Lin の定理, Tolmien の定理

Lin の定理

$c = c_r$ となる非特異中立モード ($c_i = 0$) 〜Non-Singular-Neutral-Mode (NSNM)〜が存在するための条件を導く. Rayleigh equation から出発する[1] .

$$\frac{d^2\phi}{dy^2} - k^2\phi + \frac{dQ}{dy}\frac{1}{U-c}\phi = 0. \tag{1}$$

この方程式は, 中立モードに対して $U - c = 0$ となる y (以下この y を y_c とする) において特異的である. NSNM とは y_c で正則であるような中立モード解である.

$(1) \times \phi^* - (1)^* \times \phi$ より

$$\frac{d}{dy}\left(\phi^*\frac{d\phi}{dy} - \phi\frac{d\phi^*}{dy}\right) + 2\frac{dQ}{dy}\frac{ic_i}{|U-c|^2}|\phi|^2 = 0. \tag{2}$$

$\tau \equiv -\dfrac{i}{2}\left(\phi^*\dfrac{d\phi}{dy} - \phi\dfrac{d\phi^*}{dy}\right)$ で定義される τ を Reynolds stress という. (2) より

$$\frac{d}{dy}\left\{-\frac{i}{2}\left(\phi^*\frac{d\phi}{dy} - \phi\frac{d\phi^*}{dy}\right)\right\} = -\frac{dQ}{dy}\frac{c_i}{|U-c|^2}|\phi|^2, \tag{3}$$

すなわち

$$\frac{d\tau}{dy} = -\frac{dQ}{dy}\frac{c_i}{|U-c|^2}|\phi|^2$$

今, 中立モード $c_i = 0$ を考える. $U - c \neq 0$ 以外では $\dfrac{d\tau}{dy} = 0$ である. $U - c = 0$ 付近での τ の不連続性を調べる.

$$\begin{aligned}
\int_{y_c-\delta}^{y_c+\delta}\frac{d\tau}{dy}dy &= -\lim_{c_i\to 0}\int_{y_c-\delta}^{y_c+\delta}\frac{dQ}{dy}\frac{|\phi|^2 c_i}{(U-c_r)^2 + c_i^2}dy \\
&= -\lim_{c_i\to 0}\int_{c_r-\Delta c}^{c_r+\Delta c}\frac{dQ}{dy}\frac{|\phi|^2 c_i}{(U-c_r)^2 + c_i^2}\left|\frac{dy}{dU}\right|dU.
\end{aligned}$$

[0] /不安定/積分定理/LinTolm1.tex,LinTolmm.tex
[1] 別シリーズ ‘Rayleigh - Fjørtoft の定理’ を参照せよ.

ここで, 積分の平均値の定理[2] より

$$\int_{c_r-\Delta c}^{c_r+\Delta c}\frac{dQ}{dy}\frac{|\phi|^2 c_i}{(U-c_r)^2+c_i^2}|\frac{dy}{dU}|dU. = \left[\frac{Q_y}{|\ dU/dy\ |}\ |\ \phi\ |^2\right]_{y=\xi}\int_{c_r-\Delta c}^{c_r+\Delta c}\frac{c_i}{(U-c_r)^2+c_i^2}dU$$

となる $c_r-\Delta c<\xi<c_r+\Delta c$ が存在する. ϕ はこの定理が成立する程度に正則であればよい. したがって

$$\begin{aligned}\int_{y_c-\delta}^{y_c+\delta}\frac{d\tau}{dy}dy &= -\lim_{c_i\to 0}\left[\frac{Q_y}{|\ dU/dy\ |}\ |\ \phi\ |^2\right]_{y=\xi}\int_{c_r-\Delta c}^{c_r+\Delta c}\frac{c_i}{(U-c_r)^2+c_i^2}dU \\ &= -\left[\frac{Q_y}{|dU/dy|}|\phi|^2\right]_{y=\xi}\lim_{c_i\to 0}\left[\tan\left(\frac{U-c_r}{c_i}\right)\right]_{c_r-\Delta c}^{c_r+\Delta c} \\ &= -\left[\frac{Q_y}{|dU/dy|}|\phi|^2\right]_{y=\xi}\lim_{c_i\to 0}\left(2\tan\frac{\Delta c}{c_i}\right) \\ &= -\pi\left[\frac{Q_y}{|dU/dy|^2}|\phi|^2\right]_{y=\xi}\end{aligned}$$

$\delta\to 0$ とすると $\xi\to y_c$ となり,

$$\tau(y_c+0)-\tau(y_c-0)=-\pi\frac{Q_y(y_c)}{|dU/dy(y_c)|}|\phi(y_c)|^2.$$

(10) を y_1 から y_2 まで積分し, 境界条件を用いると $\tau(y_1)=\tau(y_2)=0$ であるから

$$\int_{y_1}^{y_2}\frac{d\tau}{dy}dy=-\sum_i\pi\frac{Q_y(y_{c_i})}{|dU/dy(y_{c_i})|}|\phi(y_{c_i})|^2=0.$$

これより, 中立モードが存在するには, 流れのどこかで $\dfrac{dQ}{dy}$ が符号を変えないといけない. すなわち, 流れのどこかで変曲点 $\dfrac{dQ}{dy}=0$ を持つ必要がある. 特に流れが変曲点を 1 つしか持たない場合, $|\phi(y_c)|\neq 0$ であれば

$$\left.\frac{dQ}{dy}\right|_{y_c}=0.$$

すなわち, 変曲点の速度が, $|\phi(y_c)|\neq 0$ である中立モードの位相速度となる. æ

---

[2]

$$\text{for } \exists c,\quad a<c<b,\qquad \int_a^b\varphi(x)\psi(x)dx=\varphi(c)\int_a^b\psi(x)dx.$$

Tolmien の定理

単調で変曲点が一つしかない $U(y)$ について, 不安定モードが NSNM の近傍に存在することを示す. 非特異中立モードの $\phi(y)$ を $\phi_s(y)$, 波数 k_s, 位相速度 c_s とする. $\phi_s(y)$ の満たす式は

$$\frac{d^2\phi_s}{dy^2} - k_s^2\phi_s + \frac{dQ}{dy}\frac{1}{U-c_s}\phi_s = 0, \tag{4}$$

である. ϕ_s は実関数 (Real) にとることが出来る. 一方,

$$\frac{d^2\phi}{dy^2} - k^2\phi + \frac{dQ}{dy}\frac{1}{U-c}\phi = 0. \tag{5}$$

(1) $\times \phi_s -$ (2) $\times \phi$ より

$$\frac{d}{dy}\left(\phi\frac{d\phi_s}{dy} - \phi_s\frac{d\phi}{dy}\right) - (k_s^2 - k^2)\phi\phi_s + \left(\frac{1}{U-c_s} - \frac{1}{U-c}\right)\frac{dQ}{dy}\phi\phi_s = 0.$$

y_1 から y_2 まで積分すると

$$-(k_s^2 - k^2)\int_{y_1}^{y_2}\phi\phi_s dy + \int_{y_1}^{y_2}\frac{(c_s-c)Q_y}{(U-c_s)(U-c)}\phi\phi_s dy = 0.$$

すなわち,

$$\frac{k^2-k_s^2}{c-c_s}\int_{y_1}^{y_2}\phi\phi_s dy = \int\frac{Q_y}{(U-c_s)(U-c)}\phi\phi_s dy = 0.$$

ここで $c \to c_s$ の極限を考える. $K(y) = \dfrac{Q_y(y)}{U(y)-c_s}$ とおくと, Lin の定理より $K(y)$ は $y_1 < y < y_2$ で定符号である（$Q_y(y_c) = 0$, $U(y_c) - c_s = 0$）.

$$\begin{aligned}
\frac{d(k^2)}{dc}\int_{y_1}^{y_2}\phi_s^2 dy &= \lim_{c\to c_s}\int\frac{K(y)\{(U-c_r)+ic_i\}}{(U-c_r)^2+c_i^2}\phi\phi_s dy \\
&= \lim_{c_r\to c_s, c_i\to 0}\left[\int_{y_1}^{y_2}\frac{K(y)(U-c_r)}{(U-c_r)^2+c_i^2}\phi\phi_s dy + i\int\frac{K(y)c_i\phi\phi_s}{(U-c_r)^2+c_i^2}dy\right] \\
&= \int_{y_1}^{y_2}\frac{K(y)}{U-c_r}\phi_s^2 dy + i\pi\frac{K(y_c)}{|dU/dy(y_c)|}\phi_s^2(y_c)
\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
K(y_c) &= \lim_{y\to y_c}\frac{Q_y(y)}{U(y)-c_s} \\
&= \frac{Q_{yy}(y_c)}{U_y(y_c)}
\end{aligned}$$

[0] /不安定/積分定理/LinTolm2.tex,LinTolmm.tex

左辺の積分 $\int_{y_1}^{y_2} \phi_s^2 dy$ は定符号である．また右辺第 2 項も $K(y)$ が定符号だから, 符号一定である．

$\dfrac{d(k^2)}{dc} = A + iB$ とあらわすことにする．このとき B の符号は $K(y_c)$ と同じである．

$$\frac{dc}{d(k^2)} = \frac{A - iB}{A^2 + B^2}$$

$$\begin{aligned} c_i &\sim -\frac{B}{A^2 + B^2}(k^2 - k_s^2) \\ &= \frac{B}{A^2 + B^2}(k_s^2 - k^2) \end{aligned}$$

単調で変曲点が一つしかない $U(y)$ について $U = c_r$ となる NSNM, $k = k_s$ が存在するとき k_s の近傍 $k_s + \Delta k$ に不安定モードが存在する．Δk の符号は $-\dfrac{Q_{yy}(y_c)}{U_y(y_c)}$ の符号に一致する．

Fjørtoft の定理を用いると $\left.\dfrac{d^2Q}{dy^2}\dfrac{dU}{dy}\right|_{y_s} > 0$ より $\Delta k < 0$ となる．したがって $k < k_s$ に不安定モードが存在することがわかる．

Lin の定理を用いると, NSNM は $\left.\dfrac{dQ}{dy}\right|_{y_s} = 0$ となる y_s での速度と位相速度が一致する．すなわち $c_r = U(y_s)$ となる．

Fjørtoft-Lin-Tolmien の定理

単調で変曲点が 1 つしかない $U(y)$ においては変曲点 $y = y_s$, $\left.\dfrac{dQ}{dy}\right|_{y_s} = 0$ での速度 $U(y_s)$ に等しい位相速度を持つ中立モード $k = k_s$ が存在し, 不安定モードはその中立モードの波数 k_s の近傍 $k < k_s$ において存在する．æ

参考文献

巽 友正, 後藤金英, 1976 : 流れの安定性理論, 産業図書, 275p.

新野 宏, 1981 : 順圧不安定の力学, 天気, **28**, 53-82.

æ

[0] /不安定/積分定理/LinTolmR.tex,LinTolmm.tex