4.4 完全流体中の音波

4.4.1 音波の線型方程式

ここでは圧縮性流体の微小擾乱の振る舞いを考える.
無限領域における, 圧縮性を持つ理想流体を考える. 外力 (重力等) 無し, 起きる現象は全て断熱過程であると仮定する. 基礎方程式は以下の通り.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i},\\
&\frac{ds}{dt} = 0.
\end{aligned}$$

境界条件として, 無限遠で物理量は有限値を持つ, という条件を付けておく.
基本場として次のような状態を考える.

- 運動無し
- 熱力学的に一様・一定 ($\rho = \rho_0, p = p_0$)

断熱の式を書き換えておく.

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho \frac{ds}{dt} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s (\rho, s)\frac{d\rho}{dt} = c_s^2(\rho, s)\frac{d\rho}{dt}$$

ここで,

$$c_s^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s [m/sec] \tag{4.27}$$

とおいた.
静止状態に微小な擾乱を加え, 次のように表記する.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}',\\
s &= s_0 + s',\\
p &= p_0 + p',\\
\rho &= \rho_0 + \rho'.
\end{aligned}$$

$\bullet'$ はその大きさが微小であることを表現する.

これらの表現を基礎方程式に代入すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_0 v'_j) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho' v'_j) = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 v'_i) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho' v'_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_0 v'_i v'_j) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho' v'_i v'_j) = -\frac{\partial p'}{\partial x_i}, \\
&\frac{\partial}{\partial t}(p_0 + p') + v'_j \frac{\partial}{\partial x_j}(p_0 + p') = c_s^2(\rho_0 + \rho', s_0 + s') \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') + v'_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_0 + \rho') \right\}
\end{aligned}
$$

線形化 ($'$ のついている量は小さいので, その一次だけをのこし, 二次以上の項は無視する) を施すと, 以下の式が得られる.

$$
\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v'_j}{\partial x_j} = 0, \tag{4.28}
$$

$$
\frac{\partial v'_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_i}, \tag{4.29}
$$

$$
\frac{\partial p'}{\partial t} = c_s^2(\rho_0, s_0) \frac{\partial \rho'}{\partial t} \tag{4.30}
$$

ここで, 第三式 (熱の式) は以下のようにして得られる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial p'}{\partial t} + v'_j \frac{\partial p'}{\partial x_j} = c_s^2(\rho_0 + \rho', s_0 + s') \left\{ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + v'_j \frac{\partial \rho'}{\partial x_j} \right\}, \\
&\frac{\partial p'}{\partial t} = \left\{ c_s^2(\rho_0, s_0) + \left(\frac{\partial c_s^2}{\partial \rho} \right)_s (\rho_0, s_0) \rho' + \left(\frac{\partial c_s^2}{\partial s} \right)_\rho (\rho_0, s_0) s' \right\} \frac{\partial \rho'}{\partial t}, \\
&\frac{\partial p'}{\partial t} = c_s^2(\rho_0, s_0) \frac{\partial \rho'}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

基本場は熱力学的に一様なので $c_s^2(\rho_0, s_0)$ は場所によらない.

4.4.2 波動方程式

運動方程式と連続の式 から $\boldsymbol{v}$ を消去すれば

$$
\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i'^2}.
$$

これと熱の式により

$$
\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i'^2} = 0. \tag{4.31}
$$

これは波動方程式, すなわち, 音波の式であり, c_s は音速である.

波動方程式で平面波解を求める. 平面波とは全ての物理量が一つの座標座標と時間のみに依存する波. 平面波解を仮定すると, 波動方程式は

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0$$

となる. ここで変数変換をおこなう.

$$\xi = x - ct,$$
$$\eta = x + ct,$$

波動方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} &= 0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c_s}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c_s}\frac{\partial}{\partial t}\right)p' &= 0,\\ \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta}p' &= 0\end{aligned}$$

となる. この式を ξ で積分すると,

$$\frac{\partial p'}{\partial \eta} = F(\eta)$$

$F(\eta)$ は η の任意関数である. 更に, η で積分すると

$$p' = \int F(\eta)d\eta + F'(\xi)$$

よって,

$$p' = f_1(\eta) + f_2(\xi)$$

となる. f_1 と f_2 は任意関数である. よって, 波動方程式の一般解が

$$p' = f_1(x + ct) + f_2(x - ct)$$

と得られた.
補足

1. 音速について:
$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s$ は密度の変化のしやすさを表す指標である. c_s はこの逆数の平方根なので, 固い物質ほど音速は大きいことになる.

音速は一般的に次のように表現されることもある (Flierl, 2015, FDEPS レクチャー):

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s &= \frac{\partial(\rho, s)}{\partial(p, s)} = \frac{\partial(\rho, s)}{\partial(p, T)}\frac{\partial(p, T)}{\partial(p, s)} = \frac{\partial(\rho, s)}{\partial(p, T)}\frac{\partial(p, T)}{\partial(p, s)} \\
&= \left\{\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T\right\}\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p \\
&= \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T - \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p \\
&= \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T - \frac{T}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \\
&= \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T - \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p
\end{aligned}
$$

ここで, 熱力学関係式

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T &= -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, \\
\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T &= -\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{1}{\rho}\right)_p, \\
\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T &= \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

を使うと,

$$
\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T - \frac{T}{c_p}\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T - \frac{T}{c_p\rho^2}\left\{\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p\right\}^2 \tag{4.33}
$$

よって,

$$
c_s^2 = \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T - \frac{T}{c_p\rho^2}\left\{\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p\right\}^2\right]^{-1} \tag{4.34}
$$

理想気体の場合: $pV = p/\rho = RT/\mu$ (μ は分子量), 断熱過程では $p \sim \rho^\gamma$ (γ は比熱比, c_p/c_v) なので

$$
c_s = \sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma\frac{RT}{\mu}} \sim \sqrt{T}
$$

空気では $\gamma = 7/5$, $\mu = 29 \times 10^{-3}$ kg/mol なので, 常温における c_s はおよそ 300 m sec^{-1} となる.

水中の音速は 1.5×10^3 m sec^{-1}, 固体中の音速は 数 km sec^{-1} 非圧縮流体極限 (ρ = 一定) では $c_s = \infty$

2. モードの数について:
完全流体の式は時間の 5 階微分方程式だったのに音波の式は 2 階しかない.

残りの 3 階は渦の時間発展方程式である.

線形化された渦の時間発展方程式は, 運動方程式の rot をとることにより直ちに得られる.

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} = 0$$

$\boldsymbol{\omega} \equiv \mathrm{rot}\boldsymbol{v}$ である. よって, 定常渦を表す解が残りの 3 階分.

まっとうな (線形化しない) 渦の時間発展方程式は後述.

4.4.3 分散関係式

解として以下の形を持つものを考える. [4]

$$\rho' = Re^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}, \tag{4.35}$$
$$p' = Pe^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}, \tag{4.36}$$
$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{V}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)} \tag{4.37}$$

これらは平面波解である. 無限領域の解はこれらのモード解の重ね合わせで表現できる. $(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)$ の部分を位相という. 位相とは関数値で「波の山谷」を表すもの.
これらを (4.28) – (4.30) に代入し, $R, P, \boldsymbol{V}$ の係数行列

$$\begin{pmatrix} -i\omega & & i\rho_0 k_1 & i\rho_0 k_2 & i\rho_0 k_3 \\ ic_s^2\omega & -i\omega & & & \\ & ik_1/\rho_0 & -i\omega & & \\ & ik_2/\rho_0 & & -i\omega & \\ & ik_3/\rho_0 & & & -i\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R \\ P \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の行列式を 0 とおくことと, 波数と振動数の関係式が得られる.

$$\omega^3(\omega^2 - c_s^2|\boldsymbol{k}|^2) = 0.$$

なお, この式は波動方程式に代入することにより簡単に求められる.

[4] より一般的には, これらの重ね合わせ

$$\rho' = \Re\sum_{\boldsymbol{k}}[R_{\boldsymbol{k}}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}]$$

音波に対応する部分は ( ) 内の部分

$$\omega^2 - c_s^2 |\boldsymbol{k}|^2 = 0 \tag{4.38}$$

である. これが音波の分散関係式である. この式は, (4.31) に平面波解を代入して直ちに得られるものである.
$\boldsymbol{k}$ 方向の位相速度は

$$c_p = \frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|} \ = \ \pm c_s \tag{4.39}$$

となる. よって音波は分散しない. ちなみに i 方向の位相速度は

$$c_{pi} = \frac{\omega}{k_i} \ = \ \pm c_s \frac{|\boldsymbol{k}|}{k_i}. \tag{4.40}$$

また, 群速度は

$$\boldsymbol{c}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{k}} \ = \ \pm c_s \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}. \tag{4.41}$$

となる.

4.4.4 モード解

結局, p' は以下のようになる.

$$\begin{aligned} p' &= Pe^{i(kx-\omega t)} = \Re[(Pr + iPi)\{\cos(kx-\omega t) + i\sin(kx-\omega t)\}] \\ &= Pr\cos(kx-\omega t) - Pi\sin(kx-\omega t) \end{aligned}$$

分散関係を使うと

$$p' = Pr\cos(kx - kc_r t) - Pi\sin(kx - kc_r t)$$

が得られる. これが解であり, ρ', $\boldsymbol{v}'$ についても同様の式が得られる.

4.4.5 構造

音波の平面波解 (4.35) - (4.37) を方程式 (4.28) – (4.30) に代入すれば, その構造が得られる. この際, 分散関係式 (4.38) を適宜用いる.
運動方程式 (4.29) から

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{k}}{\omega}\frac{P}{\rho_0}.$$

これより, 圧力 (または密度) と速度とは同じ位相 (0 または π の差) を持っていなければならない. この関係式から, 音波は縦波, すなわち,

$$\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{k}.$$

であることもわかる.
熱の式 (4.30) より

$$R = \frac{1}{c_s^2} P.$$

圧力と密度は同じ位相でなければならない.
連続の式 (4.28) より

$$\frac{\partial v'_j}{\partial x_j} = i\omega \frac{R}{\rho_0} = i \frac{\omega}{c_s^2} \frac{P}{\rho_0}$$

発散収束と密度 (または圧力) とは $\pi/2$ 位相がずれている.
1 次元で図化すると 図 4.8 のようになる. 図は右方向に伝播する音波の状況を示したものである. 密な点 C と収束している点 D とは $\pi/2$ ずれており, この収束が密な点を右側に移動させていく. 素な点の移動もその右側の発散域にともなって起こる. かくして位相は順次右方向に移動していくのである.
補足: 位相の差について
p' の解は

$$p' = Pr \cos(kx - \omega t) - Pi \sin(kx - \omega t)$$

であった. これに対して $\mathrm{div}\boldsymbol{v}'$ の構造は

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\boldsymbol{v}' &= i \frac{\omega}{c_s^2} \frac{P}{\rho_0} e^{i(kx - \omega t)} \\
&= \Re[i \frac{\omega}{c_s^2} \frac{1}{\rho_0} (Pr + iPi) \{\cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t)\}] \\
&= \frac{\omega}{\rho_0 c_s^2} \{-Pi \cos(kx - \omega t) - Pr \sin(kx - \omega t)\} \\
&= \frac{\omega}{\rho_0 c_s^2} \{-Pi \sin(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}) + Pr \cos(kx - \omega t + \frac{\pi}{2})\}
\end{aligned}$$

これより, 係数に i がかかると, 位相が $\frac{\pi}{2}$ 変わることがわかる.

2 次元の場合

(x, y) 2 次元の場合の音波の構造を図 4.9 に示す.

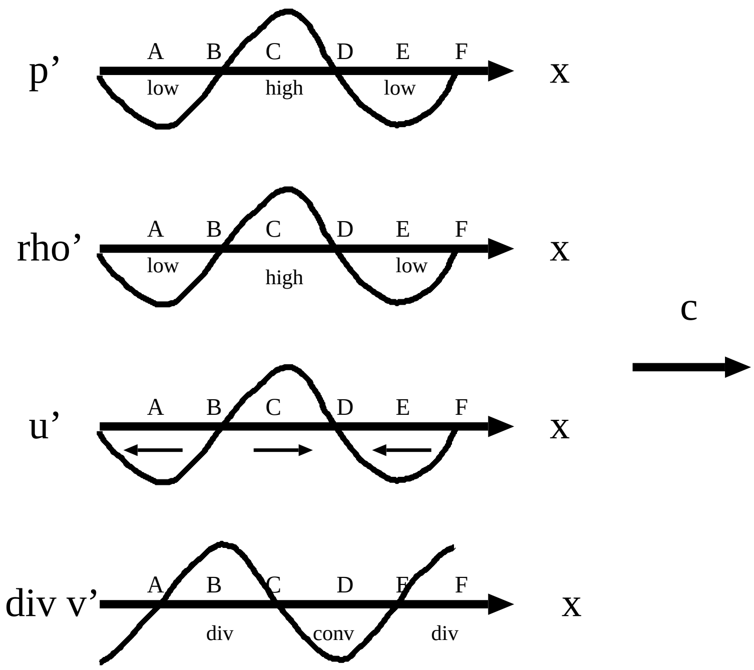

図 4.8: 1 次元音波. この図は $k > 0, \omega > 0$ の場合を想定して書いている. よって $c_p = +c_s$ の場合の図になっている.

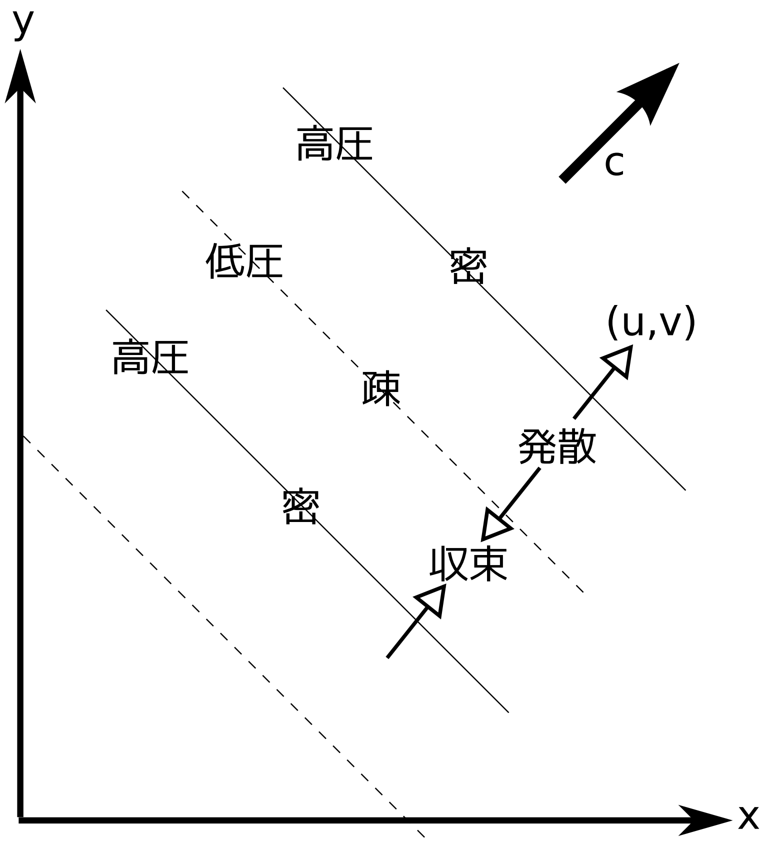

図 4.9: 2 次元音波の構造.

4.4.6 補足:線型波動の基礎

波とは

波とは伝搬する擾乱である.

位相

位相とは, 波の山谷の位置を表すために時空間に付けられる指標のことである. 位相は時空間の関数として扱われる. 以下これを位相関数と呼ぶ. 位相関数は単調なスカラー関数

$$\theta = \theta(x, y, z, t) \tag{4.42}$$

として定義される. ただし,

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\theta}{\partial z}, \frac{\partial\theta}{\partial t}$$

は着目している時空間領域で符号を変えない. 位相関数の関数値を波の山や谷に対応させるように決めれば, 波の構造 (山・谷の分布) が記述できる. ある山から次の山までの 1 波長進む間に位相関数の値は 2π 増えるものとする. 従って, 例えば, $\theta = 2n\pi$, $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は山の位置に対応する, という具合に用いられる.

物理量 ϕ が, 位相関数を用いて

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = A(\boldsymbol{x}, t) f(\theta(\boldsymbol{x}, t)). \tag{4.43}$$

と表現される場合, これは「波らしい解」ということになる. f は 周期 2π の周期関数であり, A は振幅である. ϕ は, 位相が 2π 変わるごとに同じ形状 f を概ね繰り返すものとして表されていることになる.

振動数, 波数, 周期, 波長

波数は単位長さあたりの位相の進みとして定義され, 振動数は単位時間あたりの位相のおくれとして定義される. それぞれ位相関数の微分により次のように与えられる.

$$k_x \equiv \frac{\partial\theta}{\partial x}, \tag{4.44}$$

$$k_y \equiv \frac{\partial\theta}{\partial y}, \tag{4.45}$$

$$k_z \equiv \frac{\partial\theta}{\partial z}, \tag{4.46}$$

$$\omega \equiv -\frac{\partial\theta}{\partial t}. \tag{4.47}$$

波長 (λ) 並びに時間軸での周期 (T) は,

$$\lambda_x \equiv 2\pi / \frac{\partial \theta}{\partial x}, \tag{4.48}$$

$$\lambda_y \equiv 2\pi / \frac{\partial \theta}{\partial y}, \tag{4.49}$$

$$\lambda_z \equiv 2\pi / \frac{\partial \theta}{\partial z}, \tag{4.50}$$

$$T \equiv -2\pi / \frac{\partial \theta}{\partial t}, \tag{4.51}$$

のように定義される.

位相速度

等位相面 θ =const が空間上を移動する速度を位相速度という. θ 一定の面に着目すると

$$\begin{aligned} d\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial x}dx + \frac{\partial \theta}{\partial y}dy + \frac{\partial \theta}{\partial z}dz + \frac{\partial \theta}{\partial t}dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

これを用いることにより, x 方向, y 方向, z 方向の位相速度がそれぞれ次のように定義される:

$$c_x \equiv \left.\frac{dx}{dt}\right|_{\theta yz} = -\frac{\partial \theta}{\partial t} / \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\omega}{k_x}, \tag{4.52}$$

$$c_y \equiv \left.\frac{dy}{dt}\right|_{\theta zx} = -\frac{\partial \theta}{\partial t} / \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\omega}{k_y}, \tag{4.53}$$

$$c_z \equiv \left.\frac{dz}{dt}\right|_{\theta xy} = -\frac{\partial \theta}{\partial t} / \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\omega}{k_z}. \tag{4.54}$$

分散関係式

位相関数のもっとも簡単な例は, 定数係数線型偏微分方程式の指数関数解

$$e^{i(kx+ly+mz-\omega t)} \tag{4.55}$$

の指数部分

$$\theta = kx + ly + mz - \omega t \tag{4.56}$$

である. 例えばスカラー量 ϕ に対する式

$$\frac{\partial}{\partial t}P_1(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}})\phi + P_2(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}})\phi = 0$$

(P_1, P_2 は多項式) に対して

$$\phi = \phi_0 e^{i(kx+ly+mz-\omega t)}$$

は厳密な解である. ただし $\omega, \boldsymbol{k}$ は独立ではなく

$$-i\omega P_1(i\boldsymbol{k}) + P_2(i\boldsymbol{k}) = 0 \tag{4.57}$$

を満たさなければならない.
一般に, 偏微分方程式系 (時間発展方程式) を満たすために存在する ω と $\boldsymbol{k}$ との関係式のことを分散関係式という.

群速度

$t = 0$ において wave packet を考える. 波による変位を η として

$$\eta_0(x) = e^{ik_m x}F(x)$$

と表せるとする. $F(x)$ は包絡線の形を表す. 包絡線の x 方向のスケールを L として

$$L \gg 1/k_m$$

と仮定する.
エネルギースペクトルは k_m を中心として幅 Δk の中に集中していると考えることができるだろう. よって, $F(x)$ はフーリエ積分表示で

$$F(x) = \int_{\Delta k} A(k')e^{ik'x}dk'$$

となる. ここで

$$k' \equiv k - k_m$$

よって, η_0 は

$$\eta_0 = \int_{\Delta k} A(k')e^{i(k_m+k')x}dk'$$

となる.

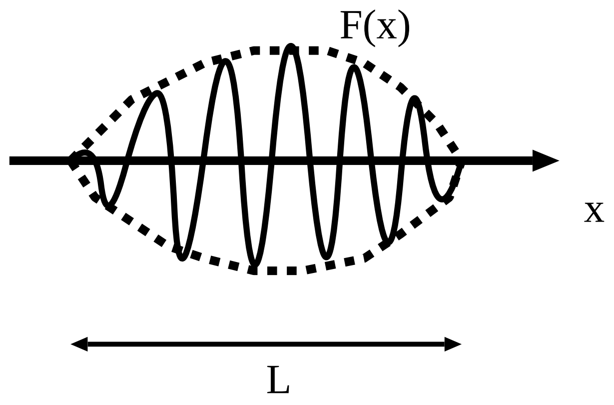

図 4.10: 波束の模式図. 波束の包絡線の形を表す関数を $F(x)$ とする.

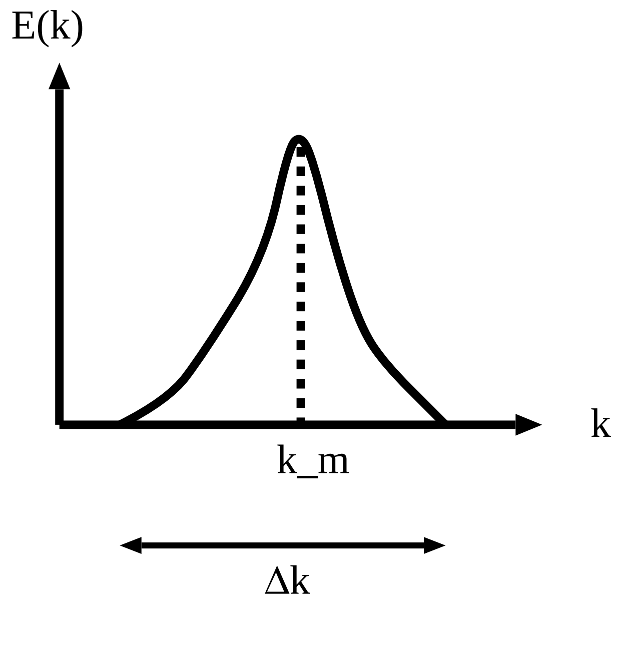

図 4.11: 波束のエネルギースペクトルの模式図.

時刻 t における変位は

$$\eta(x,t) = \int_{\Delta k} A(k') e^{i(k_m+k')x - i\omega(k_m+k')t} dk'$$

となると考えられる．ここで分散関係 $\omega = \omega(k_m + k')$ を使った．これを $F(x)$ と対応づけることのできる形に変形する．
k' は k_m にくらべて小さいので分散関係をテイラー展開する．

$$\omega(k_m + k') \sim \omega(k_m) + \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_{k_m} k'$$

よって

$$\begin{aligned}
\eta &= \int_{\Delta k} A(k') \exp\left[i\left\{(k_m + k')x - \omega(k_m + k')t\right\}\right] dk' \\
&= \int_{\Delta k} A(k') \exp\left[i\left\{(k_m + k')x - \omega(k_m)t - \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_{k_m} k't\right\}\right] dk' \\
&= \exp\left[i\left\{k_m x - \omega(k_m)t\right\}\right] \int_{\Delta k} A(k') \exp\left[ik'\left\{x - \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_{k_m} t\right\}\right] dk' \\
&\sim \exp\left[i\left\{k_m x - \omega(k_m)t\right\}\right] F\left(x - \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_{k_m} t\right)
\end{aligned}$$

これから, 包絡線は形を変えないで

$$c_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

という速度で進行することがわかる．この速度が群速度と呼ばれるものである．