SPMODEL サンプルプログラム

球面浅水方程式モデル : 渦度発散型

shallow_zd.f90

小高 正嗣

2004 年 6 月 16 日

目 次

1 概要 **2**

2 支配方程式系 **3**
2.1 支配方程式系 3
2.2 境界条件 4

3 離散化 **5**
3.1 水平離散化 5
3.2 水平方向のスペクトル表現 5
3.3 時間積分 7
3.4 時間フィルター 9

4 使用モジュールとその他の設定 **10**

5 数値実験 **11**
5.1 実験設定 11
5.2 実行方法 11
5.3 計算結果 12

6 参考文献 **16**

1　概要

SPMODEL サンプルプログラム『shallow_zd.f90』, 『shallow_zd_ab.f90』, 『shallow_zd_rk.f90』に用いられている基礎方程式と境界条件, および, このプログラムを用いた数値実験の方法について解説する. 基礎方程式は, 渦度と発散を用いて表現した球面上の浅水方程式である. 計算はスペクトル法を用いて行い, 展開関数は球面調和関数である. 波数切断は三角切断である. スペクトル変換と逆変換および微分演算には, SPMODEL ライブラリ (spml) を用いている. 時間積分は leapfrog 法と台形公式を組み合わせた semi-imlicit 法を用いて行い, 計算モードの増幅を抑制するため Asselin (1972) の時間フィルターを 1 ステップ毎に適用する. 数値実験として Williamson *et al.* (1992) によって提案された, 球面浅水方程式モデルの標準試験 Case5 の実験を行う.

プログラム名

shallow_zd.f90

プログラム取得元

http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/2d-sphere-w/shallow-zd/SIGEN.htm

SPMODEL サンプルプログラム目次

http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/sample.htm

SPMODEL の使い方

http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel

2　支配方程式系

ここでは支配方程式系と境界条件を記す.

2.1　支配方程式系

支配方程式系は渦度発散型の球面浅水方程式系である.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial (f+\zeta)U}{\partial \lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial (f+\zeta)V}{\partial \mu} \\
&\quad -K_m\left[(-1)^{N_d/2}\nabla^{N_d} - \left(\frac{2}{a^2}\right)^{N_d}\right]\zeta, \qquad (1)\\
\frac{\partial D}{\partial t} &= \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial (f+\zeta)V}{\partial \lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial (f+\zeta)U}{\partial \mu} - \nabla^2\left[g(h+h_s)+E\right] \\
&\quad -K_m\left[(-1)^{N_d/2}\nabla^{N_d} - \left(\frac{2}{a^2}\right)^{N_d/2}\right]D, \qquad (2)\\
\frac{\partial h}{\partial t} &= -\frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial (hU)}{\partial \lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial (hV)}{\partial \mu} - (-1)^{N_d/2}K_h\nabla^{N_d}h. \qquad (3)
\end{aligned}$$

各記号の定義は表1に示した. 渦度 ζ と発散 D , 単位質量あたりの運動エネルギー E, 演算子 ∇^2 は以下のように定義される.

$$\begin{aligned}
\zeta &= \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial V}{\partial \lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial \mu}, \qquad (4)\\
D &= \frac{1}{a(1-\mu^2)}\frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{1}{a}\frac{\partial V}{\partial \mu}, \qquad (5)\\
E &= \frac{U^2+V^2}{2(1-\mu^2)}, \qquad (6)\\
\nabla^2 A &= \frac{1}{a^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 A}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial A}{\partial \mu}\right]. \qquad (7)
\end{aligned}$$

ここで A は任意のスカラーである. 流線関数 ψ と速度ポテンシャ琉 χ を導入すると,

$$\begin{aligned}
U &= -\frac{1-\mu^2}{a}\frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \frac{1}{a}\frac{\partial \chi}{\partial \lambda}, \qquad (8)\\
V &= \frac{1}{a}\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{1-\mu^2}{a}\frac{\partial \chi}{\partial \mu}, \qquad (9)\\
\zeta &= \nabla^2\psi, \qquad (10)\\
D &= \nabla^2\chi \qquad (11)
\end{aligned}$$

と表される.

記号	変数/物理定数
λ	経度
ϕ	緯度
μ	sin 緯度 ($\equiv \sin\phi$)
t	時間
u	経度方向流速
v	緯度方向流速
U	$u\cos\phi$
V	$v\cos\phi$
h	流体の全厚さ
ζ	渦度
D	発散
E	運動エネルギー
ψ	流線関数
χ	速度ポテンシャル
f	$2\Omega\sin\phi$
Ω	自転角速度
g	重力加速度
a	惑星半径
K_m	水平拡散係数
K_h	水平拡散係数
N_d	超粘性の次数

表 1: 変数, 物理定数の定義

2.2　境界条件

境界条件は緯度, 経度方向ともに周期境界条件である.

$$\zeta(\lambda+2\pi,\phi) = \zeta(\lambda,\phi), \tag{12}$$

$$\zeta(\lambda,\phi+2\pi) = \zeta(\lambda,\phi). \tag{13}$$

などど表される.

3　離散化

この節では方程式系の空間離散化および使用した時間積分法について説明, プログラム内で実際に用いられている方程式を記述する.

3.1　水平離散化

支配方程式 (1),(2),(3), の離散表現は以下のようになる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \zeta_{i,j}}{\partial t} &= -\frac{1}{a(1-\mu_j^2)}\frac{\partial (f_j+\zeta_{i,j})U_{i,j}}{\partial \lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial (f_j+\zeta_{i,j})V_{i,j}}{\partial \mu} \\
&\quad -K_m\left[(-1)^{N_d/2}\nabla^{N_d} - \left(\frac{2}{a^2}\right)^{N_d/2}\right]\zeta_{i,j}, \qquad (14)\\
\frac{\partial D_{i,j}}{\partial t} &= \frac{1}{a(1-\mu_j^2)}\frac{\partial (f_j+\zeta_{i,j})V_{i,j}}{\partial \lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial (f_j+\zeta_{i,j})U_{i,j}}{\partial \mu} \\
&\quad -\nabla^2\left[g(h_{i,j}+h_{s_{i,j}})+E_{i,j}\right] - K_m\left[(-1)^{N_d/2}\nabla^{N_d} - \left(\frac{2}{a^2}\right)^{N_d/2}\right]D_{i,j}, \qquad (15)\\
\frac{\partial h_{i,j}}{\partial t} &= -\frac{1}{a(1-\mu_j^2)}\frac{\partial (h_{i,j}U_{i,j})}{\partial \lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial (h_{i,j}V_{i,j})}{\partial \mu} - (-1)^{N_d/2}K_h\nabla^{N_d}h_{i,j}. \qquad (16)
\end{aligned}$$

添字 i,j は格子点 (λ_i,μ_j) 上の値であることを示す. 格子点は経度方向には等間隔, 緯度方向にはガウス緯度上に置く.

3.2　水平方向のスペクトル表現

空間離散化した支配方程式 (14), (15), (16) をスペクトル法を用いて表現する. スペクトル 展開は球面調和関数を用いて行う. 波数切断は三角切断である. ルジャンドル正変換の積分はガウス–ルジャンドルの積分公式を用いて行う. 非線形項を扱う場合は, 先に格子点上での非線形項の値を計算し, その値のスペクトルを求める方法 (変換法) を用いる. 以下では m,n をそれぞれ経度方向波数と全波数, M,N を切断波数, I,J を格子点数とする.

$\zeta_{i,j}, D_{i,j}, h_{i,j}, U_{i,j}, V_{i,j}$ はスペクトル逆変換によって以下のように展開される.

$$\zeta_{i,j} = \sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n} P_n^m(\mu)e^{im\lambda}\hat{\zeta}_{m,n}, \qquad (17)$$

$$D_{i,j} = \sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n} P_n^m(\mu)e^{im\lambda}\hat{D}_{m,n}, \tag{18}$$

$$h_{i,j} = \sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n} P_n^m(\mu)e^{im\lambda}\hat{h}_{m,n}, \tag{19}$$

$$U_{i,j} = \sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n} P_n^m(\mu)e^{im\lambda}\hat{U}_{m,n}, \tag{20}$$

$$V_{i,j} = \sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n} P_n^m(\mu)e^{im\lambda}\hat{V}_{m,n}. \tag{21}$$

ここで P_n^m は 2 に規格化されたルジャンドル陪関数である. スペクトル係数 $\hat{\zeta}_{i,j}, \hat{D}_{i,j}, \hat{h}_{i,j}$ はスペクトル変換によって以下のように与えられる.

$$\hat{\zeta}_{m,n} = \frac{1}{2I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}\zeta_{i,j}e^{-im\lambda_i}P_n^m(\mu_j)w_j, \tag{22}$$

$$\hat{D}_{m,n} = \frac{1}{2I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}D_{i,j}e^{-im\lambda_i}P_n^m(\mu_j)w_j, \tag{23}$$

$$\hat{h}_{m,n} = \frac{1}{2I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}h_{i,j}e^{-im\lambda_i}P_n^m(\mu_j)w_j. \tag{24}$$

ここで w_j はガウス重みである. $\hat{U}_{m,m}, \hat{V}_{n,m}$ は流線関数と速度ポテンシャルのスペクトル係数

$$\hat{\psi}_{n,m} = -\frac{\zeta_{m,n}}{n(n+1)/a^2}, \tag{25}$$

$$\hat{\chi}_{n,m} = -\frac{D_{m,n}}{n(n+1)/a^2} \tag{26}$$

を導入し, 以下のように表される[1].

$$\hat{U}_{m,n} = \frac{1}{a}\left[(n-1)\sqrt{\frac{n^2-m^2}{4n^2-1}}\hat{\psi}_{m,n-1} - (n+2)\sqrt{\frac{(n+1)^2-m^2}{4(n+1)^2-1}}\hat{\psi}_{m,n+1}\right] + \frac{im}{a\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\partial\hat{\chi}_{m,n}}{\partial\lambda}, \tag{27}$$

$$\hat{V}_{m,n} = -\frac{1}{a}\left[(n-1)\sqrt{\frac{n^2-m^2}{4n^2-1}}\hat{\chi}_{m,n-1} - (n+2)\sqrt{\frac{(n+1)^2-m^2}{4(n+1)^2-1}}\hat{\chi}_{m,n+1}\right] + \frac{im}{a\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\partial\hat{\psi}_{m,n}}{\partial\lambda}. \tag{28}$$

[1]ルジャンドル陪関数の関係式

$$(1-\mu^2)\frac{dP_n^m}{d\mu} = (n+1)\sqrt{\frac{n^2-m^2}{4n^2-1}}\hat{P}_{n-1}^m - n\sqrt{\frac{(n+1)^2-m^2}{4(n+1)^2-1}}\hat{P}_{n+1}^m$$

を用いる.

以上を用いると支配方程式 (14), (15), (16) のスペクトル表現は以下のようになる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\zeta}_{m,n}}{\partial t} &= \frac{1}{2I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}\frac{im}{a(1-\mu_j^2)}[(f_j+\zeta_{i,j})U_{i,j}]e^{-im\lambda_i}P_n^m(\mu_j)w_j \\
&\quad -\frac{1}{2I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{a}\left[(f_j+\zeta_{i,j})V_{i,j}\right]e^{-im\lambda_i}\left.\frac{\partial P_n^m}{\partial \mu}\right|_j w_j \\
&\quad -K_m\left[\left\{\frac{n(n+1)}{a^2}\right\}^{N_d/2}-\left(\frac{2}{a^2}\right)^{N_d/2}\right]\zeta_{m,n}, \qquad (29)\\
\frac{\partial \hat{D}_{m,n}}{\partial t} &= -\frac{1}{2I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}\frac{im}{a(1-\mu_j^2)}[(f_j+\zeta_{i,j})V_{i,j}]e^{-im\lambda_i}P_n^m(\mu_j)w_j \\
&\quad -\frac{1}{2I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{a}\left[(f_j+\zeta_{i,j})U_{i,j}\right]e^{-im\lambda_i}\left.\frac{\partial P_n^m}{\partial \mu}\right|_j w_j \\
&\quad +\frac{n(n+1)}{a^2}\left[g(\hat{h}_{m,n}+\hat{h}_{s_{m,n}})+\hat{E}_{n,m}\right] \\
&\quad -K_m\left[\left\{\frac{n(n+1)}{a^2}\right\}^{N_d/2}-\left(\frac{2}{a^2}\right)^{N_d/2}\right]\hat{D}_{m,n}, \qquad (30)\\
\frac{\partial \hat{h}_{m,n}}{\partial t} &= \frac{1}{2I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}\frac{im}{a(1-\mu_j^2)}(h_{i,j}U_{i,j})e^{-im\lambda_i}P_n^m(\mu_j)w_j \\
&\quad -\frac{1}{2I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{a}(h_{i,j}V_{i,j})e^{-im\lambda_i}\left.\frac{\partial P_n^m}{\partial \mu}\right|_j w_j, \\
&\quad -K_h\left\{\frac{n(n+1)}{a^2}\right\}^{N_d/2}\hat{h}_{m,n}. \qquad (31)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\hat{E}_{m,n} &= \frac{\hat{U}_{m,n}^2+\hat{V}_{m,n}^2}{1-\mu^2}, \qquad (32)\\
\hat{h}_{s_{m,n}} &= \frac{1}{2I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}h_{s_{i,j}}e^{-im\lambda_i}P_n^m(\mu_j)w_j \qquad (33)
\end{aligned}$$

である.

3.3　時間積分

ここでは時間積分法について記述し, プログラム内で実際に用いられている方程式を記述する. 以下では Δt を時間格子間隔, 時刻 $\tau\Delta t$ における $\hat{\zeta}_{m,n}$ の値を $\hat{\zeta}_{m,n}^{\tau}$ 等

と表す. 時間積分は semi-implicit 法を用いて行う. 重力波に関係する線形項は陰的に解き, その他の項は陽的に解く.

(29) の時間積分は陽的解法を用いて行う. 摩擦項に対しては Euler 法, その他の項に対しては Leapfrog 法を適用する.

$$\begin{aligned}
\hat{\zeta}^{\tau+1}_{m,n} &= \hat{\zeta}^{\tau-1}_{m,n} + 2\Delta t \left(\frac{1}{2I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} \frac{im}{a(1-\mu_j^2)} [(f_j+\zeta^{\tau}_{i,j})U^{\tau}_{i,j}] e^{-im\lambda_i} P^m_n(\mu_j) w_j \right. \\
&\quad -\frac{1}{2I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} \frac{1}{a} \left[(f_j+\zeta^{\tau}_{i,j})V^{\tau}_{i,j}\right] e^{-im\lambda_i} \left.\frac{\partial P^m_n}{\partial \mu}\right|_j w_j \\
&\quad \left. -K_m \left[\left\{ \frac{n(n+1)}{a^2} \right\}^{N_d/2} - \left(\frac{2}{a^2} \right)^{N_d/2} \right] \zeta^{\tau-1}_{m,n} \right). \qquad (34)
\end{aligned}$$

(30), (31) は時間方向に離散化する前に重力波成分の分離を行う. h の平均成分を $\overline{h}$ とし, $h = \overline{h} + h'$ と表す. このとき (30), (31) は以下のように表される.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{D}_{m,n}}{\partial t} &= F_1(\zeta, D, U, V) + n(n+1) g \hat{h}'_{m,n} - K_{m_{n,N_d}} \hat{D}_{m,n} \qquad (35) \\
\frac{\partial \hat{h}'_{m,n}}{\partial t} &= F_2(\zeta, D, U, V) - \overline{h} \hat{D}_{m,n} - K_{h_{n,N_d}} \hat{h}'_{i,j} \qquad (36)
\end{aligned}$$

(35), (36) のそれぞれ右辺第 2 項が重力波に関係する線形項である. ここで,

$$\begin{aligned}
F_1(\zeta, D, U, V) &= -\frac{1}{2I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} \frac{im}{a(1-\mu_j^2)} [(f_j+\zeta_{i,j})V_{i,j}] e^{-im\lambda_i} P^m_n(\mu_j) w_j \\
&\quad -\frac{1}{2I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} \frac{1}{a} \left[(f_j+\zeta_{i,j})U_{i,j}\right] e^{-im\lambda_i} \left.\frac{\partial P^m_n}{\partial \mu}\right|_j w_j \\
&\quad +\frac{n(n+1)}{a^2} \left[g\hat{h}_{s_{m,n}} + \hat{E}_{n,m} \right] \qquad (37) \\
F_2(\zeta, D, U, V) &= \frac{1}{2I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} \frac{im}{a(1-\mu_j^2)} (h'_{i,j} U_{i,j}) e^{-im\lambda_i} P^m_n(\mu_j) w_j \\
&\quad -\frac{1}{2I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} \frac{1}{a} (h'_{i,j} V_{i,j}) e^{-im\lambda_i} \left.\frac{\partial P^m_n}{\partial \mu}\right|_j w_j, \qquad (38) \\
K_{m_{n,N_d}} &= K_m \left[\left\{ \frac{n(n+1)}{a^2} \right\}^{N_d/2} - \left(\frac{2}{a^2} \right)^{N_d/2} \right], \qquad (39) \\
K_{h_{n,N_d}} &= K_h \left\{ \frac{n(n+1)}{a^2} \right\}^{N_d/2} \qquad (40)
\end{aligned}$$

とした.

(35), (36) を時間方向に離散化する. それぞれの式の右辺第 2 項に対しては台形型の陰解法, 摩擦項に対しては Euler 法, その他の項に対しては Leapfrog 法を適用する.

$$\frac{\hat{D}^{\tau+1}_{m,n} - \hat{D}^{\tau-1}_{m,n}}{2\Delta t} = F_1(\zeta, D, U, V)^\tau + n(n+1)g\frac{\hat{h}'^{\tau+1}_{m,n} + \hat{h}'^{\tau-1}_{m,n}}{2} - K_{m_{n,N_d}}\hat{D}^{\tau-1}_{m,n} \quad (41)$$

$$\frac{\hat{h}'^{\tau+1}_{m,n} - \hat{h}'^{\tau-1}_{m,n}}{2\Delta t} = F_2(\zeta, D, U, V)^\tau - \overline{h}\frac{\hat{D}^{\tau+1}_{m,n} + \hat{D}^{\tau-1}_{m,n}}{2} - K_{h_{n,N_d}}\hat{h}'^{\tau-1}_{i,j}. \quad (42)$$

これらを $\hat{D}^{\tau+1}_{m,n}, \hat{h}'^{\tau+1}_{m,n}$ について解くと以下の式が得られる (Krishnamurti *et al.*, 1998; Satoh, 2004).

$$\left(1 + \Delta t^2 g\overline{h}\frac{n(n+1)}{a^2}\right)\hat{D}^{\tau+1}_{m,n} = \left(1 - \Delta t^2 g\overline{h}\frac{n(n+1)}{a^2} - 2\Delta t K_{m_{n,N_d}}\right)\hat{D}^{\tau-1}_{m,n} + 2\Delta t G_1(\zeta, D, U, V), \quad (43)$$

$$\left(1 + \Delta t^2 g\overline{h}\frac{n(n+1)}{a^2}\right)\hat{h}'^{\tau+1}_{m,n} = \left(1 - \Delta t^2 g\overline{h}\frac{n(n+1)}{a^2} - 2\Delta t K_{h_{n,N_d}}\right)\hat{h}'^{\tau-1}_{m,n} + 2\Delta t G_2(\zeta, D, U, V) \quad (44)$$

$$G_1(\zeta, D, U, V) = F_1(\zeta, D, U, V)^\tau + \frac{n(n+1)}{a^2}g(1 - \Delta t K_{h_{n,p}})\hat{h}'^{\tau-1}_{m,n} - gF_2(\zeta, D, U, V)^\tau\Delta t, \quad (45)$$

$$G_2(\zeta, D, U, V) = F_2(\zeta, D, U, V)^\tau - \overline{h}(1 - \Delta t K_{m_{n,p}})\hat{D}^{\tau-1}_{m,n} - \overline{h}F_1(\zeta, D, U, V)^\tau\Delta t \quad (46)$$

3.4　時間フィルター

計算モードの増幅を抑制するため Asselin (1972) の時間フィルターを 1 ステップ毎に適用する. 例えば (34) を用いて $\hat{\zeta}^{\tau+1}_{m,n}$ を計算する場合は以下のように行う.

$$\hat{\zeta}^*_{m,n} = \hat{\zeta}^{\tau-1}_{m,n} + 2\Delta t\left(\frac{1}{2I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}\frac{im}{a(1-\mu_j^2)}[(f_j + \zeta^\tau_{i,j})U^\tau_{i,j}]e^{-im\lambda_i}P^m_n(\mu_j)w_j - \frac{1}{2I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{a}\left[(f_j + \zeta^\tau_{i,j})V^\tau_{i,j}\right]e^{-im\lambda_i}\left.\frac{\partial P^m_n}{\partial\mu}\right|_j w_j - K_{m_{n,N_d}}\zeta^{\tau-1}_{m,n}\right), \quad (47)$$

$$\hat{\zeta}^{\tau+1}_{m,n} = (1-2\gamma)\hat{\zeta}^\tau_{m,n} + \gamma(\hat{\zeta}^*_{m,n} + \hat{\zeta}^{\tau-1}_{m,n}). \quad (48)$$

ここで γ はフィルターの係数である.

4　使用モジュールとその他の設定

スペクトル変換と逆変換, 微分演算は SPMODEL ライブラリ (spml) の wt_module に含まれる関数を用いて行う. スペクトル変換と逆変換の際の数値積分は台形公式を用いて行う. spml が下位で使用する ISPACK の仕様から, 格子点数 I は偶数で, かつ $I/2 = 2^a 3^b 5^c$ (a, b, c は 0 または整数) でなければならない. 非線形項の計算によって生じるエリアジングを防ぐため, 格子点数 I, J は切断波数 M に対し $I > 3M + 1, J > 3M/2$ を満たすように与える.

5　数値実験

5.1　実験設定

数値実験として Williamson *et al.* (1992) によって提案された, 球面浅水方程式モデルの標準試験 Case 5 を行う. これは中緯度に孤立した山を置き, それによる流体の応答を調べる実験である. 底面の地形分布 h_s は以下のように与える.

$$h_s = h_{s0}\left(1 - \frac{1}{R}\sqrt{\min[R^2, (\lambda-\lambda_c)^2 + (\theta-\theta_c)^2]}\right) \tag{49}$$

初期の流れ場として剛体回転の流れを与える. 流線関数と速度ポテンシャルの初期値は

$$\psi = -U_0 a \sin\theta, \tag{50}$$
$$\chi = 0 \tag{51}$$

である. これより

$$\zeta = \frac{2U_0}{a}\sin\theta, \tag{52}$$
$$D = 0 \tag{53}$$

である. 初期の流体の全厚さ h は上記の剛体回転の流れに地衡流バランスした分布を与える.

$$h = \overline{h} - (a\Omega U_0 + U_0^2/2)\frac{\sin^2\theta}{g} \tag{54}$$

使用したパラメータの値は表 2 にまとめた. 格子点数 I, J と切断波数 M はそれぞれ $I = 64, J = 32, M = 21$ とする. 時間格子間隔 Δt は 1800 sec, 計算は 15 モデル日間行う.

5.2　実行方法

計算の実行は以下の手順で行う. ただし必要なライブラリのインストールが事前に済んでいることを前提とする.

1. プログラム取得元より `shallow_zd.f90`, `shallow_zd_init.f90`, `shallow_zd.sh`, `Makefile`, `shallow_zd_init.nml`, `shallow_zd.nml` を作業領域にダウンロードする.

パラメータ	数値
Ω	7.292×10^{-5} sec^{-1}
g	9.8 m sec^{-2}
a	6.37×10^{6} m
K_m	0.0
K_h	0.0
p	0.0
γ	0.05
h_s	2.0 ^{3} m
λ_c	0.5 π
θ_c	$\pi/6$
R	$\pi/9$
U_0	20 m sec^{-1}
$\overline{h}$	5.96×10^{3} m

表 2: 使用したパラメータの値

2. NAMELIST ファイル `shallo_zd_init.nml` , `shallo_zd.nml` を適宜編集する. NAMELIST 変数については表 4, 表 3 を参照されたい.

3. コンパイル

```
$ make
```

4. 初期値の生成

   初期値作成プログラム `shallow_zd_init.f90` のコンパイルと実行を行い, 初期値ファイルを作成する.

```
$ make init
```

5. 計算を実行

```
$  ./shallow_zd.sh
```

5.3　計算結果

渦度 ζ と全厚さ h の初期分布と, 計算開始後 5 日毎の分布を図 1 に示す. 孤立した山により励起された波が球面上を伝播する様子がわかる.

名	変数	型	説明
expset			実験のラベル
	ExpTitle	文字型	実験の名前
	ExpInst	文字型	実行者名
	ExpSrc	文字型	ソースプログラム名
	ExpModel	文字型	モデル名, 'shallow' か 'baro' を選択
	ExpCase	文字型	実験設定名, 'case1' から 'case6' まで
dateset			暦の管理
	UnitYear	整数型	1 年の長さ (日)
	UnitDay	整数型	1 日の長さ (時間)
	UnitHour	整数型	1 時間の長さ (分)
	UnitMinit	整数型	1 分の長さ (秒)
timeset			時間積分設定
	TimeIntYear	実数型	積分時間 (年)
	TimeIntDay	実数型	積分時間 (日)
	TimeIntHour	実数型	積分時間 (時)
	TimeIntMinit	実数型	積分時間 (分)
	TimeIntSec	実数型	積分時間 (秒)
	OutputYear	実数型	出力間隔 (年)
	OutputDay	実数型	出力間隔 (日)
	OutputHour	実数型	出力間隔 (時)
	OutputMinit	実数型	出力間隔 (分)
	OutputSec	実数型	出力間隔 (秒)
	DelTime	実数型	時間格子間隔 (秒)
	IntScheme	文字型	時間積分法, 'implicit' か 'explicit'
fileset			ファイル制御
	InputRstFile	文字型	入力リスタートファイル名
	OutputRstFile	文字型	出力リスタートファイル名
	OutputFile	文字型	出力ファイル名
gridset			分解能の設定
	nm	整数型	切断波数
	im	整数型	経度方向格子点数 ($> 3\mathrm{nm}+1$)
	jm	整数型	緯度方向格子点数 ($> 3\mathrm{nm}/2$)
paramset			物理定数
	Rplanet	実数型	惑星半径
	Grav	実数型	重力加速度
	Omega	実数型	自転角速度
	TfilCoef	実数型	時間フィルター係数
	VisOrder	実数型	超粘性の次数
	VisCoef	実数型	超粘性係数
debugset			デバッグ制御
	DebugOn	論理型	デバッグ出力スイッチ

表 3: 実行プログラム用 NAMELIST 変数

名	変数	型	説明
expset			実験のラベル
	ExpTitle	文字型	実験の名前
	ExpInst	文字型	実行者名
	ExpSrc	文字型	ソースプログラム名
	ExpModel	文字型	モデル名, 'shallow' か 'baro' を選択
	ExpCase	文字型	実験設定名, 'case1' から 'case6' まで
fileset			ファイル制御
	OutputRstFile	文字型	出力リスタートファイル名
gridset			分解能の設定
	nm	整数型	切断波数
	im	整数型	経度方向格子点数 ($> 3\mathtt{nm}+1$)
	jm	整数型	緯度方向格子点数 ($> 3\mathtt{nm}/2$)
paramset			物理定数
	Rplanet	実数型	惑星半径
	Grav	実数型	重力加速度
	Omega	実数型	自転角速度
	HsfcAvr	実数型	平均厚さ
debugset			デバッグ制御
	DebugOn	論理型	デバッグ出力スイッチ

表 4: 初期値作成プログラム用 NAMELIST 変数

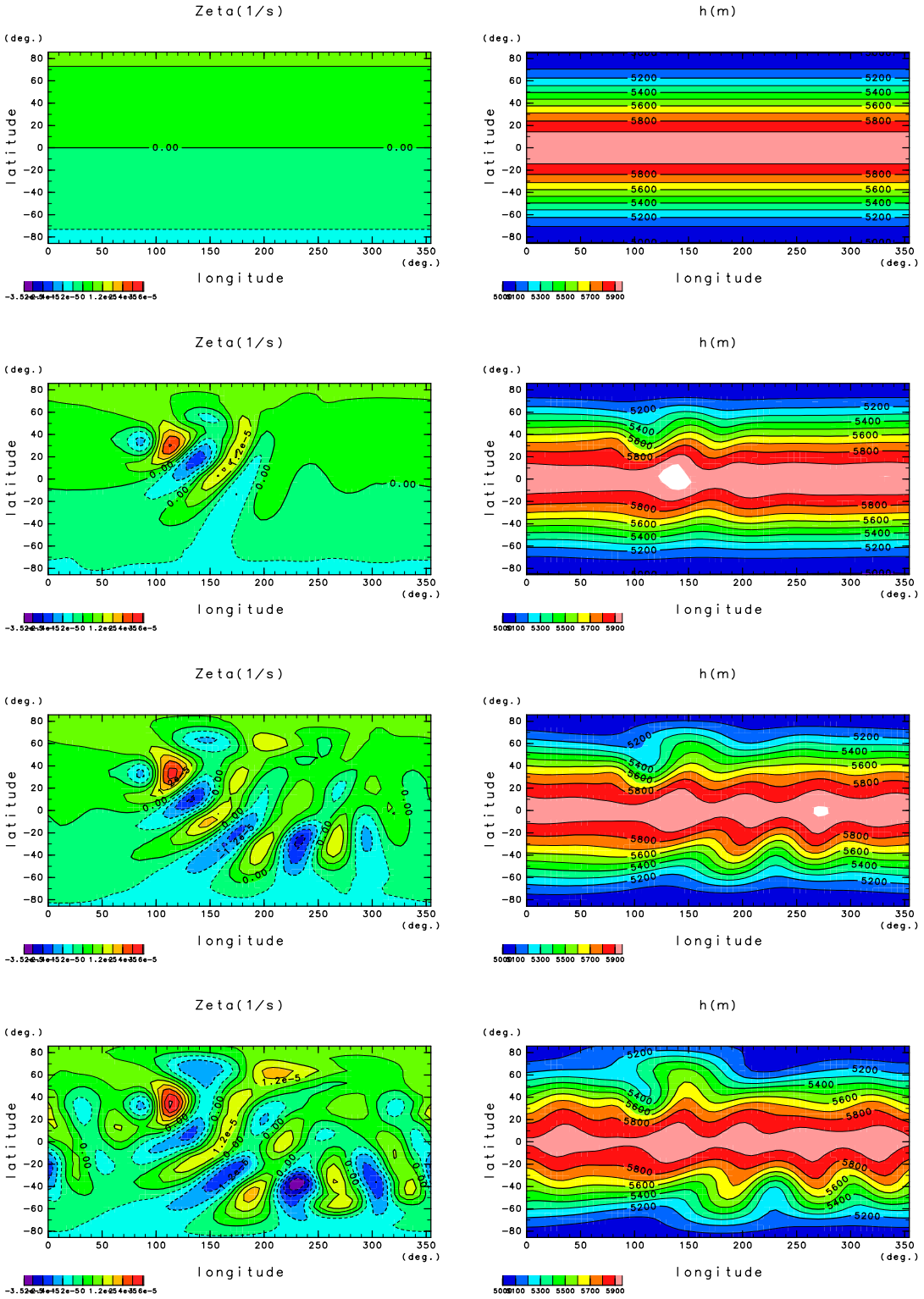

図 1: Williamson *et al.* (1992) のテスト Case 5 の結果. (左) 渦度. (右) 流体の全厚さ. 上から順に初期分布, 5, 10, 15 日後の分布.

6　参考文献

Asselin, R. A., 1972: Frequency filter for time integrations. *Mon. Wea. Rev.*, **100**, 487–490.

石岡圭一, 200X: スペクトル法による数値計算入門, 東京大学出版会

Krishnamurti, T. N., H. S. Bedi, and V. M. Hardiker, 1998: An introduction to global spectral modeling. Ocford Univ. Press, 253 pp.

Satoh, M., 2004: Atmospheric circulation dynamics and circulation models. Springer-Verlag, 643 pp.

竹広真一, 石岡圭一, 豊田英司, 石渡正樹, 林祥介, SPMODEL 開発グループ, 2002: 階層的地球流体力学スペクトルモデル集 (SPMODEL), http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/, 地球流体電脳倶楽部.

Williamson, D. L., J. B. Drake, J. J. Hack, R. Jakob, and P. N. Swarztrauber, 1992: A Standard Test Set for Numerical Approximations to the Shallow Water Equation in Spherical Geometry. *J. Comput. Phys.*, **102**, 211–224.

謝辞

本資源は, 地球流体電脳倶楽部のインターネット上での学術知識の集積と活用の実験の一環として

http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/

において公開されているものである (©地球流体電脳倶楽部スペクトルモデルプロジェクト spmodel@gfd-dennou.org 2002.). 本資源は, 著作者の諸権利に抵触しない (迷惑をかけない) 限りにおいて自由に利用していただいて構わない. なお, 利用する際には今一度自ら内容を確かめることをお願いする (無保証無責任原則).

本資源に含まれる元資源提供者 (図等の版元等を含む) からは, 直接的な形での WEB 上での著作権または使用許諾を得ていない場合があるが, 勝手ながら, 「未来の教育」のための実験という学術目的であることをご理解いただけるものと信じ, 学術標準の引用手順を守ることで諸手続きを略させていただいている. 本資源の利用者には, この点を理解の上, 注意して扱っていただけるようお願いする. 万一, 不都合のある場合には

spmodel@gfd-dennou.org

まで連絡していただければ幸いである.