

氷床の動力学の基礎
Basic processes of ice sheet dynamics

村田泰洋
Murata Yasuhiro

地球流体力学研究室

2000/02/04

目次

1	はじめに	2
2	固体の力学的性質	3
2.1	弾性	3
2.2	塑性	3
2.3	破壊 (脆性破壊と延性破壊)	4
3	粘弾性体の性質 (粘性および弾性)	6
3.1	マックスウェル模型とフォークト模型	7
3.2	レオロジー 4 要素模型	9
4	氷床流動の物理過程	11
4.1	単純ずりによる流動模型	12
4.2	表面と基盤が平行でない流動	14
5	結論と今後の課題	16
6	appendix A	17
6.1	点欠陥と拡散クリープ	17
6.2	転位と転位クリープ	18
7	appendix B	20
8	Appendix C	21
8.1	復氷による機構	21
8.2	塑性変形による機構	22
8.3	底面すべり速度	22

1 はじめに

現在地球上に存在する氷床¹は南極氷床とグリーンランド氷床である。このように固体状態として水が陸上に存在する。これら大陸氷床は地球上の淡水の約 80% を占める。しかし気候変動によって固体として陸上に存在する水が融解することで海水準の上昇を招く。例えば、これらの氷床がすべて融解した場合、単純に融解量を海水準の上昇に換算すると 70m 以上の上昇に相当する。逆に寒冷であった第四紀の氷期には海水準が現在よりも約 130m 低下していた (Flint, 1971) と考えられている。氷床は降雪によってかん養され氷化し大陸規模で流動する。そして末端部で氷床は消耗する。この一連の過程において氷床がどのように流動するかを理解することは重要である。本論文では氷床流動の物理過程において礎的な事柄についてまとめる。

2, 3 章ではまず氷床の流動を考える前に氷を含めた固体が流動的に振舞う性質をもつことを認識するために固体の力学的性質の解説する。固体はしばしば弾性体として記述されるがこれは非常に理想化されたものである。実際には固体は弾性のほかにも塑性, 脆性, 延性とさまざまな性質を持つ。そして固体はこれらの性質を合わせ持つ挙動を示す。特に弾性と塑性の両方の性質を表す代表的な力学的モデルとしてフオークト模型・マクスウェル模型・それを総合した 4 要素模型がある。これらの代表的な模型を使って固体の力学的性質の基本的な点を大づかみに理解する。これを踏まえた上で

4 章では氷床の基本的な流動特性について解説する。氷床流動は重力の作用によって次の 2 つの機構によって成り立っている。

- 氷床の塑性流動
- 底面すべり

この論文では氷床の塑性流動のみを扱う。つまり氷床が粘性のように振舞うときどのように流れるかを考える。ここでは氷床を非ニュートン圧縮流体としてとらえ、モデルは水平方向に一様な流れを持つ、

1. 単純ずりによる流動
2. 表面と基盤が平行でない氷河の流動

という非常に単純な流動のみに焦点を当てた。

5 章では結論と今後の課題をまとめた。

¹氷床とは 10^6km^2 以上の面積を持つ氷河の事を言う

2 固体の力学的性質

この章ではまず 固体とはどういう状態か?をはっきり認識するために固体の力学的性質について説明する.

固体とは物質の 3 態変化の 1 つで, 定まった形を持つものをいう. しかし例えば, 粘土のように伸びたり, 花瓶のように壊れる. このように 定まった形と言ってもいろいろな条件下ではさまざまな変化を起こす. 固体という状態をしっかりと認識するために固体の力学的性質について簡単に述べる.

2.1 弾性

物質に短い時間スケールで小さい応力を与えるとその瞬間ひずみが生じる. そして応力を取り去るとそれに呼応してひずみはなくなり元の形に戻る. このとき, 応力とひずみの関係は一意的な関係が成り立つ. その関係は

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (1)$$

と書ける. ここで σ_{ij} は応力, ε_{kl} はひずみ, c_{ijkl} は弾性定数の成分を表す. 弾性定数は一般には $3^4 = 81$ 個の成分を持つ. 応力, ひずみともに対称テンソルで

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl} \quad (3)$$

なので応力, ひずみともに 6 個の成分となり, それをつなぐ弾性定数は 36 個の独立な成分に減る. さらにこの弾性定数はひずみエネルギーと結晶の対称性の存在のために減少し, 氷のような六報晶系に属する結晶は弾性定数は 5 個になる.

氷が弾性的にふるまうのはゴールド (Gold, 1977) によれば, 応力が 1MPa(10bar) 以下でその作用時間が 100 秒以内の時, あるいは加圧後 2 秒以内に破壊する場合のみである.

2.2 塑性

塑性とは

- 降伏応力以上の応力がかかると連続的に変形する性質である
- 降伏応力と呼ばれるある応力値を越えると永久変形をする

という性質である. 降伏応力以下では弾性ひずみが生じるが応力を取り除くとひずみももとに戻る. 塑性のミクロな変形メカニズムについては Appendix A で解説す

る。降伏応力を越えてからの物体の動きは連続的に変形してひずみ速度は応力の関数で表すことができる。また、このときの関係式は1つの成分で表すと

$$\dot{\epsilon} = A(\sigma' - \sigma_0)^n \quad (4)$$

と書ける。A, n は物質や変形の条件による定数、 $\dot{\epsilon}$ はひずみ速度、 σ' は偏差応力、 σ_0 は降伏応力値である。 $\sigma' < \sigma_0$ のように降伏応力以下での応力状態ではひずみ速度 $\dot{\epsilon} = 0$ とする。とくに $\sigma_0 = 0$, $n = 1$ の場合はいわゆるニュートン流体である。それ以外の場合を一般に非ニュートン流体という。氷を含めた多く物質は塑性変形を起こすとき、非ニュートン流体として扱う非ニュートン流体の粘性率は降伏応力 $\sigma_0 = 0$ とすれば、粘性率 η は

$$\eta(\sigma') = A^{-1}\sigma'^{1-n} \quad (5)$$

となって、応力偏差による値となっていることがわかる。以上より塑性変形のような現象は粘性流体として扱うことができる。液体との大きな違いは降伏応力が存在することと運動する時間スケール(つまり粘性率のオーダー)の違いだけである。

2.3 破壊(脆性破壊と延性破壊)

物質は応力、温度に関係してある条件下で破壊が起こる。物体になんらかの力が加わって破壊現象が起こるとき破壊が起こるまでの過程の違いによって脆性破壊、延性破壊と区別する。脆性破壊は弾性変形が進行し弾性限界を越えると突然破壊が起こる。延性破壊は弾性限界を越えると塑性変形を起こし²、相当変形が進んでから破壊が起こる。氷の場合はひずみ速度の大小により脆性破壊も延性破壊も起こる

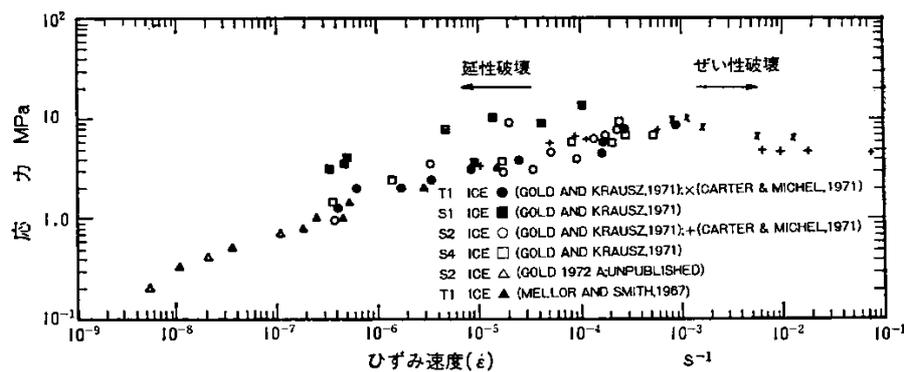


図 1: 多結晶氷の圧縮破壊強度。多結晶氷をいろいろなひずみ速度で一軸圧縮したときの最大応力を表している。前野紀一, 福田正巳 基礎雪氷学講座 I 雪氷の構造と物性 pp118 より

²延性は塑性の一種である

(図 1). 脆性と延性の境は, ひずみ速度が約 10^{-4} s^{-1} の位置にある. 脆性領域では破壊強度に, 延性領域では降伏応力に対応する. 降伏応力と破壊強度はひずみ速度が増加とともに増えるが, 破壊強度は 10MPa にすぎない. 破壊強度はひずみ速度のほかに, 温度や結晶粒径にも影響されるがこれまでの多くの測定の結果は一致していない (Gold, 1977).

3 粘弾性体の性質 (粘性および弾性)

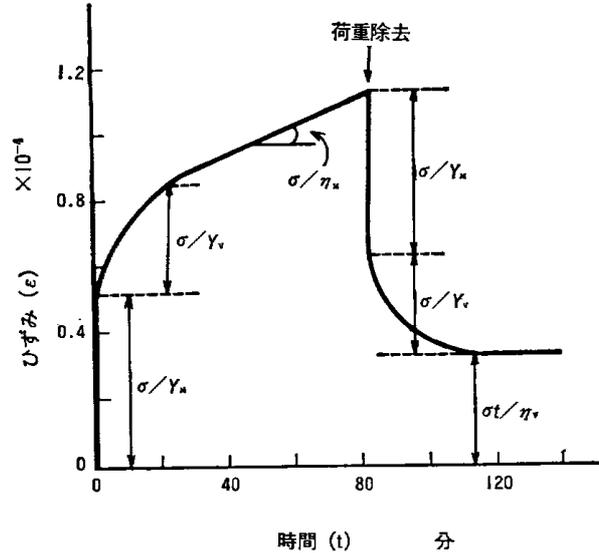


図 2: 多結晶氷のひずみ曲線. 瞬間的にひずみが生じ (弾性), 時間とともにひずみは増加して連続的に変形する (粘性). 応力を取り去った場合もひずみは一気にならなくなるのではなく時間的に遅れて一定となる. 前野紀一, 福田正巳 基礎雪氷学講座 I 雪氷の構造と物性 pp107 より

固体状態にある物体の挙動に対して各々説明した. しかし, 実際の物体の挙動はこれらの性質が複合的に合わさっておこるものである. 例えば, 多結晶氷の棒の上端を金属棒に固定し, 下端に一定荷重を与える引張り実験 (Jellinek, Brill, 1956) を行い, 図?? のようなひずみ曲線を得る. 瞬間的には弾性的な性質を表すが, しばらくするとひずみが一定の割合で増加して粘性的な性質を表す. このように氷は弾性変形を起こすと同時に粘性的な変形も起こす. このような変形特性を示すものを粘弾性体と呼ぶ. まず, 代表的な粘弾性模型であるマクスウェル模型とフォークト模型について説明し, さらにマクスウェル模型とフォークト模型を直列につないだ 4 要素模型を考える.

厳密に言うならば適当な座標軸をとってある面に対する応力とひずみの関係を考えるべきなのだがこれらの性質を理解しやすようにするため簡略化して応力, ひずみ (速度) が 1 成分のみの運動で議論する. 弾性変形は式 1 より

$$\sigma = k\varepsilon \quad (6)$$

と表す. 塑性変形は式 4 を簡単のためにニュートン流体へと線形化する. また, 定数 A の代わりに粘性率 η を用いて,

$$\dot{\varepsilon} = \eta\sigma \quad (7)$$

と表す. 粘性率はこのとき $\eta = A^{-1}$ で表される定数である. これから扱う模型の中で弾性的要素をバネで表現し, 粘性的要素をダッシュポットと呼ばれるピストンとシリンダーを用いたもので表現する (図 3).

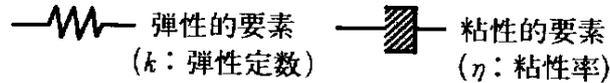


図 3: 弾性的要素と粘性的要素を表した模型. 岩波講座 地球惑星科学 6 地球連続体力学 pp242 より

3.1 マックスウェル模型とフォークト模型

次の 2 つの粘弾性体の模型の力学的挙動を理解するために

1. 時刻 $t = 0$ に単位の大きさの応力 S を突然加えたときのひずみ変化
2. 時刻 $t = 0$ に単位の大きさのひずみ ε_0 を突然加えたときの応力変化

を調べる.

(a) フォークト模型

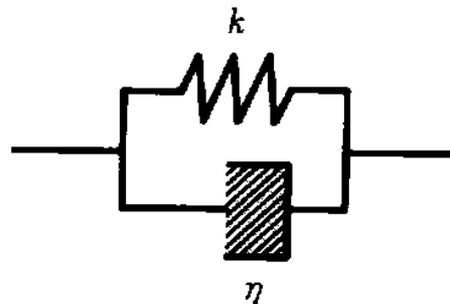


図 4: フォークト模型. 岩波講座 地球惑星科学 6 地球連続体力学 pp242 より

この関係はに弾性変形するばねと粘性流動するダッシュポットを並列に結合した模型で表される. これをフォークト模型 (図 4) という. 塑性変形と弾性変形はそれぞれ独立でなくて, 変形を記述する式は

$$\sigma = k\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (8)$$

と書ける.

1. の場合

$t = 0$ から粘性流動が起こっているのでひずみは $\varepsilon(t = 0) = 0$ となる. そして最終的には $\varepsilon(t = \infty) = \frac{\sigma}{k}$ となるのでひずみ変化は

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{k} \left(1 - \exp\left(-\frac{k}{\eta}t\right) \right) \quad (9)$$

と書ける.

2. の場合

この場合一定ひずみを瞬間的に与えれば, 式から分かる通り $\dot{\varepsilon} = 0$ となるので応力も一定になる. したがって一定の変化を保ち, 応力にも変化がない. つまり究極的には弾性を表す.

以上から応力を受けたとき, 短時間の観測ではひずみが連続的に変化して粘性流動の様な振舞いをする. 長時間の観測ではひずみが一定値に近付き弾性的な振舞いをする. 粘性によってひずみが一定となるのが遅れるその目安の時間を遅延時間といい $\tau_v = \frac{\eta}{k}$ と表す. 対象とする物質がフォークト模型のような挙動をするときこの遅延時間よりも長い時間スケールで考えるとき弾性として扱う. ゴムやコルクのような最終的には弾性体として扱われる物質を考えるとつかう模型である. 氷は一定応力をかけたとき最終的に粘性流動するような物質として扱われるのでこの模型だけでは表すことはできない.

(b) マクスウェル模型

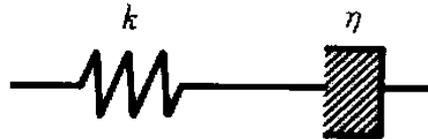


図 5: マクスウェル模型. 岩波講座 地球惑星科学 6 地球連続体力学 pp242 より

弾性変形するばねと粘性流動するダッシュポットを直列に結合した模型で表される. これをマクスウェル模型 (図 5) という. 弾性変形と塑性変形が同時に起こる場合で、弾性変形と線形の粘性流動が独立に起こる場合には次のように

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}}{k} \quad (10)$$

が成り立つ.

1. の場合

時刻 $t = 0$ に単位の大さの応力 S を突然加えたときのひずみ変化は加える応力は $t = 0$ から変わらず一定なので式 10 は

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma}{\eta} \quad (11)$$

で書ける. そして時刻 $t = 0$ におけるひずみは $\varepsilon = S/k$ としてひずみ変化は

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{S}{k} + \frac{t}{\eta} \right) \quad (12)$$

と表せる.

2. の場合.

時刻 $t = 0$ に単位の大きさ ε_0 のひずみを突然加えたときの応力変化はひずみを一定にするので

$$0 = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}}{k} \quad (13)$$

と表せて時刻 $t = 0$ における応力は $\sigma = kS$ なので上式を解くと

$$\sigma = \frac{S}{k} \exp\left(-\frac{k}{\eta}t\right) \quad (14)$$

となる.

これよりマクスウェル模型は短時間では弾性として振舞うが長時間では粘性として振舞う. ひずみを一定に保つような運動の場合の応力変化は粘性の性質によって時間と共に減少していく. このような減少を応力緩和といい緩和時間を $\tau_M = \frac{\eta}{k}$ で表す. 最終的には粘性のような振舞いをするが, この時間を目安に弾性挙動か粘性挙動かを判断する. 長時間で粘性挙動を示すような物質はこの模型を扱う.

3.2 レオロジー 4 要素模型

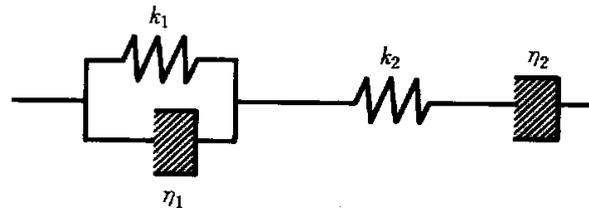


図 6: 4 要素模型 (バーガース模型). 岩波講座 地球惑星科学 6 地球連続体力学 pp242 より

マックスウェル模型とフォークト模型を直列につないだ 4 要素模型 (またはバーガース模型) は物質の一般的な模型である (図 6 地球連続体力学 p242) 氷をこの 4 要素模型に当てはめてみる. そのときの構成方程式は

$$\eta_1 \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + k_1 \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\eta_1}{k_2} \frac{d^2\sigma}{dt^2} + \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} + \frac{k_1}{k_2} + 1 \right) \frac{d\sigma}{dt} + \frac{k_1}{\eta_1} \sigma \quad (15)$$

で与えられる. この関係式は図から容易に導ける. この模型で時刻 $t=0$ 以後一定の応力 S が加えられていると考える. その場合

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad (16)$$

なので

$$\eta_1 \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + k_1 \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{k_1}{\eta_1} \quad (17)$$

と書き換えられる. これを解くと全体のひずみ σ は

$$\varepsilon = \frac{S}{k_2} + \frac{S}{k_1} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_v}\right) \right) + \frac{St}{\eta_2} \quad (18)$$

と書ける. ただし τ_v は

$$\tau_v = \frac{\eta_1}{k_1} \quad (19)$$

である. 式は, 第 1 項が瞬間的に起こる弾性ひずみを, 第 2 項がそれに引続きゆっくりと起こる遅延弾性ひずみを, そして第 3 項が一定の増加率で起こる粘性流動ひずみを表している. これは図 ?? の荷重を除去するまでの運動を表している. 弾性的なひずみが最初に生じてその後, 時間と共に比例してひずみが増える. 結局, 氷床のような流動時間を考えるとほぼ粘性流体としてふるまうとして問題ない.

4 氷床流動の物理過程

氷床力学の方程式系について定式化を行なう.

一般に流体の支配方程式系は

- 運動量保存則 (運動方程式)
- 質量保存則 (連続の式)
- エネルギー保存則 (熱力学方程式)
- 状態方程式

によって構成される. これらの式から未知数である流体の速度ベクトル v , 密度 ρ , 静水圧 p が決定され流体の状態を記述することができる.

今, 氷床を非圧縮非ニュートン流体として扱う. このとき流体の非圧縮性から $\rho = const$ である. 流体が運動している場合でも密度に疎密ができないように静水圧 p は決定されなければならない. だからこのような非圧縮流体を扱う場合, 熱力学の式を扱わなくとも運動量保存則と質量保存則だけで未知数を求め, 流体の状態を記述することができる.

氷床の流動現象は重力の作用により

- 氷床自身に変形すること (多結晶氷の塑性変形)
- 基盤上を氷床の底がすべる (底面すべり)

の2つの機構により成り立っている. しかし氷床の底面が圧力融解点以下, つまり氷床の底が基盤に凍結している場合には, 底面すべりは起こらない. ここでは底面すべりが起こらない寒冷な氷床を考える. 基盤をすべる底面すべりの機構は appendix C で述べる. つまり本論文では氷床が純粋に塑性流動するような運動を考える.

< 連続の式 >

氷床は密度一定と考えるので連続の式は

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (20)$$

と表される.

< 運動方程式 >

氷床の流動速度は一般に非常に小さく, 加速度を有する運動は氷床のなかでも局限された場所と時間でしか起こらない. 一定応力下では一定速度で運動する. だから氷床の運動を考えるときは加速度を含む項を考慮しない. 氷床の各部分で力学的平衡が成り立っているものとする. 力学的平衡は外力が重力のみなので

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho g_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (21)$$

となる. σ_{ij} は応力テンソル, ρg_i は重力である.

< 構成方程式 >

ひずみ速度は

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (22)$$

と定義する. また, 応力のうち静水圧は流動や変形に関与しないので応力から静水圧を取り除いた応力が直接ひずみ (速度) に関係する. これを偏差応力 σ'_{ij} といい氷床は非圧縮性の等方物質であると仮定すると σ'_{ij} は次式で与えられる.

$$\sigma'_{ij} = p\delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad (23)$$

$$p = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \quad (24)$$

氷床の流動則 (応力とひずみ速度の関係式) は

$$\dot{\epsilon}_{ij} = A\tau^{n-1}\sigma'_{ij} \quad (25)$$

で表される. ここで τ は座標によらない不変量であり

$$\tau^2 = \frac{1}{2} \left(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + 2(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) \right) \quad (26)$$

と表せる. A は温度や氷結晶の主軸分布, 粒径など氷床の状態に依存する関数である.

このように応力とひずみ速度の関係において氷床の場合, 温度に依存するので本来は温度を決定しなければならない. そのためには熱力学方程式を取り入れて定式化する必要がある. しかし, これから扱う流動模型の簡略化のために温度一定と仮定する.

以上のように氷床流動の方程式系を定式化した. 次にこれを使って氷床の簡単な模型を作ってその代表的な運動を検証する. まず氷床が単純ずりによって流動すると仮定するような模型を考える. 次に単純ずりによる流動で考えている氷床の表面と基盤が平行でない場合の氷床模型を考える.

4.1 単純ずりによる流動模型

氷床を厚さ h , 長さとは幅は無限の大きさを持つ平板と仮定して, 傾斜 α の斜面上にあるという模型を考える. この氷床は単純ずり (図 7) による流動をすると仮定する. 単純ずりとは 1 つの面に平行に変位する変形のことをいい, この場合底面に沿って平行な流線がひける.

x 軸を氷床底面に水平かつ下流方向に, z 軸を底面に直角上方にとる. このような場合, 運動方程式 (式 21) の x 成分は

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = -\rho g \sin \alpha \quad (27)$$

となる。

z について積分すると氷床表面では応力は存在しないので

$$\sigma_{xz} = -\rho g(h - z) \sin \alpha \tag{28}$$

を得る。このせん断応力とせん断ひずみ速度 $\dot{\epsilon} = \frac{\partial u}{\partial z}$ が氷の流動則にしたがうとすると

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2A\{\rho g(h - z) \sin \alpha\}^n \tag{29}$$

になる。これを z に関して積分すると

$$u = u_s - K(\sin \alpha)^n (h - z)^{n+1} \tag{30}$$

を得る (ただし, $K = 2A(\rho g)^n / (n + 1)$, u_s は表面流速)。これは氷床内部の速度分布を与える。だから氷厚 h が観測され定数 A, n に適当な値を与えることができれば、観測するのが困難な底面速度 u_b が求められる。ただし、常識的にいって $u_b \geq 0$ でなければならない。ここで $u_b = 0$ とすると

$$u_s = K(\sin \alpha)^n h^{n+1} \tag{31}$$

となる。例えば実際の氷床では氷床の中央部では傾斜 α がほとんど 0 なので表面流速は小さいし、氷床末端部では傾斜が大きくなるので表面流速は大きい。同じ傾斜でも氷厚 h が大きい地形 (例えば、南極氷床では一般に東南極の方が西南極より

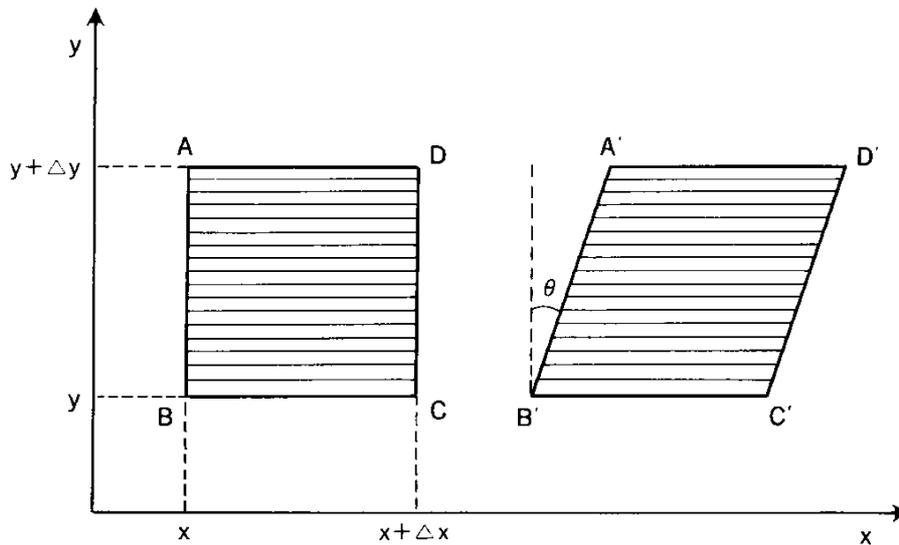


図 7: 単純ずりの模型. 束ねたカードがずれるように物体内の全ての要素が1つの面に平行に変位する. 微小な正方形 ABCD を考え, Δt 時間後に平行四辺形 A'B'C'D' のような変形をする. 基礎雪氷学講座 IV 氷河 pp36

も氷厚が大きい)の方が流動速度は大きい. 単位時間, 単位幅あたりに通過する氷の流量 ψ は底面から表面の流速を積分して

$$\psi = \rho u_s h - \frac{\rho K (\sin \alpha)^n}{n+2} h^{n+2} \quad (32)$$

により得られる. さらに深さについての平均速度 \bar{u} は,

$$\bar{u} = \psi / (\rho h) \quad (33)$$

で求められる.

4.2 表面と基盤が平行でない流動

次に表面と基盤が平行でない場合を考える.

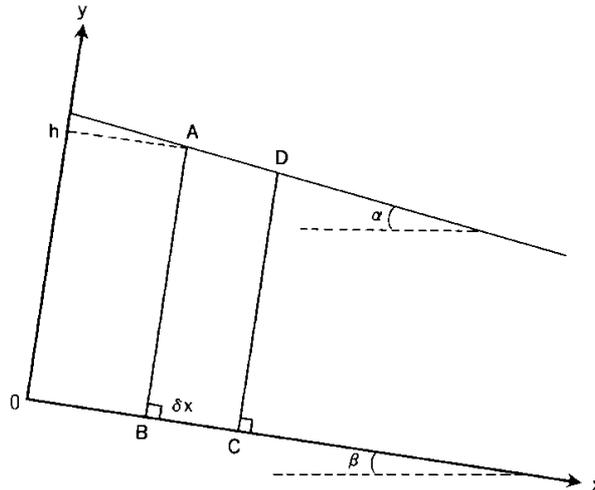


図 8: 氷床のくさび状モデル. 表面と底面が平行で傾斜は小さいモデルを考える. 基礎雪氷学講座 IV 氷河 pp44

図 8 のような氷床の表面傾斜を α , 基盤傾斜を β とし, x 軸を基盤に平行かつ下流方向に, z 軸をその直角上方にとる. 氷床の横断方向 (y 軸) は一様かつ無限の幅を持つと仮定する. α, β とともに小さいと仮定して, $\sin \alpha = \alpha, \sin \beta = \beta$ とおく.

図 8 のように底面に垂直な台形 ABCD をとり, z 方向に単位幅をもつ氷の要素の力の釣合を考える. B, C 間の距離を δx , および A, B 間の距離を h とおく.

ここで AB 面上の各点に働く静水圧は α が小さいので近似的に $\rho g(h-y)$ で与えられる. 単位幅を持つ AB 面に作用する全垂直応力は $\rho g h^2 / 2$ となり, 同様に CD 面に作用する全垂直応力との応力差 $\Delta \sigma$ は,

$$\Delta \sigma = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \rho g h^2 \right) \delta x = -\rho g h \frac{dh}{dx} \delta x \quad (34)$$

で表される。氷の要素 ABCD には x の正方向に力が働いている。この力が、要素 ABCD に作用する重力の x 方向の成分 $\rho gh\beta\delta x$ 、および氷床の基盤からその上方の氷の運動を妨げるように作用する抵抗 (せん断応力 τ_b) による力 ($\tau_b\delta x$) と釣合っている。よって

$$-\rho gh \frac{dh}{dx} \delta x + \rho gh \beta \delta x = \tau_b \delta x \quad (35)$$

が成り立つ。ここで $dh/dx = \beta - \alpha$ なので式 35 は

$$\tau_b = \rho gh \alpha \quad (36)$$

となる。この結果は、底面におけるずれ応力は底面傾斜とは無関係であり、表面傾斜のみで決定されるという重要なことを示している。したがってこの近似モデルのもとでは、氷床流動の方向と速さは表面傾斜によって支配されている。

5 結論と今後の課題

本論文では塑性, 弾性などの複合的な性質を持つ氷が長い時間スケールにおいては粘性として扱うことができるとした. さらに氷床を構成する氷を非圧縮非ニュートン流体としてとらえ, 氷床を定式化した. ここで定式化した方程式系を単純な模型をもとに流動特性を調べた. 扱ったモデルは

- 変形が単純ずりのみによって起こる斜面を流れる氷床
- 基盤と表面が平行でない氷床

である. 本論文は氷床が流動する過程において非常に基本的な流動を扱った. 上記で述べた模型は氷床の中央部のなだらかな部分みで当てはまる現象であり, 底面すべりの影響は考えないものとする. これらのモデルからわかったことは氷床の流動方向と速さは (1) 傾斜と厚さによって決まる. (2) 底面傾斜とは無関係で表面傾斜のみに依存している, の 2 点である.

本論文では流動過程の基礎をとらえるために扱わなかったが, 次のことを今後の課題として扱っていく.

- 氷の流動則で無視した温度依存についてエネルギー方程式をとりいれて氷床流動を定式化する.
- 単純ずりによる流動しか扱わなかったが実際には消耗域では上昇流, かん養域では下降流が存在する. それぞれの境界付近の運動を考慮に入れる.
- 底面すべりが起こらない氷床を考えたが, 底面すべりの効果をとりいれたモデルを扱う.

6 appendix A

格子欠陥

氷結晶のようなある一定の形を持つ状態(つまり固体)はそれぞれの分子間力が作用して規則正しく原子および分子が配列されていると考えられる。しかし現実の結晶は完全に規則正しく配列されてはおらず、格子欠陥を含んでいる。格子欠陥の存在によって固体でも塑性のような流動性を持つことができる。

6.1 点欠陥と拡散クリープ

点欠陥には大まかに次の2通りの格子欠陥がある

- 空孔と格子間分子
- 配向欠陥とイオン欠陥

配向欠陥とイオン欠陥は氷結晶独特な点欠陥であるが巨視的に流動という観点から特に関係ないのでここでは省略する。

空孔と格子間分子

水分子の存在すべき格子点に分子が存在しない空孔と正規の格子点でないところに分子が入り込んでいる格子間分子。このような点欠陥が存在し、偏差応力がかかると分子が点欠陥に連続的に移動していくことで変形・流動を説明できる。このときのある温度 T での点欠陥平衡濃度(単位体積の結晶に含まれる欠陥の濃度) c は統計力学の原理に基づいて

$$c \approx \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \quad (37)$$

で与えられる。 E は空孔または格子間分子の形成エネルギーで k はボルツマン定数である。氷結晶の空孔の形成エネルギーは約 $0.5 \text{ eV}(=48.2 \text{ kJ/mol})$ と考えられているので空孔の濃度は氷が -10C° で $c \approx 3 \times 10^{-10} \text{ 個}/m^3$ となる。格子間分子の形成エネルギーは $0.6 - 0.65 \text{ eV}(58 - 63 \text{ kJ/mol})$ であるから格子間分子濃度は空孔濃度の $1/100$ から $1/1000$ にすぎない。このような空孔、格子間分子が氷結晶中を拡散する事によって変形が起こるという見方ができる。氷結晶の拡散は空孔の方が格子間分子に比べ圧倒的に多いという観点から空孔の方が重要という見方があるが現在のところどちらがより重要か分かっていない。

このような点欠陥をもつ固体に偏差応力を加えると点欠陥の分布に不均質性が生じる。この不均質性のため、点欠陥が拡散して結晶の変形をもたらす。

拡散クリープという

拡散クリープは応力とひずみ速度の関係は線形であり、ニュートン流体と同じである。なので塑性変形は拡散クリープだけでは説明がつかない。

6.2 転位と転位クリープ

点欠陥は格子欠陥の理論を説明する最も簡単な格子欠陥であった。塑性変形をミクロな視点で見える場合、転位（線による格子欠陥）の運動で説明することができる。

結晶にせん断応力がかかるとある結晶面で原子および分子どうしの配列を壊して新たな原子配列を形成する。しかし、それは結晶面でのすべての原子（分子）面が移動するわけではなく結晶の乱れとして、線状にひずみが現れる。これを転位と言う（図9）。転位は原子および分子をずらした方向と転位の方向の違いによって2種

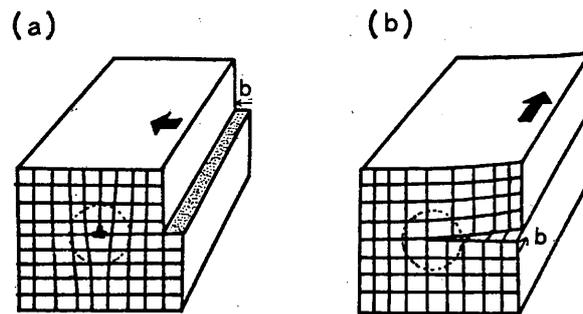


図9: 転位の生成. 結晶に切れ目をいれて矢印方向にせん断応力を加えると転位欠陥が生成される. a) 刃状転位, b) らせん転位前野紀一, 福田正巳 基礎雪氷学講座 I 雪氷の構造と物性 pp88

類ある。結晶面上の原子および分子をずらした方向と大きさを示すバーガーズ・ベクトル b と転位の方向が垂直の転位を刃状転位。平行の転位をらせん転位という。この2つの転位の運動による結晶の変形を転位クリープといい、塑性変形が説明できる。図10は刃状転位が1原子間距離を移動するときの模式図である。まず、外から力が加わるとフランク・リード源³と呼ばれる部分から転位が発生する。せん断

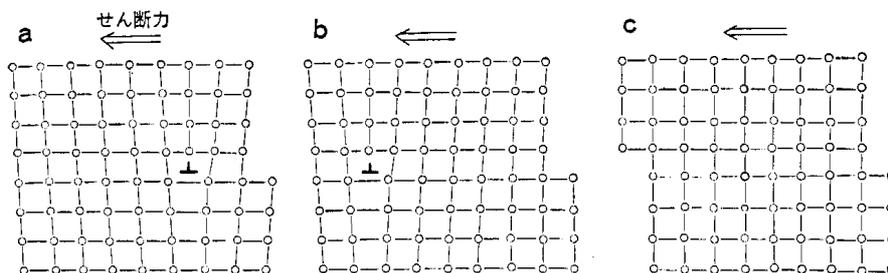


図10: 刃状転位の移動による変形. 結晶に矢印のようなせん断応力が加わると (a) 刃状転位 (\perp) が1分子間距離ずつ移動し (b) 結果的には結晶全体が1分子間距離だけ変形する (c) 前野紀一, 福田正巳 基礎雪氷学講座 I 雪氷の構造と物性 pp89

³既存の転位が次の転位の増殖をうながす源になる, その転位源.

応力によって転位が移動し, 最終的には結晶が1原子間距離だけ移動するのである. これが集まって巨視的な変形をもたらす. 通常の氷に含まれる転位の数密度は $10^8 \sim 10^9 m^{-2}$ である. すなわち $1 cm^2$ あたりの転位の数は $10^4 \sim 10^5$ 本程度存在する.

転位クリープの速さは転位の密度 ρ と, 転位の運動速度 v および転位の動きによって生じるひずみに比例し

$$\dot{\epsilon} = \rho b v \quad (38)$$

が成り立つ(オロワンの式). もっとも簡単な転位クリープのモデルを考える. 定常状態では転位密度は偏差応力 σ の関数で

$$\rho = \alpha b^{-2} \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^2 \quad (39)$$

と与えられる. α は1の程度の定数, μ は剛性率である. また, 転位の運動速度は偏差応力に比例し,

$$v = M_d \left(\frac{\sigma}{\mu} \right) \quad (40)$$

で表される. M_d は転位の易動度を表す. したがってオロワンの式から応力とひずみ速度の関係

$$\dot{\epsilon} = \alpha b^{-1} \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^3 M_d \quad (41)$$

を得る. この式を一般化したものは

$$\dot{\epsilon} = C \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^n M_d \quad (42)$$

でありこれに従う変形メカニズムをベキ乗則クリープという. 氷結晶はこれにあたる.

7 appendix B

氷の流動則の導出

ひずみ速度と応力の関係は線形粘性体の場合, 非圧縮であれば

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta\dot{\epsilon}_{ij} \quad (43)$$

と表せる. 偏差応力 $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}$ を用いて表すと

$$\sigma'_{ij} = 2\eta\dot{\epsilon}_{ij} \quad (44)$$

である. このことから偏差応力とひずみ速度は粘性率 η でつなく比例関係をもつ. 非線形の粘性体 (非ニュートン流体) も同様に粘性率 η という比例定数をもつ関数として, η 自身が応力の関数として与えられると仮定する. 式 (44) を変形して

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda\sigma'_{ij} \quad (45)$$

として λ は $\lambda = \eta^{-1}$ と変換する.

氷の流動則は座標をどうとろうと一定の関係式によって表されなければならない. ここで有効せん断応力 τ と有効せん断ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ を導入する. τ と $\dot{\epsilon}$ は座標のとり方によらない不変量では次式で表される.

$$\dot{\epsilon}^2 = \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\epsilon}_{yy}^2 + \dot{\epsilon}_{zz}^2 + 2(\dot{\epsilon}_{xy}^2 + \dot{\epsilon}_{yz}^2 + \dot{\epsilon}_{zx}^2)) \quad (46)$$

$$\sigma'^2 = \frac{1}{2} (\sigma'_{xx}^2 + \sigma'_{yy}^2 + \sigma'_{zz}^2 + 2(\sigma'_{xy}^2 + \sigma'_{yz}^2 + \sigma'_{zx}^2)) \quad (47)$$

これらの関係は式 (45) と同じように書け,

$$\dot{\epsilon} = \lambda\tau^n \quad (48)$$

と表す. また結晶氷の変形実験 (Glen 1955) から得られた氷の流動則に関するべき乗則 (Nye, 1957) を基にして展開される. 応力とひずみ速度の関係は

$$\dot{\epsilon} = B\tau^n \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \quad (49)$$

で表される. B, n は実験で与えられる定数である. B は氷結晶の主軸方位分布, 粒径, などの氷の構造, 不純物などにより変化する値である. n の値は応力の増加につれて約 1.5 - 4 に幅広く変化する. 一般的にその平均となる $n \simeq 3$ として扱われることが多い. 式 (48) と式 (49) から, 係数 λ は

$$\lambda = B \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \tau^{n-1} \quad (50)$$

と書ける. これを式 (45) に代入してやれば式 (25) が求まる.

8 Appendix C

氷床の底面すべり 底面すべりは Weertman(1957) による復氷と塑性変形を組み合わせた基礎的な理論をのべる. 底面の起伏はは図のように三辺の長さが L の立体(コブ)がなめらかな平板上に L' の間隔で並んでいるものとする. ここで $L'/L = \xi$ とおく. 底面は圧力融解点に達し, 岩と氷の境界面は $1 \mu\text{m}$ 程度の薄い水膜が存在する, と仮定する. 底面すべりの機構は, 底部の氷がどのようにしてこれらのコブを乗り越えるかという問題なのである.

8.1 復氷による機構

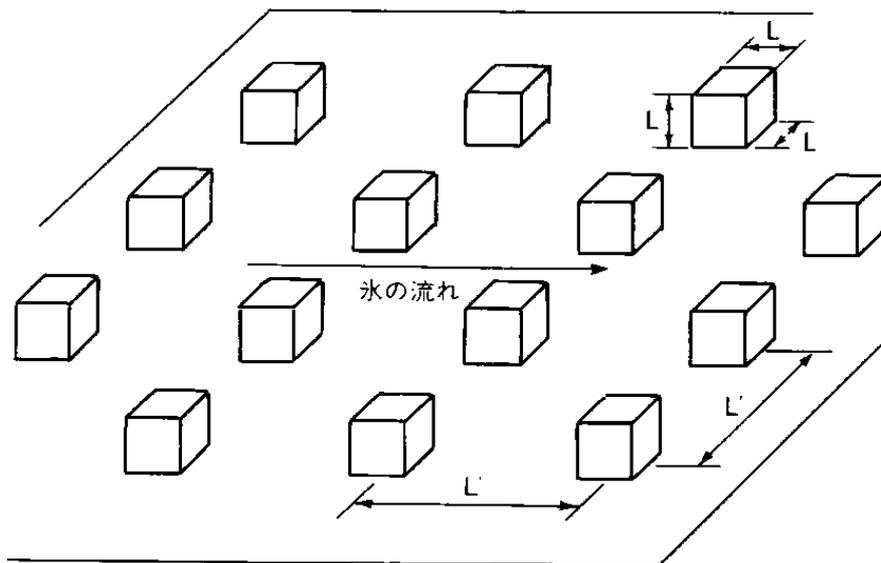


図 11: 氷床底面の起伏(コブ)のモデル. 立方体のコブ以外の氷床底面は, なめらかな薄い水膜が存在してすべりやすくなっている. 基礎雪氷学講座 IV 氷河 P54

基盤におよぼす平均のずれ応力を τ_b とおく. 底面の面積 $(L')^2$ にかかるずれ応力による力は $\tau_b(L')^2$ である. この力はコブの上流側の面 (L^2) に作用する圧縮応力と下流側の面に作用する引っ張り応力との差と釣りあっていなければならない. したがって両面の垂直応力の差は $\tau_b(L')^2/L^2$ に等しく ξ を使って書けば $\tau_b\xi^2$ となる.

コブの上流面における氷と水の平衡温度は融点降下のためコブがない場合の圧力下の平衡温度よりも低く, 逆にコブの下流面では, 融点上昇のために平衡温度は高い. その温度差 ΔT は, クラペイロン - クラウジウスの式をもとに

$$\Delta T = C\tau_b\xi^2 \quad (51)$$

と表すことができる. ただし C は定数である.

コブの上流面で融けた氷は、薄い水膜のなかを流れて下流面に達し、そこで再凍結する。この復氷現象岩盤上を動く氷床の速度を u_1 とおくと単位時間に一つのコブの上流側で融ける氷の体積は動いた分だけ存在するので $u_1 L^2$ となる。この水がコブの下流面で凍結するので、単位時間に放出される凍結線潜熱は $u_1 \rho_w \lambda L^2$ である。ただし ρ_w は水の密度、 λ は水の凍結潜熱である。この熱が岩盤を通して上流面へ流れ、そこで氷の融解に消費される。氷は岩に比べ熱伝導率が小さいので、熱の流れはコブのなかのみと、ひとつのコブを単位時間に流れる熱量として

$$kL^2 \frac{\Delta T}{L} = u_1 \rho_w \lambda L^2 \quad (52)$$

の関係を得る。ただし、 k は岩石の熱伝導率。すなわち u_1 は

$$u_1 = \frac{Ck\xi^2\tau_b}{\rho_w\lambda L} \quad (53)$$

で表せる。これよりこの機構は小さいコブに関して有効である。コブが大きいとコブの上流面と下流面の温度勾配が小さくなり、熱流量がちいさくなり復氷が起こりにくくなる。

8.2 塑性変形による機構

塑性変形による底面すべりはコブの周囲に応力が集中し、その結果氷に塑性変形が生じコブを乗り越えるという機構である。コブの上流面では静水圧に加えて $\xi^2\tau_b/2$ の圧縮応力、下流面では同じような絶対値の引っ張り応力が働いている。一般に $L' \gg L$ とみなすと、 $\xi^2\tau_b \gg \tau_b$ なのでコブのまわりのひずみ速度は式(25)にしたがい、

$$\dot{\epsilon} = A \left(\frac{\tau_b \xi^2}{2} \right)^n \quad (54)$$

で表す。いま、このひずみが、コブの周囲のコブの体積 L^3 に等しい氷に生じていると仮定すると、塑性変形による底面すべり速度 u_2 として、

$$u_2 = A' \tau_b^n \xi^2 L \quad (55)$$

の関係を得る。ただし、 A' 、 n および ξ は定数とみなす。したがって、 u_2 は L に比例し、この機構は大きいコブにかんして有効である。また、同じ大きさのコブでも、 τ_b の大きい所では u_2 が非常に大きくなるどころが分かる。

8.3 底面すべり速度

2つの機構による底面すべり速度 u_1 、 u_2 の式に、氷や岩に関する物理定数を適当に与え、 $\tau_b = 100\text{kPa}$ のときの L と u_1 、 u_2 の関係を計算により求めた結果を図11に示す。ただし、ここでは $\xi = 4$ 、 $n = 4.2$ と仮定されている。実際の氷床の底面すべり

は、両機構の合成効果で起こり、すべり速度を支配する障害物の大きさは図 11 の 2本の直線の交点で与えられる。コブの大きさを L_c とすると、 $L < L_c$ のコブは復氷機構で、 $L > L_c$ のコブは塑性変形機構で乗り越える。この計算の場合、 L_c は約 1cm である。ゆえに、氷床の巨視的な底面すべり速度 u_b は $L = L_c$ の時の両機構の速度 u_{1c}, u_{2c} の和で与えられる。すなわち、

$$u_b = u_{1c} + u_{2c} = 2u_{1c} \quad (56)$$

となり、式 53 と式 55 から

$$u_b = C' \xi^{n+1} \tau_b^{(n+1)/2} \quad (57)$$

を得る。ただし C' は定数。もし、 $n = 3$ とおくと、式

$$u_b = C'' \left(\frac{L'}{L} \right)^4 (\sin \alpha)^2 h^2 \quad (58)$$

が導かれる。ただし、 C'' は定数。これから分かることはコブの大きさ L が間隔 L' に比べて小さくなると、 u_b は著しく大きくなる。

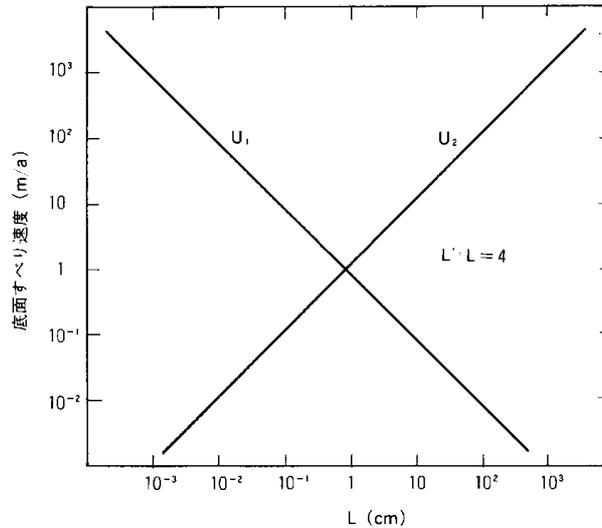


図 12: 氷床底面の起伏(コブ)の大きさ L に対する、復氷によるすべり速度 u_1 、および塑性変形によるすべり速度 u_2 の関係 基礎雪氷学講座 IV 氷河 P57

文献

- Glen,J,W. 1955, The creep of polycrystalline ice, Proceedings of the Royal Society of London, SerA, 228,519 - 538
- Gold,L,W ,1977, Engineering properties of fresh-water ice. J. Glaciology, 19(81), 197-223
- J.C.Jaeger, 1968, Elasticity, fracture and flw, Chapman and Hall
- Jellinek,H,H,G , Brill,R ,1956, Viscoelastic properties of ice. J. Appl. Phys, 27, 1198 - 1209
- 藤井理行, 上田 豊, 成瀬廉二, 小野有五, 伏見, 白岩孝行, 基礎雪氷学講座 IV 氷河 33 - 81
- 松井孝典, 松浦充宏, 林, 祥介, 寺沢敏夫, 唐戸俊一郎, 谷本俊郎 , 地球連続体力学 1 - 38 239 - 291
- 前野紀一, 福田正巳, 基礎雪氷学講座 I 雪氷の構造と物性 81 -130
- Nye,J.F. 1957, The distribution of stress and velocity in glaciers and ice sheet. Proceedings of the Royal Society of London, Ser.A,239, 113 -133
- Weertman,J, 1957, On the sliding of glaciers, Journal of Glaciology, 3 33 - 38

謝辞

本論文を完成するに当たってたくさんの方々に御協力と頂いた。この場を借りて感謝の意を述べる。

指導教官の林祥介教授には論文作成の指導と流体力学とはどういった学問であるかを教わり、今後の糧にしていきたい。

倉本 圭助手にも論文の構成と物性について教わりそれ意外にもさまざまな助言をいただいた。他の学生の卒論・修論のチェックで忙しい中、大変お世話になりました。

そのほか、林・渡部研究室の院生の方々にも分野が違って分からない内容にも辛抱強くつき合って頂きまとめて恐縮だが大変感謝しています。