.29 \dots, 3.53 \dots \quad (\text{j.14})$$

の値をとる.

^{*5}先に述べた議論より, $f(x)$ が最小値をとる $x = 2.83 \dots$ を意図的に範囲からはずしていることに注意すること.

付録11 絶対誤差と相対誤差

数値データの誤差を表現する方法として、絶対誤差と相対誤差の2つがある。

例として、比較する2つの数値 a, b を考えよう。ただし、 a を計算結果とし、 b を真の値とする。このとき、絶対誤差 d_A は、

$$d_A = a - b \quad (\text{k.1})$$

で与えられ、相対誤差 d_R は、

$$d_R = \frac{a - b}{b} \quad (\text{k.2})$$

で与えられる。数値の誤差を調べる際、これら2つの方法のうち相対誤差を用いたほうがよい。このことを、わかりやすい例を用いて説明する。

a, b が、

$$a = 10001, b = 10000 \quad (\text{k.3})$$

の値をとるとき、絶対誤差 d_A 、相対誤差 d_R は、

$$d_A = 1, d_R = 0.0001 \quad (\text{k.4})$$

となる。一方、 a, b が、

$$a = 2, b = 1 \quad (\text{k.5})$$

の値をとるとき、絶対誤差 d_A 、相対誤差 d_R は、

$$d_A = 1, d_R = 1 \quad (\text{k.6})$$

となる。両者の誤差を比較するとき、絶対誤差だけでみると、前者と後者は同じであり、誤差が等しいように見える。しかし、相対誤差でみると、前者は1%であるのに対して、後者は100%であり、後者の方が誤差が非常に大きくなっている。以上の議論より、データの誤差を調べる際、絶対誤差よりも相対誤差のほうが適切である。

相対誤差を出す際、1つ注意すべき場合がある。それは、真の値 b が0である場合である。 $b = 0$ のとき、相対誤差 d_R が発散し、誤差を正確に測ることができなく

になってしまう。したがって、真の値が 0 である場合、相対誤差を用いることはできない。

本研究では、4.2 節において自分のプログラムで計算した結果と SPMODEL で計算した結果を比較する際、相対誤差を用いた。ただし、真の値（先の議論では b の値）は SPMODEL での計算結果とした。また、比較した計算結果は温度場のデータであり、計算領域の上端 ($z = 1$) の格子点値を除いて 0 よりも大きい値をとる^{*6}。よって、温度場の比較に相対誤差を用いて問題は生じない^{*8}。

^{*6}ある格子点での温度 $T_{m,n}$ は、温度の基本場 $T_{Bm,n}$ と温度擾乱 $T'_{m,n}$ を用いて、

$$T_{m,n} = T_{Bm,n} + T'_{m,n}$$

と書ける。ただし、これらの変数は無次元量であることに注意しよう。本研究では、温度基本場 T_B を

$$T_B = 1 - z$$

と設定しており、さらに領域の上端 $z = 1$ と下端 $z = 0$ の格子点においては、温度擾乱 $T'_{m,n}$ を、

$$T' = 0$$

としていることから、温度場 $T_{m,n}$ は領域内のすべての格子点において、

$$0 \leq T_{m,n} \leq 1$$

を満たす。よって、温度場は上端を除いて 0 よりも大きな値をとる。

^{*7}領域の上端 $z = 1$ での温度場の格子点値は両結果とも同じであることから、相対誤差を 0 とした。

^{*8}相対誤差の計算に温度擾乱、渦度、流線関数を用いることはできない。なぜならば、これら 3 つの変数は計算領域内において 0 をとり得るためである。