流体力学 授業資料 (2026-01-19)

7. 粘性流体の流れの例

7.1 一方向の流れ

一定の断面形をもつまっすぐな管を通る流れを考える. 流れの方向に x 軸をとる: $\boldsymbol{v} = (v_x, 0, 0)$.
ナビエストークス方程式は

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + \cancel{v_y}\frac{\partial v_x}{\partial y} + \cancel{v_z}\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\nabla^2 v_x, \tag{1}$$

$$\rho\cancel{\tfrac{dv_y}{dt}} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta\nabla^2\cancel{v_y}, \tag{2}$$

$$\rho\cancel{\tfrac{dz_y}{dt}} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta\nabla^2\cancel{v_z}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \cancel{\tfrac{\partial v_y}{\partial y}} + \cancel{\tfrac{\partial v_z}{\partial z}} = 0. \tag{4}$$

連続の式

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

から v_x は x によらない: $v_x = v_x(y, z, t)$.
運動方程式の y 成分, z 成分の式から, p は y, z によらない: $p = p(x, t)$.
以上より, 運動方程式の x 成分は

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t}(y, z, t) - \eta\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v_x(y, z, t) = -\frac{\partial p}{\partial x}(x, t). \tag{6}$$

左辺は x を含まず, 右辺は y, z を含まないので, 両辺は t だけの関数. よって

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha(t), \tag{7}$$

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t} - \eta\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v_x = \alpha(t). \tag{8}$$

第一式より, 圧力勾配は一定値 $-\alpha(t)$ となる. 第二式を境界条件のもとに解いて流れ場を求めることができる.
定常な流れの場合, ポアソン方程式を解くことに帰着される.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v_x = -\frac{\alpha}{\eta}, \qquad \alpha = -\frac{\partial p}{\partial x}\ [\mathrm{N\,m^{-3}}]. \tag{9}$$

7.2 クエット流

以下の仮定が成り立つ場合を考える.

- 2 枚の平行な板にはさまれた密度一定の 2 次元非圧縮流体.
- $y = 0$ の壁は静止し, $y = H$ の壁は速度 U で x 正方向に運動
- 定常状態.
- 物理量は x 方向に変化しないものとする.

境界条件は

$$v_x = 0, \quad v_y = 0 \qquad (y = 0), \tag{10}$$

$$v_x = U, \quad v_y = 0 \qquad (y = H). \tag{11}$$

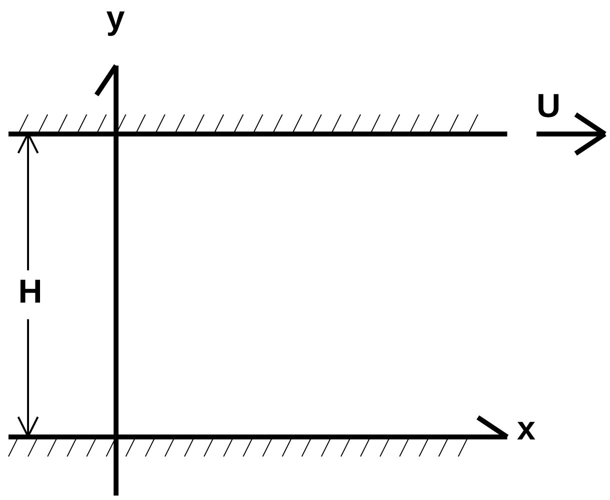

図 1: クエット流を考える系.

7.2.1 速度場

定常, x 方向変化無しの仮定より $-\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha = 0$ (p は一定). よって, 流れ場は

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \tag{12}$$

で決定される. 2 回積分して, 境界条件 $v_x = 0(y = 0)$, $v_x = U(y = H)$ を使うと

$$v_x = \frac{U}{H} y. \tag{13}$$

7.2.2 上下の壁に働く応力

応力テンソルは

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad [\mathrm{N\,m^{-2}}] \tag{14}$$

今の場合は

$$\sigma_{xx} = -p + \eta 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} = -p, \tag{15}$$

$$\sigma_{xy} = \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \eta \frac{U}{H}, \tag{16}$$

$$\sigma_{yy} = -p + \eta 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} = -p. \tag{17}$$

壁に働く応力は $\sigma_{ik} n_k$. n_k は壁の法線ベクトル成分で

$$y = 0 \text{ の壁で} \boldsymbol{n} = (0, 1), \tag{18}$$

$$y = H \text{ の壁で} \boldsymbol{n} = (0, -1). \tag{19}$$

$y = 0$ の壁では, $n_k = (0, 1, 0)$ なので

$$\text{応力法線成分} \sigma_{yk} n_k = \sigma_{yy} = -p, \tag{20}$$

$$\text{応力接線成分} \sigma_{xk} n_k = \sigma_{xy} = \eta \frac{U}{H}. \tag{21}$$

$y = H$ の壁では, $n_k = (0, -1, 0)$ なので

$$\text{応力法線成分} \sigma_{yk} n_k = -\sigma_{yy} = p, \tag{22}$$

$$\text{応力接線成分} \sigma_{xk} n_k = -\sigma_{xy} = -\eta \frac{U}{H}. \tag{23}$$

7.2.3 エネルギー収支

もともと運動エネルギーの式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v_x^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (v_x p) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\eta v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2. \tag{24}$$

今の問題では

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\eta v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2. \tag{25}$$

エネルギー収支の様子を表した模式図を 図 2 に示す.

7.2.4 運動量収支

運動方程式の流束形式において p が定数ということを使うと,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \tag{26}$$

今の問題では

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0. \tag{27}$$

運動量収支の様子を表した模式図を 図 3 に示す.

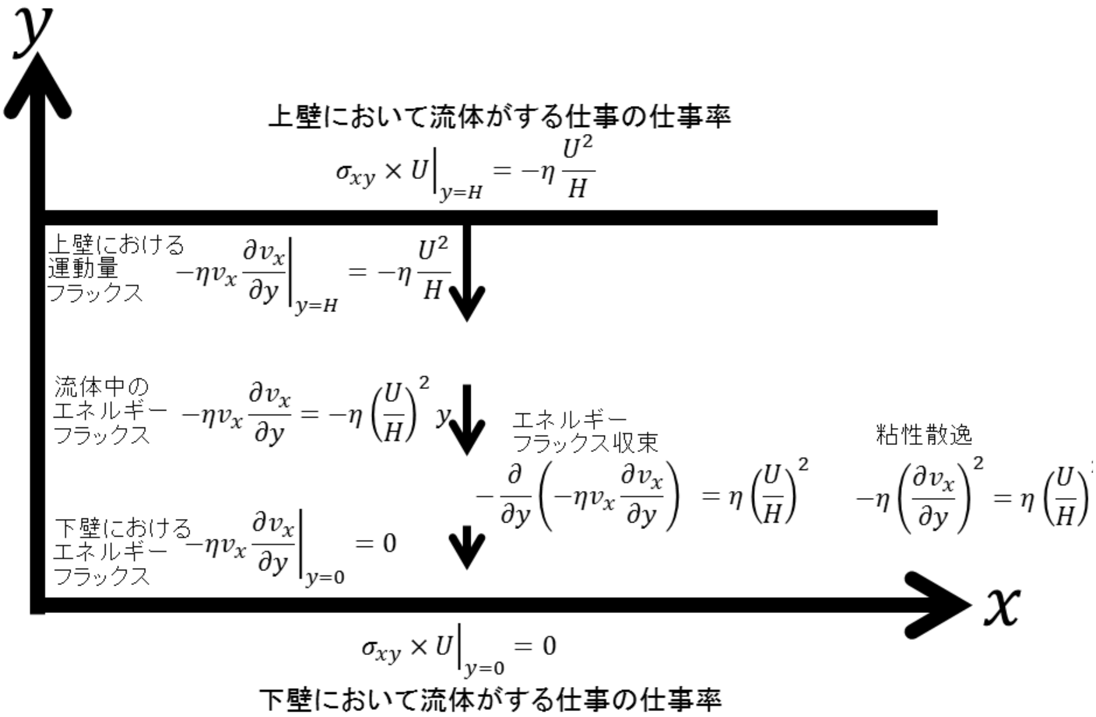

図 2: クエット流におけるエネルギー収支.

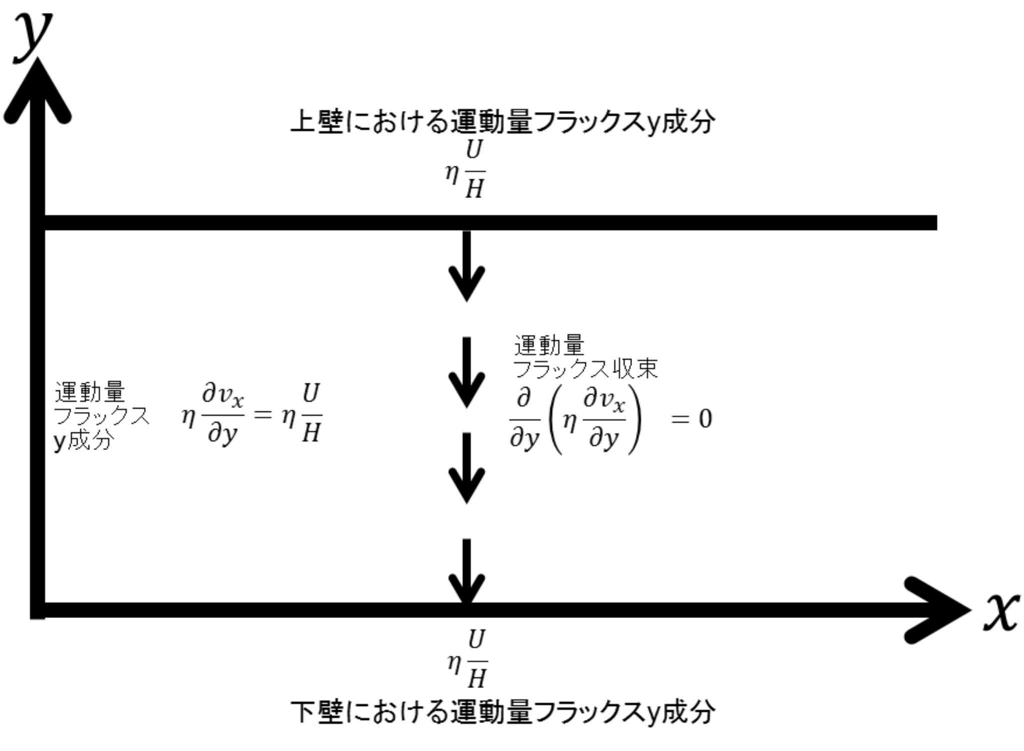

図 3: クエット流における運動量収支.

7.3 2 次元ポアゾイユ流

以下の状況を考える (2 次元ポアゾイユ流).

- 2 枚の平行平板に挟まれた 2 次元領域を考える. 板の間隔を $2d$ とする.
- 平板に平行に x 軸をとり, 平板に垂直に y 軸をとる (図 4).
- 2 次元領域中に非圧縮流体が存在
- x 方向には一定の圧力勾配 α がかかっている.
- 板における流体速度は 0 ($v_x = 0(y = \pm d)$)
- 定常流

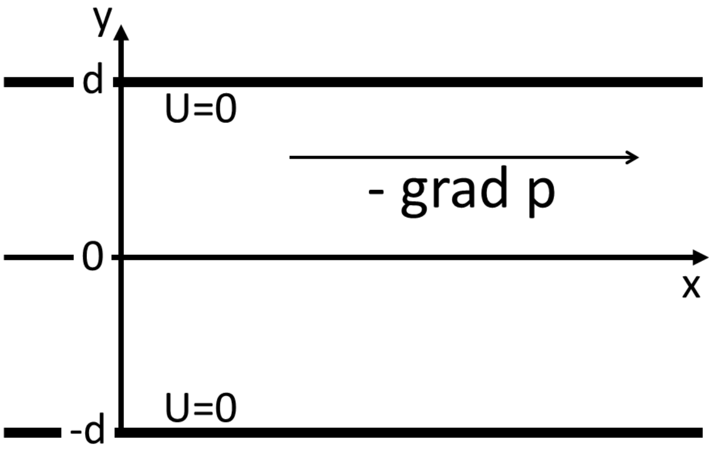

図 4: 2 次元ポアゾイユ流を考える系の設定.

7.3.1 速度場

ポアソン方程式は

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{\alpha}{\eta}, \quad \alpha \equiv -\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{28}$$

これを積分して境界条件 (壁で $v_x = 0$) を適用すると, 速度分布が

$$v_x(y) = -\frac{\alpha}{2\eta}y^2 + \frac{\alpha}{2\eta}d^2 = \frac{\alpha}{2\eta}(d^2 - y^2) \tag{29}$$

と得られる. 流速分布は 図 5.

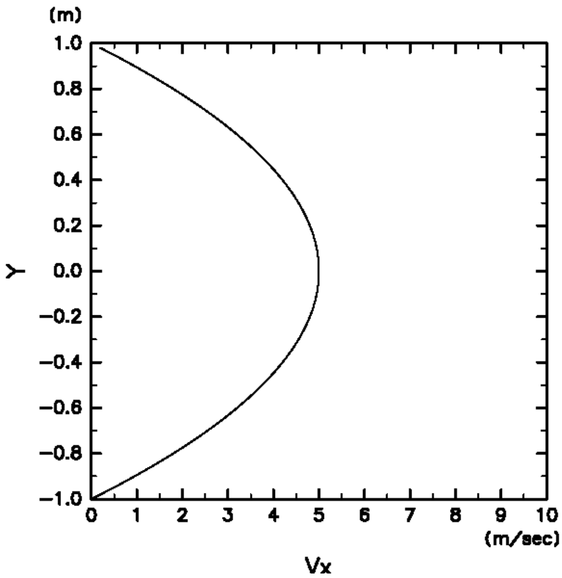

図 5: 2 次元ポアゾイユ流の流れ. $\alpha = 10.0, \eta = 10.0$ の場合.

7.4 円管の中の流れ

半径 a の円管を通る定常流を考える. 管は静止しており, 圧力勾配で流れを引き起こす. 流れは管の中心軸に関して対称. 円筒座標 (r, θ, z) を使って考える. 境界条件は

$$v_z = v_\theta = v_r = 0 \quad at\ r = a, \tag{30}$$

$$v_z = (\text{ 有限 }) \quad at\ r = 0. \tag{31}$$

一定の圧力勾配が存在するので α は定数.

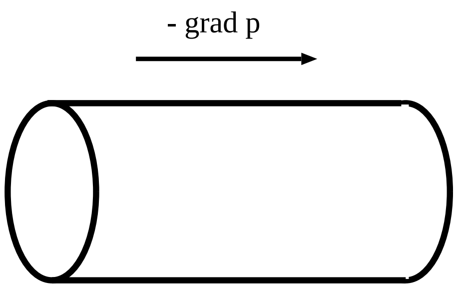

図 6: 円管の中の流れ

7.4.1 流れ場

ポアソン方程式は

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = -\frac{\alpha}{\eta}. \tag{32}$$

これを積分すると

$$v_z(r) = -\frac{\alpha}{4\eta}r^2 + A\log r + B. \tag{33}$$

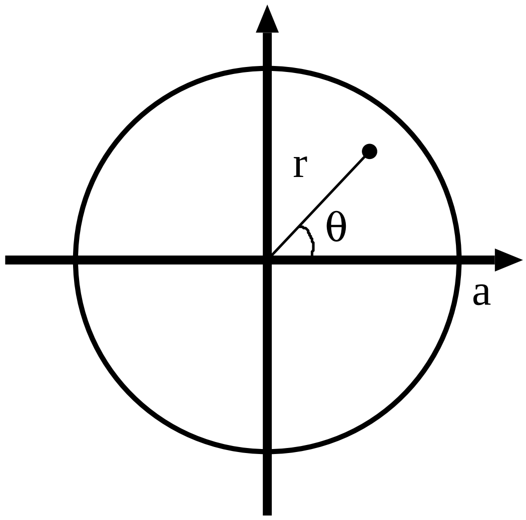

図 7: 円管の中の流れを考える座標系

A, B は積分定数. 境界条件から決定する. $r = 0$ で速度有限なので $A = 0$. 更に, $r = a$ で $v_z = 0$ の条件から

$$B = \frac{\alpha}{4\eta}a^2. \tag{34}$$

よって, 速度分布は

$$v_z(r) = -\frac{\alpha}{4\eta}r^2 + a^2 = \frac{\alpha}{4\eta}(a^2 - r^2). \tag{35}$$

7.4.2 流量

管を通る流量は

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^a v_z r d\theta dr = 2\pi\int_0^a v_z r dr \quad [\mathrm{m}^3\ \mathrm{sec}^{-1}] \tag{36}$$

$$= \frac{\alpha\pi}{2\eta}\int_0^a (a^2 r - r^3)dr = \frac{\pi a^4\alpha}{8\eta} = -\frac{\pi a^4}{8\eta}\frac{dp}{dx}. \tag{37}$$

7.5 振動平板による流れ

この問題は非定常な流れの例である. 以下の状況を考える.

- 無限に広い平板が無限い広がっている密度一定の粘性流体を考える.
- 平板は自分自身に平行に単振動している.
- 平板の振動方向に x 軸をとり, 平板自身は xy 平面内で運動するものとする. これによって引き起こされる流体の運動は x 軸に平行となる.
- x 軸方向には物理量が変化しないことを仮定する.

運動方程式の x 成分, y 成分は以下のようになる.

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \tag{38}$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}. \tag{39}$$

連続の式は

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{40}$$

境界条件は

$$v_x \to 0 \qquad \text{for} \quad y \to \infty, \tag{41}$$

$$v_x = U \cos \omega t \qquad \text{at} \quad y = 0, \tag{42}$$

$$v_y \to 0 \qquad \text{for} \quad y \to \infty, \tag{43}$$

$$v_y = 0 \qquad \text{at} \quad y = 0. \tag{44}$$

連続の式から v_y は y によらない. よって境界条件を考慮すると

$$v_y = 0. \tag{45}$$

これより, 運動方程式の y 成分から

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y} \tag{46}$$

となる.

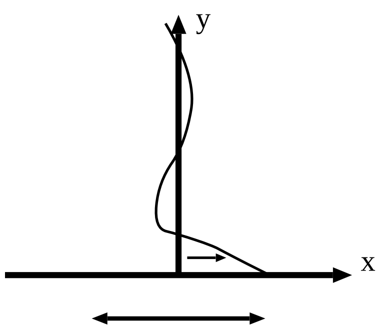

図 8: 振動平板による流れ.

7.5.1 流れ場

物理量を複素数に拡張して計算する. 境界条件は

$$v_x = U e^{i\omega t} \quad at \quad y = 0. \tag{47}$$

境界条件の形から v_x として

$$v_x = f(y) e^{i\omega t} \tag{48}$$

という形を考える. これを (38) に代入すると

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{i\rho\omega}{\eta} f(y). \tag{49}$$

よって, 一般解は以下のように書ける.

$$f(y) = Ae^{\lambda y} + Be^{-\lambda y}. \tag{50}$$

ただし,

$$\lambda \equiv \left(\frac{i\rho\omega}{\eta}\right)^{1/2} = (1+i)\left(\frac{\rho\omega}{2\eta}\right)^{1/2} = (1+i)l, \tag{51}$$

$$l \equiv \left(\frac{\rho\omega}{2\eta}\right)^{1/2} \tag{52}$$

とおいた. よって,

$$v_x = \left(Ae^{\lambda y} + Be^{-\lambda y}\right) e^{i\omega t}. \tag{53}$$

境界条件 $v_x \to 0$ $(y \to \infty)$ を使うと $A = 0$. 更に, 境界条件 $v_x(y=0) = Ue^{i\omega t}$ を使うと $B = U$ が得られる. 以上より, 実部を取り出すと以下が得られる.

$$v_x = \Re\left[Ue^{-\lambda y} e^{i\omega t}\right] = Ue^{-ly}\cos(\omega t - ly). \tag{54}$$

これは y 方向に伝わる減衰性の正弦波である. 位相速度は

$$c = \frac{\omega}{l} = \frac{\omega}{\left(\frac{\rho\omega}{2\eta}\right)^{1/2}} = \left(\frac{2\eta\omega}{\rho}\right)^{1/2}. \tag{55}$$

波数も減衰定数も $l = \left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{1/2}$. したがって, 1 波長進む間に振幅は $e^{-2\pi}$ 倍になる.

7.5.2 境界層の厚さ

振幅が $1/e$ 倍に減衰する距離は

$$\delta = \frac{1}{l} = \left(\frac{2\eta}{\rho\omega}\right)^{1/2}. \tag{56}$$

平板の振動によって流体は動かされるが, その動く範囲はだいたい δ の厚さの層に限られている. すなわち, 振動平板には厚さ δ の境界層 (boundary layer) が付随すると考えられる. 境界層の厚さは, 粘性が小さいほど薄くなる. 平板の振動数が大きいほど薄くなる.