# 第2章　流体力学の基礎方程式

## 2.1　連続の式・質量保存則

流体中に質量の source, sink がないと仮定する.

### 2.1.1　Euler 的見方

空間に固定した領域 $D$ を考える. 領域 $D$ 内の流体の質量変化は次のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_D \rho(\boldsymbol{x},t)dV = -\iint_{\partial D} \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS.$$

$\rho$ は流体の密度, $\boldsymbol{v}$ は流体運動の速度, $\boldsymbol{n}$ は $D$ を囲む閉曲面 $\partial D$ の外向き単位法線ベクトルである. 右辺は単位時間当りに $\partial D$ を通して流れ込む流体の質量を表わす.

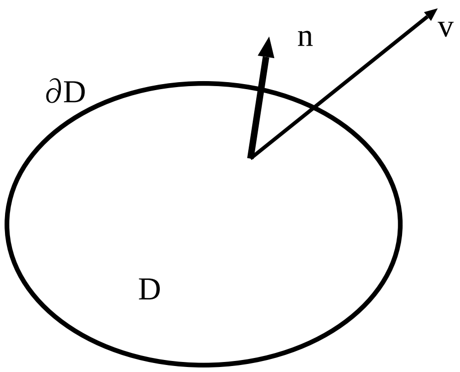


図 2.1: 空間に固定された領域 $D$ における質量保存.

$D$ は空間に固定した領域だから左辺の時間微分は積分の中に入れることができる. また, 右辺に対して Gauss の定理

$$\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{A}dV = \int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

を適用すると

$$\iiint_D \left\{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})\right\} dV = 0.$$

領域 $D$ のとりかたは任意であるから被積分関数は 0 でなければならない. よって以下の式が得られる.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0. \tag{2.1}$$

### 2.1.2 Lagrange 的見方

流体とともに運動する領域 $D'$ において, 領域 $D'$ 内の質量は保存しなければならない. この質量保存則は, 積分を空間に固定した座標で実行することにより次のように書ける.

$$\frac{d}{dt}\iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)} \rho(\boldsymbol{x},t)dxdydz = 0.$$

左辺の積分について, 積分変数を $\boldsymbol{x}$ から流体粒子のラベル座標[1] $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ に変換する.

$$\frac{d}{dt}\iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)} \rho(\boldsymbol{x},t)dxdydz = \frac{d}{dt}\iiint_{D'_\xi} \rho(\boldsymbol{\xi},t)\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}d\xi d\eta d\zeta$$

ここで, オイラー座標からラベル座標への座標変換は以下のように行なっている.

$$\begin{aligned} dxdydz &= \left\{\frac{\partial x}{\partial \xi}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right) + \cdots\right\} d\xi d\eta d\zeta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} d\xi d\eta d\zeta \\ &= \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}d\xi d\eta d\zeta = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}d\xi d\eta d\zeta \end{aligned}$$

$D'$ が流体とともに運動するので, $\boldsymbol{\xi}$ 座標での積分領域 $D'_\xi$ は任意の時間で変化しない. したがって時間微分は空間積分と交換する.

$$\text{左辺} : \frac{d}{dt}\iiint_{D'_\xi} \rho(\boldsymbol{\xi},t)\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}d\xi d\eta d\zeta = \iiint_{D'_\xi} \frac{d}{dt}\left(\rho(\boldsymbol{\xi},t)\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}d\xi d\eta d\zeta\right)$$

この時間微分は, ラベル座標一定のもとで実行する Lagrange 微分であることに注意しよう.

[1] $t = t_0$ における流体粒子の位置を用いることが多い.

$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{\xi}, t$ の関数であることに注意して右辺は次のように変形される.

$$
\begin{aligned}
\text{右辺}: & \iiint_{D'_\xi} \frac{d}{dt}\left(\rho(\boldsymbol{\xi},t)\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} d\xi d\eta d\zeta\right) \\
&= \iiint_{D'_\xi} \frac{d\rho(\xi,t)}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} d\xi d\eta d\zeta + \underbrace{\iiint_{D'_\xi} \rho(\boldsymbol{\xi},t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right) d\xi d\eta d\zeta} \\
&= \iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)} \frac{d\rho(\boldsymbol{x},t)}{dt} dxdydz + \underbrace{\iiint_{D'_\xi} \rho(\boldsymbol{\xi},t)\left(\frac{\partial(\dot{x},y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} + \frac{\partial(x,\dot{y},z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} + \frac{\partial(x,y,\dot{z})}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right) d\xi d\eta d\zeta} \\
&= \iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)} \frac{d\rho(\boldsymbol{x},t)}{dt} dxdydz \\
&\quad + \underbrace{\iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)} \rho(\boldsymbol{x},t)\left(\frac{\partial(\dot{x},y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} + \frac{\partial(x,\dot{y},z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} + \frac{\partial(x,y,\dot{z})}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right)\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \boldsymbol{x}} dxdydz} \\
&= \iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)} \frac{d\rho}{dt} dxdydz \\
&\quad + \underbrace{\iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)} \rho(\boldsymbol{x},t)\left(\frac{\partial(\dot{x},y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)} + \frac{\partial(x,\dot{y},z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)} + \frac{\partial(x,y,\dot{z})}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)}\right) dxdydz} \\
&= \iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)} \frac{d\rho}{dt} dxdydz + \underbrace{\iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)} (\boldsymbol{x},t)\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dxdydz} \\
&= \iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \mathrm{div}\boldsymbol{v}\right) dxdydz
\end{aligned}
$$

ヤコビアンの時間微分の計算では以下を使った.

$$
\frac{\partial(\dot{x},y,z)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial v_x}{\partial x}
$$

したがって,

$$
\frac{d}{dt}\iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)} \rho(\boldsymbol{x},t) dxdydz = \iiint_{D'(\boldsymbol{x},t)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \mathrm{div}\boldsymbol{v}\right) dxdydz = 0 \tag{2.2}
$$

となる. これが任意の体積 $D'$ について成り立つから, 以下の式が得られる.

$$
\frac{d\rho}{dt} + \rho \mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0. \tag{2.3}
$$

### 2.1.3　質量保存則 (連続の式) の種々の形

連続の式は以下のように書き換えることもできる.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \mathrm{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -\mathrm{div}\boldsymbol{v} \quad (\text{ 密度変化率 }), \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{\rho^{-1}}\frac{d\rho^{-1}}{dt} = \mathrm{div}\boldsymbol{v} \quad (\text{ 体積変化率 }) \tag{2.7}$$

$\rho\boldsymbol{v}$ を質量流束密度という.
連続の式のテンソル表現は以下のようになる.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0$$

ここで, テンソルの縮約表現を用いている.

## 2.2　保存則の一般形

### 2.2.1　単位体積当りのスカラー量の保存

単位体積あたりのスカラー量 $A$ (例えば, 密度) の保存則は以下のようになる.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{F} = \sigma[A]. \tag{2.8}$$

ここで, $\boldsymbol{F}$ は $A$ の流束密度 (flux density), $\sigma[A]$ は単位体積 · 単位時間当りの $A$ の生成 · 消滅 (source, sink) を表わす.
特に, $\boldsymbol{F}$ が流体の運動による移流の部分 $A\boldsymbol{v}$ と, その他の部分 $\boldsymbol{F}'$ に分けられるときは次のように書ける.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \mathrm{div}(A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{F}') = \sigma[A].$$

$\boldsymbol{F}' = 0$ の場合,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \mathrm{div}(A\boldsymbol{v}) = \sigma[A].$$

となる.

### 2.2.2 単位質量当りのスカラー量の保存

単位質量あたりのスカラー量 $s$ (例えば, 単位質量あたりのエネルギー) の保存の式は以下のようになる.

$$\rho\frac{ds}{dt} + \mathrm{div}\boldsymbol{F}' = \sigma[\rho s]. \tag{2.9}$$

移流以外の流束 $\boldsymbol{F}'$ がなく生成消滅もないときには, $s$ は流体の運動にともなって保存する.

$$\frac{ds}{dt} = 0. \tag{2.10}$$

このような $s$ を **Lagrange** 保存量という.

### 2.2.3 流束形式, 移流形式

単位体積当りのスカラー量の保存の式において, $A$ として $\rho s$ をとった式を考える:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \mathrm{div}(\rho s\boldsymbol{v} + \boldsymbol{F}') = \sigma[\rho s].$$

これと, 単位質量当りのスカラー量の保存の式

$$\rho\frac{ds}{dt} + \mathrm{div}\boldsymbol{F}' = \sigma[\rho s].$$

と比較すると, 次の公式が得られる.

$$\rho\frac{ds}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \mathrm{div}(\rho s\boldsymbol{v}). \tag{2.11}$$

さらに Lagrange 微分の Euler 表現を用いると,

$$\rho\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}s\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \mathrm{div}(\rho s\boldsymbol{v}). \tag{2.12}$$

ここで, 右辺第 2 項 $\mathrm{div}(\rho s\boldsymbol{v})$ を流束の発散 (flux divergence) , $\rho s\boldsymbol{v}$ を流束密度 (flux density) と呼び, 右辺の形を流束形式 (flux form) という.
一方, 左辺中の $\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}s$ を移流項 (advective term) と呼び, 左辺の形を移流形式 (advective form) という.

### 2.2.4 補足

1. 単位質量あたりのスカラー量の保存則 (2.11)

$$\rho\frac{ds}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \mathrm{div}(\rho s\boldsymbol{v})$$

を用いると, ラグランジュ的保存量 $\dfrac{ds}{dt}=0$ は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s)+\mathrm{div}(\rho s\boldsymbol{v})=0 \tag{2.13}$$

も満たす.

2. また, 以下の式が成り立つ.

$$\frac{d}{dt}\int_{D'}\rho A dV=\int_{D'}\rho\frac{dA}{dt}dV. \tag{2.14}$$

その理由は以下の通りである.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{D'}\rho A dV &= \frac{d}{dt}\int_{D'}\rho A\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}d\boldsymbol{\xi}=\int_{D'}\frac{d}{dt}(A\rho\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}})d\boldsymbol{\xi}\\
&= \int_{D'}\frac{dA}{dt}\rho\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}d\boldsymbol{\xi}+\int_{D'}A\frac{d}{dt}\left(\rho\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right)\underbrace{d\boldsymbol{\xi}}_{\frac{d}{dt}\text{ の中に入る}}\\
&= \int_{D'}\rho\frac{dA}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}d\boldsymbol{\xi}+\int_{D'}A\underbrace{\frac{d}{dt}(\rho d\boldsymbol{x})}_{\text{質量保存より }0}\\
&= \int_{D'}\rho\frac{dA}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}d\boldsymbol{\xi}\\
&= \int_{D'}\rho\frac{dA}{dt}dV.
\end{aligned}$$

ちなみに, 質量素片

$$dm=\rho J d\boldsymbol{\xi}=\rho dV$$

をラグランジュ的保存量として扱えば簡単である.

$$\frac{d}{dt}\int_{D'}\rho A dV=\int_{D'}\frac{d}{dt}(A\rho dV)=\int_{D'}\frac{d}{dt}(A)\,\rho dV=\int_{D'}\frac{dA}{dt}\rho dV$$

となるからである.

3. 体積の時間変化の式
上式で $A=\rho^{-1}$ の場合を考えると

$$\frac{d}{dt}\int_{D'}dV=\int_{D'}\rho\frac{d\rho^{-1}}{dt}dV=-\int_{D'}\rho^{-1}\frac{d\rho}{dt}dV$$

となる. 連続の式を使えば

$$\frac{d}{dt}\int_{D'}dV=\int_{D'}\mathrm{div}\boldsymbol{v}dV \tag{2.15}$$

が得られる. これは流体粒子の体積の時間変化を表す式である.