β 面上の渦度方程式メモ

村上真也

2012 年 10 月 12 日

目次

この文書では β 面上の渦度方程式とその解の基本的な性質について簡単にまとめる.

1　方程式系と系の統計量

この節では β 平面上の渦度方程式をはじめとして, エネルギーやエンストロフィーの発展方程式などといった様々な量の発展方程式をまとめる.

1.1　基礎方程式

まず, 運動方程式, 渦度方程式, 渦度の微分に関する方程式を順に示す.

1.1.1　運動方程式

β 面上の非圧縮水平非発散流体の運動方程式をデカルト座標系で書くと,

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+F_{\mathrm{m}x}+D_{\mathrm{m}x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+F_{\mathrm{m}y}+D_{\mathrm{m}y} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{3}$$

である. ここで, ρ は密度で定数, $p=p(x,y)$ は圧力である. また, u, v はそれぞれ x, y 方向の速度, $F_{\mathrm{m}x}$, $F_{\mathrm{m}y}$ はそれぞれ x, y 方向の強制項, $D_{\mathrm{m}x}$, $F_{\mathrm{m}y}$ はそれぞれ x, y 方向の散逸項である. また, f は Coriolis パラメタで, 球の回転角速度 Ω と接平面の緯度 θ を使うと, $f=2\Omega\sin\theta$ と表せる.

ベクトルで書くと,

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}-f\vec{e}_z\times\vec{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\vec{F}_{\mathrm{m}}+\vec{D}_{\mathrm{m}} \tag{4}$$

$$\nabla\cdot\vec{u}=0 \tag{5}$$

となる. ここで, $\vec{u}=u\vec{e}_x+v\vec{e}_y$ は速度ベクトルである. また, $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルである.

1.1.2　渦度方程式

β 面上の順圧渦度方程式は,

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\zeta+\beta v=F+D \tag{6}$$

である. ここで, $\zeta=\vec{e}_z\cdot\nabla\times\vec{u}=\nabla^2\psi$ は鉛直方向の相対渦度で $\vec{u}=u\vec{e}_x+v\vec{e}_y$ は速度ベクトルである. また, $\vec{e}_x,\vec{e}_y$ はそれぞれ x,y 方向の単位ベクトルである.

ここで, $\nabla\cdot\vec{u}=0$ を満たすように,

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad v=\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{7}$$

なる関数 $\psi(x,y,t)$ を定義する. これより, $\nabla\cdot\vec{u}=\nabla^2\psi=0$ となり, 確かに ψ は条件を満たす. この ψ を流れ関数という. ベクトルで書けば, $\vec{u}=-\vec{e}_z\times\nabla\psi$ である. ここで, $\vec{e}_z$ は鉛直方向の単位ベクトルである. [*1] F は強制

[*1] 流れ関数は $u=\psi_y, v=-\psi_x$ と定義されることもある. そのときには, 渦度と流れ関数の関係は $\zeta=-\nabla^2\psi$ となる.

項, D は散逸項, β は Coriolis パラメタ $f = 2\Omega \sin\theta$ を $f = f_0 + \beta y$ と $y = 0$ で Taylor 展開したときの y 微分係数である. 散逸項 D は通常, 粘性項 $\nu \nabla^2 \zeta$ や摩擦 $-\lambda\zeta$ などの組合せが用いられる.

また, 絶対渦度 $q = \zeta + f$ を用いて書き直せば,

$$\frac{\mathrm{D}q}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial q}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla q = F + D \tag{8}$$

となる. ここで, $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla$ は Lagrange 微分である.

流れ関数 ψ を使って書けば,

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = F + D. \tag{9}$$

あるいは, 非線形項を Jacobian $J(a, b) = \frac{\partial(a,b)}{\partial(x,y)} = a_x b_y - b_x a_y$ を用いて,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + J(\psi, \zeta) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = F + D. \tag{10}$$

と表すこともよくある.

散逸項 D は, 超粘性と hypofriction の組合せの場合, 実空間では

$$D = -\lambda_n (-\nabla^2)^{-n} \zeta - \nu_m (-\nabla^2)^m \zeta, \tag{11}$$

スペクトル空間では

$$D_{\vec{k}} = -\lambda_n k^{-2n} \zeta_{\vec{k}} - \nu_m k^{2m} \zeta_{\vec{k}} \tag{12}$$

と表される. n は hypofriction の次数で, $n = 0$ の場合は Ekman 摩擦と呼ばれるスケールに依存しない散逸を表す. 一方, $n > 0$ のときは低波数のみに選択的に効く散逸, hypofriction を表す. m は超粘性の次数で, $m = 1$ のときは分子粘性による散逸を表す. $n = 0$, $m = 1$ のときは $D = -\lambda_0 \zeta + \nu_1 \nabla^2 \zeta$ となる.

以後の議論では, x, y 方向ともに $2\pi \times 2\pi$ の周期境界条件を課す.

1.1.3 渦度勾配方程式

渦度の微分に関する方程式は,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \beta \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial x} \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + v \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial y} \tag{14}$$

となる.

テンソルで書けば,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial \zeta}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial D}{\partial x_i} \tag{15}$$

となる.

1.2 エネルギー・エンストロフィー・パリンストロフィー時間発展方程式

エネルギー, エンストロフィー, パリンストロフィー時間発展方程式を微分形で導く.

1.2.1 エネルギー方程式

渦度方程式 (6) に ψ をかけると,

$$\psi\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\psi\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\psi\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\beta\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}=\psi(F+D)$$

となる．ここで,

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\psi\nabla\psi)&=\psi\nabla^2\psi+\nabla\psi\cdot\nabla\psi\\&=\psi\zeta+|\nabla\psi|^2\end{aligned}$$

の関係を使うと,

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\left(\psi\frac{\partial\nabla\psi}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\frac{|\nabla\psi|^2}{2}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\left[\nabla\cdot\left(\psi\frac{\partial\nabla\psi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\frac{|\nabla\psi|^2}{2}\right]&\\-\frac{\partial\psi}{\partial y}\left[\nabla\cdot\left(\psi\frac{\partial\nabla\psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\frac{|\nabla\psi|^2}{2}\right]+\beta\frac{\partial}{\partial x}\frac{\psi^2}{2}&=\psi(F+D)\\-\frac{\partial}{\partial t}\frac{|\nabla\psi|^2}{2}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{|\nabla\psi|^2}{2}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{|\nabla\psi|^2}{2}+\nabla\cdot\left(\psi\frac{\partial\nabla\psi}{\partial t}\right)&\\+\frac{\partial\psi}{\partial x}\nabla\cdot\left(\psi\frac{\partial\nabla\psi}{\partial y}\right)-\frac{\partial\psi}{\partial y}\nabla\cdot\left(\psi\frac{\partial\nabla\psi}{\partial x}\right)+\beta\frac{\partial}{\partial x}\frac{\psi^2}{2}&=\psi(F+D)\end{aligned}$$

となる．さらに,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x}\nabla\cdot\left(\psi\frac{\partial\nabla\psi}{\partial y}\right)&=\nabla\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\psi\frac{\partial\nabla\psi}{\partial y}\right)-\frac{\partial\nabla\psi}{\partial x}\cdot\left(\psi\frac{\partial\nabla\psi}{\partial y}\right),\\\frac{\partial\psi}{\partial y}\nabla\cdot\left(\psi\frac{\partial\nabla\psi}{\partial x}\right)&=\nabla\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\psi\frac{\partial\nabla\psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial\nabla\psi}{\partial y}\cdot\left(\psi\frac{\partial\nabla\psi}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

となることを用いると,

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{|\nabla\psi|^2}{2}+\nabla\cdot\left(-\psi\frac{\partial\nabla\psi}{\partial t}-\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\nabla\psi}{\partial y}+\psi\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\nabla\psi}{\partial x}-\beta\frac{\psi^2}{2}\vec{e}_x\right)=-\psi(F+D)$$

となるから, 最終的に

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{|\nabla\psi|^2}{2}+\nabla\cdot\vec{F}=-\psi(F+D), \tag{16}$$

$$\vec{F}=-\psi\frac{D\nabla\psi}{Dt}-\beta\frac{\psi^2}{2}\vec{e}_x \tag{17}$$

となる．ここで $\vec{F}$ はエネルギーフラックスである．あるいは,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{|\nabla\psi|^2}{2}+\nabla\cdot\left(\vec{F}+\frac{|\nabla\psi|^2}{2}\vec{u}\right)=-\psi(F+D) \tag{18}$$

とも書ける．ここで $\nabla\cdot\vec{u}=0$ を用いて

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\left(\frac{|\nabla\psi|^2}{2}\vec{u}\right)=&\vec{u}\cdot\nabla\left(\frac{|\nabla\psi|^2}{2}\right)+(\nabla\cdot\vec{u})\frac{|\nabla\psi|^2}{2}\\=&\vec{u}\cdot\nabla\left(\frac{|\nabla\psi|^2}{2}\right)\end{aligned} \tag{19}$$

とした．

1.2.2 エンストロフィー方程式

次にエンストロフィー (enstrophy) 方程式を導く．エンストロフィーは $\zeta^2/2$ で定義される量である．渦度方程式 (6) に ζ をかけることで,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\zeta^2}{2}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\zeta^2}{2}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\zeta^2}{2}+\beta\zeta\frac{\partial\psi}{\partial x}=\zeta(F+D)$$

となる．ここで, β 項は

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\left(\nabla\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)&=\nabla^2\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}+\nabla\psi\cdot\frac{\partial\nabla\psi}{\partial x}\\&=\zeta\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{|\nabla\psi|^2}{2}\end{aligned}$$

となることを使うと,

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{\zeta^2}{2}+\nabla\cdot\vec{G}=\zeta(F+D), \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\vec{G}&=\beta\left(\nabla\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{|\nabla\psi|^2}{2}\vec{e}_x\right) &(21)\\&=\frac{\beta}{2}\left[(\psi_x^2-\psi_y^2)\vec{e}_x+2\psi_x\psi_y\vec{e}_y\right] &(22)\\&=-\frac{\beta}{2}|\nabla\psi|^2(\vec{e}_x\cos2\theta+\vec{e}_y\sin2\theta) &(23)\end{aligned}$$

となる．ここで $\vec{G}$ はエンストロフィーフラックス, $\theta:=\arctan(-\psi_x/\psi_y)=\arctan(v/u)$ は速度ベクトルの向きを東向きから左回りに測った角である．あるいは,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\zeta^2}{2}+\nabla\cdot\left(\vec{G}+\frac{\zeta^2}{2}\vec{u}\right)=\zeta(F+D) \tag{24}$$

とも書ける．

1.2.3 パリンストロフィー方程式

パリンストロフィー (palinstrophy) 方程式を導く．パリンストロフィーは $(\nabla\zeta)^2/2$ で定義される量である．渦度方程式 (6) に ∇ をかけた後に $\nabla\zeta$ と内積をとることで,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\frac{(\nabla\zeta)^2}{2}+\nabla\cdot\left[\frac{\partial\nabla\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\zeta^2}{2}-\frac{\partial\nabla\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\zeta^2}{2}-\beta\frac{\zeta^2}{2}\vec{e}_x+\beta\zeta\frac{\partial\nabla\psi}{\partial x}\right]\\&\qquad+\zeta\left[\frac{\partial\nabla\zeta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\nabla\psi}{\partial y}-\frac{\partial\nabla\zeta}{\partial y}\cdot\frac{\partial\nabla\psi}{\partial x}\right]=\nabla\zeta\cdot\nabla(F+D)\end{aligned} \tag{25}$$

となる．また, 歪み速度テンソル S, S_{ij}

$$\begin{aligned}S_{ij}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), &(26)\\\mathsf{S}&=\begin{pmatrix}u_x & \frac{1}{2}(v_x+u_y)\\ \frac{1}{2}(v_x+u_y) & v_y\end{pmatrix} &(27)\\&=\begin{pmatrix}-\psi_{xy} & \frac{1}{2}(\psi_{xx}-\psi_{yy})\\ \frac{1}{2}(\psi_{xx}-\psi_{yy}) & \psi_{xy}\end{pmatrix} &(28)\end{aligned}$$

を用いて, パリンストロフィー時間発展方程式は,

$$\frac{D}{Dt}\frac{(\nabla\zeta)^2}{2} = -\frac{\partial\zeta}{\partial x_i}\frac{\partial\zeta}{\partial x_j}S_{ij} - \beta\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right) + \nabla\zeta\cdot\nabla(F+D) \tag{29}$$

$$= \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \beta\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right) + \nabla\zeta\cdot\nabla(F+D) \tag{30}$$

と書ける.

1.2.4 単色波の場合のエネルギーなどの輸送

複素振幅 $\hat{\psi}$ の単色波 $\psi = \mathrm{Re}[\hat{\psi}\exp\{\mathrm{i}(k_x x + k_y y - \omega t)\}]$ を仮定すると, エネルギーフラックス $\vec{F}$ は,

$$\vec{F} = -(k_x^2 + k_y^2)\frac{\psi^2}{2}\vec{c_{\mathrm{g}}}$$

となる. エネルギー E は

$$E = \frac{u^2+v^2}{2} = \frac{1}{2}\nabla\psi\cdot\nabla\psi = -\frac{1}{2}(k_x^2+k_y^2)\psi^2$$

であるから, エネルギーフラックス $\vec{F}$ は波のエネルギーと Rossby 波の群速度ベクトル $\vec{c_{\mathrm{g}}}$ の積である. したがって, エネルギーフラックスは, Rossby 波によって運ばれるエネルギーを表している.

同様にエンストロフィーフラックスは,

$$\vec{G} = (k_x^2 + k_y^2)^2\frac{\psi^2}{2}\vec{c_{\mathrm{g}}}$$

となるが, エンストロフィー Z は

$$Z = \frac{1}{2}(\nabla^2\psi)^2 = \frac{1}{2}[-(k_x^2+k_y^2)\psi]^2 = \frac{1}{2}(k_x^2+k_y^2)^2\psi^2$$

だから, エンストロフィーフラックスもエンストロフィーと Rossby 波の群速度ベクトルの積である.

これらのエネルギーフラックス, エンストロフィーフラックスについては Rhines(1975) を参考にした.

1.3 積分形の時間発展方程式

前節で導出したエネルギー, エンストロフィー, パリンストロフィー時間発展方程式を空間積分した形を見ておく.

エネルギー方程式 (17) 式とエンストロフィー方程式 (20) 式を空間に渡って積分することで,

$$\iint\frac{\partial}{\partial t}\frac{|\nabla\psi|^2}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint\nabla\cdot\vec{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint J\left(\psi, \frac{|\nabla\psi|^2}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\psi(F+D)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$\iint\frac{\partial}{\partial t}\frac{\zeta^2}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint\nabla\cdot\vec{G}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint J\left(\psi, \frac{\zeta^2}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\zeta(F+D)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

ここで, エネルギー方程式, エンストロフィー方程式の右辺第一項は 2 次元の Gauss の発散定理によってゼロ, 右辺第二項は周期境界なのでゼロになる.

総エネルギー, 総エンストロフィーをそれぞれ E, Z と定義すると,

$$E = \iint\frac{|\nabla\psi|^2}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\frac{u^2+v^2}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{31}$$

$$Z = \iint\frac{\zeta^2}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{32}$$

となるので, 総エネルギーと総エンストロフィーの発展は

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\iint (F+D)\psi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \tag{33}$$

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = -\iint (F+D)\zeta \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{34}$$

と書ける. すなわち, 強制散逸がない場合には総エネルギーも総エンストロフィーも保存する.

パリンストロフィーはどうなるかというと, パリンストロフィー方程式 (25) を領域に渡って積分することで,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -\iint \zeta \left[\frac{\partial \nabla \zeta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \nabla \psi}{\partial y} - \frac{\partial \nabla \zeta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \nabla \psi}{\partial x} \right] + \zeta \nabla^2 (F+D) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y. \tag{35}$$

となる. ここで, 総パリンストロフィーを

$$P = \iint \frac{(\nabla \zeta)^2}{2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{36}$$

と定義した. 従って, パリンストロフィーは強制散逸がない場合でも保存しない.

2 スペクトル空間における方程式系と系の統計量

この章ではスペクトル空間での方程式系と系の統計量について概観する.

2.1 渦度方程式のスペクトル表現

流れ関数を Fourier 級数で表現すると,

$$\psi(x,y,t) = \sum_{\vec{k}} \hat{\psi}_{\vec{k}}(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}, \tag{37}$$

$$\hat{\psi}_{\vec{k}}(t) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \psi(x,y,t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{38}$$

である. ここで, $\hat{\psi}_{\vec{k}}(t) = \hat{\psi}(k_x, k_y, t)$ である. 実空間の領域が $2\pi \times 2\pi$ の 2 重周期境界なので, (37) 式を積分ではなく和の記号で書いた.

渦度方程式 (6) 式のスペクトル表現は, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}'\cdot\vec{x}}$ をかけて全空間に渡って積分することで,

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\zeta}_{\vec{k}}}{\mathrm{d}t} = -N_{\vec{k}} + \beta\frac{\mathrm{i}k_x}{k^2}\hat{\zeta}_{\vec{k}} + F_{\vec{k}} + D_{\vec{k}}. \tag{39}$$

ここで, $N_{\vec{k}}$ は非線形項である. 具体的に計算すると,

$$\begin{aligned}
N_{\vec{k}} &= \frac{1}{4\pi^2}\iint J(\psi,\zeta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\iint (\psi_x\zeta_y - \psi_y\zeta_x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\sum_{\vec{p},\vec{q}}(-p_xq_y\hat{\psi}_{\vec{p}}\hat{\zeta}_{\vec{q}} + p_yq_x\hat{\psi}_{\vec{p}}\hat{\zeta}_{\vec{q}})\iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{p}+\vec{q}-\vec{k})\cdot\vec{x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \sum_{\vec{p}+\vec{q}-\vec{k}=0} -q^2(-p_xq_y + p_yq_x)\hat{\psi}_{\vec{p}}\hat{\psi}_{\vec{q}}
\end{aligned} \tag{40}$$

となる. このままでもいいのだが, よく行われる変形をここでも行っておく. $\vec{p}, \vec{q}$ を入れ換えた式を作り, 上の最後の式に足して 2 で割ると,

$$N_{\vec{k}} = \sum_{\vec{p}+\vec{q}-\vec{k}=0} \frac{1}{2}(q^2 - p^2)(p_xq_y - p_yq_x)\hat{\psi}_{\vec{p}}\hat{\psi}_{\vec{q}} \tag{41}$$

を得る. さらに, $\vec{p} + \vec{q} - \vec{k} = 0$ の各波数ベクトルの全ての係数を正の符号に書き換える. $\vec{p'} := -\vec{p}, \quad \vec{q'} := -\vec{q}$ として, ψ が実数値関数であることから $\hat{\psi}_{\vec{p}} = \hat{\psi}^*_{-\vec{p}}$ を用いて,

$$N_{\vec{k}} = \sum_{\vec{p'}+\vec{q'}+\vec{k}=0} \frac{1}{2}(q'^2 - p'^2)(p'_xq'_y - p'_yq'_x)\hat{\psi}^*_{\vec{p'}}\hat{\psi}^*_{\vec{q'}}$$

となる. ここで $\vec{p'}, \vec{q'}$ を, それらのプライムを外した記号で再定義して改めて書き直すと,

$$N_{\vec{k}} = \frac{1}{2}\sum_{\vec{p}+\vec{q}+\vec{k}=0}(p_xq_y - p_yq_x)(q^2 - p^2)\hat{\psi}^*_{\vec{p}}\hat{\psi}^*_{\vec{q}} \tag{42}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\vec{p}+\vec{q}+\vec{k}=0}(\vec{p}\times\vec{q})_z(q^2 - p^2)\hat{\psi}^*_{\vec{p}}\hat{\psi}^*_{\vec{q}} \tag{43}$$

$$=: \sum_{\vec{p}+\vec{q}+\vec{k}=0} d_{\vec{k},\vec{p},\vec{q}}\hat{\psi}^*_{\vec{p}}\hat{\psi}^*_{\vec{q}} \tag{44}$$

となる．ここで, $(\vec{p}\times\vec{q})_z$ は $(\vec{p}\times\vec{q})$ の z 成分を表す．また, 最後の式では係数を $d_{\vec{k},\vec{p},\vec{q}}$ と表した．

さらに, $\vec{p}+\vec{q}+\vec{k}=0$ の条件を用いて, $\vec{q}$ を消去した表式を求めてみると,

$$N_{\vec{k}} = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{p}}(\vec{p}\times\vec{k})_z(k^2+2\vec{k}\cdot\vec{p})\hat{\psi}^*_{\vec{p}}\hat{\psi}^*_{-\vec{p}-\vec{k}} \tag{45}$$

となる．また, $\vec{p}=(p\cos\theta_p, p\sin\theta_p)$, $\vec{k}=(k\cos\theta_k, k\sin\theta_k)$ と書き直すと,

$$N_{\vec{k}} = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{p}} pk^2\sin\theta'(k+2p\cos\theta')\hat{\psi}^*_{\vec{p}}\hat{\psi}^*_{-\vec{p}-\vec{k}} \tag{46}$$

となる．ここで, $\theta' := \theta_k-\theta_p$ である．

さらに, p と k の比 $r := p/k$ を用いて書き直すと,

$$N_{\vec{k}} = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{p}} rk^4\sin\theta'(1+2r\cos\theta')\hat{\psi}^*_{\vec{p}}\hat{\psi}^*_{-\vec{p}-\vec{k}}. \tag{47}$$

$N_{\vec{k}}$ の形を見ると, $|N_{\vec{k}}|$ が大きな値を取るのは,

- $\vec{p}$ と $\vec{q}$ が直交しているとき,
- p と q の差が大きいとき,

であることが分かる．

2.2 エネルギー方程式とエンストロフィー方程式のスペクトル表現

エネルギー方程式のスペクトル形式を導く．まず, 単位面積あたりのエネルギーのスペクトル表現を導く．

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{4\pi^2}\iint\frac{u^2+v^2}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y && (48)\\
&= \frac{1}{4\pi^2}\iint\frac{\nabla\psi\cdot\nabla\psi}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y && (49)\\
&= \frac{1}{4\pi^2}\iint\frac{1}{2}\nabla\cdot(\psi\nabla\psi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \frac{1}{4\pi^2}\iint\frac{1}{2}\psi\nabla^2\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\iint\frac{1}{2}\psi\nabla^2\psi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= -\frac{1}{4\pi^2}\sum_{\vec{k}}\sum_{\vec{k'}}\frac{1}{2}\hat{\psi}_{\vec{k}}(-{k'}^2)\hat{\psi}_{-\vec{k'}}\iint\mathrm{e}^{i(\vec{k}-\vec{k'})\cdot\vec{x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= -\sum_{\vec{k}}\sum_{\vec{k'}}\frac{1}{2}\hat{\psi}_{\vec{k}}(-{k'}^2)\hat{\psi}_{-\vec{k'}}\delta_{\vec{k},\vec{k'}}\\
&= \sum_{\vec{k}}\frac{k^2}{2}\hat{\psi}_{\vec{k}}\hat{\psi}_{-\vec{k}}\\
&= \sum_{\vec{k}}\frac{k^2}{2}\hat{\psi}_{\vec{k}}\hat{\psi}^*_{\vec{k}} =: \sum_{\vec{k}}E_{\vec{k}} && (50)
\end{aligned}$$

(39) 式に $\hat{\psi}^*_{\vec{k}}$ をかける．また, $\hat{\zeta}_{\vec{k}}=-k^2\hat{\psi}_{\vec{k}}$ を用いると,

$$-k^2\hat{\psi}^*_{\vec{k}}\frac{\partial\hat{\psi}_{\vec{k}}}{\partial t} = -\hat{\psi}^*_{\vec{k}}N_{\vec{k}} - \beta\mathrm{i}k_x\hat{\psi}^*_{\vec{k}}\hat{\psi}_{\vec{k}} + \hat{\psi}^*_{\vec{k}}(F_{\vec{k}}+D_{\vec{k}})$$

上式の複素共役を取って, 和をとり $-1/2$ をかけると,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}k^2\hat{\psi}^*_{\vec{k}}\hat{\psi}_{\vec{k}}\right) = \frac{1}{2}[\hat{\psi}^*_{\vec{k}}N_{\vec{k}} + \hat{\psi}_{\vec{k}}N^*_{\vec{k}} - \hat{\psi}^*_{\vec{k}}(F_{\vec{k}} + D_{\vec{k}}) - \hat{\psi}_{\vec{k}}(F^*_{\vec{k}} + D^*_{\vec{k}})] \tag{51}$$

$$= \mathrm{Re}\left[\hat{\psi}^*_{\vec{k}}N_{\vec{k}} - \hat{\psi}^*_{\vec{k}}(F_{\vec{k}} + D_{\vec{k}})\right] \tag{52}$$

ここで,

$$\mathrm{Re}[\hat{\psi}^*_{\vec{k}}N_{\vec{k}}] = \frac{1}{2}\sum_{\vec{p}+\vec{q}+\vec{k}=0}(p_xq_y - p_yq_x)(q^2-p^2)\mathrm{Re}\left[\hat{\psi}_{\vec{p}}\hat{\psi}_{\vec{q}}\hat{\psi}_{\vec{k}}\right] \tag{53}$$

$$=: \sum_{\vec{p}+\vec{q}+\vec{k}=0} T_{\mathrm{E}}(\vec{k},\vec{p},\vec{q}) \tag{54}$$

$$=: T_{\mathrm{E}}(\vec{k}) \tag{55}$$

ここで, $T_{\mathrm{E}}(\vec{p},\vec{q},\vec{k})$ はエネルギーのやりとりを表す関数である. 個々の三波相互作用が輸送するエネルギーは $\mathrm{Re}[\hat{\psi}_{\vec{p}}\hat{\psi}_{\vec{q}}\hat{\psi}_{\vec{k}}]$ に比例することが分かる. エネルギー方程式のスペクトル表示は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}k^2\hat{\psi}^*_{\vec{k}}\hat{\psi}_{\vec{k}}\right) = \sum_{\vec{p}+\vec{q}+\vec{k}=0} T_{\mathrm{E}}(\vec{k},\vec{p},\vec{q}) - \mathrm{Re}[\hat{\psi}^*_{\vec{k}}(F_{\vec{k}} + D_{\vec{k}})]. \tag{56}$$

また, $T_{\mathrm{E}}(\vec{k},\vec{p},\vec{q})$ にはエネルギー詳細つり合いと呼ばれる保存則が成り立つ. すなわち,

$$T_{\mathrm{E}}(\vec{k},\vec{p},\vec{q}) + T_{\mathrm{E}}(\vec{p},\vec{q},\vec{k}) + T_{\mathrm{E}}(\vec{q},\vec{k},\vec{p}) = 0, \tag{57}$$

である. これは, 個々の三波相互作用がエネルギー保存則を満たすことを表している.

単位面積あたりのエンストロフィーのスペクトル表現は,

$$Z = \sum_{\vec{k}}\frac{1}{2}\hat{\zeta}^*_{\vec{k}}\hat{\zeta}_{\vec{k}} =: \sum_{\vec{k}} Z_{\vec{k}} \tag{58}$$

なので, エンストロフィー方程式のスペクトル表現もエネルギー方程式のスペクトル表現と同様に, (39) 式に $\hat{\zeta}^*_{\vec{k}}$ をかけて, 複素共役をとって足し合わせ, 2 で割ると,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\hat{\zeta}^*_{\vec{k}}\hat{\zeta}_{\vec{k}}\right) = \sum_{\vec{p}+\vec{q}+\vec{k}=0} T_{\mathrm{Z}}(\vec{k},\vec{p},\vec{q}) - \mathrm{Re}[\hat{\zeta}^*_{\vec{k}}(F_{\vec{k}} + D_{\vec{k}})], \tag{59}$$

ここで,

$$T_{\mathrm{Z}}(\vec{k},\vec{p},\vec{q}) := -\frac{1}{2}(p_xq_y - p_yq_x)\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2}\right)\mathrm{Re}[\hat{\zeta}_{\vec{p}}\hat{\zeta}_{\vec{q}}\hat{\zeta}_{\vec{k}}] \tag{60}$$

$$= k^2 T_{\mathrm{E}}(\vec{k},\vec{p},\vec{q}) \tag{61}$$

である.

$T_{\mathrm{Z}}(\vec{k},\vec{p},\vec{q})$ には $T_{\mathrm{E}}(\vec{k},\vec{p},\vec{q})$ と同様に詳細つり合いが成り立つ. すなわち,

$$T_{\mathrm{Z}}(\vec{k},\vec{p},\vec{q}) + T_{\mathrm{Z}}(\vec{p},\vec{q},\vec{k}) + T_{\mathrm{Z}}(\vec{q},\vec{k},\vec{p}) = 0. \tag{62}$$

また, 詳細つり合いと同じことだが, 係数について

$$d_{\vec{k},\vec{p},\vec{q}} + d_{\vec{p},\vec{q},\vec{k}} + d_{\vec{q},\vec{k},\vec{p}} = 0 \tag{63}$$

$$k^2 d_{\vec{k},\vec{p},\vec{q}} + p^2 d_{\vec{p},\vec{q},\vec{k}} + q^2 d_{\vec{q},\vec{k},\vec{p}} = 0 \tag{64}$$

が成り立つ.

2.3 位相方程式のスペクトル表示

渦度や流れ関数のスペクトルから位相の発展方程式を導く．ここでは $\omega_{\vec{k}} \in \mathbb{C}$ と仮定しておく．[*2]

(39) 式に $\hat{\zeta}^*_{\vec{k}}$ をかける．また，その複素共役を求め，引くと，

$$\hat{\zeta}^*_{\vec{k}}\frac{\partial\hat{\zeta}_{\vec{k}}}{\partial t} - \hat{\zeta}_{\vec{k}}\frac{\partial\hat{\zeta}^*_{\vec{k}}}{\partial t} = -(N_{\vec{k}}\hat{\zeta}^*_{\vec{k}} - N^*_{\vec{k}}\hat{\zeta}_{\vec{k}}) - i(\omega_{\vec{k}} + \omega^*_{\vec{k}})|\hat{\zeta}_{\vec{k}}|^2 + \left[(F_{\vec{k}} + D_{\vec{k}})\hat{\zeta}^*_{\vec{k}} - (F_{\vec{k}} + D_{\vec{k}})\hat{\zeta}^*_{\vec{k}}\right]$$

となる．ここで，$\hat{\zeta}_{\vec{k}} =: Ae^{i\eta}, A, \eta \in \mathbb{R}$ とすると，左辺は $2iA^2\partial\eta/\partial t$ となる．従って，

$$2i|\hat{\zeta}_{\vec{k}}|^2\frac{\partial \arg\hat{\zeta}_{\vec{k}}}{\partial t} = -2i\mathrm{Im}[N_{\vec{k}}\hat{\zeta}^*_{\vec{k}}] - 2i\mathrm{Re}[\omega_{\vec{k}}]|\hat{\zeta}_{\vec{k}}|^2 + 2i\mathrm{Im}[(F_{\vec{k}} + D_{\vec{k}})\hat{\zeta}^*_{\vec{k}}]$$

となる．さらに $2i|\hat{\zeta}_{\vec{k}}|^2$ で両辺を割って，

$$\frac{\partial \arg\hat{\zeta}_{\vec{k}}}{\partial t} = -\frac{\mathrm{Im}[N_{\vec{k}}\hat{\zeta}^*_{\vec{k}}]}{|\hat{\zeta}_{\vec{k}}|^2} - \mathrm{Re}[\omega_{\vec{k}}] + \frac{\mathrm{Im}[(F_{\vec{k}} + D_{\vec{k}})\hat{\zeta}^*_{\vec{k}}]}{|\hat{\zeta}_{\vec{k}}|^2} \tag{65}$$

となる．右辺第一項は非線形項の位相への寄与を表している．

流れ関数で表してもほぼ同様で，

$$\frac{\partial \arg\hat{\psi}_{\vec{k}}}{\partial t} = \frac{\mathrm{Im}[N_{\vec{k}}\hat{\psi}^*_{\vec{k}}]}{k^2|\hat{\psi}_{\vec{k}}|^2} - \mathrm{Re}[\omega_{\vec{k}}] - \frac{\mathrm{Im}[(F_{\vec{k}} + D_{\vec{k}})\hat{\psi}^*_{\vec{k}}]}{k^2|\hat{\psi}_{\vec{k}}|^2} \tag{66}$$

となる．

2.4 物理空間におけるフラックスのスペクトル表示

物理空間におけるフラックスをスペクトル表示する．

まず，エネルギーフラックス $\vec{F}$ は，

$$\vec{F} = -\psi\frac{\partial\nabla\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\nabla\psi}{\partial y} + \psi\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\nabla\psi}{\partial x} - \beta\frac{\psi^2}{2}\vec{e}_x \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3}\frac{\mathrm{i}}{3}\Bigg[\frac{\vec{k}_2+\vec{k}_3}{(\vec{k}_2+\vec{k}_3)^2}(\vec{k}_2\times\vec{k}_3)_z(k_3^2-k_2^2)e^{\mathrm{i}(\vec{k}_2+\vec{k}_3)\cdot\vec{x}} \\
&\qquad + \frac{\vec{k}_3+\vec{k}_1}{(\vec{k}_3+\vec{k}_1)^2}(\vec{k}_3\times\vec{k}_1)_z(k_1^2-k_3^2)e^{\mathrm{i}(\vec{k}_3+\vec{k}_1)\cdot\vec{x}} \\
&\qquad + \frac{\vec{k}_1+\vec{k}_2}{(\vec{k}_1+\vec{k}_2)^2}(\vec{k}_1\times\vec{k}_2)_z(k_2^2-k_1^2)e^{\mathrm{i}(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\cdot\vec{x}}\Bigg]\hat{\psi}_{\vec{k}_1}\hat{\psi}_{\vec{k}_2}\hat{\psi}_{\vec{k}_3} \\
&\quad + \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3}\frac{\mathrm{i}}{6}\Big[(\vec{k}_3-\vec{k}_2)(\vec{k}_2\times\vec{k}_3)_z + (\vec{k}_2-\vec{k}_1)(\vec{k}_1\times\vec{k}_2)_z \\
&\qquad\qquad + (\vec{k}_1-\vec{k}_3)(\vec{k}_3\times\vec{k}_1)_z\Big]\hat{\psi}_{\vec{k}_1}\hat{\psi}_{\vec{k}_2}\hat{\psi}_{\vec{k}_3}e^{\mathrm{i}(\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3)\cdot\vec{x}} \\
&\quad + \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2}\left[\frac{1}{4}\left(k_1^2\vec{c}_\mathrm{g}(\vec{k}_1) + k_2^2\vec{c}_\mathrm{g}(\vec{k}_2)\right)\hat{\psi}_{\vec{k}_1}\hat{\psi}_{\vec{k}_2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\vec{k}_1}{k_1^2}\hat{\psi}_{\vec{k}_2}(F_{\vec{k}_1} + (D_{\vec{k}_1}) + \frac{\vec{k}_2}{k_2^2}\hat{\psi}_{\vec{k}_1}(F_{\vec{k}_2} + (D_{\vec{k}_2})\right)\right]e^{\mathrm{i}(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\cdot\vec{x}}
\end{aligned} \tag{68}$$

[*2] 分散関係式に散逸項の寄与を含めた場合が簡単に分かるため．

となる．また,

$$\frac{|\nabla\psi|^2}{2}\vec{u}=\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3}-\frac{\mathrm{i}}{6}\left[\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2(\vec{e}_z\times\vec{k}_3)+\vec{k}_2\cdot\vec{k}_3(\vec{e}_z\times\vec{k}_1)+\vec{k}_3\cdot\vec{k}_1(\vec{e}_z\times\vec{k}_2)\right]\hat{\psi}_{\vec{k}_1}\hat{\psi}_{\vec{k}_2}\hat{\psi}_{\vec{k}_3}e^{\mathrm{i}(\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3)\cdot\vec{x}}. \tag{69}$$

エンストロフィーフラックス $\vec{G}$ に関しては,

$$\begin{aligned}\vec{G}=&\frac{\beta}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]\vec{e}_x+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{e}_y\\=&\frac{\beta}{2}\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2}\left[(-k_{1x}k_{2x}+k_{1y}k_{2y})\vec{e}_x-(k_{1x}k_{2y}+k_{2x}k_{1y})\vec{e}_y\right]\hat{\psi}_{\vec{k}_1}\hat{\psi}_{\vec{k}_2}e^{\mathrm{i}(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\cdot\vec{x}}\\=&\frac{1}{4}\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2}\left[k_1^2\vec{c}_{\mathrm{g}}(\vec{k}_1)+k_2^2\vec{c}_{\mathrm{g}}(\vec{k}_2)-|\vec{k}_1+\vec{k}_2|^4\vec{c}_{\mathrm{g}}(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\right]\hat{\psi}_{\vec{k}_1}\hat{\psi}_{\vec{k}_2}e^{\mathrm{i}(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\cdot\vec{x}}\end{aligned} \tag{70}$$

となる．ここで, $\vec{k}_3:=-\vec{k}_1-\vec{k}_2$ なる三波 $\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3$ について,

$$k_3^4\vec{c}_{\mathrm{g}}(\vec{k}_3)=k_1^4\vec{c}_{\mathrm{g}}(\vec{k}_1)+k_2^4\vec{c}_{\mathrm{g}}(\vec{k}_2)+2\beta\left[(k_{1x}k_{2x}-k_{1y}k_{2y})\vec{e}_x+(k_{1x}k_{2y}+k_{2x}k_{1y})\vec{e}_y\right] \tag{71}$$

となることを用いた．

パリンストロフィーフラックス $\vec{H}$ に関しては,

$$\begin{aligned}\vec{H}:=&\frac{\partial\nabla\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\zeta^2}{2}-\frac{\partial\nabla\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\zeta^2}{2}-\beta\frac{\zeta^2}{2}\vec{e}_x+\beta\zeta\frac{\partial\nabla\psi}{\partial x}\\=&\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3}-\frac{\mathrm{i}}{6}\Big[\vec{k}_1k_2^2k_3^2[\vec{k}_1\times(\vec{k}_2+\vec{k}_3)]_z+\vec{k}_2k_3^2k_1^2[\vec{k}_2\times(\vec{k}_3+\vec{k}_1)]_z\\&\qquad+\vec{k}_3k_1^2k_2^2[\vec{k}_3\times(\vec{k}_1+\vec{k}_2)]_z\Big]\hat{\psi}_{\vec{k}_1}\hat{\psi}_{\vec{k}_2}\hat{\psi}_{\vec{k}_3}e^{\mathrm{i}(\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3)\cdot\vec{x}}\\&+\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2}\frac{\beta}{4}\left(k_1^2k_2^4\vec{c}_{\mathrm{g}}(\vec{k}_2)+k_2^2k_1^4\vec{c}_{\mathrm{g}}(\vec{k}_1)\right)\hat{\psi}_{\vec{k}_1}\hat{\psi}_{\vec{k}_2}e^{\mathrm{i}(\vec{k}_1+\vec{k}_2)\cdot\vec{x}}\end{aligned} \tag{72}$$

となる．パリンストロフィーに関しては, フラックスで書き表せないパリンストロフィー生成項がある．生成項は,

$$\begin{aligned}&\zeta\left[\frac{\partial\nabla\zeta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\nabla\psi}{\partial y}-\frac{\partial\nabla\zeta}{\partial y}\cdot\frac{\partial\nabla\psi}{\partial x}\right]=\\&\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3}\frac{1}{6}\Big[k_1^2(k_2^2-k_3^2)(\vec{k}_2\cdot\vec{k}_3)(\vec{k}_2\times\vec{k}_3)_z+k_2^2(k_3^2-k_1^2)(\vec{k}_3\cdot\vec{k}_1)(\vec{k}_3\times\vec{k}_1)_z\\&\qquad+k_3^2(k_1^2-k_2^2)(\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2)(\vec{k}_1\times\vec{k}_2)_z\Big]\hat{\psi}_{\vec{k}_1}\hat{\psi}_{\vec{k}_2}\hat{\psi}_{\vec{k}_3}e^{\mathrm{i}(\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3)\cdot\vec{x}}\end{aligned} \tag{73}$$

となる．

3　波と平均流の相互作用

3.1　平均流と擾乱の時間発展

帯状平均渦度の時間発展方程式と, 帯状平均からのずれの渦度の時間発展方程式を導く．平均流が存在する場では, 波は平均流の影響を受け, また, 平均流は波の影響を受ける．つまり, 波と平均流は相互作用する．ここでは, 帯状平均流と波との相互作用を取り扱う．

ある物理量 A の帯状平均を

$$\overline{A} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A\,\mathrm{d}x \tag{74}$$

と表す．また, 帯状平均からのずれを $A' := A - \overline{A}$ と表す．

帯状平均渦度 $\overline{\zeta}(y,t)$ の時間発展方程式に渦度方程式 (6) 式を書き換える．帯状平均渦度に対応する帯状平均流れ関数を $\overline{\psi}(y,t)$, 帯状平均東西流速を $U(y,t) = -\overline{\psi}_y$, また, 相対渦度 $\zeta(x,y,t)$ を帯状平均渦度 $\overline{\zeta}(y,t) = -U_y(y,t)$ と $\zeta'(x,y,t) = \zeta(x,y,t) - \overline{\zeta}(y,t)$ で表すと, 帯状平均渦度 $\overline{\zeta}(y,t)$ の時間発展方程式は,

$$\frac{\partial\overline{\zeta}}{\partial t} + \overline{\vec{u}'\cdot\nabla\zeta'} = \overline{F} + \overline{D} \tag{75}$$

となる．また, 帯状平均渦度からのズレ ζ' の方程式は

$$\frac{\partial\zeta'}{\partial t} + U\frac{\partial\zeta'}{\partial x} + \left(\beta + \frac{\mathrm{d}\overline{\zeta}}{\mathrm{d}y}\right)v' + \vec{u}'\cdot\nabla\zeta' - \overline{\vec{u}'\cdot\nabla\zeta'} = F' + D' \tag{76}$$

となる．

帯状平均渦度の時間発展方程式の非線形項はさらに変形できて,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{\zeta}}{\partial t} &= -\overline{\vec{u}'\cdot\nabla\zeta'} + \overline{F} + \overline{D} && (77)\\
&= -\overline{\nabla\cdot(\zeta'\vec{u}')} + \overline{F} + \overline{D} && (78)\\
&= -\frac{\partial}{\partial y}\overline{\zeta' v'} + \overline{F} + \overline{D} && (79)\\
&= \frac{\partial}{\partial y}\overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{F} + \overline{D} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{\frac{\partial}{\partial y}u'v' + u'\frac{\partial u'}{\partial x}}\right) + \overline{F} + \overline{D} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial y^2}\overline{u'v'} + \overline{F} + \overline{D} && (80)
\end{aligned}$$

とかける．ここで,

$$\zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y},$$
$$\nabla\cdot\vec{u'} = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$$

を用いた．

3.1.1　波と平均流の相互作用

波と平均流のエネルギーのやりとりを考える．まず, 帯状平均渦度からのずれの運動エネルギーの時間発展を求める．

帯状平均渦度からのずれの時間発展方程式 (76) 式に ψ' をかけ, x 平均を取る．次に y 方向に 0 から 2π まで積分して, 周期境界条件を使うと,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\overline{|\nabla\psi'|^2}\,\mathrm{d}y = -\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\overline{u'v'}\,\mathrm{d}y + \int_0^{2\pi}\overline{\psi'\left[(\vec{u}'\cdot\nabla\zeta') - F' - D'\right]}\,\mathrm{d}y \tag{81}$$

となる．

帯状流の運動エネルギーの時間発展は, 帯状平均渦度の時間発展方程式を y で積分し, U を両辺にかけた後に再び y で積分し, 右辺を部分積分することで,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2\pi}\frac{U^2}{2}\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\overline{u'v'}\,\mathrm{d}y + \int_0^{2\pi}U\int_0^{2\pi}\overline{F}+\overline{D}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y \tag{82}$$

と書ける．

次にエンストロフィーのやりとりを考える．(76) 式に ζ' をかけ, x 平均を取り, y 方向に 0 から 2π まで積分して, 周期境界条件を使うと,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\overline{\zeta'^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\hat{\beta}\overline{v'u'_y}\,\mathrm{d}y + \int_0^{2\pi}\overline{\zeta'\left[(\vec{u}'\cdot\nabla\zeta') + F' + D'\right]}\,\mathrm{d}y \tag{83}$$

右辺第一項を部分積分して,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\overline{\zeta'^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\overline{\zeta}\frac{\partial}{\partial y}\overline{v'u'_y}\,\mathrm{d}y + \int_0^{2\pi}\overline{\zeta'\left[(\vec{u}'\cdot\nabla\zeta') + F' + D'\right]}\,\mathrm{d}y. \tag{84}$$

帯状流のエンストロフィーの時間発展は, 帯状平均渦度の時間発展方程式に $\overline{\zeta}$ をかけた後に y で積分することで,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{2\pi}\frac{\overline{\zeta}^2}{2}\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\overline{\zeta}\frac{\partial}{\partial y}\overline{u'v'}\,\mathrm{d}y + \int_0^{2\pi}\overline{\zeta}(\overline{F}+\overline{D})\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y \tag{85}$$

となる．

4 Rossby 波

$\beta \neq 0$ のときに存在する波, Rossby 波についてまとめる.

4.1 平均流がない場合

平面波解 $\psi(\vec{x},t) = \mathrm{Re}[\hat{\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}]$ を仮定し, β 面上の渦度方程式 (6) 式に代入する. ここで $\hat{\psi}$ は平面波の複素振幅である. ただし, 強制なし, 摩擦なし, 非粘性とする. ω について解くと, ただちに, 分散関係式

$$\omega = -\frac{\beta k_x}{k_x^2 + k_y^2} \tag{86}$$

を得る. この分散関係を持つ波は Rossby 波と呼ばれる.

Rossby 波の群速度 $c_{\mathrm{g}x}, c_{\mathrm{g}y}$ と位相速度 $c_{\mathrm{p}x}, c_{\mathrm{p}y}$ は,

$$c_{\mathrm{g}x} = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} = \frac{\beta(k_x^2 - k_y^2)}{(k_x^2 + k_y^2)^2} = \frac{\beta \cos 2\theta}{k^2}, \tag{87}$$

$$c_{\mathrm{g}y} = \frac{\partial \omega}{\partial k_y} = \frac{2\beta k_x k_y}{(k_x^2 + k_y^2)^2} = \frac{\beta \sin 2\theta}{k^2}, \tag{88}$$

$$c_{\mathrm{p}x} = \frac{\omega}{k_x} = -\frac{\beta}{k_x^2 + k_y^2} = -\frac{\beta}{k^2}, \tag{89}$$

$$c_{\mathrm{p}y} = \frac{\omega}{k_y} = -\frac{\beta}{k_x^2 + k_y^2}\frac{k_x}{k_y} = -\frac{\beta}{k^2}\frac{1}{\tan\theta} \tag{90}$$

である. ここで, $k := \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, $\theta := \tan^{-1}(k_y/k_x)$, $k_x = k\cos\theta$, $k_y = k\sin\theta$ である.

4.2 平均流がある場合

平均流が存在する場合の Rossby 波の分散関係を導く. (76) 式を強制なし, 粘性なし, そして帯状平均からのズレ成分について線形化して,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi' + \left(\beta - \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}y^2}\right)\frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \tag{91}$$

を得る.

まず, 平均流に y 依存性がなく, 一様な場合を考える. すなわち, $U(y) = U_0 = \mathrm{const.}$ 擾乱として平面波 $\psi' = \mathrm{Re}[\hat{\psi}' \exp\{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)\}]$ を仮定すると, 分散関係

$$\omega = U_0 k_x - \frac{\beta k_x}{k_x^2 + k_y^2} \tag{92}$$

を得る.

一様な平均流 U_0 がある場合には, x 方向の位相速度と群速度については単に平均流のない場合の位相速度と群速度とに平均流の速度を足しあわせた速度になっていて, これは平均流に波が流されていると解釈することができる.

次に平均流に y 依存性がある一般の場合を考える. y 方向の関数形を平面波と仮定せずに, 擾乱の流れ関数を $\psi' = \mathrm{Re}[\hat{\psi}'(y)\exp\{\mathrm{i}(k_x x - \omega t)\}]$ として (91) 式に代入すると,

$$\frac{\mathrm{d}^2\hat{\psi}'}{\mathrm{d}y^2} + \left(\frac{\beta - U_{yy}}{U - c_{\mathrm{p}x}} - k_x^2\right)\hat{\psi}' = 0 \tag{93}$$

なる常微分方程式を得る．ただし，ここで $U - c_{\mathrm{p}x} \neq 0$ を仮定した．

4.3 停滞性 Rossby 波

停滞性，すなわち位相が空間に対して固定されている Rossby 波について考える．一様平均流 $U(y) = U_0 = \mathrm{const}$ の場合は，

$$c_{\mathrm{p}x} = \frac{\omega}{k_x} = U_0 - \frac{\beta}{k^2} = 0 \tag{94}$$

つまり，

$$U_0 = \frac{\beta}{k^2} \tag{95}$$

が停滞性 Rossby 波の波数と平均流の関係である．

また，

$$c_{\mathrm{g}x} = \frac{2\beta k_x^2}{(k_x^2 + k_y^2)^2}, \tag{96}$$

$$c_{\mathrm{g}y} = \frac{2\beta k_x k_y}{(k_x^2 + k_y^2)^2}, \tag{97}$$

$$c_{\mathrm{p}y} = 0. \tag{98}$$

5 三波共鳴相互作用

ここでは Rossby 波の三波共鳴相互作用についてまとめる．[*3]

順圧の渦度方程式に従う流れは, $\vec{k}+\vec{p}+\vec{q}=0$ を満たす 3 つ波数ベクトルの間で相互作用をする．さらに, 渦度や流れ関数が適当な分散関係に従う波である場合は, さらに振動数 $\omega_{\vec{k}} := \omega(\vec{k})$ に関する条件 $\omega_{\vec{k}}+\omega_{\vec{p}}+\omega_{\vec{q}}=0$ を満たす 3 つの波の間で相互作用をする．これを三波共鳴相互作用という．

Rossby 波の三波共鳴相互作用は,

$$\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3=0, \tag{99}$$

$$\omega_1+\omega_2+\omega_3=0 \tag{100}$$

の条件下で起こる．ここで ω は Rossby 波の振動数．また, $\omega_i := \omega_{\vec{k}_i} \quad (i=1,2,3)$.

非粘性, 強制無しの下で, 波数ベクトル $\vec{k}$ の流れ関数 $\hat{\psi}_{\vec{k}}$ の時間発展は, (39) 式から, $\hat{\zeta}_{\vec{k}}=-k^2\hat{\psi}_{\vec{k}}$ を用いて,

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\psi}_{\vec{k}}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\sum_{\vec{p}+\vec{q}+\vec{k}=0}(p_xq_y-p_yq_x)\left(\frac{q^2-p^2}{k^2}\right)\hat{\psi}^*_{\vec{p}}\hat{\psi}^*_{\vec{q}}+\beta\frac{\mathrm{i}k_x}{k^2}\hat{\psi}_{\vec{k}} \tag{101}$$

となる．ここで, 簡単のために相互作用係数を

$$d(\vec{k},\vec{p},\vec{q}) := \frac{1}{2}(p_xq_y-p_yq_x)\left(\frac{q^2-p^2}{k^2}\right) \tag{102}$$

と書くことにする．さらに, 右辺のベータ項を分散関係式を使って書き換えると,

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}\right)\hat{\psi}_{\vec{k}}=\sum_{\vec{p}+\vec{q}+\vec{k}=0}d(\vec{k},\vec{p},\vec{q})\hat{\psi}^*_{\vec{p}}\hat{\psi}^*_{\vec{q}} \tag{103}$$

を得る．ここで, $\hat{\psi}_{\vec{k}}$ を単色波の Rossby 波の変動とそれ以外の変動にわける．$\hat{\psi}_{\vec{k}}(t)=\hat{\psi}'_{\vec{k}}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\vec{k}}t}$ と置いて代入すると,

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\psi}'_{\vec{k}}}{\mathrm{d}t}=\sum_{\vec{p}+\vec{q}+\vec{k}=0}d(\vec{k},\vec{p},\vec{q})\hat{\psi}'^*_{\vec{p}}\hat{\psi}'^*_{\vec{q}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{\vec{p}}+\omega_{\vec{q}}+\omega_{\vec{k}})t} \tag{104}$$

となる．

一般に, Rossby 波が 3 波相互作用する際には,

$$\begin{aligned}\omega_1+\omega_2+\omega_3&=-\beta\left(\frac{k_{1x}}{k_1^2}+\frac{k_{2x}}{k_2^2}+\frac{k_{3x}}{k_3^2}\right)\\&=-\beta\frac{[(k_2^2+2\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2)k_2^2\vec{k}_1+(k_1^2+2\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2)k_1^2\vec{k}_2]\cdot\vec{i}}{k_1^2k_2^2(k_1^2+k_2^2+2\vec{k}_1\cdot\vec{k}_2)}\end{aligned} \tag{105}$$

を満たす．ここで, $\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3=0$ の条件を用いて $\vec{k}_3$ を消去した．

また, $r=k_2/k_1$ を使って書き直すと,

$$\omega_1+\omega_2+\omega_3=-\frac{\beta}{k_1^2}\left(\cos\theta_1+\frac{1}{r^2}\cos\theta_2-\frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2}{1+r^2+2r\cos\theta'}\right) \tag{106}$$

[*3] 一般の波の共鳴相互作用の概説として [?] がある．

となる．ここで, $\theta' = \theta_1 - \theta_2$. 帯状流の場合 ($\theta_1 = \pi/2$) は,

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = -\frac{\beta \cos\theta_2}{k_1^2 r^2}\left(\frac{1 + 2r\cos\theta_2}{1 + 2r\cos\theta_2 + r^2}\right) \tag{107}$$

となる．

5.1 共鳴

$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ のとき, $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$ の波は共鳴するという．このとき,

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\psi}'_{\vec{k}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{\vec{p}+\vec{q}+\vec{k}=0} d(\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}) \hat{\psi}'^*_{\vec{p}} \hat{\psi}'^*_{\vec{q}} \tag{108}$$

が成り立つ.

相互作用する 3 波が 1 組だけ存在するときを考える．簡単のために,

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t} = d_1 a_2^* a_3^*, \tag{109}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_2}{\mathrm{d}t} = d_2 a_3^* a_1^*, \tag{110}$$

$$\frac{\mathrm{d}a_3}{\mathrm{d}t} = d_3 a_1^* a_2^* \tag{111}$$

と書く．このとき,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(d_i |a_j|^2 - d_j |a_i|^2\right) = 0, \qquad i \neq j, (i, j = 1, 2, 3) \tag{112}$$

を Manley-Rowe の関係と呼ぶ.

他にも,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2) = 0 \tag{113}$$

という保存則が成り立つ.

相互作用する 3 波 $\vec{k_1}, \vec{k_2}, \vec{k_3}$ は, 別の波数 $\vec{k_1} - \vec{k_2}$, $\vec{k_2} - \vec{k_3}$, $\vec{k_3} - \vec{k_1}$ と相互作用する．上のモデルではその影響を無視している．上に挙げた波数は再び $\vec{k_1}, \vec{k_2}, \vec{k_3}$ と相互作用することで, a_1, a_2, a_3 に影響を与えうる (Newell, 1969).

共鳴時には, 次の等式が成り立つ (Smith and Waleffe, 1999).

$$k_1^2 \omega_1 + k_2^2 \omega_2 + k_3^2 \omega_3 = 0 \tag{114}$$

これは, 分散関係を $k_x = -k^2\omega/\beta$ と書き換えて, 三波相互作用の条件に代入すると得られる．さらに $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 = 0$ を使うことで,

$$\frac{\omega_1}{k_3^2 - k_2^2} = \frac{\omega_2}{k_1^2 - k_3^2} = \frac{\omega_3}{k_2^2 - k_1^2} \tag{115}$$

が成り立つ．$k_1 < k_2 < k_3$ を仮定すると, 三波相互作用するときの振動数についての不等式を導くことができる.

5.2 帯状モードを含む三波相互作用

$\vec{k}_3 = (0, k_{3y})$, $\vec{k}_1 = (k_{1x}, k_{1y})$, $\vec{k}_2 = (k_{2x}, k_{2y})$ の波数ベクトルの三波相互作用は, $k_{2x} = -k_{1x}$, $k_{2y} = -k_{1y} - k_{3y}$ で, $T_{\mathrm{E}}(\vec{k}_3, \vec{k}_1, \vec{k}_2)$ は,

$$T_{\mathrm{E}}(\vec{k}_3, \vec{k}_1, \vec{k}_2) = -\frac{1}{2} k_{1x} k_{3y}^2 (k_{3y} + 2k_{1y}) \mathrm{Re}[\hat{\psi}_{\vec{k}_1} \hat{\psi}_{\vec{k}_2} \hat{\psi}_{\vec{k}_3}] \tag{116}$$

となる．ここで, $T_{\rm E}(\vec{k}_3,\vec{k}_1,\vec{k}_2)=T_{\rm E}(\vec{k}_3,\vec{k}_2,\vec{k}_1)$．また, $T_{\rm E}(\vec{k}_3,\vec{k}_1,\vec{k}_2)$ は $(0,-k_{3y}/2)$ を基準に点対称になる．k_y 軸を $k_{3y}/2$ だけ正の向きにずらした座標, k'_y 座標を導入する．$k'_y := k_y + k_{3y}/2$．ここで, $k'_{3y} = k_{3y} + k_{3y}/2 = 3k_{3y}/2$. 従って, $k_{3y} = 2k'_{3y}/3$, $k_{1y} = k_{1y} - k_{3y'}/3$. これを代入して,

$$T_{\rm E}(\vec{k}_3,\vec{k}_1,\vec{k}_2) = -\frac{1}{2}k_{1x}\left(\frac{2}{3}\right)^2 k'^2_{3y}\left(\frac{2}{3}k'_{3y} + 2\left(k'_{1y} - \frac{1}{3}k'_{3y}\right)\right)\mathrm{Re}[\hat{\psi}_{\vec{k}_1}\hat{\psi}_{\vec{k}_2}\hat{\psi}_{\vec{k}_3}] \tag{117}$$

$$= -\frac{4}{9}k_{1x}k'_{1y}k'^2_{3y}\mathrm{Re}[\hat{\psi}_{\vec{k}_1}\hat{\psi}_{\vec{k}_2}\hat{\psi}_{\vec{k}_3}] \tag{118}$$

5.3 振幅と位相の分離

複素振幅についての微分方程式を振幅と位相とを別々に分けて書いてみる．複素振幅から, $\hat{\phi}'_{\mathbf{k}} =: A_{\mathbf{k}}e^{\mathrm{i}\theta_{\mathbf{k}}}$ として振幅と位相を分ける．ここで $A_{\mathbf{k}}, \theta_{\mathbf{k}}$ は実数である．複素共役をとった式と和をとったり差をとったりすることで, 以下を導ける．

$$\frac{\mathrm{d}A_{\mathbf{k}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0} d_{\mathbf{k},\mathbf{p},\mathbf{q}}A_{\mathbf{p}}A_{\mathbf{q}}\cos[\Omega_{\mathbf{k},\mathbf{p},\mathbf{q}}t - (\theta_{\mathbf{k}}+\theta_{\mathbf{p}}+\theta_{\mathbf{q}})] \tag{119}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta_{\mathbf{k}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}=0} d_{\mathbf{k},\mathbf{p},\mathbf{q}}\frac{A_{\mathbf{p}}A_{\mathbf{q}}}{A_{\mathbf{k}}}\sin[\Omega_{\mathbf{k},\mathbf{p},\mathbf{q}}t - (\theta_{\mathbf{k}}+\theta_{\mathbf{p}}+\theta_{\mathbf{q}})] \tag{120}$$

ここで, $\Omega_{\mathbf{k},\mathbf{p},\mathbf{q}} = \omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}}$ である．

6 数値計算法

よく用いられる時間積分法をまとめておく．また, 流体の数値計算では硬い微分方程式を解く必要がある．その際に硬さを回避する方法について述べる.

6.1 時間積分法

時間積分法についてまとめる.

6.1.1 Euler 法

6.1.2 Adams-Bashforth 法

6.1.3 Runge-Kutta 法

6.2 硬い微分方程式

2 次元ベータ面上の渦度方程式のスペクトル表示は

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\zeta}_{\mathbf{k}}}{\mathrm{d}t} = -N_{\mathbf{k}} + \beta\frac{\mathrm{i}k_x}{k^2}\hat{\zeta}_{\mathbf{k}} + \nu_{2m}k^{2m}\hat{\zeta}_{\mathbf{k}} - \lambda_{2n}k^{-2n}\hat{\zeta}_{\mathbf{k}} + F_{\mathbf{k}} \tag{121}$$

となる．k に依存して右辺の項の大きさは何万倍にも変わる．このような場合にこの連立微分方程式系は硬いと言う．詳しい硬さの定義は数値計算の教科書を参照のこと．このような場合には, 項の大きさが何万倍も違うと, 時間刻み幅を大きな項に合わせてとらなくてはいけないため, 計算が非常に非効率になることが問題になる.

6.3 基礎方程式の変形による硬さの回避

硬い微分方程式を効率的に解く方法として, 硬い微分方程式を変形することで, 硬い微分方程式でなくしてしまう方法がある.

いま, 微分方程式が

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = N(f(t),t) + \mathcal{L}f(t) \tag{122}$$

と書けているとする．$\mathcal{L}f$ は線形項, N は非線形項である．これを

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f(t)e^{-\mathcal{L}t}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-\mathcal{L}t} - \mathcal{L}f(t)e^{-\mathcal{L}t} &(123)\\ &= \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} - \mathcal{L}f(t)\right)e^{-\mathcal{L}t} &(124)\end{aligned}$$

となることを用いて,

$$\frac{\mathrm{d}f(t)e^{-\mathcal{L}t}}{\mathrm{d}t} = N(f(t),t)e^{\mathcal{L}t} \tag{125}$$

と変形する.

6.4 具体的な時間積分法に対する実装

具体的な時間積分法について, 変形した時間発展方程式の差分化を行う.

微分方程式

$$\frac{dg(t)}{dt} = G(g(t), t) \tag{126}$$

が与えられたとき, Euler(前進差分) 法は

$$g(t + \Delta t) = g(t) + G(g(t), t)\Delta t \tag{127}$$

なので,

$$f(t + \Delta t)e^{-\mathcal{L}(t+\Delta t)} = f(t)e^{-\mathcal{L}t} + N(f(t), t)e^{-\mathcal{L}t}\Delta t \tag{128}$$

$$f(t + \Delta t) = [f(t) + N(f(t), t)\Delta t]e^{-\mathcal{L}\Delta t} \tag{129}$$

となる．ここで簡単のために $t = n\Delta t$ として, $g_n := g(t)$, $G_n := G(g(t), t)$ というふうに添字に n を付ける表記法を導入すると,

$$f_{n+1} = [f_n + N_n\Delta t]e^{\mathcal{L}\Delta t}. \tag{130}$$

二次の Adams-Bashforth は,

$$g_{n+1} = g_n + \left[\frac{3}{2}G_n - \frac{1}{2}G_{n-1}\right]\Delta t \tag{131}$$

なので,

$$f_{n+1}e^{-\mathcal{L}(t+\Delta t)} = f_n e^{-\mathcal{L}t} + \left\{\frac{3}{2}N_n e^{-\mathcal{L}t} - \frac{1}{2}N_{n-1}e^{-\mathcal{L}(t-\Delta t)}\right\}\Delta t \tag{132}$$

$$f_{n+1} = \left[f_n + \left\{\frac{3}{2}N_n - \frac{1}{2}N_{n-1}e^{\mathcal{L}\Delta t}\right\}\Delta t\right]e^{\mathcal{L}\Delta t} \tag{133}$$

となる．

三次の Adams-Bashforth は,

$$g_{n+1} = g_n + \left\{\frac{23}{12}G_n - \frac{16}{12}G_{n-1} + \frac{5}{12}G_{n-2}\right\}\Delta t \tag{134}$$

なので,

$$f_{n+1}e^{-\mathcal{L}(t+\Delta t)} = f_n e^{-\mathcal{L}t} + \left\{\frac{23}{12}N_n e^{-\mathcal{L}t} - \frac{16}{12}N_{n-1}e^{-\mathcal{L}(t-\Delta t)} + \frac{5}{12}N_{n-2}e^{-\mathcal{L}(t-2\Delta t)}\right\}\Delta t \tag{135}$$

$$f_{n+1} = \left[f_n + \left\{\frac{23}{12}N_n - \frac{16}{12}N_{n-1}e^{\mathcal{L}\Delta t} + \frac{5}{12}N_{n-2}e^{\mathcal{L}2\Delta t}\right\}\Delta t\right]e^{\mathcal{L}\Delta t} \tag{136}$$

となる．

6.4.1 4 次ルンゲ-クッタの場合

4 次の古典的 Runge-Kutta は,

$$g(t + \Delta t) = g(t) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \tag{137}$$

$$k_1 = \Delta t G(g(t), t), \tag{138}$$

$$k_2 = \Delta t G(g(t) + \frac{1}{2}k_1, t + \frac{1}{2}\Delta t), \tag{139}$$

$$k_3 = \Delta t G(g(t) + \frac{1}{2}k_2, t + \frac{1}{2}\Delta t), \tag{140}$$

$$k_4 = \Delta t G(g(t) + k_3, t + \Delta t) \tag{141}$$

である.

石岡スペクトル法本によれば, 線形項に時間依存性がなければ,

$$f(t+\Delta t) = e^{\mathcal{L}\frac{\Delta t}{2}}\left[e^{\mathcal{L}\frac{\Delta t}{2}}\left\{f(t)+\frac{1}{6}k_1\right\}+\frac{1}{3}(k_2+k_3)\right]+\frac{1}{6}k_4 \tag{142}$$

$$k_1 = \Delta t N\left(f(t), t\right), \tag{143}$$

$$k_2 = \Delta t N\left(e^{\mathcal{L}\frac{\Delta t}{2}}\left[f(t)+\frac{k_1}{2}\right], t+\frac{\Delta t}{2}\right), \tag{144}$$

$$k_3 = \Delta t N\left(e^{\mathcal{L}\frac{\Delta t}{2}}f(t)+\frac{k_2}{2}, t+\frac{\Delta t}{2}\right), \tag{145}$$

$$k_4 = \Delta t N\left(e^{\mathcal{L}\frac{\Delta t}{2}}\left[e^{\mathcal{L}\frac{\Delta t}{2}}f(t)+k_3\right], t+\Delta t\right) \tag{146}$$

となる.

7 波の活動度による議論

波の活動度は, 波と平均流の相互作用を議論する際によく用いられる．ここで平均流は東西方向のみとして, 平均流の大きさは波の大きさよりも大きいとする．まず, 変数を微小量のべき乗で展開すると,

$$u(x,y,t) = U(y,t) + \epsilon u'(x,y,t) + \epsilon u^{(2)}(x,y,t) + \cdots, \tag{147}$$

$$v(x,y,t) = \epsilon v'(x,y,t) + \epsilon v^{(2)}(x,y,t) + \cdots, \tag{148}$$

$$\psi(x,y,t) = \Psi(y,t) + \epsilon\psi'(x,y,t) + \epsilon\psi^{(2)}(x,y,t) + \cdots, \tag{149}$$

$$\zeta(x,y,t) = Z(y,t) + \epsilon\zeta'(x,y,t) + \epsilon\zeta^{(2)}(x,y,t) + \cdots, \tag{150}$$

となる．次に渦度方程式を微小量 ϵ のオーダーで分類する．$O(1)$ は,

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = F^{(0)} + D^{(0)} \tag{151}$$

となる．ここで, v の $O(0)$ はゼロであることから, $\partial Z/\partial x = 0$ となることを用いた．$O(\epsilon)$ は,

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + U\frac{\partial \zeta'}{\partial x} + \hat{\beta}v' = F^{(1)} + D^{(1)} \tag{152}$$

$$\hat{\beta} := \beta - \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}y^2} \tag{153}$$

となる．ここで $\hat{\beta}$ は実効ベータと呼ばれる量である．$O(\epsilon^2)$ は,

$$\frac{\partial \zeta^{(2)}}{\partial t} + U\frac{\partial \zeta^{(2)}}{\partial x} + u'\frac{\partial \zeta'}{\partial x} + v'\frac{\partial \zeta'}{\partial y} + \beta v^{(2)} = F^{(2)} + D^{(2)} \tag{154}$$

となる．$O(\epsilon)$ の式に ζ' をかけると,

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\zeta'^2}{2} + U\frac{\partial}{\partial x}\frac{\zeta'^2}{2} + \hat{\beta}v'\zeta' = \zeta'(F^{(1)} + D^{(1)}) \tag{155}$$

となる．さらに $\hat{\beta}$ で割り, 波の活動度 $A := \overline{\zeta'^2}/\hat{\beta}$ で書き直せば,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + U\frac{\partial A}{\partial x} + v'\left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\right) = \frac{1}{\hat{\beta}}\overline{\zeta'(F^{(1)} + D^{(1)})}. \tag{156}$$

さらに,

$$\begin{aligned} v'\left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{v'^2}{2} - v'\frac{\partial u'}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial}{\partial y}u'v' + u'\frac{\partial v'}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial}{\partial y}u'v' - \frac{\partial}{\partial x}\frac{u'^2}{2}. \end{aligned} \tag{157}$$

ここで,

$$\frac{\partial}{\partial y}u'v' = v'\frac{\partial u'}{\partial y} + u'\frac{\partial v'}{\partial y} \tag{158}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \tag{159}$$

を用いた．すると，結局，

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{F}=\frac{1}{\hat{\beta}}\overline{\zeta'(F^{(1)}+D^{(1)})} \tag{160}$$

$$\vec{F}=\left[UA+\frac{1}{2}(v'^2-u'^2)\right]\vec{e}_x-u'v'\vec{e}_y \tag{161}$$

となる．ここで $\vec{F}$ は波の活動度フラックスである．(154) 式を x 平均して，物理量 q の x 平均量を $\overline{q}$ で表すとすると，

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y}\overline{u^{(2)}}+\overline{\frac{\partial}{\partial x}\zeta'u'+\frac{\partial}{\partial y}\zeta'v'}=\overline{F^{(2)}}+\overline{D^{(2)}} \tag{162}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y}\overline{u^{(2)}}+\overline{\frac{\partial}{\partial y}\zeta'v'}=\overline{F^{(2)}}+\overline{D^{(2)}} \tag{163}$$

となる．これを y で積分して，

$$\frac{\partial}{\partial t}u^{(2)}-\frac{\partial}{\partial y}\overline{\zeta'v'}=\int\overline{F^{(2)}}+\overline{D^{(2)}}\,\mathrm{d}y \tag{164}$$

となるが，ここで，

$$\begin{aligned}\overline{v'\zeta'}=&\overline{v'\frac{\partial v'}{\partial x}-v'\frac{\partial u'}{\partial y}}\\=&-\overline{\frac{\partial}{\partial y}u'v'-u'\frac{\partial v'}{\partial y}}\\=&-\overline{\frac{\partial}{\partial y}u'v'+u'\frac{\partial u'}{\partial x}}\\=&-\frac{\partial}{\partial y}\overline{u'v'}\\=&\overline{\nabla\cdot\vec{F}}\end{aligned} \tag{165}$$

だから，結局，$F=0, D=0$ のときには

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\overline{u^{(2)}}+A\right]=0 \tag{166}$$

が成り立つ．

また，$O(\epsilon)$ の式で，$F^{(1)}=0$，$D^{(1)}=0$，$\zeta'\propto e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$ とおくと，

$$\omega=Uk_x-\hat{\beta}\frac{k_x}{k^2} \tag{167}$$

となって，平均流下の Rossby 波の分散関係が得られる．

8 乱流

2 次元乱流に関するメモ.

8.1 スケール

ラージスケール Reynolds 数 R_{L} は

$$R_{\mathrm{L}} := E/(\nu\eta). \tag{168}$$

ここで E はエネルギー密度, η はエンストロフィー散逸率 ($dZ/dt = -\eta$, Z はエンストロフィー密度), ν は粘性係数. [*4]

R_{L} に伴う長さスケール L は,

$$L := 1/k_{\mathrm{L}} = E^{1/2}/\eta^{1/3} \tag{170}$$

である. これは総エンストロフィーに (もっとも?) 寄与する渦の特徴的長さである.

2 次元乱流におけるマイクロスケール l を定義する.

$$l := (\nu Z/\eta)^{1/2} \tag{171}$$

[*5]

マイクロスケール Reynolds 数 R_{l} は,

$$R_{\mathrm{l}} := (lZ^{1/2}l/\nu) = Z^{3/2}/\eta. \tag{172}$$

コルモゴロフの散逸スケール (エンストロフィー散逸波数) $k_\eta := (\eta/\nu^3)^{1/6}$

これらは Herring, et al(1974) による.

8.2 超粘性版のスケール

超粘性バージョンのスケールを導出する.

ラージスケール Reynolds 数 R_{L} を導出する. まず, E, η から長さスケール $E^{1/2}\eta^{-1/3}$ と時間スケール $\eta^{-1/3}$ を作る. これらで渦度方程式をスケーリングし, 粘性項の係数の逆数をラージスケール Reynolds 数と定義すると,

$$R_{\mathrm{L}} := L^{2m}/(\nu_m T) \tag{173}$$
$$= E^m \eta^{-(2m-1)/3}\nu_m^{-1} \tag{174}$$

ここで ν_m は m 次の超粘性係数.

2 次元乱流におけるマイクロスケール l は, ν_m と Z と η から, $[\nu_m] = l^{2m}T^{-1}$ を用いて,

$$l := (\nu_m Z/\eta)^{-1/(2m-1)} \tag{175}$$

[*4]

$$\frac{1}{E}\frac{d^2E}{dt^2} = \frac{1}{R_{\mathrm{L}}} \tag{169}$$

となることを記しておく.

[*5] これは要するに強制なしの系におけるパリンストロフィー η/ν とエンストロフィーから作った長さスケールである.

と定義される．これは (エンストロフィー/パリンストロフィー) の平方根とみなしたことになっている．

マイクロスケール Reynolds 数 R_{l} は,

$$R_{\mathrm{l}} := (lZ^{1/2}l/(\nu_m l^{-2m})) \tag{176}$$

$$= Z^{-1/(2m-1)}\nu_m^{2/(2m-1)}\eta^{(2m+1)/(2m-1)} \tag{177}$$

コルモゴロフの散逸スケール (エンストロフィー散逸波数) $k_\eta := (\eta/\nu_m^3)^{1/(6m)}$

9　流れの力学的性質の特徴づけ

この節では流れの力学的性質を特徴づける方法について述べる．
Okubo-Weiss criterion と Hua-Klein criterion について順に述べる．[*6]

9.1　系の設定

密度一様の 2 次元流体を考える:

$$\frac{\mathrm{D}\vec{u}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} = -\nabla p + \vec{S}, \tag{178}$$
$$\nabla\cdot\vec{u} = 0. \tag{179}$$

ここで，ここで，$\vec{u} = (u, v)$ は速度ベクトルで u, v はそれぞれ x, y 方向の速度成分である．$\vec{S} = (S^x, S^y)$ は粘性項や外力項をまとめて表したものである．また，

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} := \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla \tag{180}$$

はラグランジュ微分である．回転系の場合は，運動量方程式の左辺に $-f\vec{e}_z \times \vec{u} = (-fv, fu)$ が入るが，これとバランスする p_{c} を考えて，右辺の圧力勾配項を p の p_{c} からのズレと置き換えると，同じ形に帰着する．
(鉛直) 渦度は

$$\zeta = \nabla\times\vec{u} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{181}$$

で，その時間発展方程式は速度勾配テンソル A を用いて，

$$\frac{\mathrm{D}\nabla\zeta}{\mathrm{D}t} + \mathsf{A}\cdot\nabla\zeta = 0, \tag{182}$$

$$\mathsf{A} := \nabla\vec{u} = [\partial_i u_j] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_{\mathrm{n}} & \sigma_{\mathrm{s}} + \zeta \\ \sigma_{\mathrm{s}} - \zeta & -\sigma_{\mathrm{n}} \end{pmatrix} \tag{183}$$

とかける．$\nabla\vec{u}$ は ∇ と $\vec{u}$ のダイアドである．ここで，$\sigma_{\mathrm{n}}, \sigma_{\mathrm{s}}$ は

$$\sigma_{\mathrm{n}} := \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{184}$$
$$\sigma_{\mathrm{s}} := \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{185}$$

である．つまり，渦度勾配のラグランジュ的時間変化は，等渦度線に対して垂直な方向 (すなわち渦度勾配ベクトルの向き) の速度勾配に比例する．これは等渦度線に対して垂直な方向の速度勾配があるぶんだけ，等渦度線は近付いてくることを意味している．

[*6] 参考文献: Okubo(1970), Weiss(1991), Basdevant and Philipovitch(1994), Hua and Klein(1998).

9.2 Okubo-Weiss criterion の導出

Okubo-Weiss criterion は, 2 次元非発散流体の流れの力学的性質を調べるのに使われる判定基準である. 判定基準量 Q を定義し, Q の正負によって流れ場の力学的性質が楕円型か双曲型かを判別する.

流れ場の時間変化は渦度場の時間変化に比べてゆっくりとしていると仮定する. つまり, 速度勾配テンソルを一定とみなす. そうすると, A の固有値を求めると, 等渦度線 (渦度勾配) のラグランジュ的時間変化の特徴が分かる.

A の固有値を λ と表すと, 固有方程式から,

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}(\sigma^2 - \zeta^2) \tag{186}$$

となる. あるいは,

$$\begin{aligned} \lambda^2 =& \frac{1}{4}W, && (187)\\ W :=& \sigma^2 - \zeta^2 && (188)\\ =& \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} && (189)\\ =& \det \mathsf{A} && (190) \end{aligned}$$

と表す. ここで, ストレイン σ は速度歪みテンソルの大きさで, その二乗は次のように表せることを用いた:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma_{\mathrm{n}}^2 + \sigma_{\mathrm{s}}^2 && (191)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 && (192)\\ &= 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 && (193)\\ &= -4\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. && (194) \end{aligned}$$

固有値の二乗の符号は W の符号そのものである. 従って, $W > 0$ のときに固有値は二つの実数になる. このとき, 二つの実固有値は片方が正で片方が負となる. これは, 流れ場の非圧縮性から, ある方向に流れがあれば, それを補うように流れができるためである. このとき, 渦度場の運動は双曲型の特徴を持つ. 一方, $W < 0$ のときは固有値は二つの純虚数になり, 渦度場の運動は楕円型の特徴を持つ. つまり, 渦度場は局所的に回転する.

9.3 Validity

Okubo-Weiss のクライテリオンは, 流れ場の時間変化は渦度場の時間変化に比べてゆっくりとしていると仮定している. Basdevant and Philipovitch(1994) はこの仮定が正しい条件を調べた.

まず, 渦度勾配の 2 階のラグランジュ微分を考える.

$$\frac{\mathrm{D}^2\nabla\zeta}{\mathrm{D}t^2} + \frac{\mathrm{D}\mathsf{A}}{\mathrm{D}t}\cdot\nabla\zeta + \mathsf{A}\cdot\frac{\mathrm{D}\nabla\zeta}{\mathrm{D}t} = 0. \tag{195}$$

速度勾配のタイムスケールが渦度勾配のタイムスケールより大きいことは,

$$\left|\frac{\mathrm{D}\mathsf{A}}{\mathrm{D}t}\cdot\nabla\zeta\right| \ll \left|\mathsf{A}\cdot\frac{\mathrm{D}\nabla\zeta}{\mathrm{D}t}\right| \tag{196}$$

と表せる．これを書き直すと,

$$\left|\begin{array}{c} \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{\partial v}{\partial y} \end{array}\right| \ll \frac{1}{4}|W|\left|\begin{array}{c} \frac{\partial\zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial\zeta}{\partial y} \end{array}\right|. \tag{197}$$

ここで, A の大きさは二つの固有ベクトルの張る面積の拡大率であるから, 二つの固有ベクトルに対応した固有値の積, すなわち λ^2 となることを用いた.

ユークリッドノルムを用いると,

$$\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\mathrm{D}\sigma_{\mathrm{n}}}{\mathrm{D}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{D}\sigma_{\mathrm{s}}}{\mathrm{D}t}\right)^2\right]|\nabla\zeta|^2 \ll \frac{1}{16}W^2|\nabla\zeta|^2 \tag{198}$$

となる．左辺の σ_{n}, σ_{s} のラグランジュ微分は, x, y 成分で書いた運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{199}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y} \tag{200}$$

を x, y で偏微分した式

$$\frac{\mathrm{D}u_x}{\mathrm{D}t}-u_xv_y+v_xu_y=-p_{xx}, \tag{201}$$

$$\frac{\mathrm{D}u_y}{\mathrm{D}t}=-p_{xy}, \tag{202}$$

$$\frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t}=-p_{xy}, \tag{203}$$

$$\frac{\mathrm{D}v_y}{\mathrm{D}t}-u_xv_y+v_xu_y=-p_{yy} \tag{204}$$

を差し引きすることで得られる:

$$\frac{\mathrm{D}\sigma_{\mathrm{n}}}{\mathrm{D}t}=-\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right), \tag{205}$$

$$\frac{\mathrm{D}\sigma_{\mathrm{s}}}{\mathrm{D}t}=-2\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}. \tag{206}$$

従って, 左辺を書き換えて, ついでに $\frac{1}{4}|\nabla\zeta|^2$ を落すと,

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)^2+4\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}\right)^2 \ll \frac{1}{4}|W|^2 \tag{207}$$

となる．次に右辺の W を圧力を使って書き直す．まず,

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0}-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=-\nabla^2 p \tag{208}$$

なので,

$$W=-2\nabla^2 p \tag{209}$$

となる．また, 圧力のヘッセ行列 (ヘシアン) p''

$$p'' := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2} \end{pmatrix} \tag{210}$$

を用いると, $\nabla^2 p = \mathrm{trace}(p'')$ なので, $W = -2\mathrm{trace}(p'')$ とも書ける．まとめると,

$$W = -4\det \mathsf{A} = -2\nabla^2 p = -2\mathrm{trace}(p'') \tag{211}$$

となる．これを用いると, 条件は

$$\frac{\mathrm{trace}(p'')^2 - 4\det(p'')}{\mathrm{trace}(p'')^2} \ll 1 \tag{212}$$

となる．

ヘシアンの固有値 λ_{p} を求めると,

$$\lambda_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\left[\nabla^2 p \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + 4\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}\right)^2}\right] \tag{213}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\nabla^2 p \pm \left(\mathrm{trace}(p'')^2 - 4\det(p'')\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \tag{214}$$

従って, λ_{p} の取りうる固有値 $\lambda_{\mathrm{p}+}, \lambda_{\mathrm{p}-}$ の和と差は,

$$\lambda_{\mathrm{p}+} + \lambda_{\mathrm{p}-} = \nabla^2 p, \tag{215}$$

$$|\lambda_{\mathrm{p}+} - \lambda_{\mathrm{p}-}| = \left(\mathrm{trace}(p'')^2 - 4\det(p'')\right)^{\frac{1}{2}} \tag{216}$$

となるので, 条件はこの固有値の比 R

$$R := \frac{(\lambda_{\mathrm{p}+} - \lambda_{\mathrm{p}-})^2}{(\lambda_{\mathrm{p}+} + \lambda_{\mathrm{p}-})^2} \tag{217}$$

を用いて,

$$R \ll 1 \tag{218}$$

とも書ける．

まず, 条件式を書き直せば, $-4\det(p'') \ll 1$ となる．もし $\det(p'') > 0$ であれば, 常に条件を満たす．

また, 次の式

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \tag{219}$$

から,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}, \qquad \text{if} \qquad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{\partial v}{\partial y} \neq 0 \tag{220}$$

であることが分かる．

メモ: $z = f(x, y)$ のガウス曲率は $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)/(1 + f_x^2 + f_y^2)^2$．(小林昭七 曲線と曲面の微分幾何 (改訂版) 裳華房)

9.4 Hua-Klein criterion

Hua-Klein criterion についてまとめる.

基礎方程式は

$$\gamma_{\mathrm{L}} = \ddot{\vec{x}} = \frac{\mathrm{D}\vec{u}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = -\nabla p \tag{221}$$

$$\nabla\cdot\vec{u} = 0 \tag{222}$$

$$\tag{223}$$

である. ここで $\vec{u} = (u, v)$ で, 流れ関数 ψ を用いて

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \tag{224}$$

$$v = \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{225}$$

とかける.

流れ関数を位置 $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ における関数値を用いて, Taylor 展開すると,

$$\psi_{\vec{x}} = \psi_{\vec{x}_0} + \left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{\vec{x}_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial \psi}{\partial y}\right|_{\vec{x}_0}(y - y_0) \tag{226}$$

$$+ \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right|_{\vec{x}_0}(x - x_0)^2 + \left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right|_{\vec{x}_0}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right|_{\vec{x}_0}(y - y_0)^2 + \cdots \tag{227}$$

$$= \psi_{\vec{x}_0} + V(x - x_0) - U(y - y_0) + a(x - x_0)^2 + b(x - x_0)(y - y_0) + c(y - y_0)^2 + \cdots \tag{228}$$

となる. ここで, $\psi_{\vec{x}} = \psi(x, y, t)$, $\psi_{\vec{x}_0} = \psi(x_0, y_0, t)$ と表記した.

速度の一階微分から, 次のような量を計算できる.

$$\zeta := v_x - u_y = \psi_{xx} + \psi_{yy} =: 2(a + c) \tag{229}$$

$$\sigma_{\mathrm{n}} := u_x - v_y = -2\psi_{xy} =: -2b \tag{230}$$

$$\sigma_{\mathrm{s}} := v_x + u_y = \psi_{xx} - \psi_{yy} =: 2(a - c) \tag{231}$$

これは ζ は渦度, σ_{n} は速度勾配テンソルの非対称成分, σ_{s} は速度勾配テンソルの対称成分である.

運動方程式を x, y で偏微分することで,

$$\frac{\mathrm{D}u_x}{\mathrm{D}t} - u_x v_y + v_x u_y = -p_{xx} \tag{232}$$

$$\frac{\mathrm{D}u_y}{\mathrm{D}t} = -p_{xy} \tag{233}$$

$$\frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t} = -p_{xy} \tag{234}$$

$$\frac{\mathrm{D}v_y}{\mathrm{D}t} + v_x u_y - u_x v_y = -p_{yy} \tag{235}$$

となる．これらの和と差から，

$$-u_x v_y + v_x u_y = -\frac{1}{2}\nabla^2 p \qquad ((232)\text{ 式} + (232)\text{ 式}) \tag{236}$$

$$\frac{\mathrm{D}\zeta}{\mathrm{D}t} = 0 \qquad ((234)\text{ 式 - }(233)\text{ 式}) \tag{237}$$

$$\frac{\mathrm{D}\sigma_{\mathrm{n}}}{\mathrm{D}t} = -p_{xx} + p_{yy} \qquad ((232)\text{ 式 - }(235)\text{ 式}) \tag{238}$$

$$\frac{\mathrm{D}\sigma_{\mathrm{s}}}{\mathrm{D}t} = -2p_{xy} \qquad ((234)\text{ 式} + (233)\text{ 式}) \tag{239}$$

となる．

また，a, b, c のラグランジュ微分は

$$\frac{\mathrm{D}a}{\mathrm{D}t} = -2p_{xy} \qquad (234)\text{ 式} \times\tfrac{1}{2} \tag{240}$$

$$\frac{\mathrm{D}b}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{2}(p_{xx} - p_{yy}) \qquad ((235)\text{ 式-}(232)\text{ 式})\times\tfrac{1}{2} \tag{241}$$

$$\frac{\mathrm{D}c}{\mathrm{D}t} = 2p_{xy} \qquad (233)\text{ 式} \times(-\tfrac{1}{2}) \tag{242}$$

となる．

$\psi(x, y, t)$ を $\vec{x}_0$ における関数値で表現したが，$\vec{x}_0$ を流体粒子の位置にとると，$\vec{x}_0$ もラグランジュ的に変化することに注意する．これを念頭に置いて，U, V, a, b, c を用いて $\dot{x}, \dot{y}$ を書くと，

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}t} = u = -\frac{\partial\psi}{\partial y} = U - b(x - x_0) - 2c(y - y_0) + O(\epsilon^2) \tag{243}$$

$$\dot{y} = \frac{\mathrm{D}y}{\mathrm{D}t} = v = \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = V + 2a(x - x_0) + b(y - y_0) + O(\epsilon^2) \tag{244}$$

$$\max(|x - x_0|, |y - y_0|) \le \epsilon \tag{245}$$

となる．$\ddot{x}, \ddot{y}$ は，

$$\begin{aligned}
\ddot{x} =& \frac{\mathrm{D}\dot{x}}{\mathrm{D}t} \\
=& \dot{U} - \dot{b}(x - x_0) - b(\dot{x} - \dot{x}_0) - 2\dot{c}(y - y_0) - 2c(\dot{y} - \dot{y}_0) + O(\epsilon^2) \\
=& \dot{U} - \dot{b}(x - x_0) - 2\dot{c}(y - y_0) \\
& - b(U - b(x - x_0) - 2c(y - y_0) - U) - 2c(V + 2a(x - x_0) + b(y - y_0) - V) + O(\epsilon^2) \\
=& (-\dot{b} + b^2 - 4ac)(x - x_0) - 2\dot{c}(y - y_0) + \dot{U} + O(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{246}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{y} =& \frac{\mathrm{D}\dot{y}}{\mathrm{D}t} \\
=& \dot{V} + 2\dot{a}(x - x_0) + 2a(\dot{x} - \dot{x}_0) + \dot{b}(y - y_0) + b(\dot{y} - \dot{y}_0) + O(\epsilon^2) \\
=& \dot{V} + 2\dot{a}(x - x_0) + \dot{b}(y - y_0) \\
& + 2a(U - b(x - x_0) - 2c(y - y_0) - U) + b(V + 2a(x - x_0) + b(y - y_0) - V) + O(\epsilon^2) \\
=& + 2\dot{a}(x - x_0) + (\dot{b} + b^2 - 4ac)(y - y_0) + \dot{V} + O(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{247}$$

ここで，

$$W := \sigma_{\mathrm{s}}^2 + \sigma_{\mathrm{n}}^2 - \zeta^2 \tag{248}$$

$$= 4(a - c)^2 + 4b^2 - 4(a + c)^2 \tag{249}$$

$$= 4(b^2 - 4ac) \tag{250}$$

$$= u_x^2 - 2u_x v_y + v_y^2 + v_x^2 + 2v_x u_y + u_y^2 - v_x^2 + 2u_y v_x - u_y^2 \tag{251}$$

を用いて,

$$\left(\begin{array}{c} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{4}W - \dot{b} & -2\dot{c} \\ 2\dot{a} & \frac{1}{4}W + \dot{b} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x - x_0 \\ y - y_0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} \dot{U} \\ \dot{V} \end{array}\right) + O(\epsilon^2) \tag{252}$$

$$\ddot{\vec{x}} = \nabla \frac{\mathrm{D}\vec{u}}{\mathrm{D}t} + \ddot{\vec{x}}_0 + O(\epsilon^2) \tag{253}$$

と書き直せる．ここで $\nabla \frac{\mathrm{D}\vec{u}}{\mathrm{D}t}$ はラグランジュ加速度勾配テンソルである．ラグランジュ加速度勾配テンソルは圧力で

$$\nabla \frac{\mathrm{D}\vec{u}}{\mathrm{D}t} = \left[\begin{array}{cc} -p_{xx} & -p_{xy} \\ -p_{xy} & -p_{yy} \end{array}\right] = -p'' \tag{254}$$

とかける．また,

$$\frac{1}{4}W - \dot{b} = -\frac{1}{2}\nabla^2 p - \frac{1}{2}(p_{xx} - p_{yy}) = -p_{xx} \tag{255}$$

$$\frac{1}{4}W + \dot{b} = -\frac{1}{2}\nabla^2 p + \frac{1}{2}(p_{xx} - p_{yy}) = -p_{yy} \tag{256}$$

$$2\dot{a} = -p_{xy} \tag{257}$$

$$-2\dot{c} = -p_{xy} \tag{258}$$

とも書き直せる．

$\nabla \frac{\mathrm{D}\vec{u}}{\mathrm{D}t}$ の固有値 λ は,

$$\left(\frac{1}{4}W - \dot{b} - \lambda\right)\left(\frac{1}{4}W + \dot{b} - \lambda\right) + 4\dot{a}\dot{c} = 0 \tag{259}$$

を解くことで,

$$\lambda = \frac{1}{4}W \pm \sqrt{\dot{b}^2 - 4\dot{a}\dot{c}} \tag{260}$$

$$= \frac{1}{4}W \pm \frac{1}{2}\sqrt{\dot{\sigma}_{\mathrm{n}}^2 + \dot{\sigma}_{\mathrm{s}}^2 - \dot{\zeta}^2} \tag{261}$$

$$= -\frac{1}{2}\nabla^2 p \pm \frac{1}{2}\sqrt{(p_{xx} - p_{yy})^2 + 4p_{xy}} \tag{262}$$

となる．

ラグランジュ加速度ベクトルを

$$\vec{\gamma}_{\mathrm{L}} = (\gamma_{\mathrm{L}}^x, \gamma_{\mathrm{L}}^y) \tag{263}$$

とする．これを用いると, ラグランジュ加速度勾配テンソルは

$$\nabla \vec{\gamma}_{\mathrm{L}} = \left[\begin{array}{cc} \partial_x \gamma_{\mathrm{L}}^x & \partial_x \gamma_{\mathrm{L}}^y \\ \partial_y \gamma_{\mathrm{L}}^x & \partial_y \gamma_{\mathrm{L}}^y \end{array}\right] \tag{264}$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_x \gamma_{\mathrm{L}}^x + \partial_y \gamma_{\mathrm{L}}^y)\mathsf{I} + \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{2}(\partial_x \gamma_{\mathrm{L}}^x - \partial_y \gamma_{\mathrm{L}}^y) & \partial_x \gamma_{\mathrm{L}}^y \\ \partial_y \gamma_{\mathrm{L}}^x & -\frac{1}{2}(\partial_x \gamma_{\mathrm{L}}^x - \partial_y \gamma_{\mathrm{L}}^y) \end{array}\right] \tag{265}$$

と対称テンソルと非対称テンソルに分けることができる．対称テンソルに対応する固有値は $\frac{1}{4}W = -\frac{1}{2}\nabla^2 p$ で, 非対称テンソルに対応する固有値は $\pm\frac{1}{2}\sqrt{(p_{xx} - p_{yy})^2 + 4p_{xy}}$ である．

ラグランジュ加速度勾配テンソル $\nabla\vec{\gamma}_{\mathrm{L}}$ と速度勾配テンソル $\mathsf{A} := \nabla\vec{u}$ の関係について述べる．準備として A, A^2, $\dot{\mathsf{A}}$ を計算しておくと,

$$\mathsf{A} = \nabla\vec{u} = [\partial_i u_j] = \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \tag{266}$$

$$\mathsf{A}^2 = \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \tag{267}$$

$$= \begin{bmatrix} u_x^2 + v_x u_y & u_x v_x + v_x v_y \\ u_x u_y + v_y u_y & u_y v_x + v_y^2 \end{bmatrix} \tag{268}$$

$$= (-u_x v_y + v_x u_y)\mathsf{I} \tag{269}$$

$$\dot{\mathsf{A}} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \tag{270}$$

$$= (-u_x v_y + v_x u_y)\mathsf{I} - p'' \tag{271}$$

$$= -\mathsf{A}^2 - p'' \tag{272}$$

となる．ここで I は単位行列である．

ラグランジュ的保存するトレーサ $C(x, y, t)$ を仮定する:

$$\dot{C} =(\partial_t + \vec{u} \cdot \nabla)C = 0 \tag{273}$$

トレーサの勾配 ∇C は,

$$\frac{\mathrm{D}C_x}{\mathrm{D}t} + u_x C_x + v_x C_y = 0 \tag{274}$$

$$\frac{\mathrm{D}C_y}{\mathrm{D}t} + u_y C_x + v_y C_y = 0 \tag{275}$$

まとめると,

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\nabla C + \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} C = 0 \tag{276}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\nabla C + \mathsf{A} \cdot \nabla C = 0 \tag{277}$$

となる．成分表示したトレーサ勾配のラグランジュ的時間変化にさらに $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ を作用させると,

$$\frac{\mathrm{D}^2 C_x}{\mathrm{D}t^2} + \frac{\mathrm{D}u_x}{\mathrm{D}t}C_x + \frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t}C_y + u_x\frac{\mathrm{D}C_x}{\mathrm{D}t} + v_x\frac{\mathrm{D}C_y}{\mathrm{D}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{D}^2 C_x}{\mathrm{D}t^2} + \frac{\mathrm{D}u_x}{\mathrm{D}t}C_x + \frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t}C_y - (-u_x v_y + v_x u_y)C_x = 0$$

$$\frac{\mathrm{D}^2 C_y}{\mathrm{D}t^2} + \frac{\mathrm{D}u_y}{\mathrm{D}t}C_x + \frac{\mathrm{D}v_y}{\mathrm{D}t}C_y + u_y\frac{\mathrm{D}C_x}{\mathrm{D}t} + v_y\frac{\mathrm{D}C_y}{\mathrm{D}t} = 0$$

$$\frac{\mathrm{D}^2 C_y}{\mathrm{D}t^2} + \frac{\mathrm{D}u_y}{\mathrm{D}t}C_x + \frac{\mathrm{D}v_y}{\mathrm{D}t}C_y - (-u_x v_y + v_x u_y)C_y = 0$$

となるので, まとめると,

$$\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{D}t^2}\nabla C + \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \cdot \nabla C + \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \cdot \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\nabla C = 0 \tag{278}$$

$$\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{D}t^2}\nabla C + \dot{\mathsf{A}} \cdot \nabla C + \mathsf{A} \cdot (-\mathsf{A} \cdot \nabla C) = 0 \tag{279}$$

$$\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{D}t^2}\nabla C + (\dot{\mathsf{A}} - \mathsf{A}^2) \cdot \nabla C = 0 \tag{280}$$

となる．

結局, ラグランジュ的加速度勾配テンソルは圧力あるいは速度勾配テンソルを用いて,

$$\begin{aligned} \nabla\vec{\gamma}_{\mathrm{L}} =& - p'' &(281)\\ =& \dot{\mathsf{A}} + \mathsf{A}^2 &(282)\end{aligned}$$

と書き表せる．流体粒子とトレーサのラグランジュ微分の 2 階微分に関する方程式を並べると,

$$\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{D}t^2}(\vec{x} - \vec{x}_0) = (\dot{\mathsf{A}} + \mathsf{A}^2)(\vec{x} - \vec{x}_0) \tag{283}$$

$$\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{D}t^2}\nabla C = (\dot{\mathsf{A}} - \mathsf{A}^2)\nabla C \tag{284}$$

である．速度勾配テンソルの時間変化が遅い場合には $\dot{\mathsf{A}} = 0$ である．このとき, $\mathsf{A}^2 > 0$ なら流体粒子の相対位置が離れていく．一方で, トレーサの勾配はゆるやかになる (一様化していく)．逆に $\mathsf{A}^2 < 0$ なら流体粒子の相対位置は近付き, トレーサの勾配は急になる．このようにトレーサと流体粒子の双対性が見て取れる．

この文書では Tran(2005), Tran and Dritchel(2006) に基づいて, 移流項によるパリンストロフィー生成の上限値や, エンストロフィー散逸率の上限値についてまとめる.

10 Tran の理論

10.1 Casimir

渦度のみの関数 $f(\zeta)$ は, 非粘性の場合に保存する. $f(\zeta)$ が保存するということは, 無限個の保存量があることになる. これは Casimir 不変量と呼ばれている.

10.1.1 Casimir の減衰

粘性項がある場合の Casimir 不変量は, $f(\zeta) > 0$ が凸関数, つまり $f''(\zeta) > 0$ ならば $< f(\zeta) >$ は減衰する. これを示そう. ここで, 全領域についての積分 $< \cdot >= \iint \cdot \, \mathrm{d}S$ である.

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} < f(\zeta) >= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} f(\zeta) \right\rangle \tag{285}$$

$$= \left\langle f'(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right\rangle \tag{286}$$

$$= - \left\langle f'(\zeta) J(\psi, \zeta) \right\rangle + \left\langle f'(\zeta) \nu \Delta \zeta \right\rangle \tag{287}$$

ここで, 移流項の部分については

$$\left\langle f'(\zeta) J(\psi, \zeta) \right\rangle = \left\langle f'(\zeta) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right\rangle \tag{288}$$

$$= - \left\langle \psi \frac{\partial}{\partial x} \left(f'(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - \psi \frac{\partial}{\partial y} \left(f'(\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right\rangle \tag{289}$$

$$= - \left\langle \psi J(f'(\zeta), \zeta) \right\rangle \tag{290}$$

$$= - \left\langle \psi f''(\zeta) J(\zeta, \zeta) \right\rangle \tag{291}$$

$$=0. \tag{292}$$

また, 粘性項の部分については,

$$\left\langle f'(\zeta) \Delta \zeta \right\rangle = \left\langle \nabla \cdot (f'(\zeta) \nabla \zeta) \right\rangle - \left\langle \nabla f'(\zeta) \cdot \nabla \zeta \right\rangle \tag{293}$$

$$= - \left\langle f''(\zeta) \nabla \zeta \cdot \nabla \zeta \right\rangle \tag{294}$$

$$= - \left\langle f''(\zeta) |\nabla \zeta|^2 \right\rangle \tag{295}$$

を用いると,

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \left\langle f(\zeta) \right\rangle = - \left\langle f''(\zeta) |\nabla \zeta|^2 \right\rangle \tag{296}$$

となる. 従って, $f''(\zeta) > 0$ ならば, $D \left\langle f(\zeta) \right\rangle / Dt < 0$ となる.

10.1.2 L_p ノルムの場合

L_p ノルム $||\zeta||_p = \left\langle |\zeta|^p \right\rangle^{1/p}$ も減衰することを示す. 領域積分の外に累乗がかかっているので, $f(\zeta) = ||\zeta||_p$ ではないことに注意しよう.