湿潤大気における 2 次元非静力学モデルの定式化

杉山 耕一朗, 北守 太一, 小高 正嗣

2006 年 8 月 18 日

目 次

第1章　基礎方程式系

本数値モデルは水平・鉛直の 2 次元モデルである. 水平方向の座標変数を x, 鉛直方向の座標変数を z と表し, 時間方向の変数は t と表す.

1.1　運動方程式・圧力方程式・熱の式・混合比の保存式

力学的な枠組みは, 準圧縮方程式系 (Klemp and Wilhelmson,1978) を用いる. この方程式系では, 予報変数を水平一様な基本場とそこからのずれに分離し, 方程式の線形化を行っている. 方程式中の変数は Appendix ?? に示す.

以下に準圧縮方程式系の時間発展方程式を一覧する. 密度の式では乾燥成分と湿潤成分の分子量の差を考慮するが, 熱の式では考慮しない. また圧力方程式では非断熱加熱による大気の膨張と, 凝縮に伴う圧力変化を無視している.

運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) - c_{p_d}\bar{\theta_v}\frac{\partial \pi}{\partial x} + Turb.u \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) - c_{p_d}\bar{\theta_v}\frac{\partial \pi}{\partial z} + Turb.w \\ &\quad + \left(\frac{\theta}{\bar{\theta}} + \frac{\sum q_v/M_v}{1/M_d + \sum \bar{q_v}/M_v} - \frac{\sum q_v + \sum q_c + \sum q_r}{1+\sum \bar{q_v}}\right) g\end{aligned} \tag{1.2}$$

圧力方程式

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = -\frac{\overline{C_s}^2}{c_{p_d}\bar{\rho}\bar{\theta_v}^2}\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\bar{\theta_v}u_j) \tag{1.3}$$

熱の式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\left(u\frac{\partial \theta}{\partial x} + w\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) - w\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \frac{1}{\bar{\pi}}\left(Q_{cnd} + Q_{rad} + Q_{dis}\right)$$

$$+Turb.\bar{\theta} + Turb.\theta \tag{1.4}$$

混合比の保存式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_v}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial q_v}{\partial x} + w\frac{\partial q_v}{\partial z}\right) - w\frac{\partial \bar{q_v}}{\partial x} + Src.q_v + Turb.q_v + Turb.\bar{q_v}, &(1.5)\\
\frac{\partial q_c}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial q_c}{\partial x} + w\frac{\partial q_c}{\partial z}\right) + Src.q_c + Turb.q_c &(1.6)\\
\frac{\partial q_r}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial q_c}{\partial x} + w\frac{\partial q_c}{\partial z}\right) + Src.q_r + Fall.q_r + Turb.q_r &(1.7)
\end{aligned}$$

ただし, $^{-}$ の付いた変数は水平一様な基本場であることを示し, 上付き添え字 c は個々の凝縮成分を示す.

エクスナー関数 π

$$\pi \equiv \left(\frac{p}{p_0}\right)^{R_d/c_{p_d}} \tag{1.8}$$

温位 θ

$$\theta \equiv T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R_d/c_{p_d}} = \frac{T}{\pi} \tag{1.9}$$

密度 ρ

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{p}{R_d T}\left(\frac{1/M_d}{1/M_d + \sum q_v/M_v}\right)\left(1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r\right)\\
&= \frac{p}{R_d T_v} = \frac{p_0 \pi^{c_{vd}/R_d}}{R_d \theta_v} &(1.10)
\end{aligned}$$

仮温位 θ_v

$$\theta_v = \frac{\theta}{\left(\frac{1/M_d}{1/M_d + \sum q_v/M_v}\right)(1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r)} \tag{1.11}$$

音波速度 ${C_s}^2$

$${C_s}^2 = \frac{c_{p_d}}{c_{vd}} R_d \pi \theta_v \tag{1.12}$$

1.2 雲微物理過程のパラメタリゼーション

方程式系に含まれる凝縮による加熱項 Q_{cnd}, 生成項 Src, 落下項 $Fall$ の評価は, 中島 (1998) で用いられた Kessler (1969) のパラメタリゼーションに従う.

暖かい雨のバルク法のパラメタリゼーションでは, 気相と凝縮相を以下の 3 つのカテゴリーに分ける.

記号	意味	内容
q_v	気相の混合比	気体の状態で大気中に存在する水
q_c	雲水混合比	落下速度がゼロな液体の粒子で, 実際の大気中の雲粒に対応する. 通常 100 μm 以下の微小な流体粒子である.
q_r	雨水混合比	有意な落下速度を持つ液体の粒子で, 実際の大気中の雨粒に対応する.

そして, 微物理素過程として以下を考慮する. ただし, これらの量は全て正の値として定義され, 水蒸気が直接雨水に凝結する過程は無視されている.

記号	内容
CN_{vc}	凝結による水蒸気から雲水への変換 (condensation)
EV_{cv}	蒸発による雲水から水蒸気への変換 (evaporation)
EV_{rv}	蒸発による雨水から水蒸気への変換 (evaporation)
CN_{cr}	併合成長による雲水から雨水への変換. 併合や水蒸気拡散により, 雲粒子が雨粒の大きさにまで成長する (autocondensation)
CL_{cr}	衝突併合による雲水から雨水への変換. 大水滴が小水滴を衝突併合する (collection)
PR_r	雨水の重力落下に伴う雨水混合比の変化率 (Precipitation)

この微物理素過程を用いて (1.5) – (1.7) 式を書き直すと, 以下のようになる.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial \theta}{\partial x} + w\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) - w\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \frac{L}{c_{p_d}\bar{\pi}}\left(CN_{vc} - EV_{cv} - EV_{rv}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\bar{\pi}}\left(Q_{rad} + Q_{dis}\right) + Turb.\bar{\theta} + Turb.\theta \qquad (1.13)\\ \frac{\partial q_v}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial q_v}{\partial x} + w\frac{\partial q_v}{\partial z}\right) - w\frac{\partial \bar{q_v}}{\partial x} - \left(CN_{vc} - EV_{cv} - EV_{rv}\right) \\ &\quad + Turb.q_v + Turb.\bar{q_v}, \qquad (1.14)\\ \frac{\partial q_c}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial q_c}{\partial x} + w\frac{\partial q_c}{\partial z}\right) + \left(CN_{vc} - EV_{cv} - CN_{cr} - CL_{cr}\right) + Turb.q_c, \qquad (1.15)\\ \frac{\partial q_r}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial q_c}{\partial x} + w\frac{\partial q_c}{\partial z}\right) + \left(CN_{cr} + CL_{cr} - EV_{rv}\right) + PR_r + Turb.q_r \qquad (1.16)\end{aligned}$$

ここで, $\gamma = L_v/(c_{p_d}\pi)$ であり, L_v は水の蒸発の潜熱 [J K^{-1} kg^{-1}], c_{p_d} は乾燥大気の定圧比熱 [J K kg^{-1}], π はエクスナー関数である.

微物理素過程は以下のように定式化する.

水蒸気と雲水の間の変換: $-CN_{vc} + EV_{cv}$

雲水は粒が小さく, 水蒸気との間で瞬間的に飽和調節が起こるものとする. すなわち, 移流などの項を計算した後の温度と水蒸気量が過飽和状態となっている場合には, ちょうど飽和になる量の水蒸気を凝縮させる. 一方, 移流などの項を計算した後に, 雲水が存在するにも拘わらず未飽和になっている場所では, ちょうど飽和になる量の雲水を蒸発させる.

$$-CN_{vc} + EV_{cv} = \frac{dq_{vsw}}{dt}. \tag{1.17}$$

雲水の併合成長: CN_{cr}

Berry(1968) に従って以下で与える.

$$CN_{cr} = \frac{10^6 \bar{\rho} q_c^3}{60(2q_c + 2.66 \times 10^{-8} N_0/\bar{\rho} D_0)} \tag{1.18}$$
$$N_0 = 5.0 \times 10^7, \quad D_0 = 0.366$$

これを選択した理由は, 第一には Kessler (1969) のもともとの式が閾値を含んでいるために生じる不自然さ (長時間積分で, 領域の上部に雲水が溜まり, ついには全域が雲に覆われてしまう) を嫌ったためである. 第二には, Berry(1969) の式がまがりなりにも, 海洋上の雲物理を扱えると主張しているからである.

雲水の衝突併合: CL_{cr}

Kessler (1969) に従って, 以下で定式化する.

$$CL_{cr} = 2.2 q_c (\bar{\rho} q_r)^{0.875}. \tag{1.19}$$

雨水の蒸発: EV_{rv}

$$EV_{rv} = 4.85 \times 10^{-2} (q_{vsw} - q_v)(\bar{\rho} q_r)^{0.65} \tag{1.20}$$

雨水のフラックス: PR_r

雨水の重力落下による混合比の変化率は,

$$PR_r = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} U_r q_r). \tag{1.21}$$

であり, 雨水の終端落下速度 U_r [m s^{-1}] は

$$U_r = 12.2 (q_r)^{0.125} \tag{1.22}$$

で与える.

1.3 簡略化した放射冷却

本モデルにおいて, 放射強制は高度のみに依存するパラメタとして与える. 温位の式の右辺に, 放射強制 Q_{rad} を考慮する.

1.4 乱流混合のパラメタリゼーション

1.4.1 乱流運動エネルギーの式

Klemp and Wilhelmson (1978) および CReSS (坪木と榊原, 2001) と同様に, 1.5 次のクロージャーを用いることで, 乱流エネルギーの時間発展方程式は以下ように書ける.

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_m}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial K_m}{\partial x} + w\frac{\partial K_m}{\partial z}\right) - \frac{3gC_m^2 l^2}{2\overline{\theta_v}}\left(\frac{\partial \theta_{el}}{\partial z}\right) \\ &\quad + \left(C_m^2 l^2\right)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\} \\ &\quad + \frac{C_m^2 l^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{K_m}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2}\right) + \left(\frac{\partial K_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial z}\right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2l^2}K_m^2 \end{aligned} \tag{1.23}$$

ここで $C_\varepsilon = C_m = 0.2$, 混合距離 $l = (\Delta x \Delta z)^{1/2}$ とする. θ_{el} は以下のように定義する

$$\theta_{el} = \overline{\theta_v} + \theta_v^{'} \quad (for \;\; q_c = 0) \tag{1.24}$$

$$\theta_{el} = \overline{\theta_v} + \theta_v^{'} + \frac{\sum L q_v}{c_{p_d}\bar{\pi}} \quad (for \;\; q_c > 0) \tag{1.25}$$

ただし,

$$\overline{\theta_v} + \theta_v^{'} = \bar{\theta}_v\left\{1 + \frac{\theta}{\bar{\bar{\theta}}} + \frac{\sum q_v/M_v}{1/M_d + \sum \bar{q}_v/M_v} - \frac{\sum q_v + \sum q_c + \sum q_r}{1 + \sum \bar{q}_v}\right\} \tag{1.26}$$

である.

1.4.2　運動方程式中の拡散項

Klemp and Wilhelmson (1978) および CReSS (坪木と榊原, 2001) と同様に, 1.5 次のクロージャーを用いることで粘性拡散項は以下のように書ける.

$$
\begin{aligned}
Turb.u_i &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{(u_i' u_j')} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_j}\left[-K_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{2}{3}\delta_{ij}E\right].
\end{aligned}
\quad (1.27)
$$

ここで K_m は運動量に対する乱流拡散係数であり, E はサブグリッドスケールの乱流運動エネルギー

$$
E=\frac{1}{2}\overline{(u')^2+(w')^2}=\frac{{K_m}^2}{C_m l^2} \quad (1.28)
$$

である.

1.4.3　熱力学の式の拡散項

Klemp and Wilhelmson (1978) および CReSS (坪木と榊原, 2001) と同様に, 1.5 次のクロージャーを用いることで温位の粘性拡散項は以下のように書ける.

$$
\begin{aligned}
Turb.\theta &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i'\theta} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(K_h\frac{\partial \theta}{\partial x_j}\right).
\end{aligned}
\quad (1.29)
$$

ここで K_h は温位に対する乱流拡散係数である.

1.4.4　散逸加熱項の表現

散逸加熱項 Q_{dis} は, 乱流運動エネルギーの散逸項をもとに, 以下のように与える.

$$
Q_{dis}=\frac{1}{\overline{c_p}}\frac{C_\varepsilon}{l}\frac{K_m^3}{(C_m l)^3}. \quad (1.30)
$$

ここで $l=(\Delta x\Delta z)^{1/2}$ である.

第2章　参考文献

Browning, K. A., 1964: Airflow and percipitation within severe local storms which travel to the right of the winds. *J. Atmos. Sci.*, **21**, 634-639

Curic, M., Janc, D., Vujovic, D., Vuckovic, V., 2003: The effects fo a river valley on an isolated cumulonimbus cloud development. *Atmos. Res.*, **66**, 123-139.

Das, P., 1969: The thermodynamic equation in cumulus dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **26**, 399-409.

Deardorff, J. W., 1975: The development of boundary-layer turbulence models for use in studying the severe storm environment. *Proc. SESAME Meeting*, Boulder, NOAA-ERL, 251-261.

Houze, R. A., 1993: Cloud dynamics. Academic Press.

Kessler, E., 1969: On the Distribution and Continuity of Water Substance in Atmospheric Circuration. Meteor. Monogr., *Amer. Meteor.Soc.*, **32**, 84 pp.

Klemp J. B. and Robert B. Wilhelmson, 1978: The simulation of three-dimensional convective storm dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1070-1096.

Klemp J. B., 1978: A splitting procedure for numerical solution of the compressible equations of motion. ???, ???.

中野満寿男, 2003: 鉛直シアーが台風初期渦形成に及ぼす影響. 九州大学大学院理学府 地球惑星科学専攻 修士論文.

Mellor, G., and T. Yamada, 1974: A hierarchy of turbulence closure models for atmospheric boundary layers. *J. Atmos. Sci.*, **31**, 1791-1806.

Ogura, Y. and M. Yoshizaki, 1988: Numerical study of orographic-convective precipitation over the eastern Arabic Sea and the Ghats Mountains during the summer monsoon. *J. Atoms. Sci.*, **45**, 2097-2122.

Ogura, Y., and T. Takahashi, 1971: Numerical simulation of the life cycle of a thunderstorm cell. *Mon. Wea. Rev.*, **99**, 895-911.

大宮司久明, 三宅裕, 吉澤徴, 1998: 乱流の数値流体力学—モデルと計算法. 東京大学出版会, 652.

斉藤和雄 編, 1999: 非静力学モデル. 気象研究ノート 第 196 号, 日本気象学会.

Saunders, P. M., 1957: The thermodynamics of saturated air: A contribution to the classical theory. *Ouart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **83**, 342-350.

Schemm, C. E., and F. Lipps, 1976: Some results from a simplified three-dimensional numerical model of atmospheric turbulence. *J. Atmos. Sci.*, **33**, 1021-1041.

Skamarock, Wiliam C. and Joseph B. Klemp, 1992: The stability of time-split methods for the hydrostatic and the nonhydrostatic elastic equation. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 2109-2127.

Soong, S-T., and Y. Ogura, 1973: A comparison between axi-symmetric and slab-symmetric cumulus cloud models. *J. Atmos. Sci.*, **30**, 879-893

Tapp, M. C., and P. W. White, 1976: A nonhydrostatic mesoscale model. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **102**, 277-296.

坪木和久, 榊原篤志, 2001: CReSS ユーザーズガイド 第 2 版.
http://www.tokyo.rist.or.jp/CReSS_Fujin/CReSS.top.html

Wilhelmson, R. B., 1977: On the thermodyanmics equation for deep convetion. *Mon. Wea. Rev.*, **105**, 545-547.

Wilhelmson, R. B., and Y. Ogura, 1977: The pressure perturbation and the numerical modleing of a cloud. *J. Atmos. Sci.*, **29**, 1295-1307.

付 録A 準圧縮方程式系の導出

A.1 線形化前の基礎方程式系

地球大気における湿潤対流の定式化同様, 大気の乾燥成分と湿潤成分の分子量の差は密度の式には考慮するが, 熱の式には考慮しないような系を考える. この系では大気の熱エネルギーは乾燥大気の熱エネルギーで決まることになる. このような系では温位 θ が保存量として使える.

A.1.1 気温 T, 圧力 p, 風速 u, w, 密度 ρ で表現する場合

水平鉛直 2 次元大気の状態を気温 T, 圧力 p, 風速 u, w, 密度 ρ で表現する場合, 基礎方程式系は以下のようになる.

運動方程式

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = Turb.u \tag{A.1}$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g = Turb.w \tag{A.2}$$

連続の式

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \tag{A.3}$$

密度の式 (状態方程式)

$$\rho = \frac{p}{R_d T_v} \tag{A.4}$$

熱の式

$$c_{p_d}\frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho_d}\frac{dp}{dt} = Q + Turb.T \tag{A.5}$$

凝縮成分の混合比保存式

$$\frac{dq_v}{dt} = Src.q_v + Turb.q_v \tag{A.6}$$
$$\frac{dq_c}{dt} = Src.q_c + Turb.q_c \tag{A.7}$$
$$\frac{dq_r}{dt} = Src.q_r + Fall.q_r + Turb.q_r \tag{A.8}$$

ここで R_d, c_{p_d}, ρ_d は単位質量当たりの乾燥成分の気体定数, 定圧比熱, 密度であり, Q は非断熱加熱, q_v は気体成分の混合比, q_c は雲水混合比, q_r は雨水混合比である. q_v, q_r, q_c は, 凝縮成分の数だけ存在する. $Turb$, Src, $Fall$ を付けた項はそれぞれ拡散項, 生成消滅項, 落下項を意味する.

密度の式には凝縮成分の混合比が考慮されている.

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_d + \sum\rho_v + \sum\rho_c + \sum\rho_r \\ &= \rho_d(1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r).\end{aligned} \tag{A.9}$$

ただし, $q_v = \rho_v/\rho_d$, q_c, q_r はそれぞれ, 凝縮性気体, 雲水, 雨水の混合比を意味する. ここで乾燥成分の分圧 p_d は.

$$\begin{aligned}p_d &= p\left(1 - \frac{\sum p_v}{p}\right) \\ &= p\left(1 - \frac{\sum p_v}{p_d + \sum p_v}\right) \\ &= p\left(1 - \frac{\sum \rho_v R_v T}{\rho_d R_d T + \sum \rho_v R_v T}\right) \\ &= p\left(1 - \frac{\sum q_v/M_v}{1/M_d + \sum q_v/M_v}\right)\end{aligned}$$

となるので,

$$\rho_d = \frac{p_d}{R_d T} = \frac{p}{R_d T}\left(\frac{1/M_d}{1/M_d + \sum q_v/M_v}\right) \tag{A.10}$$

である. 但し M は分子量を表し, 凝縮成分の体積は無視できるものと見なした. (A.9), (A.10) 式より,

$$\rho = \frac{p}{R_d T}\left(\frac{1/M_d}{1/M_d + \sum q_v/M_v}\right)(1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r) \tag{A.11}$$

となる.

$$f \equiv \left(\frac{1/M_d}{1/M_d + \sum q_v/M_v} \right) (1 + \sum q_v + \sum q_x)$$

と定義すると, (A.11) 式は以下のように書ける.

$$\rho = \frac{p}{R_d (T/f)} \tag{A.12}$$

また, 温位とエクスナー関数を用いて表現すると,

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{p}{R_d \pi (\theta/f)} \\ &= \frac{p_0 \pi^{c_{vd}/R_d}}{R_d (\theta/f)} \end{aligned} \tag{A.13}$$

である. 但しエクスナー関数 π は $\pi = T/\theta$ の関係を満たす.

温位は乾燥断熱状態における保存量である. 乾燥断熱状態を表す熱力学の式は

$$c_p dT - \alpha dp = 0 \tag{A.14}$$

である. ここで T は温度, p は圧力, c_p は単位質量当たりの比熱, α は比容である. (A.14) 式の α は, 理想気体の状態方程式を用いると,

$$\alpha = \frac{RT}{p} \tag{A.15}$$

と書ける. ここで M は分子量, R は気体定数である. (A.14) 式に (A.15) 式を代入し整理すると,

$$\frac{c_p}{T} dT - \frac{R}{p} dp = 0 \tag{A.16}$$

となる. 凝縮を生じない場合には気塊の組成は変化しないので c_p と R は共に p に依存しない. 一般に c_p は T の関数であるが, **c_p を定数とみなすと**,

$$\begin{aligned} \int_T^{T_0} \frac{1}{T} dT &= \frac{R}{c_p} \int_p^{p_0} \frac{1}{p} dp \\ \ln(T_0/T) &= \frac{R}{c_p} \ln(p_0/p) \\ \theta &= T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} \end{aligned} \tag{A.17}$$

となり, 温位が得られる.

A.1.2 温位 θ, 圧力 p, 風速 u, w, 密度 ρ で表現する場合

水平鉛直 2 次元大気の状態を温位 θ, 圧力 p, 風速 u, w, 密度 ρ で表現する場合, 基礎方程式系は以下のようになる. CReSS(坪木と榊原, 2001) では, この基礎方程式を用いている.

運動方程式

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = Turb.u \tag{A.18}$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g = Turb.w \tag{A.19}$$

圧力方程式

$$\frac{dp}{dt} = \rho {C_s}^2 \left\{ -\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{f}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial q_v}\frac{dq_v}{dt} + \sum \frac{\partial f}{\partial q_c}\frac{dq_c}{dt} + \sum \frac{\partial f}{\partial q_r}\frac{dq_r}{dt} \right) \right\} \tag{A.20}$$

密度の式 (状態方程式)

$$\rho = \frac{p_0}{R_d \theta_v}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{c_{vd}/c_{p_d}} \tag{A.21}$$

熱の式

$$\frac{d\theta}{dt} = Q + Turb.\theta \tag{A.22}$$

凝縮成分の混合比の保存式

$$\frac{dq_v}{dt} = Src.q_v + Turb.q_v \tag{A.23}$$

$$\frac{dq_c}{dt} = Src.q_c + Turb.q_c \tag{A.24}$$

$$\frac{dq_r}{dt} = Src.q_r + Fall.q_r + Turb.q_r \tag{A.25}$$

ただし温位 θ は

$$\theta \equiv T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{R_d/c_{p_d}} \tag{A.26}$$

であり, 仮温位 θ_v は,

$$\theta_v \equiv \frac{\theta}{f} \tag{A.27}$$

である. 音速 C_s は

$$
{C_s}^2 \equiv \frac{c_{p_d}}{c_{vd}} R_d T_v = \frac{c_{p_d}}{c_{vd}} R_d \frac{T}{f} \tag{A.28}
$$

である. c_{p_d} と c_{vd} はそれぞれ単位質量当たりの乾燥成分の定圧比熱と定積比熱であり, $c_{vd} + R_d = c_{p_d}$ という関係にある.

圧力方程式は密度の式と連続の式を組み合わせることで得られる. まず密度を $\rho = \rho(\theta, p, q_v, q_x)$ として ρ の全微分を求める.

$$
\begin{aligned}
d\rho &= d\left[\frac{p_0}{R_d\theta_v}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{c_{vd}/c_{p_d}}\right] \\
&= d\left[\frac{p_0}{R_d(\theta/f)}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{c_{vd}/c_{p_d}}\right] \\
&= \frac{p_0}{R_d(\theta/f)}\frac{c_{vd}}{c_{p_d}}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-R_d/c_{p_d}}\frac{1}{p_0}dp - \frac{p_0 f}{R_d}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{c_{vd}/c_{p_d}}\frac{d\theta}{\theta^2} \\
&\quad + \frac{p_0}{R_d\theta}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{c_{vd}/c_{p_d}}\left\{\sum\frac{\partial f}{\partial q_v}dq_v + \sum\frac{\partial f}{\partial q_c}dq_c + \sum\frac{\partial f}{\partial q_r}dq_r\right\} \\
&= \frac{1}{{C_s}^2}dp - \frac{\rho}{\theta}d\theta + \sum\frac{\rho}{f}\frac{\partial f}{\partial q_v}dq_v + \sum\frac{\rho}{f}\frac{\partial f}{\partial q_c}dq_c + \sum\frac{\rho}{f}\frac{\partial f}{\partial q_r}dq_r
\end{aligned} \tag{A.29}
$$

となる. (A.29) 式を圧力の式として整理すると,

$$
\frac{dp}{dt} = {C_s}^2\left(\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{\theta}\frac{d\theta}{dt} - \sum\frac{\rho}{f}\frac{\partial f}{\partial q_v}dq_v - \sum\frac{\rho}{f}\frac{\partial f}{\partial q_c}dq_c - \sum\frac{\rho}{f}\frac{\partial f}{\partial q_r}dq_r\right)
$$

であり, 連続の式を用いると,

$$
\frac{dp}{dt} = \rho{C_s}^2\left(-\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt} - \sum\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial q_v}dq_v - \sum\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial q_c}dq_c - \sum\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial q_r}dq_r\right)
$$

となり, 圧力方程式が得られる.

A.1.3 温位 θ, 無次元圧力 π, 風速 u, w, 密度 ρ で表現する場合

水平鉛直 2 次元大気の状態を温位 θ, 無次元圧力 π, 風速 u, w, 密度 ρ で表現する場合, 基礎方程式系は以下のようになる. 連続の式 (A.3) と状態方程式 (A.21) を用いることで得られる圧力方程式を利用する. Klemp and Willhelmson (1978) では, この基礎方程式を用いている.

運動方程式

$$\frac{du}{dt} + c_{p_d}\theta_v \frac{\partial \pi}{\partial x} = Turb.u \tag{A.30}$$

$$\frac{dw}{dt} + c_{p_d}\theta_v \frac{\partial \pi}{\partial z} - g = Turb.w \tag{A.31}$$

圧力方程式

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{{C_s}^2}{c_{p_d}\rho\theta_v}\left\{-\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{f}\left(\sum\frac{\partial f}{\partial q_v}\frac{dq_v}{dt} + \sum\frac{\partial f}{\partial q_c}\frac{dq_c}{dt} + \sum\frac{\partial f}{\partial q_r}\frac{dq_r}{dt}\right)\right\} \tag{A.32}$$

状態方程式

$$\rho = \frac{p_0 \pi^{c_{vd}/R_d}}{R_d \theta_v} \tag{A.33}$$

熱の式

$$\frac{d\theta}{dt} = Q + Turb.\theta \tag{A.34}$$

水蒸気および水物質混合比の式

$$\frac{dq_v}{dt} = Src.q_v + Turb.q_v \tag{A.35}$$

$$\frac{dq_x}{dt} = Src.q_c + Turb.q_c \tag{A.36}$$

$$\frac{dq_x}{dt} = Src.q_r + Fall.q_x + Turb.q_r \tag{A.37}$$

ただし, エクスナー関数 π は,

$$\pi \equiv \frac{T}{\theta} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{R_d/c_{p_d}} \tag{A.38}$$

であり, 音速 C_s は

$${C_s}^2 \equiv \frac{c_{p_d}}{c_{vd}} R_d \pi \theta_v = \frac{c_{p_d}}{c_{vd}} R_d \pi \left(\frac{\theta}{f}\right) \tag{A.39}$$

である.

運動方程式の圧力勾配は, 温位とエクスナー関数を用いることで得られる.

$$\frac{1}{\rho}dp \quad = \quad \frac{R_d \pi(\theta/f)}{p} d\left(p_0 \pi^{c_{p_d}/R_d}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{R_d \pi (\theta/f)}{p} \left(\frac{p_0 c_{p_d}}{R_d} \pi^{c_{p_d}/R-1} \right) d\pi \\
&= \frac{R_d \pi (\theta/f)}{p} \left(\frac{c_{p_d}}{R_d} p \pi^{-1} \right) d\pi \\
&= c_{p_d} (\theta/f) d\pi \\
&= c_{p_d} \theta_v d\pi
\end{aligned} \tag{A.40}
$$

圧力方程式は密度の式と連続の式を組み合わせることで得られる. まず密度を $\rho = \rho(\theta, \pi, q_v, q_x)$ として ρ の全微分を計算する.

$$
\begin{aligned}
d\rho &= d\left[\frac{p_0 \pi^{c_v/R_d}}{R_d \theta_v} \right] \\
&= d\left[\frac{p_0 \pi^{c_v/R_d}}{R_d (\theta/f)} \right] \\
&= \frac{p_0}{R_d(\theta/f)} \pi^{(c_v/R_d - 1)} \frac{c_{vd}}{R_d} d\pi - \frac{p_0 \pi^{c_v/R_d} f}{R_d} \frac{d\theta}{\theta^2} \\
&\quad + \frac{p_0 \pi^{c_v/R_d}}{R_d \theta} \left(\sum \frac{\partial f}{\partial q_v} dq_v + \sum \frac{\partial f}{\partial q_c} dq_c + \sum \frac{\partial f}{\partial q_r} dq_r \right) \\
&= c_{p_d} (\theta/f) \left(\frac{c_{vd}}{c_{p_d} R_d \pi (\theta/f)} \right) \left(\frac{p_0 \pi^{c_v/R_d}}{R_d (\theta/f)} \right) d\pi - \frac{p_0 \pi^{c_v/R_d}}{R_d(\theta/f)} \frac{d\theta}{\theta} \\
&\quad + \frac{1}{f} \left(\frac{p_0 \pi^{c_v/R_d}}{R_d (\theta/f)} \right) \left(\sum \frac{\partial f}{\partial q_v} dq_v + \sum \frac{\partial f}{\partial q_c} dq_c + \sum \frac{\partial f}{\partial q_r} dq_r \right) \\
&= \frac{c_{p_d} \rho (\theta/f)}{{C_s}^2} d\pi - \frac{\rho}{\theta} d\theta + \rho \frac{1}{f} \left(\sum \frac{\partial f}{\partial q_v} dq_v + \sum \frac{\partial f}{\partial q_c} dq_c + \sum \frac{\partial f}{\partial q_r} dq_r \right) \\
&= \frac{c_{p_d} \rho \theta_v}{{C_s}^2} d\pi - \frac{\rho}{\theta} d\theta + \rho \frac{1}{f} \left(\sum \frac{\partial f}{\partial q_v} dq_v + \sum \frac{\partial f}{\partial q_c} dq_c + \sum \frac{\partial f}{\partial q_r} dq_r \right)
\end{aligned} \tag{A.41}
$$

となる. (A.41) 式を圧力の式として整理すると,

$$
\frac{d\pi}{dt} = \frac{{C_s}^2}{c_{p_d} \rho \theta_v} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{f} \left(\sum \frac{\partial f}{\partial q_v} dq_v + \sum \frac{\partial f}{\partial q_c} dq_c + \sum \frac{\partial f}{\partial q_r} dq_r \right) \right\} \tag{A.42}
$$

となり, 連続の式を用いると,

$$
\frac{d\pi}{dt} = \frac{{C_s}^2}{c_{p_d} \rho \theta_v} \left\{ -\nabla \cdot \boldsymbol{u} + \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{f} \left(\sum \frac{\partial f}{\partial q_v} dq_v + \sum \frac{\partial f}{\partial q_c} dq_c + \sum \frac{\partial f}{\partial q_r} dq_r \right) \right\} \tag{A.43}
$$

となり, 圧力方程式が得られる.

A.2 線形化

準圧縮方程式系では, 変数を基本場と擾乱場に分離し, 線形化を行う.

A.2.1 基本場と擾乱場の分離

変数を基本場と擾乱場に分離し, 基本場は静水圧平衡にあると仮定する. この時, 変数は以下のように書ける.

$$
\begin{aligned}
u &= u^{'}(x,z,t)\\
w &= w^{'}(x,z,t)\\
\pi &= \bar{\pi}(z) + \pi^{'}(x,z,t)\\
\theta_v &= \bar{\theta}_v(z) + {\theta_v}^{'}(x,z,t)\\
\rho &= \bar{\rho}(z) + \rho^{'}(x,z,t)\\
q_v &= \bar{q_v}(z) + q_v^{'}(x,z,t)\\
q_r &= q_r^{'}(x,z,t)\\
q_c &= q_c^{'}(x,z,t)
\end{aligned}
$$

但し, $\theta_v = \theta/f$ とし, 基本場の風速 u, w と雲粒混合比と雨粒混合はゼロと見なした. そして基本場には静水圧平衡,

$$
\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} = -\frac{g}{c_{p_d}\bar{\theta}_v} = -\frac{g}{c_{p_d}(\bar{\theta}/\bar{f})} \tag{A.44}
$$

の関係が成り立つものとする.

A.2.2 水平方向の運動方程式の線形化

水平方向の運動方程式を基本場と擾乱場に分離する.

$$
\frac{\partial u^{'}}{\partial t} = -\left(u^{'}\frac{\partial u^{'}}{\partial x} + w^{'}\frac{\partial u^{'}}{\partial z}\right) - c_{p_d}\left(\bar{\theta}_v\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x} + \bar{\theta}_v\frac{\partial \pi^{'}}{\partial x} + {\theta_v}^{'}\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x} + {\theta_v}^{'}\frac{\partial \pi^{'}}{\partial x}\right) + Turb.u
$$

上式において移流項以外の 2 次の微小項を消去し, さらに基本場は x 方向には変化しないことを利用すると, 以下の擾乱成分の式が得られる.

$$
\frac{\partial u^{'}}{\partial t} \;=\; -\left(u^{'}\frac{\partial u^{'}}{\partial x} + w^{'}\frac{\partial u^{'}}{\partial z}\right) - c_{p_d}\bar{\theta}_v\frac{\partial \pi^{'}}{\partial x} + Turb.u
$$

$$= -\left(u^{'}\frac{\partial u^{'}}{\partial x} + w^{'}\frac{\partial u^{'}}{\partial z}\right) - c_{p_d}\left(\frac{\bar{\theta}}{\bar{f}}\right)\frac{\partial \pi^{'}}{\partial x} + Turb.u \qquad (A.45)$$

ここで $\bar{f}$ は,

$$\bar{f} = \left(1 - \frac{\sum \bar{q_v}/M_v}{1/M_d + \sum \bar{q_v}/M_v}\right)(1 + \sum \bar{q_v}) \qquad (A.46)$$

である.

A.2.3 鉛直方向の運動方程式の線形化

鉛直方向の運動方程式を基本場と擾乱場に分離する.

$$\frac{\partial w^{'}}{\partial t} = -\left(u^{'}\frac{\partial w^{'}}{\partial x} + w^{'}\frac{\partial w^{'}}{\partial z}\right) - c_{p_d}\left(\bar{\theta_v}\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} + \bar{\theta_v}\frac{\partial \pi^{'}}{\partial z} + {\theta_v}^{'}\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} + {\theta_v}^{'}\frac{\partial \pi^{'}}{\partial z}\right) - g + Turb.w$$

上式において移流項以外の 2 次の微小項を消去すると以下となる.

$$\frac{\partial w^{'}}{\partial t} = -\left(u^{'}\frac{\partial w^{'}}{\partial x} + w^{'}\frac{\partial w^{'}}{\partial z}\right) - c_{p_d}\left(\bar{\theta_v}\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} + \bar{\theta_v}\frac{\partial \pi^{'}}{\partial z} + {\theta_v}^{'}\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z}\right) - g + Turb.w.$$

さらに静水圧の式を利用すると以下となる.

$$\begin{aligned}\frac{\partial w^{'}}{\partial t} &= -\left(u^{'}\frac{\partial w^{'}}{\partial x} + w^{'}\frac{\partial w^{'}}{\partial z}\right) + c_{p_d}\bar{\theta_v}\left(\frac{g}{c_{p_d}\bar{\theta_v}}\right) - c_{p_d}\bar{\theta_v}\frac{\partial \pi^{'}}{\partial x} + c_{p_d}{\theta_v}^{'}\left(\frac{g}{c_{p_d}\bar{\theta_v}}\right) - g + Turb.w \\ &= -\left(u^{'}\frac{\partial w^{'}}{\partial x} + w^{'}\frac{\partial w^{'}}{\partial z}\right) - c_{p_d}\bar{\theta_v}\frac{\partial \pi^{'}}{\partial x} + \frac{{\theta_v}^{'}}{\bar{\theta_v}}g + Turb.w\end{aligned}$$

ここで ${\theta_v}^{'}$ は,

$$\begin{aligned}{\theta_v}^{'} &= \frac{1}{f}\left\{\theta^{'} - \sum\frac{\theta}{f}\frac{\partial f}{\partial q_v}q_v^{'} - \sum\frac{\theta}{f}\frac{\partial f}{\partial q_c}q_c^{'} - \sum\frac{\theta}{f}\frac{\partial f}{\partial q_r}q_r^{'}\right\} \\ &= \frac{1}{f}\left\{\frac{\theta^{'}}{\theta} - \sum\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial q_v}q_v^{'} - \sum\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial q_c}q_c^{'} - \sum\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial q_r}q_r^{'}\right\} \qquad (A.47)\end{aligned}$$

であり, (A.47) 式の第 2 項を計算すると,

$$\begin{aligned}\sum\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial q_v} &= \frac{1}{\frac{1/M_d}{1/M_d + \sum q_v/M_v}(1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r)}\frac{\partial \frac{1/M_d}{1/M_d + \sum q_v/M_v}(1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r)}{\partial q_v} \\ &= \frac{1}{\frac{1/M_d}{1/M_d + \sum q_v/M_v}(1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r)} \\ &\quad \left[\frac{1/M_d}{1/M_d + \sum q_v/M_v} - \left\{\frac{\sum 1/M_d M_v}{(1/M_d + \sum q_v/M_v)^2}(1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r)\right\}\right] \\ &= \frac{1}{1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r} - \frac{\sum 1/M_v}{1/M_d + \sum q_v/M_v}\end{aligned}$$

であり, (A.47) 式の第 3 項を計算すると,

$$
\begin{aligned}
\sum \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial q_c} &= \frac{1}{\frac{1/M_d}{1/M_d+\sum q_v/M_v}(1+\sum q_v+\sum q_c+\sum q_r)} \frac{\partial \frac{1/M_d}{1/M_d+\sum q_v/M_v}(1+\sum q_v+\sum q_c+\sum q_r)}{\partial q_c} \\
&= \frac{1}{1+\sum q_v+\sum q_c+\sum q_r}
\end{aligned}
$$

であり, (A.47) 式の第 4 項を計算すると,

$$
\begin{aligned}
\sum \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial q_r} &= \frac{1}{\frac{1/M_d}{1/M_d+\sum q_v/M_v}(1+\sum q_v+\sum q_c+\sum q_r)} \frac{\partial \frac{1/M_d}{1/M_d+\sum q_v/M_v}(1+\sum q_v+\sum q_c+\sum q_r)}{\partial q_r} \\
&= \frac{1}{1+\sum q_v+\sum q_c+\sum q_r}
\end{aligned}
$$

となるので,

$$
{\theta_v}' = \frac{1}{f}\left\{\frac{\theta'}{\theta} + \frac{\sum q_v'/M_v}{1/M_d+\sum q_v/M_v} - \frac{\sum q_v'+\sum q_c'+\sum q_r'}{1+\sum q_v+\sum q_c+\sum q_r}\right\} \tag{A.48}
$$

である. ここで擾乱成分は平均成分に比べて十分に小さいので, 全量を平均成分に置き換えることで,

$$
{\theta_v}' = \frac{\bar{\theta}}{\bar{f}}\left\{\frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \frac{\sum q_v'/M_v}{1/M_d+\sum \bar{q_v}/M_v} - \frac{\sum q_v'+\sum q_c'+\sum q_r'}{1+\sum \bar{q_v}}\right\} \tag{A.49}
$$

となる. これを用いると, 擾乱成分の速度 w の式は以下のように書ける.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w'}{\partial t} &= -\left(u'\frac{\partial w'}{\partial x} + w'\frac{\partial w'}{\partial z}\right) - c_{p_d}\bar{\theta_v}\frac{\partial \pi'}{\partial x} \\
&\quad + \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \frac{\sum q_v'/M_v}{1/M_d+\sum \bar{q_v}/M_v} - \frac{\sum q_v'+\sum q_c'+\sum q_r'}{1+\sum \bar{q_v}}\right) g + Turb.w
\end{aligned} \tag{A.50}
$$

A.2.4 圧力方程式の線形化

Klemp and Wilhelmson (1978) では, 非断熱的な加熱による熱膨張と凝縮に伴う圧力変化を無視し,

$$
\frac{d\pi}{dt} = -\frac{{C_s}^2}{c_{p_d}(\theta/f)}\nabla\cdot\boldsymbol{u}
$$

として定式化した. 本モデルで考える系では, 凝縮成分が十分に小さいので, この近似を用いることとした.

圧力方程式に関して, 平均成分と擾乱成分に分ける. ただし, 擾乱成分は平均成分よりも十分小さいという仮定を用い, $1/\theta = 1/\bar{\theta}$, $1/f = 1/\bar{f}$ とする.

$$\frac{\partial \bar{\pi} + \pi^{'}}{\partial t} + u^{'}\frac{\partial \bar{\pi} + \pi^{'}}{\partial x} + w^{'}\frac{\partial \bar{\pi} + \pi^{'}}{\partial z} = -\frac{\overline{{C_s}^2}}{c_{p_d}(\bar{\theta}/\bar{f})}\nabla\cdot\boldsymbol{u'}$$

上式では ${C_s}^2$ を平均成分と擾乱成分に分離して 2 次の微小項を無視すると, $\overline{{C_s}^2}$ と等しくなることを利用している.

$$\begin{aligned}
{C_s}^2 &= \frac{c_{p_d}}{c_{vd}}R_d(\bar{\pi} + \pi^{'})\left(\frac{(\bar{\theta} + \theta^{'})}{\bar{f}}\right) \\
&\approx \frac{c_{p_d}}{c_{vd}}R_d\left(\bar{\pi}\frac{\bar{\theta}}{\bar{f}} + \bar{\pi}\frac{\theta^{'}}{\bar{f}} + \pi^{'}\frac{\bar{\theta}}{\bar{f}}\right) \\
&= \frac{c_{p_d}}{c_{vd}}R_d\bar{\pi}\frac{\bar{\theta}}{\bar{f}}\left(1 + \frac{\theta^{'}}{\bar{\theta}} + \frac{\pi^{'}}{\bar{\pi}}\right) \\
&\approx \frac{c_{p_d}}{c_{vd}}R_d\bar{\pi}\frac{\bar{\theta}}{\bar{f}} \equiv \overline{{C_s}^2}
\end{aligned} \tag{A.51}$$

ただし $\theta^{'}/\bar{\theta} \ll 1$, $\pi^{'}/\bar{\pi} \ll 1$ であることを用いた. 平均成分は z にのみ依存することを利用し, また 2 次の微小項を無視する.

$$\frac{\partial \pi^{'}}{\partial t} = -w^{'}\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} - \frac{\overline{{C_s}^2}}{c_{p_d}(\bar{\theta}/\bar{f})}\nabla\cdot\boldsymbol{u'}$$

さらに π を理想気体の状態方程式で変形してまとめると, 圧力の擾乱成分の時間発展方程式が得られる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi^{'}}{\partial t} &= -w^{'}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\bar{\rho}R_d(\bar{\theta}/\bar{f})}{p_0}\right)^{R_d/c_{vd}} - \frac{\overline{{C_s}^2}}{c_{p_d}(\bar{\theta}/\bar{f})}\left(\frac{\partial u^{'}}{\partial x} + \frac{\partial w^{'}}{\partial z}\right) \\
&= -w^{'}\frac{R_d}{c_{vd}}\bar{\pi}\frac{1}{\left(\frac{\bar{\rho}R_d(\bar{\theta}/\bar{f})}{p_0}\right)}\frac{R_d}{p_0}\frac{\partial \bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})}{\partial z} - \frac{\overline{{C_s}^2}}{c_{p_d}(\bar{\theta}/\bar{f})}\left(\frac{\partial u^{'}}{\partial x} + \frac{\partial w^{'}}{\partial z}\right) \\
&= -\frac{\overline{{C_s}^2}}{c_{p_d}\bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})^2}\left\{w^{'}\frac{\partial \bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})}{\partial z} + \bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})\left(\frac{\partial u^{'}}{\partial x} + \frac{\partial w^{'}}{\partial z}\right)\right\} \\
&= -\frac{\overline{{C_s}^2}}{c_{p_d}\bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})^2}\nabla\cdot\left\{\bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})\boldsymbol{u'}\right\}
\end{aligned}$$

以上より,

$$\frac{\partial \pi^{'}}{\partial t} = -\frac{\overline{{C_s}^2}}{c_{p_d}\bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})^2}\nabla\cdot\left\{\bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})\boldsymbol{u'}\right\} \tag{A.52}$$

である.

A.2.5 熱の式の線形化

熱の式を平均成分と擾乱成分に分離する.

$$\frac{\partial(\bar{\theta}+\theta')}{\partial t} = -u'\frac{\partial(\bar{\theta}+\theta')}{\partial x} - w'\frac{\partial(\bar{\theta}+\theta')}{\partial x} + Q + Turb.(\bar{\theta}+\theta')$$

ここで平均場の量は z の関数であることを用いると,

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} = -\left(u'\frac{\partial \theta'}{\partial x} + w'\frac{\partial \theta'}{\partial x}\right) - w'\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + Q + Turb.\bar{\theta} + Turb.\theta' \quad \text{(A.53)}$$

となる.

A.2.6 混合比の保存式の線形化

凝縮成分の混合比の保存式についても, 変数を平均成分と擾乱成分に分離する. 熱の式と同様に, 以下のように書ける. 但し, 生成項, 落下項は擾乱成分のみ存在すると仮定する. この仮定は平均場では凝縮は生じていないと考えることに等しい.

$$\frac{\partial q_v'}{\partial t} = -\left(u'\frac{\partial q_v'}{\partial x} + w'\frac{\partial q_v'}{\partial x}\right) - w'\frac{\partial \bar{q_v}}{\partial x} + Src.q_v' + Turb.\bar{q_v} + Turb.q_v', \quad \text{(A.54)}$$

$$\frac{\partial q_c'}{\partial t} = -\left(u'\frac{\partial q_c'}{\partial x} + w'\frac{\partial q_c'}{\partial x}\right) + Src.q_c' + Turb.q_c', \quad \text{(A.55)}$$

$$\frac{\partial q_r'}{\partial t} = -\left(u'\frac{\partial q_r'}{\partial x} + w'\frac{\partial q_r'}{\partial x}\right) + Src.q_r' + Fall.q_r' + Turb.q_r' \quad \text{(A.56)}$$

但し雲水量と雨水量は擾乱成分のみの量である.

A.3 まとめ

準圧縮方程式系は以下のようにまとめられる. ただし, 擾乱を示す $'$ は除いた.

運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) - c_{p_d}\bar{\theta}_v\frac{\partial \pi}{\partial x} + Turb.u \quad \text{(A.57)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) - c_{p_d}\bar{\theta}_v\frac{\partial \pi}{\partial x} + Turb.w \\ &\quad + \left(\frac{\theta}{\bar{\theta}} + \frac{\sum q_v/M_v}{1/M_d + \sum \bar{q_v}/M_v} - \frac{\sum q_v + \sum q_c + \sum q_r}{1+\sum \bar{q_v}}\right) g \quad \text{(A.58)}\end{aligned}$$

圧力方程式

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = -\frac{\overline{C_s}^2}{c_{p_d}\bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})^2}\nabla\cdot\left\{\bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})\boldsymbol{u}\right\} \tag{A.59}$$

熱の式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\left(u\frac{\partial \theta}{\partial x} + w\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) - w\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + Q + Turb.\bar{\theta} + Turb.\theta \tag{A.60}$$

凝縮成分の混合比の保存式

$$\frac{\partial q_v}{\partial t} = -\left(u\frac{\partial q_v}{\partial x} + w\frac{\partial q_v}{\partial x}\right) - w\frac{\partial \bar{q_v}}{\partial x} + Src.q_v + Turb.\bar{q_v} + Turb.q_v, \tag{A.61}$$

$$\frac{\partial q_c}{\partial t} = -\left(u\frac{\partial q_c}{\partial x} + w\frac{\partial q_c}{\partial x}\right) + Src.q_c + Turb.q_c, \tag{A.62}$$

$$\frac{\partial q_r}{\partial t} = -\left(u\frac{\partial q_r}{\partial x} + w\frac{\partial q_r}{\partial x}\right) + Src.q_r + Fall.q_r + Turb.q_r \tag{A.63}$$

付 録B　乱流パラメタリゼーション

B.1　サブグリッドスケールの運動エネルギー方程式

Klemp and Wilhelmson (1978) および CReSS で用いられている 1.5 次のクロージャーを用いる. 1.5 次のクロージャーでは, 乱流運動エネルギーの時間発展方程式を,

$$\frac{dE}{dt} = B + S + D_E - \left(\frac{C_\varepsilon}{l}\right) E^{\frac{3}{2}}. \tag{B.1}$$

とする. 但し l は混合距離であり $l = (\Delta x \Delta z)^{1/2}$ とする. B と S はそれぞれ浮力と流れの変形速度による乱流エネルギー生成項, D_E は乱流エネルギー拡散項, 第 4 項は乱流エネルギーの消散項であり,

$$\begin{aligned} B &= \frac{g_j}{\overline{\theta}}\overline{u_j'\theta'}, \\ S &= -\overline{(u_i'u_j')}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\ D_E &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(K_m \frac{\partial E}{\partial x_j}\right) \end{aligned} \tag{B.2}$$

である. 1.5 次のクロージャーでは, レイノルズ応力を以下のように定義する.

$$\overline{(u_i'u_j')} = -K_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{2}{3}\delta_{ij}E \tag{B.3}$$

$$\overline{u_j'\theta} = K_h \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \tag{B.4}$$

ここで K_m は運動量に対する渦粘性係数であり, E はサブグリッドスケールの乱流運動エネルギー, K_h は渦拡散係数である. K_m, K_h は E を用いて以下のように与えられる.

$$K_m = C_m E^{\frac{1}{2}} l, \tag{B.5}$$

$$K_h = 3K_m. \tag{B.6}$$

(B.1) 式の各項を書き下す. 浮力による乱流エネルギー生成項は,

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{g_j}{\overline{\theta}}\overline{u'_j\theta'}, \\
&= -\frac{g}{\overline{\theta}}\overline{w'\theta'}, \\
&= -\frac{g}{\overline{\theta}}\left(K_h\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)
\end{aligned}
\tag{B.7}
$$

である. 次に流れの変形速度による乱流エネルギー生成項 S は,

$$
\begin{aligned}
S &= -\overline{(u'_i u'_j)}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\
&= -\left\{-K_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{2}{3}\delta_{ij}E\right\}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\
&= \left\{K_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\delta_{ij}E\right\}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\
&= \left\{K_m\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}\delta_{1j}E\right\}\frac{\partial u}{\partial x_j} \\
&\quad +\left\{K_m\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial z}\right)-\frac{2}{3}\delta_{3j}E\right\}\frac{\partial w}{\partial x_j}, \\
&= \left\{2K_m\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}E\right\}\frac{\partial u}{\partial x}+K_m\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z} \\
&\quad +K_m\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial x}+\left\{2K_m\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{2}{3}E\right\}\frac{\partial w}{\partial z}, \\
&= 2K_m\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\}+K_m\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\
&\quad -\frac{2}{3}E\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{aligned}
\tag{B.8}
$$

である. 乱流エネルギー拡散項 D_E は,

$$
\begin{aligned}
D_E &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(K_m\frac{\partial E}{\partial x_j}\right), \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(K_m\frac{\partial E}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(K_m\frac{\partial E}{\partial x}\right)
\end{aligned}
\tag{B.9}
$$

である. 以上の (B.7), (B.8), (B.9) 式を (B.1) 式に代入することで以下の式を得る.

$$
\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= -\frac{g}{\overline{\theta}}\left(K_h\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) \\
&\quad +2K_m\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\}+K_m\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\frac{2}{3}E\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\partial}{\partial x}\left(K_m\frac{\partial E}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(K_m\frac{\partial E}{\partial x}\right)\\
&-\left(\frac{C_\varepsilon}{l}\right)E^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
\tag{B.10}
$$

さらに (B.10) 式を (B.5) 式を用いて K_m に関する式に変形する. 右辺の乱流エネルギー拡散項を書き下すと,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(K_m\frac{\partial E}{\partial x}\right) &+ \frac{\partial}{\partial z}\left(K_m\frac{\partial E}{\partial z}\right)\\
&= \frac{1}{C_m^2 l^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(K_m\frac{\partial K_m^2}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_m\frac{\partial K_m^2}{\partial z}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{C_m^2 l^2}\left\{K_m\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2}+\frac{\partial K_m}{\partial x}\frac{\partial K_m^2}{\partial x}+K_m\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2}+\frac{\partial K_m}{\partial z}\frac{\partial K_m^2}{\partial z}\right\}\\
&= \frac{K_m}{C_m^2 l^2}\left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2}\right)+\frac{2K_m}{C_m^2 l^2}\left\{\left(\frac{\partial K_m}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial K_m}{\partial z}\right)^2\right\}
\end{aligned}
\tag{B.11}
$$

となるので, (B.10) 式を変形すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{2K_m}{C_m^2 l^2}\frac{dK_m}{dt} &= -\frac{g}{\overline{\theta}}\left(K_h\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)+2K_m\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\}\\
&\quad +K_m\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2-\frac{2}{3}\frac{K_m^2}{C_m^2 l^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&\quad +\frac{K_m}{C_m^2 l^2}\left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2}\right)+\frac{2K_m}{C_m^2 l^2}\left\{\left(\frac{\partial K_m}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial K_m}{\partial z}\right)^2\right\}\\
&\quad -\frac{C_\varepsilon}{C_m^3 l^4}K_m^3\\
\frac{\partial K_m}{\partial t} &= -\left(u\frac{\partial K_m}{\partial x}+w\frac{\partial K_m}{\partial z}\right)-\frac{gC_m^2 l^2}{2\overline{\theta}}\frac{K_h}{K_m}\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)\\
&\quad +\left(C_m^2 l^2\right)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\}\\
&\quad +\frac{C_m^2 l^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2-\frac{K_m}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&\quad +\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2}\right)+\left(\frac{\partial K_m}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial K_m}{\partial z}\right)^2\\
&\quad -\frac{C_\varepsilon}{2C_m l^2}K_m^2
\end{aligned}
$$

となり, ここで $C_m = C_\varepsilon = 0.2$ と $K_h = 3K_m$ という関係を用いると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial K_m}{\partial t} \quad = \quad & -\left(u\frac{\partial K_m}{\partial x} + w\frac{\partial K_m}{\partial z} \right) - \frac{3gC_m^2 l^2}{2\overline{\theta}}\left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \\
& + \left(C_m^2 l^2 \right)\left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
& + \frac{C_m^2 l^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{K_m}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
& + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial K_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial z} \right)^2 \\
& - \frac{1}{2l^2} K_m^2 \qquad \text{(B.12)}
\end{aligned}
$$

となる.

付 録C　変数リスト

C_ε : 乱流拡散係数のための定数
C_m : 乱流拡散係数のための定数
c : 音波
$\bar{c}$: 基本場の音波
c_p : 定圧比熱
c_v : 定積比熱
D_{u_i} : x_i 成分の運動方程式におけるサブグリッドスケールの乱流拡散項
D_θ : 熱力学の式におけるサブグリッドスケールの乱流拡散項
E : サブグリッドスケールの運動エネルギー
f : コリオリパラメータ
g : 重力加速度
K_h : 熱に対する乱流拡散係数
K_m : 運動量に対する乱流拡散係数
l : 混合距離
p : 圧力
$\overline{p}$: 基本場の圧力
p_0 : 地表面での基準圧力
Π : エクスナー関数
$\overline{\Pi}$: 基本場のエクスナー関数
π : エクスナー関数の偏差
R_d : 乾燥空気の気体定数
$\overline{\rho}$: 基本場の密度
ρ_0 : 地表面での密度
t : 時間座標
$\overline{T}$: 基本場の温度
$\overline{\theta}$: 基本場の温位
θ : 温位偏差
u_i : 速度, $i = 1, 3$ $(u_1, u_3) = (u, w)$
x_i : 空間 z 座標, $i = 1, 3$ $(x_1, x_3) = (x, z)$

謝辞

本資源は, 地球流体電脳倶楽部のインターネット上での学術知識の集積と活用の実験の一環として

http://www.gfd-dennou.org/arch/deepconv/

において公開されているものである.