湿潤大気における 2 次元非静力学モデルの定式化

山下 達也, 杉山 耕一朗, 石渡 正樹

2009 年 12 月 02 日

目 次

第 1 章 基礎方程式系 2
1.1 運動方程式・圧力方程式・熱の式・比湿の保存式 2
1.2 雲微物理過程のパラメタリゼーション 6
1.2.1 Kessler(1969) の雲微物理パラメタリゼーション 6
1.2.2 Tobie et al.(2003) の雲微物理パラメタリゼーション 8
1.3 放射加熱項の表現 11
1.4 乱流混合のパラメタリゼーション 11
1.4.1 運動方程式中の拡散項 11
1.4.2 熱力学の式の拡散項 11
1.4.3 乱流運動エネルギーの式 12
1.4.4 散逸加熱項の表現 12

第 2 章 参考文献 13

付 録 A 準圧縮方程式系の導出 16
A.1 基礎方程式 16
A.1.1 基礎方程式系 16
A.1.2 温位の式の導出 17
A.1.3 圧力方程式の導出 18
A.1.4 運動方程式の書き換え 20
A.1.5 比湿の時間発展方程式の導出 21
A.1.6 温位 θ, エクスナー関数 Π, 風速 u, w を予報変数とする場合 22
A.2 準圧縮方程式系の導出 23
A.2.1 基本場と擾乱場の分離 23
A.2.2 水平方向の運動方程式の線形化 24
A.2.3 鉛直方向の運動方程式の線形化 25
A.2.4 圧力方程式の線形化 26
A.2.5 熱の式の線形化 28
A.2.6 比湿の保存式の線形化 28
A.2.7 エネルギー方程式の導出 29
A.3 まとめ 32

付 録 B 乱流パラメタリゼーション **34**
B.1 乱流パラメタリゼーション 34
B.1.1 乱流運動エネルギー方程式の導出 35
B.1.2 2 次元の場合の表現 39

付 録 C 雲微物理過程 **41**
C.1 雨粒の終端速度 41
C.2 雲水の衝突併合 42
C.3 平均終端速度 43
C.4 雨水の蒸発 44

付 録 D 変数リスト **47**

謝辞

第1章　基礎方程式系

本数値モデルは水平・鉛直の 2 次元モデルである. 水平方向の座標変数を x, 鉛直方向の座標変数を z と表し, 時間方向の変数は t と表す.

1.1　運動方程式・圧力方程式・熱の式・比湿の保存式

力学的な枠組みは, 準圧縮方程式系 (Klemp and Wilhelmson,1978) を用いる. この方程式系では, 予報変数を水平一様な基本場とそこからのずれに分離し, 方程式の線形化を行っている. 基本場は静水圧平衡の状態にあるものと仮定する. またガスは理想気体とみなせるものとする. 準圧縮方程式系の導出は付録 A に示す. 方程式中の変数は付録 D に示す.

Klemp and Wilhelmson(1978) では凝結性ガスや凝結物を混合比で表現しているのに対し, 本モデルでは比湿で表現している. 但し本ドキュメントにおける比湿とは, 通常の気象学で用いられている比湿を拡張し, 全密度に対する任意のガスや凝結物の密度の比を指すものとする. 主成分が凝結する惑星大気を扱う際, 非凝結ガスの密度を分母とする混合比を用いると数値計算上の困難が生じる可能性がある. このことは様々な惑星大気を扱うことを目的とする本モデルにとって大きな問題となりうる. そこで本モデルでは微量成分が凝結する系だけでなく, 主成分が凝結する系での計算も行なえるよう, 凝結ガスや凝結物を比湿で表現することにする.

本モデルでは非凝結性ガス, 凝結性ガス, 雲水, 雨水 (氷) の 4 つのカテゴリーを想定している.

記号	意味	内容
q_d	非凝結性ガスの比湿	気体の非凝結成分
q_v	凝結性ガスの比湿	気体の凝結成分
q_c	雲水比湿	落下速度がゼロである粒子で, 大気中の雲粒に対応する. 通常 100 μm 以下の微小な流体粒子である.
q_r	雨水比湿	有意な落下速度を持つ粒子で, 大気中の雨粒または氷粒に対応する.

ρ_d, ρ_v, ρ_c, ρ_r, ρ をそれぞれ非凝結成分の密度, 凝結成分の密度, 雲水の密度, 雨水の密度, 全密度とすると, 各カテゴリーの比湿は以下のように定義される.

$$q_d = \frac{\rho_d}{\rho}, \tag{1.1}$$

$$q_v = \frac{\rho_v}{\rho}, \tag{1.2}$$

$$q_c = \frac{\rho_c}{\rho}, \tag{1.3}$$

$$q_r = \frac{\rho_r}{\rho}. \tag{1.4}$$

各変数を基本場と擾乱場に分け, 基本場の風速 w, 雲水比湿と雨水比湿がゼロであるとみなす. また基本場において, 静水圧平衡

$$\frac{\partial \overline{\Pi}}{\partial z} = -\frac{g}{\langle c_p \rangle \overline{\theta_v}} \tag{1.5}$$

が成り立つと仮定する. このとき各変数は以下のように書ける.

$$\begin{aligned}
u(x,z,t) &= \overline{u}(z) + u'(x,z,t), \\
w(x,z,t) &= w'(x,z,t), \\
\theta(x,z,t) &= \overline{\theta}(z) + \theta'(x,z,t), \\
\Pi(x,z,t) &= \overline{\Pi}(z) + \Pi'(x,z,t), \\
q_d(x,z,t) &= \overline{q_d}(z) + {q_d}'(x,z,t), \\
q_v(x,z,t) &= \overline{q_v}(z) + {q_v}'(x,z,t), \\
q_c(x,z,t) &= {q_c}'(x,z,t), \\
q_r(x,z,t) &= {q_r}'(x,z,t).
\end{aligned}$$

以下に準圧縮方程式系の時間発展方程式を一覧する. 本モデルにおける予報変数は u', w', θ', Π', q'_a $(a = v, c, r)$ である. 密度の式では乾燥成分と湿潤成分の分子

量の差を考慮するが, 熱の式では考慮しない. 凝結量は気相質量に比べて十分少ないと仮定する. 比熱, 気体定数が空間的, 時間的に一様であると仮定している. 従って凝結性ガスが非凝結性に比べて圧倒的に多い系や, 非凝結性ガスが凝結性ガスに比べて圧倒的に多い系以外では, 精度良い計算が保証されない.

運動方程式

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -u'\frac{\partial u'}{\partial x} - w'\frac{\partial u'}{\partial z} - \overline{u}\frac{\partial u'}{\partial x} - w'\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \langle c_p\rangle\overline{\theta_v}\frac{\partial \Pi'}{\partial x} + D_u \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial w'}{\partial x} - w'\frac{\partial w'}{\partial z} - \overline{u}\frac{\partial w'}{\partial x} - \langle c_p\rangle\overline{\theta_v}\frac{\partial \Pi'}{\partial z} \\ &\quad +\frac{\theta'}{\bar{\theta}}g + \frac{q_d'\langle M\rangle/M_d + \sum q_v'\langle M\rangle/M_v}{\overline{q_d}\langle M\rangle/M_d + \sum \overline{q_v}\langle M\rangle/M_v}g + D_{w'}\end{aligned} \tag{1.7}$$

圧力方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi'}{\partial t} &= -\overline{u}\frac{\partial \Pi'}{\partial x} - \frac{\overline{\langle c_s\rangle^2}}{\langle c_p\rangle\bar{\rho}\bar{\theta_v}^2}\nabla\cdot\left(\bar{\rho}\bar{\theta}_v\boldsymbol{u}'\right) \\ &\quad +\frac{\overline{\langle c_s\rangle^2}}{\langle c_p\rangle\bar{\theta_v}}\left[\frac{1}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r') + \frac{1}{\bar{\theta}}\left\{\frac{1}{\overline{\Pi}}(Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}) + D_{\theta'}\right\}\right. \\ &\quad +\frac{1}{\bar{q_d}\langle M\rangle/M_d + \sum \bar{q_v}\langle M\rangle/M_v}\left\{\frac{\langle M\rangle}{M_d}\left(-\frac{\bar{q_d}}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r') + D_{q_d'}\right)\right. \\ &\quad \left.\left. +\sum\frac{\langle M\rangle}{M_v}\left(-\frac{\bar{q_v}}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r') + M_{src}(q_v') + D_{q_v'}\right)\right\}\right]\end{aligned} \tag{1.8}$$

熱の式

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial \theta'}{\partial x} - w'\frac{\partial \theta'}{\partial z} - \overline{u}\frac{\partial \theta'}{\partial x} - w'\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} + \frac{1}{\overline{\Pi}}(Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}) \\ &\quad +D_{\overline{\theta}} + D_{\theta'}\end{aligned} \tag{1.9}$$

比湿の保存式

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_a'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q_a'}{\partial x} - w'\frac{\partial q_a'}{\partial z} - \overline{u}\frac{\partial q_a'}{\partial x} - w'\frac{\partial \overline{q_a}}{\partial z} \\ &\quad +\frac{1}{\bar{\rho}}M_{fall}(\rho_a') + \frac{1}{\bar{\rho}}M_{src}(\rho_a') - \frac{\overline{q_a}}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r') + D_{\overline{q_a}} + D_{q_a'}.\end{aligned} \tag{1.10}$$

ただし, $^{-}$ の付いた変数は水平一様な基本場であることを示し, $'$ の付いた変数は基本場からのずれを表す. 比湿に関して

$$q_d + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r = 1 \tag{1.11}$$

の関係が成り立つので, 非凝結性ガスの比湿については診断的に求めることとする. このとき (1.10) は $a = v, c, r$ の 3 相に関する式となる. $\langle R \rangle$, $\langle c_p \rangle$, $\langle M \rangle$ はそれぞれ平均気体定数, 平均定圧比熱, 平均分子量であり, それぞれ

$$\langle R \rangle \equiv \frac{\rho_d R_d + \sum \rho_v R_v}{\rho_d + \sum \rho_v}, \tag{1.12}$$

$$\langle c_p \rangle \equiv \frac{\rho_d c_{pd} + \sum \rho_v c_{pv}}{\rho_d + \sum \rho_v}, \tag{1.13}$$

$$\langle R \rangle \equiv \frac{\rho_d + \sum \rho_v}{\rho_d / M_d + \sum \rho_v / M_v}, \tag{1.14}$$

と定義される. 本モデルでは $\langle R \rangle$, $\langle c_p \rangle$, $\langle M \rangle$ が一定値であるとみなす[1]. Q_{cond}, Q_{rad}, Q_{dis} はそれぞれ凝結加熱項, 放射加熱項, 散逸加熱項を表し, M_{src}, M_{fall} はそれぞれ生成項, 落下項を表す. M_{src}, M_{fall}, Q_{cond} の定式化については 1.2 節で詳述する. Q_{rad} の定式化については 1.3 節で詳述する. Q_{dis}, D_* の定式化については 1.4 節で詳述する.

エクスナー関数 Π

$$\Pi \equiv \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\langle R \rangle / \langle c_p \rangle} \tag{1.15}$$

温位 θ

$$\theta \equiv T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\langle R \rangle / \langle c_p \rangle} = \frac{T}{\Pi} \tag{1.16}$$

仮温度 T_v

$$T_v \equiv \left(\frac{\langle M \rangle}{M_d} q_d + \sum \frac{\langle M \rangle}{M_v} q_v \right) T \tag{1.17}$$

仮温位 θ_v

$$\theta_v \equiv \frac{T_v}{\Pi} = \left(\frac{\langle M \rangle}{M_d} q_d + \sum \frac{\langle M \rangle}{M_v} q_v \right) \theta \tag{1.18}$$

状態方程式

$$\rho = \frac{p}{\langle R \rangle \Pi \theta_v} = \frac{p_0 \Pi^{\langle c_v \rangle / \langle R \rangle}}{\langle R \rangle \theta_v} \tag{1.19}$$

音波速度の式

$$\langle c_s \rangle^2 = \frac{\langle c_p \rangle \langle R \rangle \Pi \theta_v}{\langle c_v \rangle} \tag{1.20}$$

[1] $\langle R \rangle$, $\langle c_p \rangle$, $\langle M \rangle$ が大きく変化する系では物理的に意味のある計算が保証されない.

1.2 雲微物理過程のパラメタリゼーション

本モデルでは Kessler(1969) のパラメタリゼーションと Tobie et al.(2003) に基づくパラメタリゼーションの 2 種類が用意されている[2].

1.2.1 Kessler(1969) の雲微物理パラメタリゼーション

Kessler(1969) のパラメタリゼーションでは 4 つのカテゴリーを想定し, 微物理素過程として以下を考慮する. ただし, これらの量は全て正の値として定義され, 水蒸気が直接雨水に凝結する過程は無視されている.

記号	内容
CN_{vc}	凝結による水蒸気から雲水への変換 (condensation)
EV_{cv}	蒸発による雲水から水蒸気への変換 (evaporation)
EV_{rv}	蒸発による雨水から水蒸気への変換 (evaporation)
CN_{cr}	併合成長による雲水から雨水への変換. 併合や水蒸気拡散により, 雲粒子が雨粒の大きさにまで成長する (autocondensation)
CL_{cr}	衝突併合による雲水から雨水への変換. 大水滴が小水滴を衝突併合する (collection)
PR_r	雨水の重力落下に伴う雨水混合比の変化率 (precipitation)

この微物理素過程を用いると, 生成項, 落下項, 凝結加熱項は以下のように表される.

$$M_{src}(\rho'_v) = -\overline{\rho}(CN_{vc} - EV_{cv} - EV_{rv}), \tag{1.21}$$

$$M_{src}(\rho'_c) = \overline{\rho}(CN_{vc} - EV_{cv} - CN_{cr} - CL_{cr}), \tag{1.22}$$

$$M_{src}(\rho'_r) = \overline{\rho}(CN_{cr} + CL_{cr} - EV_{cv}), \tag{1.23}$$

$$M_{fall}(\rho'_v) = 0, \tag{1.24}$$

$$M_{fall}(\rho'_c) = 0, \tag{1.25}$$

$$M_{fall}(\rho'_r) = PR_r, \tag{1.26}$$

$$Q_{cond} = -\frac{L_v}{\overline{\rho}\langle c_p\rangle} M_{src}(\rho'_v). \tag{1.27}$$

[2]現在, 本モデルで用意されている Tobie et al.(2003) のパラメタリゼーションは火星大気計算でのみ使用可能である.

(1.9), (1.10) を書き直すと, 以下のようになる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial \theta'}{\partial x} - w'\frac{\partial \theta'}{\partial z} - \overline{u}\frac{\partial \theta'}{\partial x} - w'\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} + \frac{L_v}{\langle c_p \rangle \overline{\Pi}}\left(CN_{vc} - EV_{cv} - EV_{rv}\right) \\
&\quad + \frac{1}{\overline{\Pi}}\left(Q_{rad} + Q_{dis}\right) + D_{\bar{\theta}} + D_{\theta'} \qquad (1.28) \\
\frac{\partial q'_v}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q'_v}{\partial x} - \overline{u}\frac{\partial q'_v}{\partial x} - w'\frac{\partial q'_v}{\partial z} - w'\frac{\partial \overline{q_v}}{\partial z} - \frac{\overline{q_v}}{\overline{\rho}}\sum PR_r \\
&\quad - \left(CN_{vc} - EV_{cv} - EV_{rv}\right) + D_{\overline{q_v}} + D_{q'_v}, \qquad (1.29) \\
\frac{\partial q'_c}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q'_c}{\partial x} - w'\frac{\partial q'_c}{\partial z} - \frac{\overline{q_c}}{\overline{\rho}}\sum PR_r \\
&\quad + CN_{vc} - EV_{cv} - CN_{cr} - CL_{cr} + D_{q'_c}, \qquad (1.30) \\
\frac{\partial q'_r}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q'_r}{\partial x} - w'\frac{\partial q'_r}{\partial z} + \frac{1}{\overline{\rho}}PR_r + CN_{cr} + CL_{cr} - EV_{rv} + D_{q'_r}. \qquad (1.31)
\end{aligned}$$

ここで, L_v は水の蒸発の潜熱 [J kg^{-1}], $\langle c_p \rangle$ は定圧比熱 [J K kg^{-1}] である.

微物理素過程は以下のように定式化する[3].

水蒸気と雲水の間の変換: $-CN_{vc} + EV_{cv}$

雲水は粒が小さく, 水蒸気との間で瞬間的に飽和調節が起こるものとする. すなわち, 移流などの項を計算した後の温度と水蒸気量が過飽和状態となっている場合には, ちょうど飽和になる量の水蒸気を凝縮させる. 一方, 移流などの項を計算した後に, 雲水が存在するにも拘わらず未飽和になっている場所では, ちょうど飽和になる量の雲水を蒸発させる.

雲水の併合成長: CN_{cr}

Kessler (1969) に従って, 以下のように与える.

$$CN_{cr} = \left(q'_c - q_{c0}\right)/\tau_{ac} \qquad (1.32)$$

ただし, q_{c0}, τ_{ac} は併合成長に関する閾値, 時間スケールであり, それぞれ 0, 100 [s] とする.

雲水の衝突併合: CL_{cr}

Kessler (1969) に従って, 以下で定式化する.

$$CL_{cr} = 10.344 g^{1/2}\left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_w}\right)^{0.375} q'_c {q'_r}^{0.875} \qquad (1.33)$$

[3]各々の微物理過程の導出については付録 C を参照されたい.

雨水の蒸発: EV_{rv}

Kessler (1969) に従って, 以下で定式化する.

$$EV_{rv} = 4.85 \times 10^{-2} \left(q_{vsw} - q'_v\right) \left(\bar{\rho} q'_r\right)^{0.65} \tag{1.34}$$

ただし q_{vsw} は飽和比湿を表す.

雨水のフラックス: PR_r

雨水の重力落下による混合比の変化率は,

$$PR_r = \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{\rho} q'_r V_{term}\right). \tag{1.35}$$

であり, 雨水の終端落下速度 V_{term} [m s^{-1}] は

$$V_{term} = 0.3224 g^{1/2} \left(\frac{\rho_w}{\bar{\rho}}\right)^{0.375} {q'_r}^{0.125} \tag{1.36}$$

で与える. ただし ρ_w は液相の密度である.

1.2.2 Tobie et al.(2003) の雲微物理パラメタリゼーション

Tobie et al.(2003) は火星大気での CO_2 の雲物理の定式化について述べている. Tobie et al.(2003) では雲水を除く 3 つのカテゴリーを考える ($q_c = 0$). 雲粒は拡散成長のみによって成長すると仮定し, 雲粒の併合成長は考慮しない. 微物理過程として以下を考慮する.

記号	内容
CN_{vr}	凝結による水蒸気から氷への変換 (condensation)
PR_r	氷粒の重力落下に伴う氷比湿の変化率 (precipitation)

この微物理素過程を用いると, 生成項, 落下項, 凝結加熱項は以下のように表される.

$$M_{src}(\rho'_v) = -\overline{\rho} CN_{vr}, \tag{1.37}$$

$$M_{src}(\rho'_r) = \overline{\rho} CN_{vr}, \tag{1.38}$$

$$M_{fall}(\rho'_v) = 0, \tag{1.39}$$

$$M_{fall}(\rho'_r) = PR_r, \tag{1.40}$$

$$Q_{cond} = -\frac{L_s}{\overline{\rho}\langle c_p \rangle} M_{src}(\rho'_v). \tag{1.41}$$

(1.9), (1.10) を書き直すと, 以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \theta'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial \theta'}{\partial x} - w'\frac{\partial \theta'}{\partial z} - \overline{u}\frac{\partial \theta'}{\partial x} - w'\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \frac{L_s}{\langle c_p\rangle \overline{\Pi}} CN_{vr} \\
&\quad + \frac{1}{\overline{\Pi}}\left(Q_{rad} + Q_{dis}\right) + D_{\bar{\theta}} + D_{\theta'} \qquad (1.42) \\
\frac{\partial q_v'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q_v'}{\partial x} - w'\frac{\partial q_v'}{\partial z} - w'\frac{\partial \overline{q_v}}{\partial z} - \frac{\overline{q_v}}{\overline{\rho}}\sum PR_r(\rho_r') \\
&\quad - CN_{vr} + D_{\overline{q_v}} + D_{q_v'}, \qquad (1.43) \\
\frac{\partial q_r'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q_r'}{\partial x} - w'\frac{\partial q_r'}{\partial z} + \frac{1}{\overline{\rho}}PR_r - CN_{vr} + D_{q_r'}. \qquad (1.44)
\end{aligned}
$$

ここで L_s は CO_2 の昇華の潜熱 [J K^{-1} kg^{-1}] である.

以下, CN_{vr} の取り扱いについて述べる. 本モデルでは単位質量の気相に含まれる凝結核の個数及び半径は空間的・時間的に一様と仮定する. また雲粒の半径は各格子内において空間的に一定であると仮定する. 更に雲粒は球形の凝結核を核として形成され, 雲粒自身も球形となると仮定する. このとき

$$
\frac{4}{3}\rho_I \pi (r_d^3 - r_{aero}^3) N = q_r' \overline{\rho} \qquad (1.45)
$$

という関係式が成り立つ. ここで ρ_I は CO_2 氷の密度, r_d は雲粒半径, r_{aero} は凝結核の半径, N は単位体積当たりの凝結核の数密度である. 本モデルでは $\rho_I = 1.565 \times 10^3$ [kg/m^3] と与え, r_{aero}, N は実験に応じて与える. 雲粒の雲粒が拡散によって成長する場合の単位時間単位体積当たりの凝結量 CN_{vr} は以下のように表される.

$$
CN_{vr} = \frac{4\pi r_d N}{\overline{\rho}(R_h + R_m)}(S - 1). \qquad (1.46)
$$

ここで R_h, R_m, S はそれぞれ熱輸送に関する定数, 質量輸送に関する定数, 飽和比であり

$$
\begin{aligned}
R_h &= \frac{L^2}{kRT^2} = \frac{L^2}{kR\theta^2\Pi^2}, \qquad (1.47) \\
R_m &= \frac{RT}{Dp_*} = \frac{R\theta\Pi}{Dp_*}, \qquad (1.48) \\
S &= \frac{p}{p_*} = \frac{{p_0}^{\frac{c_p}{R}}\Pi}{p_*} \qquad (1.49)
\end{aligned}
$$

と表される. 但し k, D, p_* はそれぞれ熱拡散係数, 分子拡散係数, CO_2 の飽和蒸気圧である. 本モデルでは Tobie et al. (2003) 同様に主成分凝結系では $R_h \gg R_m$ として

$$
CN_{vr} = \frac{4\pi r_d N}{R_h}(S - 1). \qquad (1.50)
$$

と表す. CO_2 の飽和蒸気圧については半経験式である Antoine の式

$$p_* = \exp\left(A - \frac{B}{T - C}\right) \tag{1.51}$$

を用いて定める (Antoine, 1888). ここで A, B, C は実験により定まる係数であり, CO_2 の場合 $A = 27.4$, $B = 3103$, $C = -0.16$ である (化学工学会, 1999). 火星大気環境における凝結を想定すると $O(T) \sim 150$[K] であるので, $T \gg C$ と近似して

$$p_* \approx \exp\left(A - \frac{B}{T}\right) \tag{1.52}$$

とする.

以下, 単位時間体積当たりの雲粒落下量 PR_r の取り扱いについて述べる. Tobie et al.(2003) では雲粒落下を無視しているが, 本パラメタリゼーションでは考慮する. PR_r は Kessler(1969) と同様に, 雲粒の終端速度 V_{term} での移流として表現する. 即ち

$$PR_r = \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_r V_{term}\right) \tag{1.53}$$

と表す. 終端速度 V_{term} については球形粒子に関する Stokes 則を適用して

$$V_{term} = C_{sc}\frac{2r_d^2 g \rho_I}{9\eta} \tag{1.54}$$

と表す. ここで C_{sc} は微小な粒子における Stokes 則からのずれを補正する係数 (Cunningham 補正係数) であり,

$$C_{sc} = 1 + 1.255\frac{\lambda}{r_d} \tag{1.55}$$

と表される (Cunningham, 1910). λ は CO_2 の平均自由行程であり,

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p_{CO_2}} \tag{1.56}$$

と表される. k_B は Boltzmann 定数, σ は CO_2 分子の直径, p_{CO_2} は CO_2 の分圧であり, $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ [m^2 kg s^{-2} K^{-1}], $\sigma = 3.3 \times 10^{-10}$ [m] である (Golden and Sircar, 1994). η は粘性係数であり, Sutherland の公式

$$\eta = \eta_{ref}\left(\frac{T_{ref} + C_{CO_2}}{T + C_{CO_2}}\right)\left(\frac{T}{T_{ref}}\right)^{3/2} \tag{1.57}$$

で表現する (Sutherland, 1893). η_{ref}, T_{ref}, C_{CO_2} はそれぞれ粘性係数の基準値, 温度の基準値, CO_2 に関する Sutherland 定数であり, $\eta_{ref} = 1.47 \times 10^{-5}$ [Pa · s], $T_{ref} = 293$ [K], $C_{CO_2} = 240$ [K] と与える (理科年表, 2004).

1.3　放射加熱項の表現

放射加熱項 Q_{rad} は正味の上向き放射フラックス F_{net} を用いて以下のように表される.

$$Q_{rad} = -\frac{1}{\overline{\rho}\langle c_p\rangle}\frac{dF_{net}}{dz}$$

本モデルでは F_{net} は陽に計算せず, Q_{rad} は高度のみに依存するパラメタとして与える.

1.4　乱流混合のパラメタリゼーション

1.4.1　運動方程式中の拡散項

Klemp and Wilhelmson (1978) および CReSS (坪木と榊原, 2001) と同様に, 1.5 次のクロージャーを用いることで粘性拡散項は以下のように書ける.

$$\begin{aligned} D_{u_i} &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{(u_i' u_j')} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\left[-K_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{2}{3}\delta_{ij}E_{turb}\right]. \end{aligned} \tag{1.58}$$

ここで K_m は運動量に対する乱流拡散係数であり, E_{turb} はサブグリッドスケールの乱流運動エネルギー

$$E_{turb} = \frac{1}{2}\overline{(u')^2+(w')^2} = \frac{{K_m}^2}{C_m^2 l^2} \tag{1.59}$$

である. Deardorff(1975) に従い, $C_m = 0.2$ とする.

1.4.2　熱力学の式の拡散項

Klemp and Wilhelmson (1978) および CReSS (坪木と榊原, 2001) と同様に, 1.5 次のクロージャーを用いることで温位の粘性拡散項は以下のように書ける.

$$\begin{aligned} D_{\theta} &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_j'\theta'} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(K_h\frac{\partial \theta}{\partial x_j}\right). \end{aligned} \tag{1.60}$$

ここで K_h は温位に対する乱流拡散係数である.

1.4.3 乱流運動エネルギーの式

Klemp and Wilhelmson (1978) および CReSS (坪木と榊原, 2001) と同様に, 1.5 次のクロージャーを用いることで, 乱流エネルギーの時間発展方程式は以下のように書ける.

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_{turb}}{\partial t} &= -u'\frac{\partial E_{turb}}{\partial x} - w'\frac{\partial E_{turb}}{\partial z} \\ &\quad -3\frac{gC_m l}{\overline{\theta_v}}E_{turb}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \theta_v}{\partial z} + 2C_m l E_{turb}^{\frac{1}{2}}\left\{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)^2\right\} \\ &\quad +C_m l E_{turb}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}E_{turb}\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z}\right) \\ &\quad +\frac{\partial}{\partial x}\left(C_m l E_{turb}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial E_{turb}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(C_m l E_{turb}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial E_{turb}}{\partial z}\right) - \frac{C_\varepsilon}{l}E_{turb}^{\frac{3}{2}}\end{aligned} \tag{1.61}$$

ここで $C_m = 0.2$, 混合距離 $l = (\Delta x \Delta z)^{1/2}$ とする. ただし $\Delta x, \Delta z$ はそれぞれ水平および鉛直格子間隔である. ただし,

$$\theta_v = \overline{\theta_v} + \theta_v' = \left(\frac{\langle M\rangle}{M_d}q_d + \sum\frac{\langle M\rangle}{M_v}q_v\right) \tag{1.62}$$

である.

1.4.4 散逸加熱項の表現

散逸加熱項 Q_{dis} は, 乱流運動エネルギーの散逸項をもとに, 以下のように与える.

$$Q_{dis} = \frac{1}{\langle c_p\rangle}\frac{C_\varepsilon}{l}\frac{K_m^3}{(C_m l)^3}. \tag{1.63}$$

ここで $C_\varepsilon = 0.2$, $l = (\Delta x \Delta z)^{1/2}$ である.

第2章 参考文献

Antoine, C., 1888: Tensions des vapeurs: nouvelle relation entre les tensions et les températures. Les Comptes Rendus de l′ Acadèmie des Sciences, **107**, 681 – 684

浅井 富雄, 1983: 大気対流の科学, 気象学のプロムナード 14, 東京堂出版.

Browning, K. A., 1964: Airflow and percipitation within severe local storms which travel to the right of the winds. *J. Atmos. Sci.*, **21**, 634-639

Cunningham, E., 1910: On the velocity of steady fall of spherical particles through fluid medium. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, **83**, 357 – 365

Curic, M., Janc, D., Vujovic, D., Vuckovic, V., 2003: The effects fo a river valley on an isolated cumulonimbus cloud development. *Atmos. Res.*, **66**, 123-139.

Das, P., 1969: The thermodynamic equation in cumulus dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **26**, 399-409.

Deardorff, J. W., 1975: The development of boundary-layer turbulence models for use in studying the severe storm environment. *Proc. SESAME Meeting*, Boulder, NOAA-ERL, 251-261.

Golden, T. C., Sircar, S., 1994: Gas adsorption on silicate. Journal of Colloid and Interface Science, **162**, 182 – 188

Houze, R. A., 1993: Cloud dynamics. Academic Press.

化学工学会編, 1999: 化学工学便覧, 丸善, 1339 pp

Kessler, E., 1969: On the Distribution and Continuity of Water Substance in Atmospheric Circuration. Meteor. Monogr., *Amer. Meteor.Soc.*, **32**, 84 pp.

Klemp J. B. and Robert B. Wilhelmson, 1978: The simulation of three-dimensional convective storm dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1070-1096.

Marshall, J. and W. Palmer, 1948: The distribution of raindrops with size. *J. Meteorol.*, **5**, 165–166.

Mellor, G. L., 1973: Analytic prediction of the properties of stratified planetary surface layers. *J. Atmos. Sci.*, **30**, 1061-1069.

Mellor, G., and T. Yamada, 1974: A hierarchy of turbulence closure models for atmospheric boundary layers. *J. Atmos. Sci.*, **31**, 1791-1806.

中野満寿男, 2003: 鉛直シアーが台風初期渦形成に及ぼす影響. 九州大学大学院理学府 地球惑星科学専攻 修士論文.

Ogura, Y. and M. Yoshizaki, 1988: Numerical study of orographic-convective precipitation over the eastern Arabic Sea and the Ghats Mountains during the summer monsoon. *J. Atoms. Sci.*, **45**, 2097-2122.

Ogura, Y., and T. Takahashi, 1971: Numerical simulation of the life cycle of a thunderstorm cell. *Mon. Wea. Rev.*, **99**, 895-911.

大宮司久明, 三宅裕, 吉澤徴, 1998: 乱流の数値流体力学—モデルと計算法. 東京大学出版会, 652.

斉藤和雄 編, 1999: 非静力学モデル. 気象研究ノート 第 196 号, 日本気象学会.

Saunders, P. M., 1957: The thermodynamics of saturated air: A contribution to the classical theory. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **83**, 342-350.

Schemm, C. E., and F. Lipps, 1976: Some results from a simplified three-dimensional numerical model of atmospheric turbulence. *J. Atmos. Sci.*, **33**, 1021-1041.

Skamarock, Wiliam C. and Joseph B. Klemp, 1992: The stability of time-split methods for the hydrostatic and the nonhydrostatic elastic equation. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 2109-2127.

Soong, S-T., and Y. Ogura, 1973: A comparison between axi-symmetric and slab-symmetric cumulus cloud models. *J. Atmos. Sci.*, **30**, 879-893

Sutherland, W., 1893: The viscosity of gases and molecular force. Philosophical Magazine, S. 5, **36**, 507 – 531

Tapp, M. C., and P. W. White, 1976: A nonhydrostatic mesoscale model. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **102**, 277-296.

Tobie, G., Forget, F., Lott, F., 2003: Numerical simulation of winter polar wave clouds observed by Mars Global Surveyor Mars Orbiter Laser Altimeter. Icarus, **164**, 33 – 49

坪木和久, 榊原篤志, 2001: CReSS ユーザーズガイド 第 2 版. http://www.tokyo.rist.or.jp/CReSS_Fujin/CReSS.top.html

Wilhelmson, R. B., 1977: On the thermodyanmics equation for deep convection. *Mon. Wea. Rev.*, **105**, 545-547.

Wilhelmson, R. B., and Y. Ogura, 1972: The pressure perturbation and the numerical modeling of a cloud. *J. Atmos. Sci.*, **29**, 1295-1307.

付 録A　準圧縮方程式系の導出

A.1 基礎方程式

地球大気における湿潤対流の定式化同様, 大気の乾燥成分と湿潤成分の分子量の差を密度の式には考慮するが, 熱の式には考慮しないような系を考える. またガスは理想気体であるとみなす. このような系では温位 θ が非凝結時の保存量として使える.

A.1.1 基礎方程式系

3 次元大気の状態を気温 T, 圧力 p, 風速 u, v, w, 密度 ρ で表現する場合, 一般的な圧縮性流体の基礎方程式系は以下のようになる[1].

運動方程式

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + D_u \tag{A.1}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + D_v \tag{A.2}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + D_w \tag{A.3}$$

熱力学第一法則

$$c_t\frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} = c_t Q \tag{A.4}$$

[1] 本モデルは水平鉛直 2 次元であるが, 将来のモデルの開発計画を見据え, 本付録においては 3 次元の方程式系を導く.

状態方程式

$$p_d = \rho_d R_d T, \tag{A.5}$$
$$p_v = \rho_v R_v T. \tag{A.6}$$

密度の時間発展方程式

$$\frac{\partial \rho_d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_d u_j) = D_{\rho_d}, \tag{A.7}$$
$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_v u_j) = M_{src}(\rho_v) + D_{\rho_v}, \tag{A.8}$$
$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_c u_j) = M_{src}(\rho_c) + D_{\rho_c}, \tag{A.9}$$
$$\frac{\partial \rho_r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_r u_j) = M_{src}(\rho_r) + M_{fall}(\rho_r) + D_{\rho_r} \tag{A.10}$$

ここで c_t は凝結物も含んだ単位質量の気塊の定圧比熱, Q は非断熱加熱, q_v は比湿, q_c は雲水比湿, q_r は雨水比湿である．q_v, q_r, q_c は, 凝結成分の数だけ存在する．D_*, M_{src}, M_{fall} はそれぞれ乱流拡散項, 生成消滅項, 落下項を意味する．以下では, 温位 θ, エクスナー関数 Π, 風速 u, w を予報変数とする場合の基礎方程式系を導出する．

A.1.2　温位の式の導出

(A.4) において, 凝結物の比熱がガスの比熱に比べて十分小さいとみなすと,

$$\langle c_p \rangle \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} \approx \langle c_p \rangle Q \tag{A.11}$$

と近似される．ここで $\langle c_p \rangle$ は平均定圧比熱であり,

$$\langle c_p \rangle = \frac{\rho_d c_{pd} + \sum \rho_v c_{pv}}{\rho_d + \sum \rho_v} \tag{A.12}$$

である．さらに凝結物は全密度に比べて十分小さいとみなすと,

$$\langle c_p \rangle \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho_g}\frac{dp}{dt} \approx \langle c_p \rangle Q \tag{A.13}$$

と近似される．ここで温位

$$\theta \equiv T \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\langle R \rangle}{\langle c_p \rangle}} \tag{A.14}$$

及びエクスナー関数

$$\Pi \equiv \frac{T}{\theta} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\langle R\rangle}{\langle c_p\rangle}} \tag{A.15}$$

を導入し, $\langle R\rangle$, $\langle c_p\rangle$ が一定であるとみなすと,

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\langle R\rangle}{\langle c_p\rangle}} \frac{dT}{dt} - \frac{\langle R\rangle}{\langle c_p\rangle}\frac{T}{p}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\langle R\rangle}{\langle c_p\rangle}} \frac{dp}{dt} \\
&= \frac{\theta}{\langle c_p\rangle T}\left(\langle c_p\rangle \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho_g}\frac{dp}{dt}\right) \\
&= \frac{Q}{\Pi}
\end{aligned} \tag{A.16}$$

となる. 但し式変形の途中で

$$\begin{aligned}
p &= p_d + \sum p_v \\
&= \left(\rho_d R_d + \sum \rho_v R_v\right) T \\
&= \left(\rho_d + \sum \rho_v\right) \frac{\rho_d R_d + \sum \rho_v R_v}{\rho_d + \sum \rho_v} T \\
&= \rho_g \langle R\rangle T
\end{aligned} \tag{A.17}$$

となることを用いた. 非断熱加熱として凝結加熱 Q_{cond}, 放射加熱 Q_{rad}, 散逸加熱 Q_{dis} を考慮し, また乱流拡散も考慮すると,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\Pi}\left(Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}\right) + D_\theta \tag{A.18}$$

が得られる.

予報変数として温位を用いる際には $\langle R\rangle$, $\langle c_p\rangle$ があまり大きく変化することを許容しないことを前提とするので, 計算の適用範囲に制約が加わることに常に注意しなければならない.

A.1.3　圧力方程式の導出

普遍気体定数を R_* として, 平均分子量

$$\langle M\rangle \equiv \frac{R_*}{\langle R\rangle} = \frac{\rho_d + \sum \rho_v}{\rho_d/M_d + \sum \rho_v/M_v} \tag{A.19}$$

を導入する. $\langle R\rangle$ を定数とみなしているので, $\langle M\rangle$ もまた定数となることに注意されたい. ここで仮温度

$$T_v \equiv \left(\frac{\langle M\rangle}{M_d} q_d + \sum \frac{\langle M\rangle}{M_v} q_v \right) T \tag{A.20}$$

を導入すると,

$$\begin{aligned} p &= p_d + \sum p_v \\ &= \left(\rho_d R_d + \sum \rho_v R_v \right) T \\ &= \rho \langle R\rangle \left(\frac{R_d}{\langle R\rangle} \frac{\rho_d}{\rho} + \sum \frac{R_v}{\langle R\rangle} \frac{\rho_v}{\rho} \right) T \\ &= \rho \langle R\rangle \left(\frac{\langle M\rangle}{M_d} q_d + \sum \frac{\langle M\rangle}{M_v} q_v \right) T \\ &= \rho \langle R\rangle T_v \end{aligned} \tag{A.21}$$

となる. 更に仮温位

$$\theta_v \equiv \frac{T_v}{\Pi} = \left(\frac{\langle M\rangle}{M_d} q_d + \sum \frac{\langle M\rangle}{M_v} q_v \right) \theta \tag{A.22}$$

を導入すると,

$$p = \rho \langle R\rangle \Pi \theta_v \tag{A.23}$$

となる. (A.23) に (A.15) を代入して p を消去し, ρ について整理すると,

$$\rho = \frac{p_0 \Pi^{\langle c_v\rangle/\langle R\rangle}}{\langle R\rangle \theta_v} = \frac{p_0 \Pi^{\langle c_v\rangle/\langle R\rangle}}{\langle R\rangle \left(q_d \langle M\rangle/M_d + \sum q_v \langle M\rangle/M_v \right) \theta} \tag{A.24}$$

となる.

圧力方程式は密度の式と連続の式を組み合わせることで得られる. まず密度 ρ の全微分を計算すると,

$$\begin{aligned} d\rho &= d \left[\frac{p_0 \Pi^{\langle c_v\rangle/\langle R\rangle}}{\langle R\rangle \left(q_d \langle M\rangle/M_d + \sum q_v \langle M\rangle/M_v \right) \theta} \right] \\ &= \frac{p_0 \Pi^{(\langle c_v\rangle - 1)/\langle R\rangle}}{\langle R\rangle \left(q_d \langle M\rangle/M_d + \sum q_v \langle M\rangle/M_v \right) \theta} \frac{\langle c_v\rangle}{\langle R\rangle} d\Pi \\ &\quad - \frac{p_0 \Pi^{\langle c_v\rangle/\langle R\rangle}}{\langle R\rangle \left(q_d \langle M\rangle/M_d + \sum q_v \langle M\rangle/M_v \right) \theta^2} d\theta \\ &\quad - \frac{p_0 \Pi^{\langle c_v\rangle/\langle R\rangle}}{\langle R\rangle \left(q_d \langle M\rangle/M_d + \sum q_v \langle M\rangle/M_v \right)^2 \theta} \left(\frac{\langle M\rangle}{M_d} dq_d + \sum \frac{\langle M\rangle}{M_v} dq_v \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle c_p\rangle\theta_v\left(\frac{\langle c_v\rangle}{\langle c_p\rangle\langle R\rangle\Pi\theta_v}\right)\rho d\Pi - \frac{\rho}{\theta}d\theta \\
&\quad -\frac{\rho}{q_d\langle M\rangle/M_d + \sum q_v\langle M\rangle/M_v}\left(\frac{\langle M\rangle}{M_d}dq_d + \sum\frac{\langle M\rangle}{M_v}dq_v\right) \\
&= \frac{\langle c_p\rangle\rho\theta_v}{\langle c_s\rangle^2}d\Pi - \frac{\rho}{\theta}d\theta \\
&\quad -\frac{\rho}{q_d\langle M\rangle/M_d + \sum q_v\langle M\rangle/M_v}\left(\frac{\langle M\rangle}{M_d}dq_d + \sum\frac{\langle M\rangle}{M_v}dq_v\right). \qquad \text{(A.25)}
\end{aligned}
$$

となる. ここで $\langle c_s\rangle$ は音速であり,

$$
\langle c_s\rangle^2 = \frac{\langle c_p\rangle\langle R\rangle\Pi\theta_v}{\langle c_v\rangle} \qquad \text{(A.26)}
$$

である. (A.25) 式をエクスナー関数の式として整理すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Pi}{dt} &= \frac{\langle c_s\rangle^2}{\langle c_p\rangle\theta_v}\left[\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt}\right. \\
&\quad \left. +\frac{1}{q_d\langle M\rangle/M_d + \sum q_v\langle M\rangle/M_v}\left(\frac{\langle M\rangle}{M_d}\frac{dq_d}{dt} + \sum\frac{\langle M\rangle}{M_v}\frac{dq_v}{dt}\right)\right] \\
&= \frac{\langle c_s\rangle^2}{\langle c_p\rangle\theta_v}\left[-\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt}\right. \\
&\quad \left. +\frac{1}{q_d\langle M\rangle/M_d + \sum q_v\langle M\rangle/M_v}\left(\frac{\langle M\rangle}{M_d}\frac{dq_d}{dt} + \sum\frac{\langle M\rangle}{M_v}\frac{dq_v}{dt}\right)\right] \qquad \text{(A.27)}
\end{aligned}
$$

となり, 圧力方程式が得られる.

A.1.4 運動方程式の書き換え

運動方程式の圧力勾配は, 温位とエクスナー関数を用いることで得られる. (A.15), (A.23) より

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} &= \frac{\langle R\rangle\Pi\theta_v}{p}\frac{\partial\left(p_0\Pi^{\langle c_p\rangle/\langle R\rangle}\right)}{\partial x_i} \\
&= \frac{\langle R\rangle\Pi\theta_v}{p}\left(\frac{p_0 c_{p_d}}{R_d}\Pi^{\langle c_p\rangle/\langle R\rangle-1}\right)\frac{\partial\Pi}{\partial x_i} \\
&= \frac{\langle R\rangle\Pi\theta_v}{p}\left(\frac{\langle c_p\rangle}{\langle R\rangle}p\Pi^{-1}\right)\frac{\partial\Pi}{\partial x_i} \\
&= \langle c_p\rangle\theta_v\frac{\partial\Pi}{\partial x_i} \\
&= \langle c_p\rangle\theta_v\frac{\partial\Pi}{\partial x_i} \qquad \text{(A.28)}
\end{aligned}
$$

となる. 以上より

$$\frac{du}{dt} = -\langle c_p \rangle \theta_v \frac{\partial \Pi}{\partial x} + D_u \tag{A.29}$$
$$\frac{dv}{dt} = -\langle c_p \rangle \theta_v \frac{\partial \Pi}{\partial y} + D_u \tag{A.30}$$
$$\frac{dw}{dt} = -\langle c_p \rangle \theta_v \frac{\partial \Pi}{\partial z} - g + D_w \tag{A.31}$$

が得られる.

A.1.5 比湿の時間発展方程式の導出

$M_{src}(\rho_v) + M_{src}(\rho_c) + M_{src}(\rho_r) = 0$ となることに注意して, (A.7) – (A.10) の和をとると,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = \sum M_{fall}(\rho_r) \tag{A.32}$$

が得られる. (A.7) – (A.32) より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_d}{\rho}\right) &= -\frac{\rho_d}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho_d}{\partial t} \\
&= -\frac{\rho_d}{\rho^2}\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) + \sum M_{fall}(\rho_r)\right] + \frac{1}{\rho}\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_d u_j)\right] \\
&= -u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\rho_d}{\rho}\right) - \frac{\rho_d}{\rho^2}\sum M_{fall}(\rho_r), && \text{(A.33)} \\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_v}{\rho}\right) &= -\frac{\rho_v}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \\
&= -\frac{\rho_v}{\rho^2}\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) + \sum M_{fall}(\rho_r)\right] + \frac{1}{\rho}\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_v u_j) + M_{src}(\rho_v)\right] \\
&= -u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\rho_v}{\rho}\right) - \frac{\rho_v}{\rho^2}\sum M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho}M_{src}(\rho_v), && \text{(A.34)} \\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_c}{\rho}\right) &= -\frac{\rho_c}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho_c}{\partial t} \\
&= -\frac{\rho_c}{\rho^2}\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) + \sum M_{fall}(\rho_r)\right] + \frac{1}{\rho}\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_c u_j) + M_{src}(\rho_c)\right] \\
&= -u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\rho_c}{\rho}\right) - \frac{\rho_c}{\rho^2}\sum M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho}M_{src}(\rho_c), && \text{(A.35)} \\
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_r}{\rho}\right) &= -\frac{\rho_r}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho_r}{\partial t}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\rho_r}{\rho^2}\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) + \sum M_{fall}(\rho_r)\right] \\
&\quad +\frac{1}{\rho}\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_r u_j) + M_{src}(\rho_r) + M_{fall}(\rho_r)\right] \\
&= -u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\rho_r}{\rho}\right) - \frac{\rho_r}{\rho^2}\sum M_{fall} + \frac{1}{\rho}M_{src}(\rho_r) + \frac{1}{\rho}M_{fall}(\rho_r). \qquad \text{(A.36)}
\end{aligned}
$$

即ち

$$
\frac{dq_d}{dt} = -\frac{q_d}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_r) + D(q_d), \qquad \text{(A.37)}
$$

$$
\frac{dq_v}{dt} = -\frac{q_v}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho}M_{src}(\rho_v) + D(q_v), \qquad \text{(A.38)}
$$

$$
\frac{dq_c}{dt} = -\frac{q_c}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho}M_{src}(\rho_c) + D(q_c), \qquad \text{(A.39)}
$$

$$
\frac{dq_r}{dt} = -\frac{q_r}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho}M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho}M_{src}(\rho_r) + D(q_r). \qquad \text{(A.40)}
$$

を得る. 但し, $q_d + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r = 1$ の関係が成り立つので, q_d については時間発展方程式を解かずに, 診断的に求めることとする.

A.1.6 温位 θ, エクスナー関数 Π, 風速 u, w を予報変数とする場合

以上より, 3 次元大気の状態を温位 θ, エクスナー関数 Π, 風速 u, w, 密度 ρ で表現する場合, 基礎方程式系は以下のようになる.

運動方程式

$$
\frac{du}{dt} = -\langle c_p\rangle\theta_v\frac{\partial \Pi}{\partial x} + D_u \qquad \text{(A.41)}
$$

$$
\frac{dv}{dt} = -\langle c_p\rangle\theta_v\frac{\partial \Pi}{\partial y} + D_v \qquad \text{(A.42)}
$$

$$
\frac{dw}{dt} = -\langle c_p\rangle\theta_v\frac{\partial \Pi}{\partial z} - g + D_w \qquad \text{(A.43)}
$$

圧力方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial t} &= \frac{\langle c_s\rangle^2}{\langle c_p\rangle\theta_v}\Bigg[-\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dt} \\
&\quad + \frac{1}{q_d\langle M\rangle/M_d + \sum q_v\langle M\rangle/M_v}\left(\frac{\langle M\rangle}{M_d}\frac{dq_d}{dt} + \sum\frac{\langle M\rangle}{M_v}\frac{dq_v}{dt}\right)\Bigg]
\end{aligned} \qquad \text{(A.44)}
$$

状態方程式

$$\rho = \frac{p}{\langle R\rangle \Pi \theta_v} = \frac{p_0 \Pi^{\langle c_v\rangle/\langle R\rangle}}{\langle R\rangle \theta_v} \tag{A.45}$$

熱の式

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\Pi}\left(Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}\right) + D_\theta \tag{A.46}$$

凝結性ガスおよび凝結物の比湿の式

$$\frac{dq_v}{dt} = -\frac{q_v}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho}M_{src}(\rho_v) + D_{q_v} \tag{A.47}$$

$$\frac{dq_c}{dt} = -\frac{q_c}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho}M_{src}(\rho_c) + D_{q_c} \tag{A.48}$$

$$\frac{dq_r}{dt} = -\frac{q_r}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho}M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\rho}M_{src}(\rho_r) + D_{q_r} \tag{A.49}$$

ただし, エクスナー関数 Π は,

$$\Pi \equiv \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\langle R\rangle/\langle c_p\rangle} \tag{A.50}$$

であり, 音速 $\langle c_s\rangle$ は

$$\langle c_s\rangle^2 = \frac{\langle c_p\rangle\langle R\rangle \Pi \theta_v}{\langle c_v\rangle} \tag{A.51}$$

である.

A.2 準圧縮方程式系の導出

準圧縮方程式系では, 変数を基本場と擾乱場に分離し, 線形化を行う.

A.2.1 基本場と擾乱場の分離

変数を基本場と擾乱場に分離し, 基本場は静水圧平衡にあると仮定する. この時, 変数は以下のように書ける.

$$u(x,z,t) = \overline{u}(z) + u'(x,z,t),$$

$$
\begin{aligned}
v(x,z,t) &= \overline{v}(z) + v'(x,z,t), \\
w(x,z,t) &= w'(x,z,t), \\
\theta(x,z,t) &= \overline{\theta}(z) + \theta'(x,z,t), \\
\Pi(x,z,t) &= \overline{\Pi}(z) + \Pi'(x,z,t), \\
q_d(x,z,t) &= \overline{q_d}(z) + {q_d}'(x,z,t), \\
q_v(x,z,t) &= \overline{q_v}(z) + {q_v}'(x,z,t), \\
q_c(x,z,t) &= {q_c}'(x,z,t), \\
q_r(x,z,t) &= {q_r}'(x,z,t).
\end{aligned}
$$

ここで基本場の風速 w と雲水比湿と雨水比湿はゼロとみなした. そして基本場には静水圧平衡

$$
\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z} = -\frac{g}{\langle c_p \rangle \bar{\theta_v}} \tag{A.52}
$$

の関係が成り立つものとする.

A.2.2 水平方向の運動方程式の線形化

水平方向の運動方程式を基本場と擾乱場に分離する.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial t} &= -\left[(\overline{u}+u')\frac{\partial(\overline{u}+u')}{\partial x} + (\overline{v}+v')\frac{\partial(\overline{u}+u')}{\partial y} + w'\frac{\partial(\overline{u}+u')}{\partial z}\right] \\
&\quad -\langle c_p\rangle\left(\bar{\theta_v}\frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial x} + \bar{\theta_v}\frac{\partial\Pi'}{\partial x} + {\theta_v}'\frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial x} + {\theta_v}'\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right) + D_u \\
\frac{\partial v'}{\partial t} &= -\left[(\overline{u}+u')\frac{\partial(\overline{v}+v')}{\partial x} + (\overline{v}+v')\frac{\partial(\overline{v}+v')}{\partial y} + w'\frac{\partial(\overline{v}+v')}{\partial z}\right] \\
&\quad -\langle c_p\rangle\left(\bar{\theta_v}\frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial y} + \bar{\theta_v}\frac{\partial\Pi'}{\partial y} + {\theta_v}'\frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial y} + {\theta_v}'\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right) + D_v.
\end{aligned}
$$

上式において移流項以外の 2 次の微小項を消去し, さらに基本場は x 方向には変化しないことを利用すると, 以下の擾乱成分の式が得られる.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial u'}{\partial x} - v'\frac{\partial u'}{\partial y} - w'\frac{\partial u'}{\partial z} - \overline{u}\frac{\partial u'}{\partial x} - \overline{v}\frac{\partial u'}{\partial y} - w'\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \\
&\quad -\langle c_p\rangle\overline{\theta_v}\frac{\partial \Pi'}{\partial x} + D_u
\end{aligned} \tag{A.53}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial v'}{\partial x} - v'\frac{\partial v'}{\partial y} - w'\frac{\partial v'}{\partial z} - \overline{u}\frac{\partial v'}{\partial x} - \overline{v}\frac{\partial v'}{\partial y} - w'\frac{\partial \overline{v}}{\partial z} \\
&\quad -\langle c_p\rangle\overline{\theta_v}\frac{\partial \Pi'}{\partial y} + D_v.
\end{aligned} \tag{A.54}
$$

A.2.3 鉛直方向の運動方程式の線形化

鉛直方向の運動方程式を基本場と擾乱場に分離する.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w'}{\partial t} &= -\left[(\overline{u}+u')\frac{\partial w'}{\partial x} + (\overline{v}+v')\frac{\partial w'}{\partial y} + w'\frac{\partial w'}{\partial z}\right] \\
&\quad -\langle c_p\rangle\left(\bar{\theta_v}\frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial z} + \bar{\theta_v}\frac{\partial\Pi'}{\partial z} + \theta_v{}'\frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial z} + \theta_v{}'\frac{\partial\Pi'}{\partial z}\right) \\
&\quad -g + D_{w'}
\end{aligned}
$$

上式において移流項以外の 2 次の微小項を消去すると以下となる.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial w'}{\partial x} - v'\frac{\partial w'}{\partial y} - w'\frac{\partial w'}{\partial z} - \overline{u}\frac{\partial w'}{\partial x} - \overline{v}\frac{\partial w'}{\partial y} \\
&\quad -\langle c_p\rangle\left(\bar{\theta_v}\frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial z} + \bar{\theta_v}\frac{\partial\Pi'}{\partial z} + \theta_v{}'\frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial z}\right) - g + D_{w'}.
\end{aligned}
$$

さらに静水圧の式

$$
\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial z} = -\frac{g}{\langle c_p\rangle\overline{\theta_v}} \tag{A.55}
$$

を利用すると以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial w'}{\partial x} - v'\frac{\partial w'}{\partial y} - w'\frac{\partial w'}{\partial z} - \overline{u}\frac{\partial w'}{\partial x} - \overline{v}\frac{\partial w'}{\partial y} \\
&\quad +\langle c_p\rangle\bar{\theta_v}\left(\frac{g}{\langle c_p\rangle\bar{\theta_v}}\right) - \langle c_p\rangle\bar{\theta_v}\frac{\partial\Pi'}{\partial z} + \langle c_p\rangle\theta_v{}'\left(\frac{g}{\langle c_p\rangle\bar{\theta_v}}\right) - g + D_{w'} \\
&= -u'\frac{\partial w'}{\partial x} - v'\frac{\partial w'}{\partial y} - w'\frac{\partial w'}{\partial z} - \overline{u}\frac{\partial w'}{\partial x} - \overline{v}\frac{\partial w'}{\partial y} - \langle c_p\rangle\bar{\theta_v}\frac{\partial\Pi'}{\partial z} + \frac{\theta_v{}'}{\bar{\theta_v}}g + D_{w'}
\end{aligned}
$$

仮温位

$$
\theta_v \equiv \frac{T_v}{\Pi} = \left(\frac{\langle M\rangle}{M_d}q_d + \sum\frac{\langle M\rangle}{M_v}q_v\right)\theta \tag{A.56}
$$

を基本場成分と擾乱成分に分けると,

$$
\bar{\theta_v} = \left(\frac{\langle M\rangle}{M_d}\bar{q_d} + \sum\frac{\langle M\rangle}{M_v}\bar{q_v}\right)\bar{\theta} \tag{A.57}
$$

$$
\theta_v' = \left(\frac{\langle M\rangle}{M_d}\overline{q_d} + \sum\frac{\langle M\rangle}{M_v}\overline{q_v}\right)\theta' + \left(\frac{\langle M\rangle}{M_d}q_d' + \sum\frac{\langle M\rangle}{M_v}q_v'\right)\overline{\theta} \tag{A.58}
$$

となるので, 浮力項は

$$
\frac{\theta_v'}{\overline{\theta_v}}g = \frac{\theta'}{\overline{\theta}}g + \frac{q_d'\langle M\rangle/M_d + \sum q_v'\langle M\rangle/M_v}{\overline{q_d}\langle M\rangle/M_d + \sum\overline{q_v}\langle M\rangle/M_v}g \tag{A.59}
$$

と書き換えられる. 従って線形化された鉛直方向の運動方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial w'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial w'}{\partial x} - v'\frac{\partial w'}{\partial y} - w'\frac{\partial w'}{\partial z} - \overline{u}\frac{\partial w'}{\partial x} - \overline{v}\frac{\partial w'}{\partial y} \\ &\quad -\langle c_p\rangle\overline{\theta_v}\frac{\partial \Pi'}{\partial z} + \frac{\theta'}{\overline{\theta}}g + \frac{q'_d\langle M\rangle/M_d + \sum q'_v\langle M\rangle/M_v}{\overline{q_d}\langle M\rangle/M_d + \sum \overline{q_v}\langle M\rangle/M_v}g + D_{w'} \end{aligned} \tag{A.60}$$

となる.

A.2.4　圧力方程式の線形化

Klemp and Wilhelmson (1978) では, 非断熱的な加熱による熱膨張と凝結に伴う圧力変化を無視しているが, 本モデルではこれを無視しない. (A.27) に (A.37), (A.38) を代入すると,

$$\begin{aligned}\frac{d\Pi}{dt} &= \frac{\langle c_s\rangle^2}{\langle c_p\rangle\theta_v}\Bigg[-\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_s) + \frac{1}{\theta}\left\{\frac{1}{\Pi}(Q_{cond}+Q_{rad}+Q_{dis}) + D_\theta\right\} \\ &\quad + \frac{1}{q_d\langle M\rangle/M_d + \sum q_v\langle M\rangle/M_v}\Bigg\{\frac{\langle M\rangle}{M_d}\left(-\frac{q_d}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_r) + D_{q_d}\right) \\ &\quad + \sum\frac{\langle M\rangle}{M_v}\left(-\frac{q_v}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_r) + M_{src}(q_v) + D_{q_v}\right)\Bigg\}\Bigg] \end{aligned} \tag{A.61}$$

となる. (A.61) の左辺を線形化すると,

$$\begin{aligned}\frac{d\Pi}{dt} &= \frac{\partial \bar{\Pi}+\Pi^{'}}{\partial t} + (\overline{u}+u^{'})\frac{\partial \bar{\Pi}+\Pi^{'}}{\partial x} + (\overline{v}+v^{'})\frac{\partial \bar{\Pi}+\Pi^{'}}{\partial y} + w^{'}\frac{\partial \bar{\Pi}+\Pi^{'}}{\partial z} \\ &\approx \frac{\partial \Pi^{'}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \Pi^{'}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \Pi^{'}}{\partial y} + w^{'}\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z}\end{aligned}$$

となる. 乱流拡散項・生成項・雲粒落下項は擾乱成分とみなすと, 圧力方程式を線形化したときの $\langle c_s\rangle^2$, 及び θ_v からの寄与は基本場成分のみとなる. 従って (A.61) の右辺を線形化すると,

$$\begin{aligned} & \frac{\langle c_s\rangle^2}{\langle c_p\rangle\theta_v}\Bigg[-\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_r) + \frac{1}{\theta}\left\{\frac{1}{\Pi}(Q_{cond}+Q_{rad}+Q_{dis}) + D_\theta\right\} \\ & + \frac{1}{q_d\langle M\rangle/M_d + \sum q_v\langle M\rangle/M_v}\Bigg\{\frac{\langle M\rangle}{M_d}\left(-\frac{q_d}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_r) + D_{q_d}\right) \\ & + \sum\frac{\langle M\rangle}{M_v}\left(-\frac{q_v}{\rho}\sum M_{fall}(\rho_r) + M_{src}(q_v) + D_{q_v}\right)\Bigg\}\Bigg] \\ \approx\ & \frac{\overline{\langle c_s\rangle^2}}{\langle c_p\rangle\overline{\theta_v}}\Bigg[-\frac{\partial u_j^{'}}{\partial x_j} + \frac{1}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r^{'}) + \frac{1}{\bar{\theta}}\left\{\frac{1}{\bar{\Pi}}(Q_{cond}+Q_{rad}+Q_{dis}) + D_{\theta'}\right\}\end{aligned}$$

$$
+\frac{1}{\bar{q_d}\langle M\rangle/M_d+\sum\bar{q_v}\langle M\rangle/M_v}\left\{\frac{\langle M\rangle}{M_d}\left(-\frac{\bar{q_d}}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r^{'})+D_{q_d^{'}}\right)\right.
$$
$$
\left.\left.+\sum\frac{\langle M\rangle}{M_v}\left(-\frac{\bar{q_v}}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r^{'})+M_{src}(q_v^{'})+D_{q_v^{'}}\right)\right\}\right]
$$

従って線形化された圧力方程式は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Pi^{'}}{\partial t} &= -\bar{u}\frac{\partial\Pi^{'}}{\partial x}-\bar{v}\frac{\partial\Pi^{'}}{\partial y}-w^{'}\frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial z}-\frac{\overline{\langle c_s\rangle^2}}{\langle c_p\rangle\bar{\theta_v}}\frac{\partial u_j^{'}}{\partial x_j} \\
&\quad \frac{\overline{\langle c_s\rangle^2}}{\langle c_p\rangle\bar{\theta_v}}\left[\frac{1}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r^{'})+\frac{1}{\bar{\theta}}\left\{\frac{1}{\bar{\Pi}}(Q_{cond}+Q_{rad}+Q_{dis})+D_{\theta^{'}}\right\}\right. \\
&\quad +\frac{1}{\bar{q_d}\langle M\rangle/M_d+\sum\bar{q_v}\langle M\rangle/M_v}\left\{\frac{\langle M\rangle}{M_d}\left(-\frac{\bar{q_d}}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r^{'})+D_{q_d^{'}}\right)\right. \\
&\quad \left.\left.+\sum\frac{\langle M\rangle}{M_v}\left(-\frac{\bar{q_v}}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r^{'})+M_{src}(q_v^{'})+D_{q_v^{'}}\right)\right\}\right]
\end{aligned}
\tag{A.62}
$$

と表される．ここで

$$
\overline{\langle c_s\rangle^2}=\frac{\langle c_p\rangle\langle R\rangle\bar{\Pi}\bar{\theta_v}}{\langle c_v\rangle}
$$

となる．(A.62) の右辺第 3 項, 第 4 項をまとめると,

$$
\begin{aligned}
& -w^{'}\frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial z}-\frac{\overline{\langle c_s\rangle^2}}{\langle c_p\rangle\bar{\theta_v}}\frac{\partial u_j^{'}}{\partial x_j} \\
=& -w^{'}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\bar{\rho}\langle R\rangle\bar{\theta_v}}{p_0}\right)^{\langle R\rangle/\langle c_v\rangle}-\frac{\overline{\langle c_s\rangle}^2}{\langle c_p\rangle\bar{\theta_v}}\left(\frac{\partial u^{'}}{\partial x}+\frac{\partial w^{'}}{\partial z}\right) \\
=& -w^{'}\frac{\langle R\rangle}{\langle c_v\rangle}\bar{\Pi}\frac{1}{\left(\frac{\bar{\rho}\langle R\rangle\bar{\theta_v}}{p_0}\right)}\frac{\langle R\rangle}{p_0}\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{\theta_v})}{\partial z}-\frac{\overline{\langle c_s\rangle}^2}{\langle c_p\rangle\bar{\theta_v}}\left(\frac{\partial u^{'}}{\partial x}+\frac{\partial w^{'}}{\partial z}\right) \\
=& -\frac{\overline{\langle c_s\rangle}^2}{\langle c_p\rangle\bar{\rho}\bar{\theta_v}^2}\left\{w^{'}\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{\theta_v})}{\partial z}+\bar{\rho}\bar{\theta_v}\left(\frac{\partial u^{'}}{\partial x}+\frac{\partial w^{'}}{\partial z}\right)\right\} \\
=& -\frac{\overline{c_s}^2}{\langle c_p\rangle\bar{\rho}\bar{\theta_v}^2}\nabla\cdot\left(\bar{\rho}\bar{\theta_v}\boldsymbol{u'}\right)
\end{aligned}
$$

以上より,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Pi^{'}}{\partial t} &= -\bar{u}\frac{\partial\Pi^{'}}{\partial x}-\bar{v}\frac{\partial\Pi^{'}}{\partial y}-\frac{\overline{c_s}^2}{\langle c_p\rangle\bar{\rho}\bar{\theta_v}^2}\nabla\cdot\left(\bar{\rho}\bar{\theta_v}\boldsymbol{u'}\right) \\
&\quad \frac{\overline{\langle c_s\rangle^2}}{\langle c_p\rangle\bar{\theta_v}}\left[\frac{1}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r^{'})+\frac{1}{\bar{\theta}}\left\{\frac{1}{\bar{\Pi}}(Q_{cond}+Q_{rad}+Q_{dis})+D_{\theta^{'}}\right\}\right. \\
&\quad +\frac{1}{\bar{q_d}\langle M\rangle/M_d+\sum\bar{q_v}\langle M\rangle/M_v}\left\{\frac{\langle M\rangle}{M_d}\left(-\frac{\bar{q_d}}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r^{'})+D_{q_d^{'}}\right)\right. \\
&\quad \left.\left.+\sum\frac{\langle M\rangle}{M_v}\left(-\frac{\bar{q_v}}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r^{'})+M_{src}(q_v^{'})+D_{q_v^{'}}\right)\right\}\right]
\end{aligned}
\tag{A.63}
$$

である.

A.2.5 熱の式の線形化

熱の式を平均成分と擾乱成分に分離する.

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\bar{\theta}+\theta')}{\partial t} &= -(\overline{u}+u')\frac{\partial(\bar{\theta}+\theta')}{\partial x} - (\overline{v}+v')\frac{\partial(\bar{\theta}+\theta')}{\partial y} - w'\frac{\partial(\bar{\theta}+\theta')}{\partial z} \\ &\quad + \frac{1}{\overline{\Pi}+\Pi'}(Q_{cond}+Q_{rad}+Q_{dis}) + D_{\bar{\theta}} + D_{\theta'}\end{aligned}$$

ここで平均場の量は z の関数であることを用いると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta'}{\partial t} &= -\left(u'\frac{\partial\theta'}{\partial x} + v'\frac{\partial\theta'}{\partial y} + w'\frac{\partial\theta'}{\partial z}\right) - \overline{u}\frac{\partial\theta'}{\partial x} - w'\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z} \\ &\quad + \frac{1}{\overline{\Pi}}(Q_{cond}+Q_{rad}+Q_{dis}) + D_{\bar{\theta}} + D_{\theta'} \qquad \text{(A.64)}\end{aligned}$$

となる.

A.2.6 比湿の保存式の線形化

凝結成分の比湿の保存式についても, 変数を平均成分と擾乱成分に分離する. 熱の式と同様に, 以下のように書ける. 但し, 生成項, 落下項は擾乱成分のみ存在すると仮定する. この仮定は平均場では凝結は生じていないと考えることに等しい.

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_v'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q_v'}{\partial x} - v'\frac{\partial q_v'}{\partial y} - w'\frac{\partial q_v'}{\partial z} - \overline{u}\frac{\partial q_v'}{\partial x} - \overline{v}\frac{\partial q_v'}{\partial y} - w'\frac{\partial \overline{q_v}}{\partial z} \\ &\quad - \frac{\overline{q_v}}{\overline{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r') + \frac{1}{\overline{\rho}}M_{src}(\rho_v') + D_{\overline{q_v}} + D_{q_v'}, \qquad \text{(A.65)} \\ \frac{\partial q_c'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q_c'}{\partial x} - v'\frac{\partial q_c'}{\partial y} - w'\frac{\partial q_c'}{\partial z} - \overline{u}\frac{\partial q_c'}{\partial x} - \overline{v}\frac{\partial q_c'}{\partial y} \\ &\quad + \frac{1}{\overline{\rho}}M_{src}(\rho_c') + D_{q_c'}, \qquad \text{(A.66)} \\ \frac{\partial q_r'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q_r'}{\partial x} - v'\frac{\partial q_r'}{\partial y} - w'\frac{\partial q_r'}{\partial z} - \overline{u}\frac{\partial q_r'}{\partial x} - \overline{v}\frac{\partial q_r'}{\partial y} \\ &\quad + \frac{1}{\overline{\rho}}M_{fall}(\rho_r') + \frac{1}{\overline{\rho}}M_{src}(\rho_r') + D_{q_r'}. \qquad \text{(A.67)}\end{aligned}$$

但し雲水量と雨水量は擾乱成分のみの量である.

A.2.7 エネルギー方程式の導出

準圧縮方程式系におけるエネルギー方程式を導出する.

(A.53), (A.53), (A.60) にそれぞれ $\overline{\rho}(\overline{u}+u')$, $\overline{\rho}(\overline{v}+v')$, $\overline{\rho}w'$ を掛けて足し合わせると

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\overline{\rho}K)}{\partial t} &= -\overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\nabla K - \langle c_p\rangle\overline{\rho}\overline{\theta_v}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\Pi' + \overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{D} \\ &\quad + g\frac{\theta'}{\overline{\theta}}\overline{\rho}w' + g\frac{q_d'\langle M\rangle/M_d + \sum q_v'\langle M\rangle/M_v}{\overline{q_d}\langle M\rangle/M_d + \sum\overline{q_v}\langle M\rangle/M_v}\overline{\rho}w' \end{aligned}\tag{A.68}$$

となる. 但し $\boldsymbol{u}=(\overline{u}+u', \overline{v}+v', w')$, $\boldsymbol{D}=(D_u, D_v, D_w)$, $K=[(\overline{u}+u')^2+(\overline{v}+v')^2+w'^2]/2$ と置いた. 連続の式

$$\frac{\partial\rho_d'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[(\overline{u}+u')\overline{\rho_d}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(w'\overline{\rho_d}\right) = 0, \tag{A.69}$$

$$\frac{\partial\rho_v'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[(\overline{u}+u')\overline{\rho_v}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(w'\overline{\rho_v}\right) = M_{src}(\rho_v') \tag{A.70}$$

より

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_d' + \sum\rho_v'\right) + \nabla\cdot(\overline{\rho}\boldsymbol{u}) = \sum M_{src}(\rho_v') \tag{A.71}$$

となる. 但し $\overline{\rho}=\overline{\rho_d}+\sum\overline{\rho_v}$ であることを用いた. (A.71) を用いると, (A.68) の右辺第 1 項は

$$\begin{aligned}-\overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\nabla K &= -\nabla\cdot(\overline{\rho}K\boldsymbol{u}) + K\nabla\cdot(\overline{\rho}\boldsymbol{u}) \\ &= -\nabla\cdot(\overline{\rho}K\boldsymbol{u}) - K\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_d'+\rho_v'\right) + KM_{src}(\rho_v')\end{aligned}\tag{A.72}$$

となる. また (A.63) を用いて (A.68) の右辺第 2 項を書き換えると

$$\begin{aligned}-\langle c_p\rangle\overline{\rho}\overline{\theta_v}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\Pi' &= -\nabla\cdot\left[\langle c_p\rangle\overline{\rho}\overline{\theta_v}\Pi'\boldsymbol{u}\right] + \langle c_p\rangle\Pi'\nabla\cdot(\overline{\rho}\overline{\theta_v}\boldsymbol{u}) \\ &= -\nabla\cdot\left[\langle c_p\rangle\overline{\rho}\overline{\theta_v}\Pi'\boldsymbol{u}\right] \\ &\quad + \langle c_p\rangle\Pi'\left[\frac{\langle c_p\rangle\overline{\rho}\overline{\theta_v}^2}{\langle c_s\rangle^2}\left(-\frac{\partial\Pi'}{\partial t} - \overline{u}\frac{\partial\Pi'}{\partial x} + \frac{\overline{\langle c_s\rangle}^2}{\langle c_p\rangle\overline{\theta_v}\Phi}\right)\right] \\ &= -\nabla\cdot\left[\langle c_p\rangle\overline{\rho}\overline{\theta_v}\Pi'\boldsymbol{u}\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\overline{\rho}}{2}\left(\frac{\langle c_p\rangle\overline{\theta_v}\Pi'}{\langle\overline{c_s}\rangle}\right)^2\right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\overline{\rho u}}{2}\left(\frac{\langle c_p\rangle\overline{\theta_v}\Pi'}{\langle\overline{c_s}\rangle}\right)^2\right] + \langle c_p\rangle\overline{\rho}\overline{\theta_v}\Phi\Pi'\end{aligned}\tag{A.73}$$

となる. 但し

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r^{'}) + \frac{1}{\bar{\theta}}\left\{\frac{1}{\bar{\Pi}}(Q_{cond}+Q_{rad}+Q_{dis}) + D_{\theta'}\right\} \\
&+ \frac{1}{\bar{q_d}\langle M\rangle/M_d + \sum \bar{q_v}\langle M\rangle/M_v}\left\{\frac{\langle M\rangle}{M_d}\left(-\frac{\bar{q_d}}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r^{'}) + D_{q_d^{'}}\right)\right. \\
&\left.+\sum\frac{\langle M\rangle}{M_v}\left(-\frac{\bar{q_v}}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r^{'}) + M_{src}(q_v^{'}) + D_{q_v^{'}}\right)\right\} \qquad (A.74)
\end{aligned}
$$

である. (A.71) より任意のスカラー量 ϕ について

$$
\bar{\rho}\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\phi) + \nabla\cdot(\bar{\rho}\phi\boldsymbol{u}) + \phi\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \phi M_{cond} \qquad (A.75)
$$

が成り立つ. (A.64) 及び (A.75) を用いて (A.68) の右辺第 4 項, 第 5 項を書き換えると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\theta'}{\bar{\theta}}\bar{\rho}w &= \frac{\theta'}{\bar{\theta}}\bar{\rho}\frac{dz}{dt} \\
&= \frac{\bar{\rho}}{\bar{\theta}}\theta'\frac{d}{dt}(gz) + \frac{\bar{\rho}gz}{\bar{\theta}}\left[\frac{d\theta'}{dt} + w\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z} - \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}}(Q_{cond}+Q_{rad}+Q_{dis}) - D_\theta\right] \\
&= \frac{\bar{\rho}}{\bar{\theta_v}}\frac{d}{dt}(\theta' gz) + \frac{\bar{\rho}gz}{\bar{\theta}}\left[w\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z} - \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}}(Q_{cond}+Q_{rad}+Q_{dis}) - D_\theta\right] \\
&= \frac{1}{\bar{\theta}}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\theta' gz) + \frac{1}{\bar{\theta_v}}\nabla\cdot(\bar{\rho}\theta_v' gz\boldsymbol{u}) + \frac{\theta' gz}{\bar{\theta}}\left(\frac{\partial\rho'}{\partial t} + M_{cond}\right) \\
&+\frac{\bar{\rho}gz}{\bar{\theta}}\left[w\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z} - \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}}(Q_{cond}+Q_{rad}+Q_{dis}) - D_\theta\right] \\
&= \frac{1}{\bar{\theta}}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\theta' gz) + \nabla\cdot\left(\frac{\bar{\rho}\theta' gz\boldsymbol{u}}{\bar{\theta}}\right) + \frac{\bar{\rho}\theta' gzw}{\bar{\theta}^2}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z} + \frac{\theta_v' gz}{\bar{\theta_v}}\left(\frac{\partial\rho'}{\partial t} + M_{cond}\right) \\
&+\frac{\bar{\rho}gz}{\bar{\theta}}\left[w\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z} - \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}}\left(\frac{LM_{cond}}{\langle c_p\rangle\bar{\rho}} + Q_{rad}+Q_{dis}\right) - D_\theta\right], \qquad (A.76)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g\overline{\Omega_d}q_d'\bar{\rho}w' &= \bar{\rho}\overline{\Omega_d}q_d'\frac{d}{dt}(gz) + \bar{\rho}\overline{\Omega_d}gz\left[\frac{dq_d'}{dt} + w'\frac{\partial\overline{q_d}}{\partial z} + \frac{\overline{q_d}}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r') - D_{q_d}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\overline{\Omega_d}q_d' gz) + \nabla\cdot(\bar{\rho}\overline{\Omega_d}q_d' gz\boldsymbol{u}) - \bar{\rho}q_d' gzw'\frac{\partial\overline{\Omega_d}}{\partial z} \\
&+\overline{\Omega_d}q_d' gz\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho_d' + \rho_v')\right] + \bar{\rho}\overline{\Omega_d}gz\left[w'\frac{\partial\overline{q_d}}{\partial z} + \frac{\overline{q_d}}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r') - D_{q_d}\right]
\end{aligned}
\qquad (A.77)
$$

$$
g\overline{\Omega_v}q_v'\bar{\rho}w' = \bar{\rho}\overline{\Omega_v}q_v'\frac{d}{dt}(gz) + \bar{\rho}\overline{\Omega_d}gz\left[\frac{dq_v'}{dt} + w'\frac{\partial\overline{q_v}}{\partial z} + \frac{\overline{q_v}}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r') - D_{q_v}\right]
$$

$$
\begin{aligned}
= \; & \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}\overline{\Omega_v}q_v' gz) + \nabla\cdot(\overline{\rho}\overline{\Omega_v}q_v' gz\boldsymbol{u}) - \overline{\rho}q_v' gzw'\frac{\partial\overline{\Omega_v}}{\partial z} \\
& +\overline{\Omega_v}q_v' gz\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho_v' + \rho_v')\right] \\
& +\overline{\rho}\overline{\Omega_v}gz\left[w'\frac{\partial\overline{q_v}}{\partial z} + \frac{\overline{q_v}}{\overline{\rho}}\sum M_{fall}(\rho_r') - \frac{1}{\overline{\rho}}M_{src}(\rho_r') - D_{q_v}\right].
\end{aligned}
\tag{A.78}
$$

但し

$$
\overline{\Omega_d} = \frac{\langle M\rangle/M_d}{\overline{q_d}\langle M\rangle/M_d + \sum\overline{q_v}\langle M\rangle/M_v}, \tag{A.79}
$$

$$
\overline{\Omega_v} = \frac{\langle M\rangle/M_v}{\overline{q_d}\langle M\rangle/M_d + \sum\overline{q_v}\langle M\rangle/M_v} \tag{A.80}
$$

である. (A.72), (A.73), (A.76), (A.77), (A.78) より (A.68) は以下のように書き換えられる.

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}\left\{\overline{\rho}\left[K - \frac{\theta_v'}{\overline{\theta_v}}gz + \frac{1}{2}\left(\frac{\langle c_p\rangle\overline{\theta_v}\Pi'}{\overline{\langle c_s\rangle}}\right)^2\right]\right\} + \nabla\cdot\left[\overline{\rho}\left(K - \frac{\theta_v'}{\overline{\theta_v}}gz + \langle c_p\rangle\overline{\theta_v}\Pi'\right)\boldsymbol{u}\right] \\
= \; & -\left(K - \frac{\theta_v'}{\overline{\theta_v}}gz\right)\frac{\partial\rho'}{\partial t} - \left[K + \left(-\frac{\theta_v'}{\overline{\theta_v}} + \frac{L}{\langle c_p\rangle}\right)gz - \langle c_p\rangle\overline{\theta_v}\left(\frac{L}{\langle c_p\rangle\overline{T}} - 1\right)\Pi'\right]M_{cond} \\
& +\overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{D} - \frac{\overline{\rho}gz}{\overline{\theta_v}}D_{\theta_v} + \frac{\overline{\rho}gzw}{\overline{\theta_v}^2}\left(\overline{\theta_v} + \theta_v'\right)\frac{\partial\overline{\theta_v}}{\partial z} - \frac{\overline{\rho}gz}{\overline{T}}\left(Q_{rad} + Q_{dis}\right).
\end{aligned}
\tag{A.81}
$$

計算領域として矩形領域を想定し, 鉛直方向の境界からの流出は無く, 水平境界の両端では周期的であるとすると, 計算領域境界面でのフラックスはゼロとなる. 従って (A.81) を全計算領域にわたって積分すると,

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}\int\left\{\overline{\rho}\left[K - \frac{\theta_v'}{\overline{\theta_v}}gz + \frac{1}{2}\left(\frac{\langle c_p\rangle\overline{\theta_v}\Pi'}{\overline{c}}\right)^2\right]\right\}dV \\
= \; & -\int\left(K - \frac{\theta_v'}{\overline{\theta_v}}gz\right)\frac{\partial\rho'}{\partial t}dV \\
& -\int\left[K + \left(-\frac{\theta_v'}{\overline{\theta_v}} + \frac{L}{\langle c_p\rangle}\right)gz - \langle c_p\rangle\overline{\theta_v}\left(\frac{L}{\langle c_p\rangle\overline{T}} - 1\right)\Pi'\right]M_{cond}dV \\
& +\int\overline{\rho}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{D}dV - \int\frac{\overline{\rho}gz}{\overline{\theta_v}}D_{\theta_v}dV + \int\frac{\overline{\rho}gzw}{\overline{\theta_v}^2}\left(\overline{\theta_v} + \theta_v'\right)\frac{\partial\overline{\theta_v}}{\partial z}dV \\
& -\int\frac{\overline{\rho}gz}{\overline{T}}\left(Q_{rad} + Q_{dis}\right)dV
\end{aligned}
\tag{A.82}
$$

となり, 準圧縮方程式に関するエネルギー方程式が得られる.

(A.82) の左辺は全エネルギーの時間変化を表している．左辺の被積分関数の第 1 項, 第 2 項, 第 3 項はそれぞれ運動エネルギー, 浮力による位置エネルギー, 弾性エネルギー (熱エネルギー) を表す．右辺第 1 項は準圧縮近似によって現れる項であり, 右辺第 2 項, 第 3 項, 第 4 項, 第 5 項, 第 6 項はそれぞれ凝結, 運動量の乱流拡散, 熱の乱流拡散, 基本場の鉛直温位勾配, 放射と散逸によるエネルギー変化率を表している．右辺第 1 項は一般にゼロとなることはないので, 非断熱加熱や乱流拡散や基本場の空間変化が存在しなかったとしても, 右辺がゼロとなることは無い．即ち, 準圧縮方程式では全エネルギーが保存されることはない．

A.3 まとめ

準圧縮方程式系は以下のようにまとめられる．

運動方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial u'}{\partial x} - v'\frac{\partial u'}{\partial y} - w'\frac{\partial u'}{\partial z} - \overline{u}\frac{\partial u'}{\partial x} - \overline{v}\frac{\partial u'}{\partial y} - w'\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \\ &\quad -\langle c_p\rangle\overline{\theta_v}\frac{\partial \Pi'}{\partial x} + D_u \end{aligned}\tag{A.83}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial v'}{\partial x} - v'\frac{\partial v'}{\partial y} - w'\frac{\partial v'}{\partial z} - \overline{u}\frac{\partial v'}{\partial x} - \overline{v}\frac{\partial v'}{\partial y} - w'\frac{\partial \overline{v}}{\partial z} \\ &\quad -\langle c_p\rangle\overline{\theta_v}\frac{\partial \Pi'}{\partial y} + D_v. \end{aligned}\tag{A.84}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial w'}{\partial x} - v'\frac{\partial w'}{\partial y} - w'\frac{\partial w'}{\partial z} - \overline{u}\frac{\partial w'}{\partial x} - \overline{v}\frac{\partial w'}{\partial y} \\ &\quad -\langle c_p\rangle\overline{\theta_v}\frac{\partial \Pi'}{\partial z} + \frac{\theta'}{\overline{\theta}}g + \frac{q'_d\langle M\rangle/M_d + \sum q'_v\langle M\rangle/M_v}{\overline{q_d}\langle M\rangle/M_d + \sum\overline{q_v}\langle M\rangle/M_v}g + D_{w'} \end{aligned}\tag{A.85}$$

圧力方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi'}{\partial t} &= -\overline{u}\frac{\partial \Pi'}{\partial x} - \overline{v}\frac{\partial \Pi'}{\partial y} - \frac{\overline{\langle c_s\rangle}^2}{\langle c_p\rangle\bar{\rho}\bar{\theta_v}^2}\nabla\cdot\left(\bar{\rho}\bar{\theta}_v\boldsymbol{u}'\right) \\ &\quad \frac{\overline{\langle c_s\rangle^2}}{\langle c_p\rangle\bar{\theta}_v}\Biggl[\frac{1}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho'_r) + \frac{1}{\bar{\theta}}\left\{\frac{1}{\overline{\Pi}}(Q_{cond}+Q_{rad}+Q_{dis}) + D_{\theta'}\right\} \\ &\quad + \frac{1}{\bar{q_d}\langle M\rangle/M_d + \sum\bar{q_v}\langle M\rangle/M_v}\Biggl\{\frac{\langle M\rangle}{M_d}\left(-\frac{\bar{q_d}}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho'_r) + D_{q'_d}\right) \\ &\quad + \sum\frac{\langle M\rangle}{M_v}\left(-\frac{\bar{q_v}}{\bar{\rho}}\sum M_{fall}(\rho'_r) + M_{src}(q'_v) + D_{q'_v}\right)\Biggr\}\Biggr] \end{aligned}\tag{A.86}$$

熱の式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \theta'}{\partial t} &= -\left(u' \frac{\partial \theta'}{\partial x} + v' \frac{\partial \theta'}{\partial y} + w' \frac{\partial \theta'}{\partial z} \right) - \overline{u}\frac{\partial \theta'}{\partial x} - w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \\
&\quad + \frac{1}{\bar{\Pi}}(Q_{cond} + Q_{rad} + Q_{dis}) + D_{\bar{\theta}} + D_{\theta'} \qquad \text{(A.87)}
\end{aligned}
$$

比湿の保存式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial q_v'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q_v'}{\partial x} - v'\frac{\partial q_v'}{\partial y} - w'\frac{\partial q_v'}{\partial z} - \overline{u}\frac{\partial q_v'}{\partial x} - \overline{v}\frac{\partial q_v'}{\partial y} - w'\frac{\partial \overline{q_v}}{\partial z} \\
&\quad - \frac{\overline{q_v}}{\overline{\rho}} \sum M_{fall}(\rho_r') + \frac{1}{\overline{\rho}} M_{src}(\rho_v') + D_{\overline{q_v}} + D_{q_v'}, \qquad \text{(A.88)} \\
\frac{\partial q_c'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q_c'}{\partial x} - v'\frac{\partial q_c'}{\partial y} - w'\frac{\partial q_c'}{\partial z} - \overline{u}\frac{\partial q_c'}{\partial x} - \overline{v}\frac{\partial q_c'}{\partial y} \\
&\quad + \frac{1}{\overline{\rho}} M_{src}(\rho_c') + D_{q_c'}, \qquad \text{(A.89)} \\
\frac{\partial q_r'}{\partial t} &= -u'\frac{\partial q_r'}{\partial x} - v'\frac{\partial q_r'}{\partial y} - w'\frac{\partial q_r'}{\partial z} - \overline{u}\frac{\partial q_r'}{\partial x} - \overline{v}\frac{\partial q_r'}{\partial y} \\
&\quad + \frac{1}{\overline{\rho}} M_{fall}(\rho_r') + \frac{1}{\overline{\rho}} M_{src}(\rho_r') + D_{q_r'}. \qquad \text{(A.90)}
\end{aligned}
$$

付 録B　乱流パラメタリゼーション

B.1　乱流パラメタリゼーション

Klemp and Wilhelmson (1978) および CReSS で用いられている 1.5 次のクロージャーを用いる. このとき乱流運動エネルギーの時間発展方程式は,

$$\frac{dE_{turb}}{dt} = B + S + D_E - \left(\frac{C_\varepsilon}{l}\right) E_{turb}^{\frac{3}{2}} \tag{B.1}$$

と与えられる. l は混合距離で, $l = (\Delta x \Delta z)^{1/2}$ とする. B と S はそれぞれ浮力と流れの変形速度による乱流エネルギー生成項, D_E は乱流エネルギー拡散項, 第 4 項は乱流エネルギーの消散項であり,

$$B = \frac{g_j}{\bar{\theta}} \overline{u_j' \theta'}, \tag{B.2}$$

$$S = -\overline{(u_i' u_j')} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \tag{B.3}$$

$$D_E = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K_m \frac{\partial E_{turb}}{\partial x_j} \right) \tag{B.4}$$

である. 1.5 次のクロージャーでは, レイノルズ応力を以下のように定義する.

$$\overline{(u_i' u_j')} = -K_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} E_{turb}, \tag{B.5}$$

$$\overline{u_j' \theta} = -K_h \frac{\partial \theta}{\partial x_j}. \tag{B.6}$$

ここで K_m は運動量に対する渦粘性係数であり, E はサブグリッドスケールの乱流運動エネルギー, K_h は渦拡散係数である. K_m, K_h は E を用いて以下のように与えられる.

$$K_m = C_m E^{\frac{1}{2}} l, \tag{B.7}$$

$$K_h = 3 K_m. \tag{B.8}$$

パラメータ C_ε, C_m はともに 0.2 である.

B.1.1 乱流運動エネルギー方程式の導出

Klemp and Wilhelmson (1978) では (B.1) について,「Deardroff (1975), Mellor and Yamada (1974), Schemm and Lipps (1976) で用いられている式と類似のものである」とだけ記述され, その導出の詳細については解説されていない. それゆえ大気大循環モデルでよく用いられている Mellor and Yamada (1974, 1982) のパラメタリゼーションとの対応が不明瞭である. そこで以下では Mellor and Yamada (1973, 1974) の定式化の手順に沿って式 (B.1), (B.5), (B.6) の導出を行う.

考えているサブグリッドスケール内において, 密度は一定, 動粘性係数や拡散係数などの物理定数は一定とする. 出発点となる方程式は, Mellor and Yamada (1973) の式 (7) および (8)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} &+ \frac{\partial}{\partial x_k}\left[u_k \overline{u'_i u'_j} + \overline{u'_k u'_i u'_j} - \nu \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u'_i u'_j}\right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{p u'_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{p u'_j} + f_k(\varepsilon_{jkl}\overline{u'_l u'_i} + \varepsilon_{ikl}\overline{u'_l u'_j}) \\ &= -\overline{u'_k u'_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \overline{u'_k u'_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \beta(g_j \overline{u'_i \theta} + g_i \overline{u'_j \theta}) \\ &+ \overline{p\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)} - 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}},\end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{u'_j \theta'}}{\partial t} &+ \frac{\partial}{\partial x_k}\left[u_k \overline{\theta' u'_j} + \overline{u'_k u'_j \theta'} - \alpha \overline{u'_j \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} - \nu \overline{\theta' \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{p\theta'} + \varepsilon_{jkl} f_k \overline{u'_l \theta'} \\ &= -\overline{u'_j u'_k}\frac{\partial \theta}{\partial x_k} - \overline{\theta' u'_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \beta g_j \overline{(\theta')^2} + \overline{p\frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} - (\alpha+\nu)\overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}\frac{\partial \theta'}{\partial x_k}}.\end{aligned} \tag{B.10}$$

および, (B.9) において $i = j$ とした式

$$\begin{aligned}\frac{\partial q^2}{\partial t} + u_k \frac{\partial q^2}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u'_k u'_j u'_j} - \nu \frac{\partial q^2}{\partial x_k}\right) &= -\overline{u'_j u'_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{p u'_j} \\ &\quad + g_j \beta \overline{u'_j \theta'} - 2\nu \overline{\left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}\right)}\end{aligned} \tag{B.11}$$

ここで

$$\begin{aligned} q &\equiv \sqrt{\overline{(u'_i)^2}} \\ &= \sqrt{2E_{turb}} \end{aligned}$$

で, ν, α, β はそれぞれ動粘性係数, 拡散係数および熱膨張率, g_j は重力加速度ベクトルの第 j 成分である.

(B.9) および (B.10) に現れる圧力に関する相関項および 3 次の相関量については以下の仮定をおく.

1. $\overline{p\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)}$ (圧力による運動エネルギーの再分配)

$$
= -\frac{q}{3l_1}(\overline{u_i'u_j'} - \frac{\delta_{ij}}{3}q^2) + Cq^2\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),
$$

とおく. ここで l_1 は乱流の特徴的なスケール, C は無次元の定数である.

2. $\overline{p\frac{\partial \theta'}{\partial x_k}}$ (圧力による熱エネルギー再分配)
1. の導出と同様の考察によって,

$$
= -\frac{q}{3l_2}\overline{u_i'\theta'}
$$

とおく. ここでの乱れのスケールは l_2 とする.

3. $2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}$ (粘性による散逸)
粘性に関与するような小スケールの現象は等方的とみて q のみで表現する.

$$
= \frac{2}{3}\frac{q^3}{\Lambda_1}\delta_{ij}.
$$

ここで Λ_1 は粘性の及ぶ特徴的スケールである.

4. $(\alpha+\nu)\overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}\frac{\partial \theta'}{\partial x_k}}$

$$
= 0
$$

とおく.

5. $\overline{u_k'u_i'u_j'}, \overline{u_k'u_j'\theta'}, \overline{u_k'(\theta')^2}$
速度変動による $\overline{u_k'u_i'u_j'}, \overline{u_k'u_j'\theta'}, \overline{u_k'(\theta')^2}$ と考え次のようにおく.

$$
\begin{aligned}
\overline{u_k'u_i'u_j'} &= -q\lambda_1\left(\frac{\partial\overline{u_i'u_j'}}{\partial x_k}+\frac{\partial\overline{u_i'u_k'}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u_j'u_j'}}{\partial x_i}\right),\\
\overline{u_k'u_j'\theta'} &= -q\lambda_2\left(\frac{\partial\overline{u_k'\theta'}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u_j'\theta'}}{\partial x_k}\right),\\
\overline{u_k'(\theta')^2} &= -q\lambda_3\frac{\partial\overline{(\theta')^2}}{\partial x_k}.
\end{aligned}
$$

ここで $\lambda_i (i=1,2,3)$ はそれぞれの特徴的スケールである.

6. $\overline{pu'_i}, \overline{p\theta'}$ (圧力変動による拡散)

$$\overline{pu'_i} = \overline{p\theta'} = 0$$

とする. この近似は Deardroff (1975), Schemm and Lipps (1976) でも行われている.

7. $f_k(\varepsilon_{jkl}\overline{u'_l u'_i} + \varepsilon_{ikl}\overline{u'_l u'_j})$, $f_k\varepsilon_{jkl}\overline{u'_l\theta'}$ (コリオリ項)

$$f_k\varepsilon_{jkl}\overline{u'_l u'_i} = f_k\varepsilon_{ikl}\overline{u'_l u'_j} = 0,$$

$$f_k\varepsilon_{jkl}\overline{u'_l\theta'} = 0$$

とする. この近似は Deardroff (1975), Schemm and Lipps (1976) でも行われている.

8. $\alpha\overline{u'_j\frac{\partial\theta'}{\partial x_k}}$, $\nu\overline{\theta'\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}$

$$= 0 \tag{B.12}$$

とする.

以上の近似を (B.9), (B.10), (B.11) に対して行うと, 以下の式を得る.

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{u'_i u'_j}}{dt} &- \frac{\partial}{\partial x_k}\left[q\lambda_1\left(\frac{\partial\overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} + \frac{\partial\overline{u'_i u'_k}}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u'_j u'_i}}{\partial x_i}\right) - \nu\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u'_i u'_j}\right] \\
&= -\overline{u'_k u'_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \overline{u'_k u'_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \beta(g_j\overline{u'_i\theta'} + g_i\overline{u'_j\theta'}) \\
&\quad -\frac{q}{3l_1}(\overline{u'_i u'_j} - \frac{\delta_{ij}}{3}q^2) + Cq^2\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\frac{q^3}{\Lambda_1}\delta_{ij}, \qquad \text{(B.13)} \\
\frac{d\overline{u'_j\theta'}}{dt} &- \frac{\partial}{\partial x_k}\left[q\lambda_2\left(\frac{\partial\overline{u'_k\theta'}}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u'_j\theta'}}{\partial x_k}\right)\right] \\
&= -\overline{u'_j u'_k}\frac{\partial\theta}{\partial x_k} - \overline{\theta' u'_k}\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} - \beta g_j\overline{(\theta')^2} - \frac{q}{3l_2}\overline{u'_j\theta'}, \qquad \text{(B.14)} \\
\frac{dq^2}{dt} &+ \frac{\partial}{\partial x_k}\left[q\lambda_1\left(2\frac{\partial q^2}{\partial x_k} + \frac{\partial\overline{u'_j u'_k}}{\partial x_j}\right) - \nu\frac{\partial q^2}{\partial x_k}\right] \\
&= -2\overline{u'_j u'_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + 2g_j\beta\overline{u'_j\theta'} - 2\frac{q^3}{\Lambda_1} \qquad \text{(B.15)}
\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_k\frac{\partial}{\partial x_k}$$

である. これらは Mellor and Yamada (1974) の Level 4 モデルの式に対応する式である.

式 (B.13), (B.14), (B.15) に対し, さらに以下の近似を加える.

- 式 (B.13) は, 右辺の第 4 項と第 5 項だけ考慮する. さらに (B.16) では $C = 1/3$ とする.
- 式 (B.14) は, 右辺の第 1 項と第 4 項だけ考慮する. さらに $\overline{u'_j u'_k} \sim q^2\delta_{jk}/3$ とする.
- 式 (B.15) は, 左辺の 3 次相間項を無視する.

これらの近似を行うと, 式 (B.13), (B.14), (B.15) は

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{\delta_{ij}}{3}q^2 - ql_1\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{B.16}$$

$$\overline{u'_j \theta'} = -ql_2\frac{\partial \theta}{\partial x_j} \tag{B.17}$$

$$\frac{dq^2}{dt} = -2\overline{u'_j u'_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + 2g_j\beta\overline{u'_j\theta'} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\nu\frac{\partial q^2}{\partial x_k}\right] - 2\frac{q^3}{\Lambda_1} \tag{B.18}$$

となる. (B.16) は Mellor and Yamada (1974) の Level 1 モデルの $\overline{u'_i u'_j}$ の式である. (B.17) は Mellor and Yamada (1974) の Level 1 モデルの $\overline{u'_j\theta'}$ の式で $\overline{(\theta')^2}$ の項を無視したものに対応する. (B.18) は Mellor and Yamada (1974) の Level 3 モデルの q^2 の式において, 3 次相関項を無視し粘性拡散項を残したものに対応する.

$ql_1 = K_m, ql_2 = K_h$ とし, q を E_{turb} で表し動粘性係数を乱流拡散係数で置き換えると

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3}\delta_{ij}E_{turb} - K_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{B.19}$$

$$\overline{u'_j \theta'} = -K_h\frac{\partial \theta}{\partial x_k} \tag{B.20}$$

$$\frac{dE_{turb}}{dt} = -\overline{u'_j u'_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + g_j\beta\overline{u'_j\theta'} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[K_m\frac{\partial q^2}{\partial x_k}\right] - \frac{2^{3/2}}{\Lambda_1}E_{turb}^{3/2} \tag{B.21}$$

となる. 理想気体の場合 $\beta = 1/\theta$ であることに注意すると, 式 (B.21) は散逸項の係数を除き (B.1) に一致する.

以上より, Klemp and Wilhelmson (1978) の乱流パラメタリゼーションは, Mellor and Yamada (1974) の Level 3 モデルと Level 1 モデルとを組みあわせたものと理

解することができる. Klemp and Wilhelmson (1978) と同様に乱流運動エネルギーのみ予報し他の相関量は診断的に求めるモデルとして Mellor and Yamada (1974) の Level 2.5 モデルがある. しかし Level 2.5 モデルは Level 3 モデルと Level 2 モデルとの組合せであることに注意が必要である.

B.1.2　2 次元の場合の表現

2 次元の場合の (B.1) 式の各項を書き下す. 浮力による乱流エネルギー生成項は,

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{g_j}{\overline{\theta}}\overline{u_j'\theta'} \\
&= -\frac{g}{\overline{\theta}}\overline{w'\theta'} \\
&= -\frac{g}{\overline{\theta}}\left(K_h\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)
\end{aligned}
\tag{B.22}
$$

である. 次に流れの変形速度による乱流エネルギー生成項 S は,

$$
\begin{aligned}
S &= -\overline{(u_i'u_j')}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
&= -\left\{-K_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{2}{3}\delta_{ij}E_{turb}\right\}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
&= \left\{K_m\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\delta_{ij}E_{turb}\right\}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
&= \left\{K_m\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}\delta_{1j}E_{turb}\right\}\frac{\partial u}{\partial x_j} \\
&\quad +\left\{K_m\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial z}\right)-\frac{2}{3}\delta_{3j}E_{turb}\right\}\frac{\partial w}{\partial x_j} \\
&= \left\{2K_m\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}E_{turb}\right\}\frac{\partial u}{\partial x}+K_m\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z} \\
&\quad +K_m\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial w}{\partial x}+\left\{2K_m\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{2}{3}E_{turb}\right\}\frac{\partial w}{\partial z} \\
&= 2K_m\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\}+K_m\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\
&\quad -\frac{2}{3}E_{turb}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)
\end{aligned}
\tag{B.23}
$$

である. 乱流エネルギー拡散項 D_E は,

$$
D_E = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(K_m\frac{\partial E_{turb}}{\partial x_j}\right),
$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(K_m \frac{\partial E_{turb}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_m \frac{\partial E_{turb}}{\partial z}\right) \tag{B.24}$$

である. 以上の (B.22), (B.23), (B.24) 式を (B.1) 式に代入することで以下の式を得る.

$$\begin{aligned}\frac{dE_{turb}}{dt} &= -\frac{g}{\overline{\theta}}\left(K_h \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) \\ &\quad +2K_m\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\} + K_m\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}E_{turb}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ &\quad +\frac{\partial}{\partial x}\left(K_m \frac{\partial E_{turb}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_m \frac{\partial E_{turb}}{\partial z}\right) - \left(\frac{C_\varepsilon}{l}\right)E_{turb}^{\frac{3}{2}}.\end{aligned} \tag{B.25}$$

(B.7) を用いて K_m を E_{turb} で書き換えると, 以下の式が得られる.

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_{turb}}{\partial t} &= -u'\frac{\partial E_{turb}}{\partial x} - w'\frac{\partial E_{turb}}{\partial z} \\ &\quad -3\frac{gC_m l}{\overline{\theta_v}}E_{turb}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \theta_v}{\partial z} + 2C_m l E_{turb}^{\frac{1}{2}}\left\{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)^2\right\} \\ &\quad +C_m l E_{turb}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}E_{turb}\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z}\right) \\ &\quad +\frac{\partial}{\partial x}\left(C_m l E_{turb}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial E_{turb}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(C_m l E_{turb}^{\frac{1}{2}}\frac{\partial E_{turb}}{\partial z}\right) - \frac{C_\varepsilon}{l}E_{turb}^{\frac{3}{2}}.\end{aligned} \tag{B.26}$$

付 録C　雲微物理過程

Kessler(1969) に基づく雲微物理パラメタリゼーションの, 終端速度 V_D, 雲水の衝突併合による雨水比湿の変化率 CL_{cr}, 平均終端速度 V_{term}, 蒸発による雨水比湿の変化率 EV_{rv} について解説する[1].

C.1　雨粒の終端速度

Newton の抵抗法則より球体の抵抗力 F_D は

$$F_D = \frac{1}{8}\rho V_D^2 C_D D^2 \tag{C.1}$$

と表される. ここで C_D は抵力係数であり, 一般にレイノルズ数の関数である. 雨滴の落下のようにレイノルズ数が大きい現象の場合, レイノルズ数の定義により, 粘性力は流れ場にほとんど寄与しなくなる. このとき C_D はレイノルズ数に依存しない定数となる. 抵抗力と重力の釣合いを考えると

$$\frac{1}{6}\pi\rho_w D^3 g = \frac{1}{8}\rho V_D^2 C_D D^2 \tag{C.2}$$

となる. (C.2) を V_D について解くと,

$$V_D = \left(\frac{4\rho_w g D}{3C_D\rho}\right)^{1/2} \tag{C.3}$$

となる. Kessler(1969) では $\rho_w = 10^3$[kg/m^3], $g = 9.8$[m/s^2], $\rho_0 = 1.2$ [kg/m^3], $C_D = 0.644$ として

$$V_D = 130\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{0.5} D^{0.5} \tag{C.4}$$

[1]本章の内容は Ogura and Takahashi (1971), 浅井 (1983) を参考にした.

としている[2]．但し ρ_0 は地表面での大気密度である．他の惑星大気においても $C_D = 0.644$ であるとみなすと，

$$V_D = 1.4389 \left(\frac{\rho_w g D}{\rho} \right)^{1/2} \tag{C.5}$$

が得られる．

C.2 雲水の衝突併合

雲水の衝突併合による雨水混合比の変化率 CL_{cr} は, 直径 D の単一の雨粒の衝突併合による質量変化率 $(dm(D)/dt)_{cr}$ と D から $D + dD$ の範囲の直径を持つ雨粒の数 N_D を用いて

$$CL_{cr} = \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \left(\frac{dm}{dt} \right)_{cr} N_D \, dD \tag{C.6}$$

と表される．$(dm(D)/dt)_{cr}$ は,

$$\left(\frac{dm}{dt} \right)_{cr} = \frac{\pi}{4} D^2 V_D E \rho q_c \tag{C.7}$$

と表される．ここで V_D は雨粒の落下速度, E は雨粒と衝突した雲粒のうち雨粒に併合される割合を表す係数 (捕捉係数) である．

雨粒のサイズ分布関数と雨粒の落下速度 V_D を以下のように仮定する．

$$N_D = N_0 \exp(-\lambda D), \tag{C.8}$$

$$V_D = 1.4389 \left(\frac{\rho_w g D}{\rho} \right)^{1/2}. \tag{C.9}$$

ここで N_0, λ はパラメータである．式 (C.9) の分布は一般にマーシャル・パルマー型分布 (Marshall and Palmer, 1948) と呼ばれる．Kessler (1969) では $N_0 = 10^7$ とする．これを式 (C.6) に代入すると,

$$\begin{aligned} CL_{cr} &= \frac{1.4389\pi}{4} \left(\frac{\rho_w g D}{\rho} \right)^{1/2} E N_0 q_c \int_0^\infty D^{2.5} \exp(-\lambda D) \, dD \qquad \text{(C.10)} \\ &= \frac{1.4389\pi}{4} \left(\frac{\rho_w g D}{\rho} \right)^{1/2} E N_0 q_c \frac{3.75}{\lambda^3} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \end{aligned}$$

[2]Kessler(1969) では C_D をどのように決めたのかについては書かれていない． Gunn and Kinzer(1949) によると，レイノルズ数が 3000 程度である雨粒の C_D の値は 0.66 となるので, Kessler(1969) は系の特徴的なレイノルズ数が 3000 程度であると想定して C_D の値を決めたのかも知れない．

$$
= \frac{1.4389 \times 3.75\pi^{3/2}}{8} \left(\frac{\rho_w g D}{\rho} \right)^{1/2} E N_0 q_c \lambda^{-3.5} \tag{C.11}
$$

を得る．ここで E は D によらないと仮定した．Kessler (1969) では $E = 1$ とする．

雨粒のサイズ分布曲線の傾きを表すパラメータ λ は, 以下の式を用いて雨水比湿 q_r で置き換える．

$$
\begin{aligned}
q_r &= \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \rho_w \frac{\pi}{6} D^3 N_D \, dD \\
&= \frac{\pi N_0 \rho_w}{6\rho} \int_0^\infty D^3 \exp(-\lambda D) \, dD \\
&= \frac{\pi N_0 \rho_w}{6\rho} \frac{6}{\lambda^4} \\
&= \frac{\pi N_0 \rho_w}{\rho} \lambda^{-4}.
\end{aligned} \tag{C.12}
$$

ここで ρ_w は液相の密度である．これを λ について解き, 式 (C.11) に代入すると,

$$
\begin{aligned}
CL_{cr} &= \frac{1.4389 \times 3.75\pi^{3/2}}{8} \left(\frac{\rho_w g D}{\rho} \right)^{1/2} E N_0 q_c \left(\frac{\rho q_r}{\pi N_0 \rho_w} \right)^{0.875} \\
&= \frac{1.4389 \times 3.75\pi^{5/8}}{8} E N_0^{1/8} g^{1/2} \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)^{0.375} q_c q_r^{0.875} \\
&= 10.344 g^{1/2} \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)^{0.375} q_c q_r^{0.875}
\end{aligned} \tag{C.13}
$$

となる．最後の式変形では, $N_0 = 10^7, E = 1$ を代入した．

C.3　平均終端速度

平均終端速度 V_{term} は雨滴の鉛直フラックス F_r, 雨滴密度 ρ_r により

$$
V_{term} = \frac{F_r}{\rho_r} \tag{C.14}
$$

と表される．ρ_r, F_r はそれぞれ以下のように表される．

$$
\rho_r = \int_0^\infty N_D m dD, \tag{C.15}
$$

$$
F_r = \int_0^\infty N_D m V_D dD. \tag{C.16}
$$

ここで m は直径 D の雨滴の質量であり,

$$m = \frac{\pi}{6} D^3 \rho_w \tag{C.17}$$

と書ける. (C.8), (C.9), (C.17) を (C.15), (C.16) に適用すると,

$$\begin{aligned}
\rho_r &= \int_0^\infty N_0 \exp(-\lambda D) \frac{\pi}{6} \rho_w D^3 dD \\
&= \frac{\pi \rho_w N_0}{\lambda^4} && \text{(C.18)} \\
F_r &= \int_0^\infty N_0 \exp(-\lambda D) \frac{\pi}{6} \rho_w D^3 1.4389 \left(\frac{\rho_w g D}{\rho} \right)^{1/2} dD \\
&= \frac{1.4389 \times 105 \pi^{3/2}}{96} \rho_w^{3/2} g^{1/2} \rho^{-1/2} N_0 \lambda^{-9/2} && \text{(C.19)}
\end{aligned}$$

となる. (C.18) を (C.19) に代入して λ を消去すると,

$$\begin{aligned}
F_r &= \frac{1.4389 \times 105 \pi^{3/2}}{96} \rho_w^{3/2} g^{1/2} \rho^{-1/2} N_0 \left(\frac{\rho_r}{\pi N_0 \rho_w} \right)^{9/8} \\
&= \frac{1.4389 \times 105 \pi^{3/8}}{96} \rho_w^{3/8} g^{1/2} \rho^{-1/2} N_0^{-1/8} \rho_r^{9/8} && \text{(C.20)}
\end{aligned}$$

となる. (C.14) に (C.20) を代入すると

$$\begin{aligned}
V_{term} &= \frac{1.4389 \times 105 \pi^{3/8}}{96} \rho_w^{3/8} g^{1/2} \rho^{-1/2} N_0^{-1/8} \rho_r^{1/8} \\
&\approx 0.3224 g^{1/2} \left(\frac{\rho_w}{\rho} \right)^{0.375} q_r^{0.125} && \text{(C.21)}
\end{aligned}$$

が得られる.

C.4 雨水の蒸発

蒸発による雨水混合比の変化率 EV_{rv} は, 式 (C.6) と同様に

$$EV_{rv} = \frac{1}{\rho_d} \int_0^\infty \left(\frac{dm}{dt} \right)_{ev} N_D \, dD \tag{C.22}$$

と表される. ここで $(dm(D)/dt)_{ev}$ は直径 D の単一の雨粒の蒸発による質量変化率である.

雨水の蒸発は雨粒の表面からの水蒸気の拡散によって律速されると仮定する. 雨粒周囲の水蒸気フラックスを F とすると, 雨粒の質量の変化率は

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{ev} = -4\pi r_d^2 F(r_d) \tag{C.23}$$

と表される. ここで r は雨粒中心からの距離, r_d は雨粒の半径で, F は

$$F = -K_d \frac{d\rho_v}{dr}$$

と表される. ρ_v は水蒸気の密度, K_d は水蒸気の拡散係数である. 雨粒の周囲では水蒸気フラックスの収束発散はないと仮定すると,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F\right) = 0$$

が成り立つ. これを積分し

$$\rho_v = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

境界条件 $r = r_d$ で $\rho_v = \rho_{v,s}$, $r = \infty$ で $\rho_v = \rho_{v,\infty}$ を適用すると,

$$C_1 = (\rho_{v,\infty} - \rho_{v,s}) r_d, \quad C_2 = \rho_{v,\infty}$$

これより, 雨粒表面での拡散による水蒸気フラックスは

$$\begin{aligned} F(r_d) &= -K_d \left.\frac{d\rho_v}{dr}\right|_{r=r_d} \\ &= K_d \frac{\rho_{v,s} - \rho_{v,\infty}}{r_d} \end{aligned} \tag{C.24}$$

よって,

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{ev} = -4\pi r_d K_d (\rho_{v,s} - \rho_{v,\infty}) \tag{C.25}$$

と表される. 雨粒が落下しながら蒸発する場合には, K_d に補正項のついた

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{ev} = -4\pi r_d \left(1 + \frac{Fr}{s}\right) K_d (\rho_{v,s} - \rho_{v,\infty}) \tag{C.26}$$

が用いられる. ここで F は換気因子, s は雨粒表面でのクヌーセン層の厚さである[3].

Kessler (1969) では, (C.26) の右辺の項を以下のように近似する.

$$\begin{aligned} 4\pi r_d \left(1 + \frac{Fr}{s}\right) &\sim 2.24 \times 10^3 D^{1.6}, \\ K_d (\rho_{v,s} - \rho_{v,\infty}) &\sim 10^{-5} (\rho_{v,s} - \rho_{v,\infty}). \end{aligned}$$

[3] この式の導出は要確認.

このとき (C.26) は

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_{ev} \sim -2.24 \times 10^{-2}(\rho_{v,s} - \rho_{v,\infty})D^{1.6} \tag{C.27}$$

となる. これを式 (C.22) に代入し, 雨粒のサイズ分布として (C.8) を仮定すると,

$$\begin{aligned}
EV_{rv} &= -\frac{1}{\rho_d}2.24 \times 10^{-2}(q_{v,s} - q_{v,\infty})\int_0^\infty D^{1.6}N_D\,dD, \\
&= -2.24 \times 10^{-2}(q_{v,s} - q_{v,\infty})\int_0^\infty D^{1.6}N_0\exp(-\lambda D)\,dD \\
&= -2.24 \times 10^{-2}(q_{v,s} - q_{v,\infty})N_0\frac{\Gamma(2.6)}{\lambda^{13/5}} \\
&= -2.24 \times 10^{-2}\Gamma(2.6)(\pi\rho_w)^{-0.65}N_0^{0.35}(q_{v,s} - q_{v,\infty})(\rho_d q_r)^{0.65} \\
&= -1.7 \times 10^{-4}N_0^{0.35}(q_{v,s} - q_{v,\infty})(\rho_d q_r)^{0.65} \\
&= -4.81 \times 10^{-2}(q_{v,s} - q_{v,\infty})(\rho_d q_r)^{0.65}
\end{aligned} \tag{C.28}$$

最後の式変形を行う際には (C.12) 式の関係を用いて λ を消去し, $\Gamma(2.6) = 1.4296245$, $N_0 = 10^7$ とした[4].

[4] Kessler (1969) では最終的には

$$EV_{rv} = 4.85 \times 10^{-2}(q_{v,s} - q_{v,\infty})(\rho_d q_r)^{0.65}$$

としている.

付 録D　変数リスト

C_ε	:	乱流拡散係数のための定数
C_m	:	乱流拡散係数のための定数
c_s	:	音波
$\bar{c_s}$	:	基本場の音波
$\langle c_p \rangle$	:	平均定圧比熱
$\langle c_v \rangle$	:	定積比熱
D_*	:	サブグリッドスケールの乱流拡散項
E_{turb}	:	サブグリッドスケールの運動エネルギー
f	:	コリオリパラメータ
g	:	重力加速度
K_h	:	熱に対する乱流拡散係数
K_m	:	運動量に対する乱流拡散係数
l	:	混合距離
p	:	圧力
$\overline{p}$	:	基本場の圧力
p_0	:	地表面での基準圧力
Π	:	エクスナー関数
$\overline{\Pi}$	:	基本場のエクスナー関数
q_v	:	比湿
q_c	:	雲水比湿
q_r	:	雨水比湿
R_d	:	乾燥成分の気体定数
R_d	:	湿潤成分の気体定数
$\langle R \rangle$	:	平均気体定数
$\overline{\rho}$	:	基本場の密度
ρ_0	:	地表面での密度
S	:	飽和比
t	:	時間座標
$\overline{T}$	:	基本場の温度
$\overline{\theta}$	:	基本場の温位
θ	:	温位偏差
u_i	:	速度, $i = 1, 3$ $(u_1, u_3) = (u, w)$
x_i	:	空間 z 座標, $i = 1, 3$ $(x_1, x_3) = (x, z)$

謝辞

本資源は, 地球流体電脳倶楽部のインターネット上での学術知識の集積と活用の実験の一環として

http://www.gfd-dennou.org/arch/deepconv/

において公開されているものである.