# 不安定の認識論

竹広 真一

2016/01/13

## 1　不安定とは

流体の運動は, それを支配する微分方程式の初期条件・境界条件を満たす解として記述される. しかし, われわれが持っている支配微分方程式・初期条件・境界条件は, あくまでも自然界の近似的な表現にすぎない. 初期条件または境界条件の誤差から, あるいは方程式の無視された項から解には常に誤差がはいりこむ. 解が自然界の流れの表現として受け入れられるためには, 多少の誤差が存在してもその解が大きく変化しないことが要請される.

初期条件の誤差による解の誤差を考えよう. ある解が得られたときに, その初期値にきわめて小さい乱れを与える. これを擾乱という. 時間と共にしだいに大きくなっていくような擾乱が存在すれば‘その解は不安定である’という. あるいは‘その解が表現していると考える仮想的な流れの場（状態）が不安定である’という.

一般に, ある解が自然界の流れの表現として受け入れられるためには, その解が不安定であってはいけない. 非常に小さな初期値の誤差が, 解を全く異なるものにしてしまうからである. そのような解は流れの表現としては全く代表性がなく, 自然界の流れとして実現されにくい. 微分方程式の解が自然界の流れとして存在し得るか否かを判断するために, その解の安定性を調べることが必要である.

なぜこのような問題が発生するかというと, 微分方程式と初期条件・境界条件は流体運動の局所的あるいは瞬間的な意味での近似でしかないからである. それらから得られた解は, あくまでも微小領域または微小時間間隔において流体運動を近似しているのであって, 残念ながら大域的な近似となる保証はないのである. したがっ

て解が大域的な近似として受容され得るものであるか否かを新たに判定せねばならない. それが不安定問題である.

定常な流れの場合, 擾乱が成長した後, 系全体は別の定常解に落ちつくことがある. あるいは乱流状態にいたることもある. しかし通常, 不安定論では擾乱の成長した後の解については扱わない.

## 2 安定性の数学的定義

流れの場の安定性を議論するためには, 安定とはどういうことかを定義しなければならない. ここでは微分方程式論において用いられる安定の定義を紹介する.

$\Psi = \Psi_0(\boldsymbol{x}, t)$ を, 流体を支配する微分方程式の与えられた初期条件・境界条件に対する解とする. $\Psi = \Psi_1(\boldsymbol{x}, t)$ を, 初期条件が異なる同じ方程式系の解とする. 記号 $\mid \Psi_1 - \Psi_0 \mid$ は $\Psi_1$ と $\Psi_0$ との距離とする.

$\Psi = \Psi_0(\boldsymbol{x}, t)$ が Ljapunov の意味で（$t$ が正の向きに）安定である, とは次のように定義される.

> 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ を選べば, 初期値に関する条件 $\mid \Psi_1(\boldsymbol{x}, 0) - \Psi_0(\boldsymbol{x}, 0) \mid < \delta$ が成り立つ $\Psi_1(\boldsymbol{x}, t)$ に対して, $\mid \Psi_1(\boldsymbol{x}, t) - \Psi_0(\boldsymbol{x}, t) \mid < \varepsilon$ が任意の時刻 $t > 0$ で成り立つ.

これは, 十分小さい擾乱を初期に与えると, その擾乱が時間が経っても一定の大きさにとどまることを言っている. しかし時間がたつと擾乱が消滅することまでは要求していない（図１）. 逆に, 時間がたつと消滅してしまうような擾乱でも, ある時間において振幅が一時的に増大するような場合には, Ljapunov の意味では安定ではなくなってしまうことがある (Case, 1960).

図１. Ljapunov の意味で安定

さらに, $\underline{\Psi = \Psi_0(\boldsymbol{x}, t)\ \text{が漸近安定である}}$, とは次のように定義される.

$\Psi = \Psi_0(\boldsymbol{x}, t)$ が Ljapunov の意味において安定であって, さらに, ある $\delta' > 0$ を選べば, $\mid \Psi_1(\boldsymbol{x}, 0) - \Psi_0(\boldsymbol{x}, 0) \mid < \delta'$ である $\Psi_1(\boldsymbol{x}, t)$ に対して, $\lim_{t\to\infty} \mid \Psi_1(\boldsymbol{x}, t) - \Psi_0(\boldsymbol{x}, t) \mid = 0$ が成り立つ.

このことは, 初期に与えられた擾乱の振幅が十分小さければいずれその擾乱は消滅してしまう, ということを意味する （図２）.

図２. 漸近安定

最後に, $\underline{\Psi = \Psi_0(\boldsymbol{x}, t)\ \text{が完全安定}^{1}\ \text{である}}$, とは次のように定義される.

$\Psi = \Psi_0(\boldsymbol{x}, t)$ が Ljapunov の意味において安定であって, さらに, $\mid \Psi_1(\boldsymbol{x}, 0) - \Psi_0(\boldsymbol{x}, 0) \mid < \infty$ である $\Psi_1(\boldsymbol{x}, t)$ に対して, $\lim_{t\to\infty} \mid \Psi_1(\boldsymbol{x}, t) - \Psi_0(\boldsymbol{x}, t) \mid = 0$ が成り立つ.

このことは, 初期に与えられた擾乱の振幅が有界であれば必ず消滅してしまう, ということを意味する.

以上が微分方程式論で用いられる安定性の定義であるが, 線型不安定論では, 以下で述べるようにこれらとは多少違った定義が用いられる.

[1] 巽・後藤の教科書に出ている言葉であるが, 一般にはあまり普及していない.

# 3 線型不安定論

流体の支配微分方程式・境界条件・初期条件を満たす解が得られたとしても, その解の安定性を調べることは一般に難しい. 支配微分方程式・境界条件が非線型方程式であるために, 得られた解の初期条件をすこし変えて方程式系を解くことが困難になるからである.

しかし, 初期条件の誤差（初期擾乱）が小さいときは近似的に解の誤差（擾乱）を求めることができる. 擾乱の振幅が十分小さいあいだは非線型項の効果が無視でき, 擾乱の従う方程式・境界条件を線型方程式で近似できるからである. しかも微小振幅の擾乱に対して不安定であればその解は不安定と判定できるので, 解の安定性に関する議論をある程度行なうことができる.

線型方程式を解くことにより, 微小振幅の擾乱に対する解の安定性を判定するのが線型不安定論である. その手順は一般に次のようになる.

1. 安定性を調べる解を設定する（この解を代表的に $\Psi_0$ と書いておく）. $\Psi_0$ は流体の支配微分方程式系の解でないといけない.
2. その解に対する擾乱方程式を作る（擾乱の量を代表して $\Psi'(\boldsymbol{x}, t) = \Psi_1 - \Psi_0$ と書いておく）.
3. 擾乱の振幅が小さいとして $\Psi'(\boldsymbol{x}, t)$ の 2 次以上の項（非線型項）を省略し, 方程式・境界条件を線型化する.
4. 得られた線型方程式をある初期条件 $\Psi'(\boldsymbol{x}, 0)$ の下で解く.
5. このようにして得られた解について, 次の 2 つの条件について吟味する.
   (a) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ を選べば, $\mid \Psi'(\boldsymbol{x}, 0) \mid < \delta$ で成り立つ $\Psi'(\boldsymbol{x}, t)$ に対して, $\mid \Psi'(\boldsymbol{x}, t) \mid < \varepsilon$ が任意の時刻 $t > 0$ で成り立つ.
   (b) ある $\delta' > 0$ について $\mid \Psi'(\boldsymbol{x}, 0) \mid < \delta'$ である $\Psi'(\boldsymbol{x}, t)$ に対して, $\lim_{t \to \infty} \mid \Psi'(\boldsymbol{x}, t) \mid = 0$ が成り立つ.
6. 解の安定性を次のように判定する.

(a) (a),(b) をともに満たすとき, その解は線型安定である.

(b) (a) は満たすが (b) を満たさないとき, その解は線型中立である.

(c) (b) は満たすが (a) を満たさないとき, その解は ‘ほとんど不安定’ である.

(d) (a),(b) をともに満たさないとき, その解は線型不安定である.

これらの安定性の判定条件はそれぞれ次のような意味を持っている.

1. ある解が 線型安定 であるならば, 元の非線型方程式系ではその解は漸近安定であると予想される [1]. 非線型項の効果が線型項に比べて無視できる程度に十分振幅の小さい初期擾乱を与えると, その振舞いは元の方程式系においても漸近安定の条件を満たすからである. しかし必ずしも完全安定であるとは限らない. 振幅の大きい擾乱については, 方程式を線型化するとき省略した非線型項を無視できなくなるので, 上のようにして得られた擾乱の振舞いとは異なってくるからである（例２）.

2. 解が 線型中立 であるならば, 線型方程式系における安定性についてその解が Ljapunov の意味で安定であると主張することと同じである. しかし元の非線型方程式系に戻って安定性を考えるときには何もいえない（例２）.

3. ‘ほとんど不安定’ [2] の定義は独特であって, 一般に普及しているものではない. この場合解は元の非線型方程式系において Ljapunov の意味で不安定である.

4. 解が 線型不安定 であるならば, その解は元の非線型方程式系において Ljapunov の意味で不安定である (例 2).

[1] このことは少なくともわれわれは数学的に証明していない.

[2] 時間がたつと消滅してしまうような擾乱でも, ある時間において振幅が一時的に増大するような場合が存在することを指摘しておく.

（例） Case,1960:*Phys.Fluids*,**3**,143-148

この例では, 初期値の振幅がいかに小さくても, 振幅の最大値は任意に大きくするように初期値を選ぶことができる. したがって Ljapunov の意味で安定でないことは明らかである. しかも振幅の大きさによっては線型近似の成り立つ範囲を越えてしまうので, 解がどの様に振舞うのか予測がつかない.

また, この例ではエンストロフィー（渦度の２乗）を距離としてみれば Ljapunov の意味で安定となるが, エネルギーを距離としてみれば ‘ほとんど不安定’ となる. このように距離の決め方によって安定性が変わることに注意しなければならない.

# 4　例１．２次元等密度非粘性流体（外力なし）

２次元等密度非粘性流体の平行流 (plane parallel shear flow) の線型安定性を調べる．支配方程式は連続の式と運動方程式である．

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{3}$$

ただし $\rho = const.$ である．

境界条件として, 平行な壁があるとする．壁に平行な方向に $y$ 軸, それと直角方向に $x$ 軸をとる．

$$v = 0, \qquad \text{at} \qquad y = y_1,\quad y_2. \tag{4}$$

安定性を考える平行流の向きは $x$ 軸である．平行流 $U$ は, $y$ 方向にのみ変化しているとする（図３）．

$$U = U(y)$$

図３．２次元平行流

$U(y)$ は (1)〜(4) を満たす解となっている．この平行流に対して微小な擾乱 $u'$, $v'$, $p'$ が, 加わったとする．

$$\begin{aligned} u &= U(y) + u'(x,y,t), \\ v &= v'(x,y,t), \\ p &= p'(x,y,t). \end{aligned} \tag{5}$$

(5) を (1)〜(4) に代入する．さらに prime のついた量が微小であると仮定し，２次以上の項を無視すると

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{dU}{dy} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U\frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y}, \tag{8}$$

$$v' = 0, \qquad \text{at} \qquad y = y_1, y_2. \tag{9}$$

(6)〜(9) を解き, (a), (b) の条件に当てはまるか否かを吟味して線型安定性を判定する [1].

# 5 例 2．常微分方程式の解の安定性

常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = 2\alpha x - 3x^2 \tag{10}$$

を例に, 線型安定性と元の方程式系での安定性を比較する.

$x = 0$ は方程式 (10) の解である．この解の安定性を調べる．(10) に $x = 0 + x'(t)$ を代入して線型化する.

$$\frac{dx'}{dt} = 2\alpha x',$$

$$\text{ゆえに} \quad x' = x'(0) \cdot e^{2\alpha t}.$$

したがって, 解 $x = 0$ の線型安定性は次のように判定される.

$\alpha > 0$ のとき線型不安定,
$\alpha = 0$ のとき中立,
$\alpha < 0$ のとき線型安定.

一方, 元の方程式における安定性は, (10) を変型して

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

[1] (6)〜(9) で表される擾乱の振舞いを調べる具体的な手法については, 別シリーズ ‘線型不安定問題の解法 ’を参照せよ.

ただし $V = -\alpha x^2 + x^3$ である．V のグラフから解の振舞いを調べることができる（図４）．

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha > 0$ | $\alpha = 0$ | $\alpha < 0$ |
| Ljapunov の意味で不安定 | Ljapunov の意味で不安定 | 漸近安定 |

図 4