dcpam5
支配方程式系とその離散化

地球流体電脳倶楽部

平成 24 年 10 月 9 日

目 次

第1章　積雲対流

1.1　はじめに

ほとんどの大気大循環モデルにおいては積雲を様に表現するだけの分解能を持たないので, 雲の発生する条件並びに雲が大気大循環に与える影響については何らかの方法で評価せざるを得ない. この評価方法は一般に積雲パラメタリゼーションと呼ばれる.

現在の dcpam5 では湿潤対流調節 (Manabe *et al.*, 1965) と Relaxed Arakawa-Schubert スキーム (Moorthi and Suarez, 1992) を実装してある. また, そもそも大気が過飽和状態にあれば降水が起こる. これを非対流性凝結 (大規模凝結) という. これについては別紙『非対流性凝結 (大規模凝結)』を参照のこと.

1.2　湿潤対流調節

1.2.1　離散表現

ここでは, 湿潤対流調節 (e.g., Manabe et al., 1965) の定式化について解説する. なお, 乾燥対流調節の定式化は, 水蒸気がないという条件の下で, 湿潤対流調節の式から容易に導出できるため, ここに示す式は乾燥対流調節の解説にもなっている.

対流調節では, 連続した 2 つの層において, 次の条件が満たされる場合に調節を行う.

1. 下層と上層の湿潤静的エネルギーの差が閾値より大きい (下層の湿潤静的エネルギーが上層のそれよりも大きい (温度減率が湿潤断熱減率よりも大きい)),

[1].

2. 相対湿度が閾値以上[2].

これらは, 離散化した式で表現すると下のように表わされる.

$$
\begin{aligned}
C_p\hat{T}_k + Lq^*(\hat{T}_k) + g\hat{z}_k - \left(C_p\hat{T}_{k+1} + Lq^*(\hat{T}_{k+1}) + g\hat{z}_{k+1}\right) &> C_p\Delta T_c, && (1.1)\\
\frac{\hat{q}_k}{q^*(\hat{T}_k, p_k)} &\geq r_c, && (1.2)\\
\frac{\hat{q}_{k+1}}{q^*(\hat{T}_{k+1}, p_{k+1})} &\geq r_c && (1.3)
\end{aligned}
$$

ここで, $\hat{}$ は調節前の値を表す. また, $C_p\Delta T_c$ は不安定が起こる湿潤静的エネルギー差の閾値であり, r_c は凝結が生じる相対湿度の閾値である.

調節時に満たす条件は,

$$
\begin{aligned}
&\left\{C_p\hat{T}_k + L\hat{q}_k\right\}\frac{p_{k-\frac{1}{2}} - p_{k+\frac{1}{2}}}{g} + \left\{C_p\hat{T}_{k+1} + L\hat{q}_{k+1}\right\}\frac{p_{k+\frac{1}{2}} - p_{k+\frac{3}{2}}}{g}\\
&= \left\{C_pT_k + Lq_k\right\}\frac{p_{k-\frac{1}{2}} - p_{k+\frac{1}{2}}}{g} + \left\{C_pT_{k+1} + Lq_{k+1}\right\}\frac{p_{k+\frac{1}{2}} - p_{k+\frac{3}{2}}}{g} \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

$$
C_pT_k + Lq_k + gz_k = C_pT_{k+1} + Lq_{k+1} + gz_{k+1} \qquad (1.5)
$$

$$
\begin{aligned}
q_k &= q^*(T_k, p_k) && (1.6)\\
q_{k+1} &= q^*(T_{k+1}, p_{k+1}) && (1.7)
\end{aligned}
$$

である.

ここで, (1.5) を静水圧平衡の式を用いて整理すると,

$$
C_p(T_k - T_{k+1}) + L(q^*(T_k) - q^*(T_{k+1})) - \frac{RT_{k+\frac{1}{2}}}{p_{k+\frac{1}{2}}}(p_k - p_{k+1}) = 0 \qquad (1.8)
$$

となる. したがって, ... のからなる連立一次方程式を解けば良い. なお, $T_{k+\frac{1}{2}}$ は

$$
T_{k+\frac{1}{2}} = \frac{T_k + T_{k+1}}{2} \qquad (1.9)
$$

[1]単純には, この閾値はゼロである. しかし, 実際にはモデル格子間隔内で温度・湿度の分布があることが考えられ, 格子の平均エネルギー差がゼロ以上であっても, 格子内で混合が起こることが想像される.

[2]単純には, 凝結が生じる相対湿度の閾値は 1 である. しかし, 実際にはモデル格子間隔内で湿度の分布があることが考えられ, 格子の平均相対湿度が 1 以下であっても, 格子内で凝結が起こることが想像される.

と表現することにする.

ここで, q_k, q_{k+1} をテイラー展開し,

$$
\begin{aligned}
q_k &= q^*(T_k, p_k) = q^*(\hat{T}_k, p_k) + \left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{T=\hat{T}_k} \Delta T_k & (1.10)\\
q_{k+1} &= q^*(T_{k+1}, p_{k+1}) = q^*(\hat{T}_{k+1}, p_{k+1}) + \left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{T=\hat{T}_{k+1}} \Delta T_{k+1} & (1.11)\\
\Delta T_k &= T_k - \hat{T}_k & (1.12)\\
\Delta T_{k+1} &= T_{k+1} - \hat{T}_{k+1} & (1.13)
\end{aligned}
$$

として連立一次方程式を解くと, 下の解が得られる.

$$
\begin{aligned}
\Delta T_k &= \{\Delta p_k (1+\gamma_k)\}^{-1} \left\{ \frac{L}{C_p}\Delta Q - \Delta p_{k+1}(1+\gamma_{k+1})\Delta T_{k+1} \right\} & (1.14)\\
\Delta T_{k+1} &= \left[F_{k+\frac{1}{2}} \{\Delta p_k (1+\gamma_k) - \Delta p_{k+1}(1+\gamma_{k+1})\} + (1+\gamma_k)(1+\gamma_{k+1})(\Delta p_k + \Delta p_{k+1}) \right]^{-1} \\
&\quad \left[\Delta p_k (1+\gamma_k) S_{k+\frac{1}{2}} + \left\{ 1 + \gamma_k - F_{k+\frac{1}{2}} \right\} \frac{L}{C_p}\Delta Q \right] & (1.15)\\
\Delta p_k &= p_{k-\frac{1}{2}} - p_{k+\frac{1}{2}} & (1.16)\\
F_{k+\frac{1}{2}} &= \frac{R}{C_p} \frac{p_k - p_{k+1}}{2 p_{k+\frac{1}{2}}} & (1.17)\\
S_{k+\frac{1}{2}} &= \hat{T}_k - \hat{T}_{k+1} + \frac{L}{C_p} \left\{ q^*(\hat{T}_k, p_k) - q^*(\hat{T}_{k+1}, p_{k+1}) \right\} - F_{k+\frac{1}{2}} \left(\hat{T}_k + \hat{T}_{k+1} \right) & (1.18)\\
\Delta Q &= \Delta p_k \left\{ \hat{q}_k - q^*(\hat{T}_k, p_k) \right\} + \Delta p_{k+1} \left\{ \hat{q}_{k+1} - q^*(\hat{T}_{k+1}, p_{k+1}) \right\} & (1.19)\\
\gamma_k &= \frac{L}{C_p} \left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{T=\hat{T}_k} & (1.20)
\end{aligned}
$$

実際には, 上記の解は q_k, q_{k+1} をテイラー展開して求めた近似解でしかなく, 正確には ... を満たしていない. さらに, 上記の定式化は, k 番目の層と $k+1$ 番目の層の混合を表記しているだけであるが, 実際には 3 層以上の層にわたる混合も起こりえる. そこで, 上記の調節を何度か繰り返し行うことで, 徐々に調節していく.

なお, 降水量は,

$$
\begin{aligned}
P &= -\frac{1}{2\Delta t} \sum_{k=k_{max}}^{1} \frac{p_{k-\frac{1}{2}} - p_{k+\frac{1}{2}}}{g} \Delta q_k \\
&= -\frac{1}{2\Delta t} \sum_{k=k_{max}}^{1} \frac{p_{k-\frac{1}{2}} - p_{k+\frac{1}{2}}}{g} \left\{ (q_k)_{l_{max}+1} - \hat{q}_k \right\} & (1.21)
\end{aligned}
$$

である[3].

1.3 昔の文書: はじめに

以下は昔の文書. 今後の参考のために残しておく.

連続した 2 つのレベルの間の層において, 次の条件が満たされる場合に調節を行う.

1. 温度減率が湿潤断熱減率よりも大きい.
2. 飽和もしくは過飽和.

1.3.1 水蒸気が少ないという近似を行う場合

上記の条件 (1) に関して, エントロピー S の高度変化に関する条件

$$\frac{dS}{dz} < 0 \tag{1.22}$$

を, 「水蒸気が少ない」という近似を用いて書きかえると

$$\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{RT}{C_p p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{L}{C_p}\frac{\partial q^*}{\partial z} < 0 \tag{1.23}$$

となる. ここで, C_p は乾燥大気の定圧比熱, L は潜熱, q^* は飽和比湿である.

上記の条件 (2) はそのまま用いる.

これらを用いて温度と比湿を調節するのがこのモデルでのデフォルトの湿潤対流調節スキームである. 以下, スキームの定式化の説明を行う[4].

1.3.2 温度と比湿の調節量の計算方法

比湿と温度を, $(\hat{q}, \hat{T})$ から (q, T) へ調節するものとする.

[3]ここで, 鉛直方向の和は上層から下層に向けて和を取ることにしている. これは, 上層の方が凝結量が少ないためである.

[4]以下は差分法と混ざった話になってしまっているので, あとで連続系の話と離散系の話とに分ける必要がある.

条件式は以下の通りである.

$$q_{k-1} = q^*(T_{k-1}, p_{k-1}), \tag{1.24}$$

$$q_k = q^*(T_k, p_k), \tag{1.25}$$

$$T_{k-1} - T_k + \frac{L}{C_p}\left\{q^*(T_{k-1}, p_{k-1}) - q^*(T_k, p_k)\right\} - \frac{R}{C_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{p_{k-1/2}}\frac{T_{k-1}+T_k}{2} = 0, \tag{1.26}$$

$$(C_pT_k + Lq_k)\Delta p_k + (C_pT_{k-1} + Lq_{k-1})\Delta p_{k-1} = (C_p\hat{T}_k + L\hat{q}_k)\Delta p_k + (C_p\hat{T}_{k-1} + L\hat{q}_{k-1})\Delta p_{k-1}. \tag{1.27}$$

解は以下のようになる.

- q_k, q_{k-1} ($q \ll 1$ は使っていない)

  比湿に関しては, 過飽和の場合には以下のように飽和状態に調節する.

$$q_k = q^*(\hat{T}_k, p_k) + \left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{\hat{T}_k} \Delta T_k, \tag{1.28}$$

$$q_{k-1} = q^*(\hat{T}_{k-1}, p_{k-1}) + \left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{\hat{T}_{k-1}} \Delta T_{k-1}. \tag{1.29}$$

  ここで,

$$\Delta T_k = T_k - \hat{T}_k, \tag{1.30}$$

$$\Delta T_{k-1} = T_{k-1} - \hat{T}_{k-1} \tag{1.31}$$

  である. これらの導出に関しては以下を参照のこと.

- ΔT_{k-1} ($q \ll 1$ は使っていない)

  (1.27), (1.28), (1.29) より,

$$\begin{aligned}
&(C_pT_{k-1} + Lq_{k-1})\Delta p_{k-1} - (C_p\hat{T}_{k-1} + L\hat{q}_{k-1})\Delta p_{k-1} = -(C_pT_k + Lq_k)\Delta p_k + (C_p\hat{T}_k + L\hat{q}_k)\Delta p_k, \\
&\left\{\Delta T_{k-1} + \frac{L}{C_p}(q_{k-1} - \hat{q}_{k-1})\right\}\Delta p_{k-1} = -\left\{\Delta T_k + \frac{L}{C_p}(q_k - \hat{q}_k)\right\}\Delta p_k, \\
&\left[\Delta T_{k-1} + \frac{L}{C_p}\left\{q^*(\hat{T}_{k-1}) + \left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1} - \hat{q}_{k-1}\right\}\right]\Delta p_{k-1} \\
&\qquad = -\left[\Delta T_k + \frac{L}{C_p}\left\{q^*(T_k) + \left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_k \Delta T_k - \hat{q}_k\right\}\right]\Delta p_k, \\
&\left\{1 + \frac{L}{C_p}\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\right\}\Delta T_{k-1}\Delta p_{k-1} + \frac{L}{C_p}\left\{q^*(\hat{T}_{k-1}) - \hat{q}_{k-1}\right\}\Delta p_{k-1} \\
&\qquad = -\left[1 + \frac{L}{C_p}\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_k\right]\Delta T_k\Delta p_k - \frac{L}{C_p}\left\{q^*(\hat{T}_k) - \hat{q}_k\right\}\Delta p_k
\end{aligned} \tag{1.32}$$

である. ここで

$$\gamma_k \equiv \frac{L}{C_p} \left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_k \tag{1.33}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}&\{1+\gamma_{k-1}\}\,\Delta T_{k-1}\Delta p_{k-1}\\&\quad= -\left(1+\gamma_k\right)\Delta T_k \Delta p_k + \frac{L}{C_p}\left[\left\{\hat{q}_{k-1} - q^*(\hat{T}_{k-1})\right\}\Delta p_{k-1} + \left\{\hat{q}_k - q^*(\hat{T}_k)\right\}\Delta p_k\right]\end{aligned} \tag{1.34}$$

となる. ここで,

$$\Delta\hat{Q} \equiv \left\{\hat{q}_{k-1} - q^*(\hat{T}_{k-1})\right\}\Delta p_{k-1} + \left\{\hat{q}_k - q^*(\hat{T}_k)\right\}\Delta p_k \tag{1.35}$$

とおき, ΔT_{k-1} について解けば,

$$\begin{aligned}\{1+\gamma_{k-1}\}\,\Delta T_{k-1}\Delta p_{k-1} &= -\left(1+\gamma_k\right)\Delta T_k \Delta p_k + \frac{L}{C_p}\Delta\hat{Q},\\ \Delta T_{k-1} &= -\frac{1+\gamma_k}{1+\gamma_{k-1}}\frac{\Delta p_k}{\Delta p_{k-1}}\Delta T_k + \frac{1}{1+\gamma_{k-1}}\frac{L}{C_p}\Delta\hat{Q}\frac{1}{\Delta p_{k-1}}\end{aligned} \tag{1.36}$$

となる. ΔT_k の導出については以下を参照のこと.

- ΔT_k

  (1.26), (1.28), (1.29), (1.30), (1.31) より,

$$\begin{aligned}&T_{k-1} - T_k + \frac{L}{C_p}\left\{q^*(T_{k-1},p_{k-1}) - q^*(T_k,p_k)\right\} - \frac{R}{C_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{p_{k-1/2}}\frac{T_{k-1}+T_k}{2} = 0,\\&\hat{T}_{k-1} + \Delta T_{k-1} - \left(\hat{T}_k + \Delta T_k\right) + \frac{L}{C_p}\left\{q^*(\hat{T}_{k-1}) + \left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1} - q^*(\hat{T}_k) - \left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_k \Delta T_k\right\}\\&\qquad - \frac{R}{C_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{p_{k-1/2}}\frac{\hat{T}_{k-1} + \Delta T_{k-1} + \hat{T}_k + \Delta T_k}{2} = 0,\\&\hat{T}_{k-1} - \hat{T}_k + \frac{L}{C_p}\left\{q^*(\hat{T}_{k-1}) - q^*(\hat{T}_k)\right\} - \frac{R}{C_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{p_{k-1/2}}\frac{\hat{T}_{k-1}+\hat{T}_k}{2}\\&\qquad + \Delta T_{k-1} - \Delta T_k + \frac{L}{C_p}\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1} - \frac{L}{C_p}\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_k \Delta T_k - \frac{R}{C_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{p_{k-1/2}}\frac{\Delta T_{k-1}+\Delta T_k}{2} =\end{aligned} \tag{1.37}$$

  ここで,

$$S_{k-1/2} \equiv \hat{T}_{k-1} - \hat{T}_k + \frac{L}{C_p}\left\{q^*(\hat{T}_{k-1}) - q^*(\hat{T}_k)\right\} - \frac{R}{C_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{p_{k-1/2}}\frac{\hat{T}_{k-1}+\hat{T}_k}{2} \tag{1.38}$$

とおく. すると湿潤不安定の条件は

$$S_{k-1/2} > 0 \tag{1.39}$$

で表される. (1.38) を用いて (1.37) を変形すると,

$$\begin{aligned}
&\Delta T_{k-1} - \Delta T_k + \gamma_{k-1}\Delta T_{k-1} - \gamma_k \Delta T_k - \frac{R}{C_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\Delta T_{k-1} - \frac{R}{C_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\Delta T_k = -S_{k-1/2}, \\
&\left(-1 - \gamma_k - \frac{R}{C_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\Delta T_k + \left(1 + \gamma_{k-1} - \frac{R}{C_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\Delta T_{k-1} = -S_{k-1/2}
\end{aligned} \tag{1.40}$$

となる. ここで (1.36) を用いると,

$$\begin{aligned}
&\left(-1 - \gamma_k - \frac{R}{C_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\Delta T_k \\
&\quad + \left(1 + \gamma_{k-1} - \frac{R}{C_p}\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\left(-\frac{1+\gamma_k}{1+\gamma_{k-1}}\frac{\Delta p_k}{\Delta p_{k-1}}\Delta T_k + \frac{1}{1+\gamma_{k-1}}\frac{L}{C_p}\Delta\hat{Q}\frac{1}{\Delta p_{k-1}}\right) \\
&\quad = -S_{k-1/2}
\end{aligned} \tag{1.41}$$

$\kappa = R/C_p$ を使うと[5],

$$\begin{aligned}
&\left(-1 - \gamma_k - \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\Delta T_k \\
&\quad + \left(1 + \gamma_{k-1} - \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\left(-\frac{1+\gamma_k}{1+\gamma_{k-1}}\frac{\Delta p_k}{\Delta p_{k-1}}\Delta T_k + \frac{1}{1+\gamma_{k-1}}\frac{L}{C_p}\Delta\hat{Q}\frac{1}{\Delta p_{k-1}}\right) \\
&\quad = -S_{k-1/2}
\end{aligned} \tag{1.42}$$

となる. ΔT_k に関する項を左辺にまとめると,

$$\begin{aligned}
&\left[(-1 - \gamma_k) - \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}} + \left(1 + \gamma_{k-1} - \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\left(-\frac{1+\gamma_k}{1+\gamma_{k-1}}\frac{\Delta p_k}{\Delta p_{k-1}}\right)\right]\Delta T_k \\
&\quad = -S_{k-1/2} - \left(1 + \gamma_{k-1} - \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\frac{1}{1+\gamma_{k-1}}\frac{L}{C_p}\Delta\hat{Q}\frac{1}{\Delta p_{k-1}}
\end{aligned} \tag{1.43}$$

[5] もっと前から使うべき?? (コードとの対応によっては κ を使わない方がよいのかも)

となる. ΔT_k について解くと,

$$
\begin{aligned}
\Delta T_k & \\
&= \frac{-S_{k-1/2} - \left(1+\gamma_{k-1} - \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\frac{1}{1+\gamma_{k-1}}\frac{L}{C_p}\Delta\hat{Q}\frac{1}{\Delta p_{k-1}}}{(-1-\gamma_k) - \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}} + \left(1+\gamma_{k-1} - \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\left(-\frac{1+\gamma_k}{1+\gamma_{k-1}}\frac{\Delta p_k}{\Delta p_{k-1}}\right)} \\
&= \frac{S_{k-1/2} + \left(1+\gamma_{k-1} - \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\frac{1}{1+\gamma_{k-1}}\frac{L}{C_p}\Delta\hat{Q}\frac{1}{\Delta p_{k-1}}}{(1+\gamma_k) + \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}} + \left(1+\gamma_{k-1} - \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\frac{1+\gamma_k}{1+\gamma_{k-1}}\frac{\Delta p_k}{\Delta p_{k-1}}} \\
&= \frac{(1+\gamma_{k-1})\Delta p_{k-1}S_{k-1/2} + \left(1+\gamma_{k-1} - \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\frac{L}{C_p}\Delta\hat{Q}}{(1+\gamma_k)(1+\gamma_{k-1})\Delta p_{k-1} + \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}(1+\gamma_{k-1})\Delta p_{k-1} + \left(1+\gamma_{k-1} - \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)(1+\gamma} \\
&= \frac{(1+\gamma_{k-1})\Delta p_{k-1}S_{k-1/2} + \left(1+\gamma_{k-1} - \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\right)\frac{L}{C_p}\Delta\hat{Q}}{(1+\gamma_k)(1+\gamma_{k-1})(\Delta p_{k-1} + \Delta p_k) + \kappa\frac{\Delta p_{k-1/2}}{2p_{k-1/2}}\left\{(1+\gamma_{k-1})\Delta p_{k-1} - (1+\gamma_k)\Delta p_k\right\}}
\end{aligned}
\tag{1.44}
$$

が得られる.

1.3.3 水蒸気が少ないという近似をしない場合

dcpam5 では未導入.

l が一定の場合,

$$
\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= -R_d\frac{d}{dt}(\ln p_d) + \left(1+\frac{q}{1-q}\right)C_p\frac{d}{dt}(\ln T) + l\frac{d}{dt}\frac{r}{T} \\
&= -R_d\frac{d}{dt}\left\{\ln(p(1-q))\right\} + \frac{1}{1-q}C_p\frac{d}{dt}(\ln T) + l\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{T}\frac{q}{1-q}\right)
\end{aligned}
\tag{1.45}
$$

全部 q を使って書き換えた. 更に変形すると

$$
\frac{ds}{dt} = -R_d\frac{1}{p(1-q)}\frac{d}{dt}\left\{p(1-q)\right\} + \frac{1}{1-q}\frac{C_p}{T}\frac{dT}{dt} + l\left[-\frac{1}{T^2}\frac{dT}{dt}\frac{q}{1-q} + \frac{1}{T}\frac{d}{dt}\left(\frac{q}{1-q}\right)\right] \tag{1.46}
$$

これより, $\frac{dS}{dz} = 0$ となる条件は

$$-\frac{R_d}{p(1-q)}\frac{d}{dz}\left\{p(1-q)\right\} + \frac{1}{1-q}\frac{C_p}{T}\frac{dT}{dz} - \frac{l}{T^2}\frac{q}{1-q}\frac{dT}{dz} + \frac{l}{T}\frac{d}{dz}\left(\frac{q}{1-q}\right) = 0 \quad (1.47)$$

$dS = 0$ の式をどのような形にするのが best なのかはよくわからない. とりあえず, 扱いが容易かなと思った分母を全部払った形にしてみる.

$$-\frac{R_d}{p(1-q)}\frac{d}{dz}\left\{p(1-q)\right\} + \frac{1}{1-q}\frac{C_p}{T}\frac{dT}{dz} - \frac{l}{T^2}\frac{q}{1-q}\frac{dT}{dz} + \frac{l}{T}\frac{\frac{dq}{dz}(1-q) - q\frac{d}{dz}(1-q)}{(1-q)^2} = 0,$$
$$-\frac{R_d}{p(1-q)}\frac{d}{dz}\left\{p(1-q)\right\} + \frac{1}{1-q}\frac{C_p}{T}\frac{dT}{dz} - \frac{l}{T^2}\frac{q}{1-q}\frac{dT}{dz} + \frac{l}{T}\frac{1}{(1-q)}\frac{dq}{dz} + \frac{l}{T}\frac{q}{(1-q)^2}\frac{dq}{dz} = 0 \quad (1.48)$$

この式の両辺に $T^2(1-q)^2$ をかける.

$$-\frac{R_d}{p}T^2(1-q)\frac{d}{dz}\left\{p(1-q)\right\} + C_pT(1-q)\frac{dT}{dz} - lq(1-q)\frac{dT}{dz} + lT(1-q)\frac{dq}{dz} + lTq\frac{dq}{dz} = 0,$$
$$-\frac{R_d}{p}T^2(1-q)\frac{d}{dz}\left\{p(1-q)\right\} + C_pT(1-q)\frac{dT}{dz} - lq(1-q)\frac{dT}{dz} + lT\frac{dq}{dz} = 0 \quad (1.49)$$

更に dz をかければ

$$-\frac{R_d}{p}T^2(1-q)d\left\{p(1-q)\right\} + C_pT(1-q)dT - lq(1-q)dT + lTdq = 0, \quad (1.50)$$

近似をせずに, 分母を払った形の式をそのまま離散化する.

$$-\frac{R_d}{p_{k-1/2}}T^2_{k-1/2}(1-q_{k-1/2})\left[p_{k-1}(1-q_{k-1}) - p_k(1-q_k)\right] + C_p(1-q_{k-1/2})T_{k-1/2}(T_{k-1}-T_k)$$
$$-lq_{k-1/2}(1-q_{k-1/2})(T_{k-1}-T_k) + lT_{k-1/2}(q_{k-1}-q_k) = 0, \quad (1.51)$$

ここで,

$$T_{k-1/2} = \frac{T_{k-1}+T_k}{2}, \quad (1.52)$$
$$q_{k-1/2} = \frac{q_{k-1}+q_k}{2} \quad (1.53)$$

とすると (これ, 本当は良くないのだろう. $T_{k-1/2}$ については Arakawa and Suarez (1983) の正しい補間式を使うべきなような気がする. しかし, agcm5 時代に, サブ

ルーチンの引数を変えるのが嫌だったのでこうしている. dcpam ではサブルーチン内で $T_{k-1/2}$ を作るのでも良いかもしれない),

$$
\begin{aligned}
&-\frac{R_d}{p_{k-1/2}}\left(\frac{T_{k-1}+T_k}{2}\right)^2\left(1-\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\right)[p_{k-1}(1-q_{k-1})-p_k(1-q_k)] \\
&\quad +C_p\left(1-\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\right)\frac{T_{k-1}+T_k}{2}(T_{k-1}-T_k) \\
&\quad -l\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\left(1-\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\right)(T_{k-1}-T_k) \\
&\quad +l\frac{T_{k-1}+T_k}{2}(q_{k-1}-q_k)=0, \\
&-\frac{R_d}{C_p}\left(\frac{T_{k-1}+T_k}{2}\right)^2\left(1-\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\right)\left[\frac{p_{k-1}}{p_{k-1/2}}(1-q_{k-1})-\frac{p_k}{p_{k-1/2}}(1-q_k)\right] \\
&\quad +\left(1-\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\right)\frac{T_{k-1}+T_k}{2}(T_{k-1}-T_k) \\
&\quad -\frac{L}{C_p}\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\left(1-\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\right)(T_{k-1}-T_k) \\
&\quad +\frac{L}{C_p}\frac{T_{k-1}+T_k}{2}(q_{k-1}-q_k)=0
\end{aligned}
\tag{1.54}
$$

潜熱が大文字になっちゃった... 最初から L にしておくべき.

ΔT_{k-1} などを使って書き換える.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{R_d}{C_p}\frac{1}{4}\left(\hat{T}_{k-1}+\Delta T_{k-1}+\hat{T}_k+\Delta T_k\right)^2 \\
&\quad\times\left\{1-\frac{1}{2}\left(q^*(\hat{T}_{k-1})+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1}+q^*(\hat{T}_k)+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k}\Delta T_k\right)\right\} \\
&\quad\times\left[\frac{p_{k-1}}{p_{k-1/2}}\left(1-q^*(\hat{T}_{k-1})-\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1}\right)-\frac{p_k}{p_{k-1/2}}\left(1-q^*(\hat{T}_k)-\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k}\Delta T_k\right)\right] \\
&\,+\left\{1-\frac{1}{2}\left(q^*(\hat{T}_{k-1})+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1}+q^*(\hat{T}_k)+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k}\Delta T_k\right)\right\} \\
&\quad\times\frac{1}{2}\left(\hat{T}_{k-1}+\Delta T_{k-1}+\hat{T}_k+\Delta T_k\right)(\hat{T}_{k-1}+\Delta T_{k-1}-\hat{T}_k-\Delta T_k) \\
&\,-\frac{L}{C_p}\frac{1}{2}\left(q^*(\hat{T}_{k-1})+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1}+q^*(\hat{T}_k)+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k}\Delta T_k\right) \\
&\quad\times\left\{1-\frac{1}{2}\left(q^*(\hat{T}_{k-1})+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1}+q^*(\hat{T}_k)+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k}\Delta T_k\right)\right\} \\
&\quad\times(\hat{T}_{k-1}+\Delta T_{k-1}-\hat{T}_k-\Delta T_k) \\
&\,+\frac{L}{C_p}\frac{1}{2}\left(\hat{T}_{k-1}+\Delta T_{k-1}+\hat{T}_k+\Delta T_k\right) \\
&\quad\times\left(q^*(\hat{T}_{k-1})+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1}-q^*(\hat{T}_k)-\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k}\Delta T_k\right)=0
\end{aligned}
\tag{1.55}
$$

ここで, 以下の変数達を導入する.

$$
\begin{aligned}
MM &\equiv 1 - \frac{1}{2}q^*(\hat{T}_{k-1}) - \frac{1}{2}q^*(\hat{T}_k), && (1.56)\\
D_{k-1} &\equiv \left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}, && (1.57)\\
D_{k-1} &\equiv \left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k}, && (1.58)\\
TP &\equiv \hat{T}_{k-1} + \hat{T}_k, && (1.59)\\
TM &\equiv \hat{T}_{k-1} - \hat{T}_k, && (1.60)\\
M_{k-1} &\equiv 1 - q^*(\hat{T}_{k-1}), && (1.61)\\
M_k &\equiv 1 - q^*(\hat{T}_k), && (1.62)\\
F &\equiv \frac{R_d}{C_p}, && (1.63)\\
E &\equiv \frac{L}{C_p}, && (1.64)\\
QP &\equiv q^*(\hat{T}_{k-1}) + q^*(\hat{T}_k), && (1.65)\\
QM &\equiv q^*(\hat{T}_{k-1}) - q^*(\hat{T}_k), && (1.66)\\
P_{k-1} &\equiv \frac{p_{k-1}}{p_{k-1/2}}, && (1.67)\\
P_k &\equiv \frac{p_k}{p_{k-1/2}} && (1.68)
\end{aligned}
$$

これらの記号を用いて, 先程の式を書き換えると以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{F}{4}\left(TP + \Delta T_{k-1} + \Delta T_k\right)^2 \left\{MM - \frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1} - \frac{1}{2}D_k \Delta T_k\right\}\\
&\quad \times \left[P_{k-1}\left(M_{k-1} - D_{k-1}\Delta T_{k-1}\right) - P_k\left(M_k - D_k \Delta T_k\right)\right]\\
&\quad +\frac{1}{2}\left\{MM - \frac{1}{2}\left(D_{k-1}\Delta T_{k-1} + D_k \Delta T_k\right)\right\}\left(TP + \Delta T_{k-1} + \Delta T_k\right)\left(TM + \Delta T_{k-1} - \Delta T_k\right)\\
&\quad -\frac{E}{2}\left(QP + D_{k-1}\Delta T_{k-1} + D_k \Delta T_k\right)\left\{MM - \frac{1}{2}\left(D_{k-1}\Delta T_{k-1} + D_k \Delta T_k\right)\right\}\\
&\quad \times (TM + \Delta T_{k-1} - \Delta T_k)\\
&\quad +\frac{E}{2}\left(TP + \Delta T_{k-1} + \Delta T_k\right)\left(QM + D_{k-1}\Delta T_{k-1} - D_k \Delta T_k\right) = 0 \qquad (1.69)
\end{aligned}
$$

この式をまともに解くことは大変なので, やむをえず近似する. Δ が 2 つ以上かかった項を無視することにする. おそらく「1 次近似」と言って良いのだろう, とは思っているが, この近似の妥当性に関して現段階ではまったく検討していない.

式を展開しつつ「2 次以上の項」を順次無視していくと, 以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{F}{4}\left\{TP^2+2TP\cdot(\Delta T_{k-1}+\Delta T_k)\right\}\left(MM-\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1}-\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right)\\
&\quad\times(P_{k-1}M_{k-1}-P_{k-1}D_{k-1}\Delta T_{k-1}-P_kM_k+P_kD_k\Delta T_k)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(MM-\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1}-\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right)\{TP\cdot TM+(\Delta T_{k-1}+\Delta T_k)TM+(\Delta T_{k-1}-\Delta T_k)TP\}\\
&\quad-\frac{E}{2}(QP+D_{k-1}\Delta T_{k-1}+D_k\Delta T_k)\\
&\quad\times\left\{MM\cdot TM+(\Delta T_{k-1}-\Delta T_k)MM+\left(-\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1}-\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right)TM\right\}\\
&\quad+\frac{E}{2}\{TP\cdot QM+(D_{k-1}\Delta T_{k-1}-D_k\Delta T_k)TP+(\Delta T_{k-1}+\Delta T_k)QM\}=0
\end{aligned}
\tag{1.70}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{F}{4}\left\{TP^2\cdot MM-\frac{1}{2}TP^2(D_{k-1}\Delta T_{k-1}+D_k\Delta T_k)+2TP\cdot MM(\Delta T_{k-1}+\Delta T_k)\right\}\\
&\quad\times\{(P_{k-1}M_{k-1}-P_kM_k)-P_{k-1}D_{k-1}\Delta T_{k-1}+P_kD_k\Delta T_k\}\\
&+\frac{1}{2}\{MM\cdot TP\cdot TM+\{(\Delta T_{k-1}+\Delta T_k)TM+(\Delta T_{k-1}-\Delta T_k)TP\}MM\\
&\quad-TP\cdot TM\left(\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1}+\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right)\Bigg\}\\
&-\frac{E}{2}\left\{QP\cdot MM\cdot TM+MM\cdot QP(\Delta T_{k-1}-\Delta T_k)+TM\cdot QP\left(-\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1}-\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right)\right.\\
&\quad+MM\cdot TM(D_{k-1}\Delta T_{k-1}+D_k\Delta T_k)\}\\
&+\frac{E}{2}\{TP\cdot QM+(TP\cdot D_{k-1}+QM)\Delta T_{k-1}+(-TP\cdot D_k+QM)\Delta T_k\}=0
\end{aligned}
\tag{1.71}
$$

更に第 1 項を展開する.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{F}{4}\Big[TP^2\cdot MM(P_{k-1}M_{k-1}-P_kM_k)+TP^2\cdot MM\{-P_{k-1}D_{k-1}\Delta T_{k-1}+P_kD_k\Delta T_k\}\\
&\quad+(P_{k-1}M_{k-1}-P_kM_k)\left\{-\frac{1}{2}TP^2(D_{k-1}\Delta T_{k-1}+D_k\Delta T_k)+2TP\cdot MM(\Delta T_{k-1}+\Delta T_k)\right\}\Bigg]\\
&+\frac{1}{2}\{MM\cdot TP\cdot TM+\{(\Delta T_{k-1}+\Delta T_k)TM+(\Delta T_{k-1}-\Delta T_k)TP\}MM\\
&\quad-TP\cdot TM\left(\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1}+\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right)\Bigg\}\\
&-\frac{E}{2}\left\{QP\cdot MM\cdot TM+MM\cdot QP(\Delta T_{k-1}-\Delta T_k)+TM\cdot QP\left(-\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1}-\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right)\right.\\
&\quad+MM\cdot TM(D_{k-1}\Delta T_{k-1}+D_k\Delta T_k)\}\\
&+\frac{E}{2}\{TP\cdot QM+(TP\cdot D_{k-1}+QM)\Delta T_{k-1}+(-TP\cdot D_k+QM)\Delta T_k\}=0
\end{aligned}
\tag{1.72}
$$

この式を ΔT_{k-1} の項と ΔT_k の項にまとめていく. まずばらす.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{F}{4}\left[TP^2 \cdot MM\left(P_{k-1}M_{k-1} - P_kM_k\right) - TP^2 \cdot MMP_{k-1}D_{k-1}\Delta T_{k-1} + TP^2 \cdot MMP_kD_k\Delta T_k\right.\\
&\qquad -\frac{1}{2}\left(P_{k-1}M_{k-1} - P_kM_k\right)TP^2D_{k-1}\Delta T_{k-1} - \frac{1}{2}\left(P_{k-1}M_{k-1} - P_kM_k\right)TP^2D_k\Delta T_k\\
&\qquad \left.+2\left(P_{k-1}M_{k-1} - P_kM_k\right)TP \cdot MM\Delta T_{k-1} + 2\left(P_{k-1}M_{k-1} - P_kM_k\right)TP \cdot MM\Delta T_k\right]\\
&+\frac{1}{2}\left\{MM \cdot TP \cdot TM + TM \cdot MM\Delta T_{k-1} + TM \cdot MM\Delta T_k + TP \cdot MM\Delta T_{k-1} - TP \cdot MM\Delta\right.\\
&\qquad \left.-TP \cdot TM\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1} - TP \cdot TM\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right\}\\
&-\frac{E}{2}\left\{QP \cdot MM \cdot TM + MM \cdot QP\Delta T_{k-1} - MM \cdot QP\Delta T_k - TM \cdot QP\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1} - TM\right.\\
&\qquad \left.+MM \cdot TMD_{k-1}\Delta T_{k-1} + MM \cdot TMD_k\Delta T_k\right\}\\
&+\frac{E}{2}\left\{TP \cdot QM + (TP \cdot D_{k-1} + QM)\Delta T_{k-1} + (-TP \cdot D_k + QM)\Delta T_k\right\} = 0
\end{aligned}
$$

ついで, まとめる.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{F}{4}TP^2 \cdot MM\left(P_{k-1}M_{k-1} - P_kM_k\right)\\
&-\frac{F}{4}\left\{-TP^2 \cdot MM \cdot P_{k-1} \cdot D_{k-1} + \left(P_{k-1}M_{k-1} - P_kM_k\right)\left(-\frac{1}{2}TP^2 \cdot D_{k-1} + 2TP \cdot MM\right)\right\}\Delta\\
&-\frac{F}{4}\left\{TP^2 \cdot MM \cdot P_k \cdot D_k + \left(P_{k-1}M_{k-1} - P_kM_k\right)\left(-\frac{1}{2}TP^2 \cdot D_k + 2TP \cdot MM\right)\right\}\Delta T_k\\
&+\frac{1}{2}MM \cdot TP \cdot TM\\
&+\frac{1}{2}\left\{TM \cdot MM + TP \cdot MM - \frac{1}{2}TP \cdot TM \cdot D_{k-1}\right\}\Delta T_{k-1}\\
&+\frac{1}{2}\left\{TM \cdot MM - TP \cdot MM - \frac{1}{2}TP \cdot TM \cdot D_k\right\}\Delta T_k\\
&-\frac{E}{2}QP \cdot MM \cdot TM\\
&-\frac{E}{2}\left(MM \cdot QP - \frac{1}{2}TM \cdot QP \cdot D_{k-1} + MM \cdot TM \cdot D_{k-1}\right)\Delta T_{k-1}\\
&-\frac{E}{2}\left(-MM \cdot QP - \frac{1}{2}TM \cdot QP \cdot D_k + MM \cdot TM \cdot D_k\right)\Delta T_k\\
&+\frac{E}{2}TP \cdot QM + \frac{E}{2}(TP \cdot D_{k-1} + QM)\Delta T_{k-1} + \frac{E}{2}(-TP \cdot D_k + QM)\Delta T_k = 0 \qquad (1
\end{aligned}
$$

ここで, 以下のように変数をまとめる (前の S_t とはちゃんと対応しているんだろ

うね???).

$$\begin{aligned}
S_t &\equiv \frac{F}{4}TP^2 \cdot MM\left(P_{k-1}M_{k-1} - P_kM_k\right) - \frac{1}{2}MM \cdot TP \cdot TM \\
&+\frac{E}{2}QP \cdot MM \cdot TM - \frac{E}{2}TP \cdot QM \qquad (1.75)\\
B &\equiv -\frac{F}{4}\left\{-TP^2 \cdot MM \cdot P_{k-1} \cdot D_{k-1} + (P_{k-1}M_{k-1} - P_kM_k)\left(-\frac{1}{2}TP^2 \cdot D_{k-1} + 2TP \cdot MM\right)\right\} \\
&+\frac{1}{2}\left\{TM \cdot MM + TP \cdot MM - \frac{1}{2}TP \cdot TM \cdot D_{k-1}\right\} \\
&-\frac{E}{2}\left(MM \cdot QP - \frac{1}{2}TM \cdot QP \cdot D_{k-1} + MM \cdot TM \cdot D_{k-1}\right) + \frac{E}{2}(TP \cdot D_{k-1} + QM) \qquad (1.76)\\
C &\equiv -\frac{F}{4}\left\{TP^2 \cdot MM \cdot P_k \cdot D_k + (P_{k-1}M_{k-1} - P_kM_k)\left(-\frac{1}{2}TP^2 \cdot D_k + 2TP \cdot MM\right)\right\} \\
&+\frac{1}{2}\left\{TM \cdot MM - TP \cdot MM - \frac{1}{2}TP \cdot TM \cdot D_k\right\} \\
&-\frac{E}{2}\left(-MM \cdot QP - \frac{1}{2}TM \cdot QP \cdot D_k + MM \cdot TM \cdot D_k\right) + \frac{E}{2}(-TP \cdot D_k + QM) \qquad (1.77)
\end{aligned}$$

これより,

$$B\Delta T_{k-1} + C\Delta T_k = S_t \qquad (1.78)$$

となる. ここで, $\sum h = 0$ より得られる

$$\begin{aligned}
\Delta T_{k-1} &= -\frac{1+\gamma_k}{1+\gamma_{k-1}}\frac{\Delta p_k}{\Delta p_{k-1}}\Delta T_k + \frac{1}{1+\gamma_{k-1}}\frac{L}{C_p}\Delta\hat{Q}\frac{1}{\Delta p_{k-1}} \qquad (1.79)\\
&\equiv \alpha\Delta T_k + \beta \qquad (1.80)
\end{aligned}$$

を代入すると

$$B\left(\alpha\Delta T_k + \beta\right) + CT_k = S_t \qquad (1.81)$$

これを, ΔT_k について解けば

$$T_k = \frac{S_t - \beta B}{C + \alpha B} \qquad (1.82)$$

1.4 比熱が違う場合

L が一定の場合, 断熱条件の式は

$$\frac{-R_d}{p(1-q)}\frac{dp(1-q)}{dz} + \left(c_{pn} + \frac{c_{pv}q}{1-q}\right)\frac{1}{T}\frac{dT}{dz} + \frac{L}{T}\frac{d}{dz}\frac{q}{1-q} - \frac{L}{T^2}\frac{q}{1-q}\frac{dT}{dz} = 0 \qquad (1.83)$$

である. [6]

agcm5 において, 湿潤断熱線を計算していたのは

nonstd/p2adeq.o nonstd/p2trpn.o nonstd/p2ctau.o usr/momoko/physics/p2radmN.o usr/momoko/physics/p2radlN.o nonstd/p2adbtG1.o

p2adbtG1.F では, MM, QP などを使った差分式を使用している. よって Cpd を入れた項だけ付け足せば良いように思われる.

以下, 式変形のメモ. もともと「水蒸気が少ないという近似をしない場合」に書かれていたものを直してみる.

さきほどの断熱の式を変形する.

まず, $\frac{q}{1-q}$ の微分を実行する.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{R_d}{p(1-q)}\frac{d}{dz}\{p(1-q)\}+\frac{c_{pn}}{T}\frac{dT}{dz}+\frac{c_{pv}q}{1-q}\frac{1}{T}\frac{dT}{dz}-\frac{L}{T^2}\frac{q}{1-q}\frac{dT}{dz}\\
&+\frac{L}{T}\frac{\frac{dq}{dz}(1-q)-q\frac{d}{dz}(1-q)}{(1-q)^2}=0,\\
&-\frac{R_d}{p(1-q)}\frac{d}{dz}\{p(1-q)\}+\frac{c_{pn}}{T}\frac{dT}{dz}+\frac{c_{pv}q}{1-q}\frac{1}{T}\frac{dT}{dz}-\frac{L}{T^2}\frac{q}{1-q}\frac{dT}{dz}\\
&+\frac{L}{T}\frac{1}{1-q}\frac{dq}{dz}+\frac{L}{T}\frac{q}{(1-q)^2}\frac{dq}{dz}=0
\end{aligned}
$$

[6] この式は, 要確認である.
石渡 D 論で与えられている断熱条件の式 (D.9) は以下の通りである.

$$
\frac{-R_d}{p(1-q)}\frac{dp(1-q)}{dz}+\left(c_{pn}+\frac{c_{pv}}{1-q}\right)\frac{1}{T}\frac{dT}{dz}+\frac{L}{T}\frac{d}{dz}\frac{q}{1-q}-\frac{L}{q^2}\frac{q}{1-q}\frac{dT}{dz}=0 \tag{1.84}
$$

たぶん, これ間違い.

この式の両辺に $T^2(1-q)^2$ をかける.

$$
\begin{aligned}
&-T^2(1-q)^2\frac{R_d}{p(1-q)}\frac{d}{dz}\left\{p(1-q)\right\}+T^2(1-q)^2\frac{c_{pn}}{T}\frac{dT}{dz}\\
&+T^2(1-q)^2\frac{c_{pv}q}{1-q}\frac{1}{T}\frac{dT}{dz}-T^2(1-q)^2\frac{L}{T^2}\frac{q}{1-q}\frac{dT}{dz}\\
&+T^2(1-q)^2\frac{L}{T}\frac{1}{1-q}\frac{dq}{dz}+T^2(1-q)^2\frac{L}{T}\frac{q}{(1-q)^2}\frac{dq}{dz}=0,\\
&-\frac{R_d}{p}T^2(1-q)\frac{d}{dz}\left\{p(1-q)\right\}+c_{pn}T(1-q)^2\frac{dT}{dz}+c_{pv}Tq(1-q)\frac{dT}{dz}\\
&-Lq(1-q)\frac{dT}{dz}+LT(1-q)\frac{dq}{dz}+LTq\frac{dq}{dz}=0,\\
&-\frac{R_d}{p}T^2(1-q)\frac{d}{dz}\left\{p(1-q)\right\}+c_{pn}T(1-q)^2\frac{dT}{dz}+c_{pv}Tq(1-q)\frac{dT}{dz}\\
&-Lq(1-q)\frac{dT}{dz}+LT\frac{dq}{dz}=0,
\end{aligned}
\tag{1.85}
$$

更に dz をかければ

$$
\begin{aligned}
&-\frac{R_d}{p}T^2(1-q)d\left\{p(1-q)\right\}+c_{pn}T(1-q)^2dT+c_{pv}Tq(1-q)dT\\
&-Lq(1-q)dT+LTdq=0,
\end{aligned}
\tag{1.86}
$$

この式を離散化すると

$$
\begin{aligned}
&-\frac{R_d}{p_{k-1/2}}T_{k-1/2}^2(1-q_{k-1/2})\left[p_{k-1}(1-q_{k-1})-p_k(1-q_k)\right]\\
&+c_{pn}T_{k-1/2}(1-q_{k-1/2})^2(T_{k-1}-T_k)+c_{pv}T_{k-1/2}q_{k-1/2}(1-q_{k-1/2})(T_{k-1}-T_k)\\
&\quad -Lq_{k-1/2}(1-q_{k-1/2})(T_{k-1}-T_k)+LT_{k-1/2}(q_{k-1}-q_k)=0,
\end{aligned}
\tag{1.87}
$$

ここで,

$$
T_{k-1/2} = \frac{T_{k-1}+T_k}{2}, \tag{1.88}
$$

$$
q_{k-1/2} = \frac{q_{k-1}+q_k}{2} \tag{1.89}
$$

とすると (これ, 本当は良くないのだろう. $T_{k-1/2}$ については Arakawa and Suarez (1983) の正しい補間式を使うべきなような気がする. しかし, agcm5 時代に, サブルーチンの引数を変えるのが嫌だったのでこうしている. dcpam ではサブルーチ

ン内で $T_{k-1/2}$ を作るのでも良いかもしれない), 以下の式が得られる.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{R_d}{p_{k-1/2}}\left(\frac{T_{k-1}+T_k}{2}\right)^2\left(1-\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\right)[p_{k-1}(1-q_{k-1})-p_k(1-q_k)]\\
&\quad+c_{pn}\left(1-\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\right)^2\frac{T_{k-1}+T_k}{2}(T_{k-1}-T_k)\\
&\quad+c_{pv}\frac{T_{k-1}+T_k}{2}\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\left(1-\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\right)(T_{k-1}-T_k)\\
&\quad-L\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\left(1-\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\right)(T_{k-1}-T_k)\\
&\quad+L\frac{T_{k-1}+T_k}{2}(q_{k-1}-q_k)=0,\\
&-\frac{R_d}{c_{pn}}\left(\frac{T_{k-1}+T_k}{2}\right)^2\left(1-\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\right)\left[\frac{p_{k-1}}{p_{k-1/2}}(1-q_{k-1})-\frac{p_k}{p_{k-1/2}}(1-q_k)\right]\\
&\quad+\left(1-\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\right)^2\frac{T_{k-1}+T_k}{2}(T_{k-1}-T_k)\\
&\quad+\frac{c_{pv}}{c_{pn}}\frac{T_{k-1}+T_k}{2}\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\left(1-\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\right)(T_{k-1}-T_k)\\
&\quad-\frac{L}{c_{pn}}\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\left(1-\frac{q_{k-1}+q_k}{2}\right)(T_{k-1}-T_k)\\
&\quad+\frac{L}{c_{pn}}\frac{T_{k-1}+T_k}{2}(q_{k-1}-q_k)=0
\end{aligned}
\tag{1.90}
$$

以下は, 比熱が同じ場合についての変形.

ΔT_{k-1} などを使って書き換える.

$$
\begin{aligned}
-&\frac{R_d}{C_p}\frac{1}{4}\left(\hat{T}_{k-1}+\Delta T_{k-1}+\hat{T}_k+\Delta T_k\right)^2 \\
&\times\left\{1-\frac{1}{2}\left(q^*(\hat{T}_{k-1})+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1}+q^*(\hat{T}_k)+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_k\Delta T_k\right)\right\} \\
&\times\left[\frac{p_{k-1}}{p_{k-1/2}}\left(1-q^*(\hat{T}_{k-1})-\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1}\right)-\frac{p_k}{p_{k-1/2}}\left(1-q^*(\hat{T}_k)-\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_k\Delta T_k\right)\right] \\
+&\left\{1-\frac{1}{2}\left(q^*(\hat{T}_{k-1})+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1}+q^*(\hat{T}_k)+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_k\Delta T_k\right)\right\} \\
&\times\frac{1}{2}\left(\hat{T}_{k-1}+\Delta T_{k-1}+\hat{T}_k+\Delta T_k\right)(\hat{T}_{k-1}+\Delta T_{k-1}-\hat{T}_k-\Delta T_k) \\
-&\frac{L}{C_p}\frac{1}{2}\left(q^*(\hat{T}_{k-1})+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1}+q^*(\hat{T}_k)+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_k\Delta T_k\right) \\
&\times\left\{1-\frac{1}{2}\left(q^*(\hat{T}_{k-1})+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1}+q^*(\hat{T}_k)+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_k\Delta T_k\right)\right\} \\
&\times(\hat{T}_{k-1}+\Delta T_{k-1}-\hat{T}_k-\Delta T_k) \\
+&\frac{L}{C_p}\frac{1}{2}\left(\hat{T}_{k-1}+\Delta T_{k-1}+\hat{T}_k+\Delta T_k\right) \\
&\times\left(q^*(\hat{T}_{k-1})+\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}\Delta T_{k-1}-q^*(\hat{T}_k)-\left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_k\Delta T_k\right)=0
\end{aligned}
\tag{1.91}
$$

ここで, 以下の変数達を導入する.

$$
\begin{aligned}
MM &\equiv 1 - \frac{1}{2}q^*(\hat{T}_{k-1}) - \frac{1}{2}q^*(\hat{T}_k), && (1.92)\\
D_{k-1} &\equiv \left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k-1}, && (1.93)\\
D_{k-1} &\equiv \left.\frac{\partial q^*}{\partial T}\right|_{k}, && (1.94)\\
TP &\equiv \hat{T}_{k-1} + \hat{T}_k, && (1.95)\\
TM &\equiv \hat{T}_{k-1} - \hat{T}_k, && (1.96)\\
M_{k-1} &\equiv 1 - q^*(\hat{T}_{k-1}), && (1.97)\\
M_k &\equiv 1 - q^*(\hat{T}_k), && (1.98)\\
F &\equiv \frac{R_d}{C_p}, && (1.99)\\
E &\equiv \frac{L}{C_p}, && (1.100)\\
QP &\equiv q^*(\hat{T}_{k-1}) + q^*(\hat{T}_k), && (1.101)\\
QM &\equiv q^*(\hat{T}_{k-1}) - q^*(\hat{T}_k), && (1.102)\\
P_{k-1} &\equiv \frac{p_{k-1}}{p_{k-1/2}}, && (1.103)\\
P_k &\equiv \frac{p_k}{p_{k-1/2}} && (1.104)
\end{aligned}
$$

これらの記号を用いて, 先程の式を書き換えると以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{F}{4}\left(TP + \Delta T_{k-1} + \Delta T_k\right)^2 \left\{MM - \frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1} - \frac{1}{2}D_k \Delta T_k\right\}\\
&\quad \times \left[P_{k-1}\left(M_{k-1} - D_{k-1}\Delta T_{k-1}\right) - P_k\left(M_k - D_k \Delta T_k\right)\right]\\
&\quad + \frac{1}{2}\left\{MM - \frac{1}{2}\left(D_{k-1}\Delta T_{k-1} + D_k \Delta T_k\right)\right\}\left(TP + \Delta T_{k-1} + \Delta T_k\right)\left(TM + \Delta T_{k-1} - \Delta T_k\right)\\
&\quad - \frac{E}{2}\left(QP + D_{k-1}\Delta T_{k-1} + D_k \Delta T_k\right)\left\{MM - \frac{1}{2}\left(D_{k-1}\Delta T_{k-1} + D_k \Delta T_k\right)\right\}\\
&\quad \times (TM + \Delta T_{k-1} - \Delta T_k)\\
&\quad + \frac{E}{2}\left(TP + \Delta T_{k-1} + \Delta T_k\right)\left(QM + D_{k-1}\Delta T_{k-1} - D_k \Delta T_k\right) = 0 \qquad (1.105)
\end{aligned}
$$

この式をまともに解くことは大変なので, やむをえず近似する. Δ が 2 つ以上かかった項を無視することにする. おそらく「1 次近似」と言って良いのだろう, とは思っているが, この近似の妥当性に関して現段階ではまったく検討していない.

式を展開しつつ「2 次以上の項」を順次無視していくと, 以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{F}{4}\left\{TP^2+2TP\cdot(\Delta T_{k-1}+\Delta T_k)\right\}\left(MM-\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1}-\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right)\\
&\quad\times(P_{k-1}M_{k-1}-P_{k-1}D_{k-1}\Delta T_{k-1}-P_kM_k+P_kD_k\Delta T_k)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(MM-\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1}-\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right)\{TP\cdot TM+(\Delta T_{k-1}+\Delta T_k)TM+(\Delta T_{k-1}-\Delta T_k)TP\}\\
&\quad-\frac{E}{2}(QP+D_{k-1}\Delta T_{k-1}+D_k\Delta T_k)\\
&\quad\quad\times\left\{MM\cdot TM+(\Delta T_{k-1}-\Delta T_k)MM+\left(-\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1}-\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right)TM\right\}\\
&\quad+\frac{E}{2}\{TP\cdot QM+(D_{k-1}\Delta T_{k-1}-D_k\Delta T_k)TP+(\Delta T_{k-1}+\Delta T_k)QM\}=0
\end{aligned}
\tag{1.106}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{F}{4}\left\{TP^2\cdot MM-\frac{1}{2}TP^2(D_{k-1}\Delta T_{k-1}+D_k\Delta T_k)+2TP\cdot MM(\Delta T_{k-1}+\Delta T_k)\right\}\\
&\quad\times\{(P_{k-1}M_{k-1}-P_kM_k)-P_{k-1}D_{k-1}\Delta T_{k-1}+P_kD_k\Delta T_k\}\\
&+\frac{1}{2}\{MM\cdot TP\cdot TM+\{(\Delta T_{k-1}+\Delta T_k)TM+(\Delta T_{k-1}-\Delta T_k)TP\}MM\\
&\quad-TP\cdot TM\left(\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1}+\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right)\right\}\\
&-\frac{E}{2}\left\{QP\cdot MM\cdot TM+MM\cdot QP(\Delta T_{k-1}-\Delta T_k)+TM\cdot QP\left(-\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1}-\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right)\right.\\
&\quad\left.+MM\cdot TM(D_{k-1}\Delta T_{k-1}+D_k\Delta T_k)\right\}\\
&+\frac{E}{2}\{TP\cdot QM+(TP\cdot D_{k-1}+QM)\Delta T_{k-1}+(-TP\cdot D_k+QM)\Delta T_k\}=0
\end{aligned}
\tag{1.107}
$$

更に第 1 項を展開する.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{F}{4}\left[TP^2\cdot MM(P_{k-1}M_{k-1}-P_kM_k)+TP^2\cdot MM\{-P_{k-1}D_{k-1}\Delta T_{k-1}+P_kD_k\Delta T_k\}\right.\\
&\quad\left.+(P_{k-1}M_{k-1}-P_kM_k)\left\{-\frac{1}{2}TP^2(D_{k-1}\Delta T_{k-1}+D_k\Delta T_k)+2TP\cdot MM(\Delta T_{k-1}+\Delta T_k)\right\}\right]\\
&+\frac{1}{2}\{MM\cdot TP\cdot TM+\{(\Delta T_{k-1}+\Delta T_k)TM+(\Delta T_{k-1}-\Delta T_k)TP\}MM\\
&\quad-TP\cdot TM\left(\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1}+\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right)\right\}\\
&-\frac{E}{2}\left\{QP\cdot MM\cdot TM+MM\cdot QP(\Delta T_{k-1}-\Delta T_k)+TM\cdot QP\left(-\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1}-\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right)\right.\\
&\quad\left.+MM\cdot TM(D_{k-1}\Delta T_{k-1}+D_k\Delta T_k)\right\}\\
&+\frac{E}{2}\{TP\cdot QM+(TP\cdot D_{k-1}+QM)\Delta T_{k-1}+(-TP\cdot D_k+QM)\Delta T_k\}=0
\end{aligned}
\tag{1.108}
$$

この式を ΔT_{k-1} の項と ΔT_k の項にまとめていく. まずばらす.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{F}{4}\left[TP^2 \cdot MM\left(P_{k-1}M_{k-1} - P_kM_k\right) - TP^2 \cdot MMP_{k-1}D_{k-1}\Delta T_{k-1} + TP^2 \cdot MMP_kD_k\Delta T_k\right.\\
&\qquad -\frac{1}{2}\left(P_{k-1}M_{k-1} - P_kM_k\right)TP^2D_{k-1}\Delta T_{k-1} - \frac{1}{2}\left(P_{k-1}M_{k-1} - P_kM_k\right)TP^2D_k\Delta T_k\\
&\qquad \left.+2\left(P_{k-1}M_{k-1} - P_kM_k\right)TP \cdot MM\Delta T_{k-1} + 2\left(P_{k-1}M_{k-1} - P_kM_k\right)TP \cdot MM\Delta T_k\right]\\
&+\frac{1}{2}\left\{MM \cdot TP \cdot TM + TM \cdot MM\Delta T_{k-1} + TM \cdot MM\Delta T_k + TP \cdot MM\Delta T_{k-1} - TP \cdot MM\Delta\right.\\
&\qquad \left.-TP \cdot TM\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1} - TP \cdot TM\frac{1}{2}D_k\Delta T_k\right\}\\
&-\frac{E}{2}\left\{QP \cdot MM \cdot TM + MM \cdot QP\Delta T_{k-1} - MM \cdot QP\Delta T_k - TM \cdot QP\frac{1}{2}D_{k-1}\Delta T_{k-1} - TM\right.\\
&\qquad \left.+MM \cdot TMD_{k-1}\Delta T_{k-1} + MM \cdot TMD_k\Delta T_k\right\}\\
&+\frac{E}{2}\left\{TP \cdot QM + (TP \cdot D_{k-1} + QM)\Delta T_{k-1} + (-TP \cdot D_k + QM)\Delta T_k\right\} = 0
\end{aligned}
$$

ついで, まとめる.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{F}{4}TP^2 \cdot MM\left(P_{k-1}M_{k-1} - P_kM_k\right)\\
&-\frac{F}{4}\left\{-TP^2 \cdot MM \cdot P_{k-1} \cdot D_{k-1} + \left(P_{k-1}M_{k-1} - P_kM_k\right)\left(-\frac{1}{2}TP^2 \cdot D_{k-1} + 2TP \cdot MM\right)\right\}\Delta\\
&-\frac{F}{4}\left\{TP^2 \cdot MM \cdot P_k \cdot D_k + \left(P_{k-1}M_{k-1} - P_kM_k\right)\left(-\frac{1}{2}TP^2 \cdot D_k + 2TP \cdot MM\right)\right\}\Delta T_k\\
&+\frac{1}{2}MM \cdot TP \cdot TM\\
&+\frac{1}{2}\left\{TM \cdot MM + TP \cdot MM - \frac{1}{2}TP \cdot TM \cdot D_{k-1}\right\}\Delta T_{k-1}\\
&+\frac{1}{2}\left\{TM \cdot MM - TP \cdot MM - \frac{1}{2}TP \cdot TM \cdot D_k\right\}\Delta T_k\\
&-\frac{E}{2}QP \cdot MM \cdot TM\\
&-\frac{E}{2}\left(MM \cdot QP - \frac{1}{2}TM \cdot QP \cdot D_{k-1} + MM \cdot TM \cdot D_{k-1}\right)\Delta T_{k-1}\\
&-\frac{E}{2}\left(-MM \cdot QP - \frac{1}{2}TM \cdot QP \cdot D_k + MM \cdot TM \cdot D_k\right)\Delta T_k\\
&+\frac{E}{2}TP \cdot QM + \frac{E}{2}(TP \cdot D_{k-1} + QM)\Delta T_{k-1} + \frac{E}{2}(-TP \cdot D_k + QM)\Delta T_k = 0 \qquad (1.
\end{aligned}
$$

ここで, 以下のように変数をまとめる (前の S_t とはちゃんと対応しているんだろ

うね???).

$$
\begin{aligned}
S_t &\equiv \frac{F}{4}TP^2 \cdot MM\left(P_{k-1}M_{k-1} - P_kM_k\right) - \frac{1}{2}MM \cdot TP \cdot TM \\
&+\frac{E}{2}QP \cdot MM \cdot TM - \frac{E}{2}TP \cdot QM \qquad (1.111)\\
B &\equiv -\frac{F}{4}\left\{-TP^2 \cdot MM \cdot P_{k-1} \cdot D_{k-1} + \left(P_{k-1}M_{k-1} - P_kM_k\right)\left(-\frac{1}{2}TP^2 \cdot D_{k-1} + 2TP \cdot MM\right)\right\} \\
&+\frac{1}{2}\left\{TM \cdot MM + TP \cdot MM - \frac{1}{2}TP \cdot TM \cdot D_{k-1}\right\} \\
&-\frac{E}{2}\left(MM \cdot QP - \frac{1}{2}TM \cdot QP \cdot D_{k-1} + MM \cdot TM \cdot D_{k-1}\right) + \frac{E}{2}\left(TP \cdot D_{k-1} + QM\right) \qquad (1.112)\\
C &\equiv -\frac{F}{4}\left\{TP^2 \cdot MM \cdot P_k \cdot D_k + \left(P_{k-1}M_{k-1} - P_kM_k\right)\left(-\frac{1}{2}TP^2 \cdot D_k + 2TP \cdot MM\right)\right\} \\
&+\frac{1}{2}\left\{TM \cdot MM - TP \cdot MM - \frac{1}{2}TP \cdot TM \cdot D_k\right\} \\
&-\frac{E}{2}\left(-MM \cdot QP - \frac{1}{2}TM \cdot QP \cdot D_k + MM \cdot TM \cdot D_k\right) + \frac{E}{2}\left(-TP \cdot D_k + QM\right) \qquad (1.113)
\end{aligned}
$$

これより,

$$B\Delta T_{k-1} + C\Delta T_k = S_t \qquad (1.114)$$

となる. ここで, $\sum h = 0$ より得られる

$$
\begin{aligned}
\Delta T_{k-1} &= -\frac{1+\gamma_k}{1+\gamma_{k-1}}\frac{\Delta p_k}{\Delta p_{k-1}}\Delta T_k + \frac{1}{1+\gamma_{k-1}}\frac{L}{C_p}\Delta\hat{Q}\frac{1}{\Delta p_{k-1}} \qquad (1.115)\\
&\equiv \alpha\Delta T_k + \beta \qquad (1.116)
\end{aligned}
$$

を代入すると

$$B\left(\alpha\Delta T_k + \beta\right) + CT_k = S_t \qquad (1.117)$$

これを, ΔT_k について解けば

$$T_k = \frac{S_t - \beta B}{C + \alpha B} \qquad (1.118)$$

1.5　NHA1992 の式を積分する場合

NHA92 に与えられている偽湿潤断熱の式は

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{moistpsuedadiabat} = \frac{\frac{RT}{pc_{pm}} + \frac{x_v^*}{x_n}\frac{L}{pc_{pn}}}{x_n + x_v^*\frac{c_{pv}}{c_{pn}} + \frac{x_v^*}{x_n}\frac{L^2}{RT^2c_{pn}}} \qquad (1.119)$$

ここで,

1.6 Relaxed Arakawa-Schubert スキーム

Relaxed Arakawa-Schubert スキームについては, Moorthi and Suarez (1992) およびその論文で参照している論文を参照すること.

1.7 参考文献

Manabe, S., Smagorinsky, J., Strickler, R.F., 1965: Simulated climatology of a general circulation model with a hydrologic cycle, *Mon. Weather Rev.*, **93**, 769–798.

Moorthi, S., M. J. Suarez, 1992: Relaxed Arakawa-Schubert: A parameterization of moist convection for general circulation models, *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 978–1002.