

# 海洋循環モデルの基礎

**Numerical Basis for Ocean Circulation Model**

西川史朗

Shiro Nishikawa

北海道大学理学部地球科学科 (地球物理学)

地球流体力学研究室

**2001年1月31日**

## 概要

Bryan(1969)をもとに、海洋循環モデルの基礎を解説する。具体的には、基本方程式系と境界条件、基本方程式の大まかな解法、それに基づいた方程式系の差分化を説明する。また、付録として Bryan(1969)を全訳したものを付した。

# 目次

1	はじめに . . . . .	3
2	基本方程式 . . . . .	4
2.1	水平方向の運動方程式 . . . . .	4
2.2	静水圧の関係 (鉛直方向の運動方程式) . . . . .	4
2.3	連続方程式 . . . . .	5
2.4	温度と塩分の保存式 . . . . .	5
2.5	状態方程式 . . . . .	5
2.6	まとめ . . . . .	5
3	境界条件 . . . . .	6
3.1	側面境界 . . . . .	6
3.2	海面 ( $z = 0$ ) . . . . .	6
3.3	海底 ( $z = -H$ ) . . . . .	6
4	基本方程式系の解法 . . . . .	7
4.1	流線関数の導入 - $\bar{u}, \bar{v}$ を求める . . . . .	7
4.2	水平速度の決定 - $\hat{u}, \hat{v}$ を求める . . . . .	8
5	差分方程式 . . . . .	9
5.1	差分化の概要 . . . . .	9
5.2	運動方程式の差分化 . . . . .	9
5.3	輸送流線関数の式の差分化 . . . . .	11
5.4	温度, 塩分の式の差分化 . . . . .	12
5.5	まとめ . . . . .	14
A	全訳 . . . . .	15
1	序論 . . . . .	15
2	モデルの方程式 . . . . .	17
2.1	方程式の一般形 . . . . .	17
2.2	圧力の消去 . . . . .	19
3	輸送流線関数の境界条件 . . . . .	21
4	有限差分の一般的方法 . . . . .	24
5	変数の配置 . . . . .	26
6	有限差分方程式 . . . . .	28

---

7	有限差分方程式の境界条件 . . . . .	35
8	島の有限差分公式 . . . . .	36
9	本手法を用いた計算の実行 . . . . .	38
	付録 . . . . .	41

# 1 はじめに

本論文は Bryan(1969) に沿って海洋循環モデルの基礎である基本方程式系, 計算方法, 差分の方法などを解説することを目的とする. また, 付録として Bryan(1969) を全訳したものを付した.

Bryan(1969) は海洋循環数値モデルにおける計算手順を詳細に述べた論文である. Bryan(1969) の要点はだいたい以下のようなになる.

- 不規則な海岸線と海底地形を持つ海盆を扱える.
- 非線形項の扱いは Fromm(1963), Arakawa(1966) と同じ手法を使った中心差分に基づく.
- 海面の鉛直変位は認めない (rigid-lid 近似). これにより海面の慣性重力波が取り除かれる. これを取り除くことにより積分の時間間隔を長くして, 計算時間を短くすることができる.
- エネルギー整合的である.

本文ではこれらの説明までには至っていない. 本文でまとめたのは以下の基礎的な事柄である.

- 基本方程式系, 境界条件の簡単な説明.
- 基本方程式の大まかな解法.
- それに基づいた方程式の差分化.

## 2 基本方程式

### 2.1 水平方向の運動方程式

基本はナビエ-ストークスの方程式である. 水平方向においては密度変化を無視し密度を定数  $\rho_0$  とする. 流体の密度変化の効果は鉛直方向の浮力項のみで考える (ブジネスク近似).

$a$  を地球半径,  $\lambda, \varphi$  をそれぞれ経度, 緯度,  $u, v, w$  をそれぞれ経度, 緯度, 鉛直方向の流速とすると, まず水平方向の運動方程式は次のように書ける.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u - 2\Omega v \sin \varphi - \frac{uv \tan \varphi}{a} = -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{p}{\rho_0} \right) + F^\lambda \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}v + 2\Omega u \sin \varphi + \frac{vu \tan \varphi}{a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{p}{\rho_0} \right) + F^\varphi \quad (2)$$

ここで,  $\mathcal{L}$  は移流演算子であり次のように定義する.

$$\mathcal{L}\bullet = \frac{1}{a \cos \varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (u\bullet) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (v\bullet \cos \varphi) \right] + \frac{\partial}{\partial z} (w\bullet) \quad (3)$$

また,  $F^\lambda, F^\varphi$  はそれぞれ経度, 緯度方向の渦粘性を表す.

$$F^\lambda = A_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{A_M}{a^2} \left\{ \Delta u + (1 - \tan^2 \varphi)u - \frac{2 \tan \varphi}{\cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right\} \quad (4)$$

$$F^\varphi = A_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{A_M}{a^2} \left\{ \Delta u + (1 - \tan^2 \varphi)v + \frac{2 \tan \varphi}{\cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right\} \quad (5)$$

ただし,

$$\Delta\bullet = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 \bullet}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial \bullet}{\partial \varphi} \right) \quad (6)$$

### 2.2 静水圧の関係 (鉛直方向の運動方程式)

運動方程式の鉛直成分は, 局所加速度項とそれと同じオーダーの項を無視し, 静水圧近似する.

$$\rho g = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (7)$$

## 2.3 連続方程式

連続方程式は次のようになる.

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[ \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \right] = 0 \quad (8)$$

## 2.4 温度と塩分の保存式

温度と塩分の保存の式は次のようになる.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathcal{L}T = Q \quad (9)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{L}S = \sigma \quad (10)$$

$Q$  と  $\sigma$  は渦拡散を表す.

$$Q = \frac{A_v}{\delta} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{A_H}{a^2} \Delta T \quad (11)$$

$$\sigma = \frac{A_v}{\delta} \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + \frac{A_H}{a^2} \Delta S \quad (12)$$

## 2.5 状態方程式

次の形が基本である.

$$\rho = F(T, S, p) \quad (13)$$

(13)における圧力の効果は,  $p$  を  $-\rho_0 g h$  で置き換えることにより見積もる. 状態方程式の具体的な形は省略する.

## 2.6 まとめ

モデルの基本方程式は (1)(2)(7)(8)(9)(10)(13) の 7 つである.

### 3 境界条件

#### 3.1 側面境界

水平速度が 0 である.

$$u = 0, \quad v = 0 \quad (14)$$

法線方向の温度勾配, 塩分勾配が 0 である.

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial n} = 0 \quad (15)$$

#### 3.2 海面 ( $z = 0$ )

鉛直方向の速度が 0 (剛体板 (rigid-lid) 近似).

$$w = 0 \quad (16)$$

風応力の効果

$$\rho_0 A_v \frac{\partial u}{\partial z} = \tau^\lambda, \quad \rho_0 A_v \frac{\partial v}{\partial z} = \tau^\varphi \quad (17)$$

この他に海面における熱フラックスと塩分フラックス, あるいは温度場と塩分場どちらかを与える. それらの具体的な表記は省略する.

#### 3.3 海底 ( $z = -H$ )

鉛直方向に熱フラックス, 塩分フラックスがない.

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial z} = 0 \quad (18)$$

鉛直方向の流速 (海底に起伏があることによる).

$$w = -u \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial H}{\partial \lambda} - v \frac{1}{a} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \quad (19)$$

海底における応力

$$\rho_0 A_v \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_B^\lambda, \quad \rho_0 A_v \frac{\partial v}{\partial z} = \tau_B^\varphi \quad (20)$$

## 4 基本方程式系の解法

基本方程式系の解法のポイントは、水平速度の予報である。この節では、2節で与えた基本方程式系から水平速度  $u, v$  を求める手順を述べる。

まず、 $u, v$  を鉛直平均値  $\bar{u}, \bar{v}$  と鉛直平均からのずれ  $\hat{u}, \hat{v}$  に分ける。

$$(u, v) = (\bar{u}, \bar{v}) + (\hat{u}, \hat{v}) \quad (21)$$

鉛直平均は次のように定義される。

$$\bar{u} = \frac{1}{H} \int_{-H}^0 u dz, \quad \bar{v} = \frac{1}{H} \int_{-H}^0 v dz,$$

一般に、バー

$$(\bar{\quad}) = \frac{1}{H} \int_{-H}^0 (\quad) dz \quad (22)$$

は、水柱全体の鉛直平均を表し、(^) は、鉛直平均からの偏差を表すとする。

### 4.1 流線関数の導入 - $\bar{u}, \bar{v}$ を求める

連続方程式 (8) を  $z = -H$  から  $z = 0$  まで積分し、それぞれの  $w$  の境界条件 (16), (19) を用いると、

$$0 = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \int_{-H}^0 u dz \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \int_{-H}^0 v \cos \varphi dz \right) \quad (23)$$

これより、以下のような輸送流線関数  $\psi$  を定義することができる。

$$\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = a \int_{-H}^0 \rho_0 v dz \quad (24)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -a \int_{-H}^0 \rho_0 u dz \quad (25)$$

静水圧の関係 (7) を  $z = z$  から  $z = 0$  まで積分し、海面圧力を  $p_s$  とすると、

$$p(z) = p_s + g \int_z^0 \rho dz \quad (26)$$

これを (1), (2) に代入して  $z$  で積分し、それぞれ  $a\rho_0 \cos \varphi / H, a\rho_0 / H$  をかけると、

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\cos \varphi}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) = -\frac{\partial p_s}{\partial \lambda} + \frac{2\Omega \sin \varphi}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + FU \cos \varphi \quad (27)$$

$$\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) = -\frac{\partial p_s}{\partial \varphi} + \frac{2\Omega \sin \varphi}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + FV \quad (28)$$

ここで,

$$FU = \frac{-a\rho_0}{H} \int_{-H}^0 \left[ \mathcal{L}u - \frac{uv \tan \varphi}{a} - F^\lambda + \frac{g}{\rho_0 a \cos \varphi} \int_z^0 \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} dz' \right] dz \quad (29)$$

$$FV = \frac{-a\rho_0}{H} \int_{-H}^0 \left[ \mathcal{L}v + \frac{uu \tan \varphi}{a} - F^\varphi + \frac{g}{\rho_0 a} \int_z^0 \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} dz' \right] dz \quad (30)$$

である。(27)を $\varphi$ で微分し,(28)を $\lambda$ で微分して2式を引き算することにより海面圧力 $p_s$ を消去できる。その結果,次の式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial t} \left( \frac{1}{H \cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial t} \left( \frac{\cos \varphi}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial \lambda} (FV) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (FU \cos \varphi) + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{2\Omega \sin \varphi}{H} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{2\Omega \sin \varphi}{H} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

これは流線関数の予報方程式であり,これから求まった $\psi$ から(24)(25)を用いて $u, v$ の鉛直平均値が求まる。

## 4.2 水平速度の決定 - $\hat{u}, \hat{v}$ を求める

$\hat{u}, \hat{v}$ を予報するには以下のようにする。(1),(2)において,圧力項に(26)の右辺を代入し,仮に,海面圧力 $p_s$ を0とすると,

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \mathcal{L}u - 2\Omega v \sin \varphi - \frac{uv \tan \varphi}{a} = \frac{-g}{\rho_0 a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \int_z^0 \rho dz \right) + F^\lambda \quad (32)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \mathcal{L}v + 2\Omega u \sin \varphi + \frac{uu \tan \varphi}{a} = \frac{-g}{\rho_0 a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \int_z^0 \rho dz \right) + F^\varphi \quad (33)$$

$p_s = 0$ としている点で(1)(2)の解 $u, v$ と(32)(33)の解 $u', v'$ は異なる。すなわち,(32)(33)では,圧力傾度力のうち海面圧力に依存する部分を無視している。(32),(33)より求まる $u', v'$ とそれの(22)による鉛直平均 $\bar{u}', \bar{v}'$ より $\hat{u}, \hat{v}$ は次のように決定される。

$$(\hat{u}, \hat{v}) = (u', v') - (\bar{u}', \bar{v}') \quad (34)$$

$p_s = 0$ としたことによるずれは $z$ に依存しないので $u', v'$ から $\bar{u}', \bar{v}'$ を引くことにより消える。こうして(21)より $u, v$ が決定できる。

$u, v$ が決定されれば連続方程式より $w$ が決まり,流速 $u, v, w$ がわかれば温度と塩分の式(28),(31)より $T, S$ を予報できる。 $T, S$ がわかれば状態方程式を使って密度 $\rho$ を計算できる。

## 5 差分方程式

計算は4節で述べた手順にしたがって行う。ゆえに,4節で出てきた式を差分化していくことになる。以下,便宜上部分的に

$$m_j = \frac{1}{\cos \varphi_j}$$

などと置いている。

### 5.1 差分化の概要

“box method” と呼ばれる方法で必要な方程式系を差分化していく。

- セル (cell) と呼ばれる領域において方程式を体積積分したものを差分化する。
  - $u, v$  を計算するセル - p29 の図 3a
  - $T, S$  を計算するセル - p29 の図 3b
- 非線形項のみ体積積分を面積積分に変換し,境界での値に置き換える。
- コリオリ項は implicit に扱う。

### 5.2 運動方程式の差分化

まず,  $u'$  の運動方程式 (32) を差分化したものを書き下す。差分の方法としては “box method” を用いる。(32) を体積積分したものを差分化する。“box method” におけるセルは全訳編の図 3a に示される。セルの体積を  $\alpha_1$  とすると,

$$\alpha_1 = \frac{a^2}{m_j} \Delta_{i+1/2} \Delta_{j+1/2} \Delta_{k+1/2} \quad (35)$$

(32) をセルにおいて体積積分すると,

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial u'}{\partial t} d\alpha_1 + \int \mathcal{L}u d\alpha_1 - \int 2\Omega v \sin \varphi d\alpha_1 - \int \frac{uv \tan \varphi}{a} d\alpha_1 \\ = \int \frac{-g}{\rho_0 a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \int_z^0 \rho dz \right) d\alpha_1 + \int F^\lambda d\alpha_1 \end{aligned} \quad (36)$$

左边第 1 項

$$\int \frac{\partial u'}{\partial t} d\alpha_1 = \frac{\partial u'}{\partial t} \int d\alpha_1 = \frac{u'^{l+1} - u'^{l-1}}{2\Delta t} \alpha_1 \quad (37)$$

左边第 2 項

$$\begin{aligned} \int \mathcal{L}u d\alpha_1 &= \int \nabla \cdot (u\mathbf{v}) d\alpha_1 \\ &= \int u\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{b=1}^6 u_b V_b A_b \end{aligned} \quad (38)$$

左边第 3 項

$$- \int 2\Omega v \sin \varphi d\alpha_1 = -2\Omega v \sin \varphi \int d\alpha_1 = -2\Omega \sin \varphi \frac{v^{l+1} + v^{l-1}}{2} \alpha_1 \quad (39)$$

左边第 4 項

$$- \int \frac{uv \tan \varphi}{a} d\alpha_1 = -\frac{uv \tan \varphi}{a} \alpha_1 \quad (40)$$

右边第 1 項

$$\begin{aligned} & - \int \frac{g}{\rho_0 a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \int_z^0 \rho dz \right) d\alpha_1 \\ &= - \frac{g}{\rho_0 a \cos \varphi} \int_z^0 \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} dz \int d\alpha_1 \\ &= - \frac{g}{\rho_0 a \cos \varphi} \left[ \Delta_k \frac{\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \Big|_{k=1} + \sum_{q=2}^k \frac{(\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2})_{q-1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \Delta_q \right] \alpha_1 \\ &= - \frac{ag}{\rho_0} \Delta_{k+1/2} \Delta_{j+1/2} \left[ \Delta_k (\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}) \Big|_{k=1} + \sum_{q=2}^k (\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2})_{q-1/2} \Delta_q \right] \end{aligned} \quad (41)$$

右边第 2 項

$$\begin{aligned} \int F^\lambda d\alpha_1 &= \alpha_1 F^\lambda \\ &= \alpha_1 A_v \frac{1}{\Delta_{k+1/2}} \left[ \frac{u_{k-1} - u_k}{\Delta_k} - \frac{u_k - u_{k+1}}{\Delta_{k+1}} \right]^{l-1} \\ &\quad + \alpha_1 \frac{A_M}{a^2} \left[ \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{1}{\Delta_{i+1/2}} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta_{i+1}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta_i} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{1}{\Delta_{j+1/2}} \left( \cos \varphi_j \frac{u_{j-1} - u_j}{\Delta_j} - \cos \varphi_{j+1} \frac{u_j - u_{j+1}}{\Delta_{j+1}} \right) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \tan^2 \varphi) u - \frac{2 \tan \varphi}{\cos \varphi} \frac{v_{i+1/2} - v_{i-1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \right]^{l-1} \\ &= a^2 \cos \varphi A_v \Delta_{i+1/2} \Delta_{j+1/2} \left[ \frac{u_{k-1} - u_k}{\Delta_k} - \frac{u_k - u_{k+1}}{\Delta_{k+1}} \right]^{l-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A_M \left[ \frac{\Delta_{j+1/2} \Delta_{k+1/2}}{\cos \varphi} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta_{i+1}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta_i} \right) \right. \\
& + \Delta_{i+1/2} \Delta_{k+1/2} \left( \cos \varphi_j \frac{u_{j-1} - u_j}{\Delta_j} - \cos \varphi_{j+1} \frac{u_j - u_{j+1}}{\Delta_{j+1}} \right) \\
& \left. + \frac{\alpha_1 (1 - \tan^2 \varphi) u}{a} - 2 \tan \varphi \Delta_{j+1/2} \Delta_{k+1/2} (v_{i+1/2} - v_{i-1/2}) \right]^{l-1} \quad (42)
\end{aligned}$$

以上より,  $u'$  の運動方程式 (32) を差分化したものは次のようになる.

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 \left[ \frac{u'^{l+1} - u'^{l-1}}{2\Delta t} - -\Omega \sin \varphi (v'^{l+1} + v'^{l-1}) \right] \\
& = C_k - \frac{ag}{\rho_0} \Delta_{k+1/2} \Delta_{j+1/2} \left[ \Delta_k (\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}) \Big|_{k=1} + \sum_{q=2}^k (\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2})_{q-1/2} \Delta_q \right] \quad (43)
\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
C_k & = - \sum_{b=1}^6 u_b V_b A_b + \frac{uv \tan \varphi}{a} \alpha_1 \\
& + a^2 \cos \varphi A_v \Delta_{i+1/2} \Delta_{j+1/2} \left[ \frac{u_{k-1} - u_k}{\Delta_k} - \frac{u_k - u_{k+1}}{\Delta_{k+1}} \right]^{l-1} \\
& + A_M \left[ \frac{\Delta_{j+1/2} \Delta_{k+1/2}}{\cos \varphi} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta_{i+1}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta_i} \right) \right. \\
& + \Delta_{i+1/2} \Delta_{k+1/2} \left( \cos \varphi_j \frac{u_{j-1} - u_j}{\Delta_j} - \cos \varphi_{j+1} \frac{u_j - u_{j+1}}{\Delta_{j+1}} \right) \\
& \left. + \frac{\alpha_1 (1 - \tan^2 \varphi) u}{a} - 2 \tan \varphi \Delta_{j+1/2} \Delta_{k+1/2} (v_{i+1/2} - v_{i-1/2}) \right]^{l-1} \quad (44)
\end{aligned}$$

なお, 変数には指定したものを除いて  $i, j, k, l$  が付く.

### 5.3 輸送流線関数の式の差分化

まず, 速度と輸送流線関数の関係式 (24) を差分化したものは次のようになる.

$$a \sum_{k=1}^K \rho_0 u \Delta_{k+1/2} = - \frac{(\psi_{j-1/2} - \psi_{j+1/2})_{i+1/2}}{\Delta_{j+1/2}} \quad (45)$$

$$a \sum_{k=1}^K \rho_0 \left( \frac{v}{m} \right) \Delta_{k+1/2} = \frac{(\psi_{i+1/2} - \psi_{i-1/2})_{i+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \quad (46)$$

輸送流線関数の予報方程式 (31) を差分化したものは次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \Delta_{i+1} \Delta_{j+1} \frac{L(\psi^{l+1} - \psi^{l-1})}{2\Delta t} \\
&= -\frac{1}{2} \left[ \Delta_{i+1/2} \left( \frac{FU_{i,j}}{m_j} - \frac{FU_{i,j+1}}{m_{j+1}} \right) + \Delta_{i+3/2} \left( \frac{FU_{i+1,j}}{m_j} - \frac{FU_{i+1,j+1}}{m_{j+1}} \right) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \left[ \Delta_{i+1/2} (FV_{i+1,j} - FV_{i,j}) + \Delta_{i+3/2} (FV_{i+1,j+1} - FV_{i,j+1}) \right] \\
&- \Omega \left\{ \Delta_{i+1/2} \left[ n_j \left( \frac{\bar{v}}{m} \right)_{i,j} - n_{j+1} \left( \frac{\bar{v}}{m} \right)_{i,j+1} \right] \right. \\
&+ \Delta_{i+3/2} \left[ n_j \left( \frac{\bar{v}}{m} \right)_{i+1,j} - n_{j+1} \left( \frac{\bar{v}}{m} \right)_{i+1,j+1} \right] \\
&\left. + \Delta_{j+1/2} [n_j (\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i,j})] + \Delta_{j+3/2} [n_{j+1} (\bar{u}_{i+1,j+1} - \bar{u}_{i,j+1})] \right\}
\end{aligned} \tag{47}$$

ただし、演算子  $L$  は以下のように定義される。

$$\begin{aligned}
L\psi &= \frac{m(\psi_{i+3/2} - \psi_{i+1/2})\Delta_{j+1}}{(H_{i+1,j}\Delta_{j+1/2} + H_{i+1,j+1}\Delta_{j+3/2})\Delta_{i+3/2}\Delta_{i+1/2}} \\
&- \frac{m(\psi_{i+1/2} - \psi_{i-1/2})\Delta_{j+1}}{(H_{i,j}\Delta_{j+1/2} + H_{i,j+1}\Delta_{j+3/2})\Delta_{i+1/2}\Delta_{i+1/2}} \\
&+ \frac{m(\psi_{j-1/2} - \psi_{j+1/2})\Delta_{i+1}}{m_{j+1/2}(H_{i,j}\Delta_{i+1/2} + H_{i+1,j}\Delta_{i+3/2})\Delta_{j+1/2}\Delta_{j+1/2}} \\
&- \frac{m(\psi_{j+1/2} - \psi_{j-3/2})\Delta_{i+1}}{m_{j+3/2}(H_{i,j+1}\Delta_{i+1/2} + H_{i+1,j+1}\Delta_{i+3/2})\Delta_{j+3/2}\Delta_{j+1/2}}
\end{aligned} \tag{48}$$

## 5.4 温度, 塩分の式の差分化

温度の場合のみ記述する。塩分の場合は、温度の場合と全く同様である。差分化すべき温度の保存式 (9) をもう一度書くと、

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathcal{L}T = Q$$

ただし、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}T &= \frac{1}{a \cos \varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (uT) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (vT \cos \varphi) \right] + \frac{\partial}{\partial z} (wT) \\
Q &= \frac{A_v}{\delta} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{A_H}{a^2} \left\{ \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 T}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) \right\}
\end{aligned}$$

である。“box method”におけるセルは全訳編の図 3b に示され、その体積を  $\alpha_2$  とすると、

$$\alpha_2 = \frac{a^2}{m_{j+1/2}} \Delta_{i+1} \Delta_{j+1} \Delta_{k+1/2} \tag{49}$$

である. (9) をセルにおいて体積積分すると,

$$\int \frac{\partial T}{\partial t} d\alpha_2 + \int \mathcal{L}T d\alpha_2 = \int Q d\alpha_2 \quad (50)$$

これを差分化する.

左辺第1項

$$\int \frac{\partial T}{\partial t} d\alpha_2 = \frac{\partial T}{\partial t} \int d\alpha_2 = \frac{T^{l+1} - T^{l-1}}{2\Delta t} \alpha_2 \quad (51)$$

左辺第2項

$$\begin{aligned} \int \mathcal{L}T d\alpha_2 &= \int \nabla \cdot (T\mathbf{v}) d\alpha_2 \\ &= \int T\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{b=1}^6 V_b A_b T_b \end{aligned} \quad (52)$$

右辺

$$\begin{aligned} \int Q d\alpha_2 &= \frac{A_v}{\delta} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \int d\alpha_2 + \frac{A_H}{a^2} \left\{ \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 T}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) \right\} \int d\alpha_2 \\ &= A_v \frac{\alpha_2}{\Delta_{k+1/2}} \left[ \frac{T_{k-1} - T_k}{\Delta_k} - \frac{T_k - T_{k+1}}{\Delta_{k+1}} \right]^{l-1} \\ &\quad + A_H \alpha_2 \left[ \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \frac{1}{\Delta_{i+1}} \left( \frac{T_{i+3/2} - T_{i+1/2}}{\Delta_{i+3/2}} - \frac{T_{i+1/2} - T_{i-1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \frac{1}{\Delta_{j+1}} \left( \cos \varphi \frac{T_{j-1/2} - T_{j+1/2}}{\Delta_{j+1/2}} - \cos \varphi \frac{T_{j+1/2} - T_{j+3/2}}{\Delta_{j+3/2}} \right) \right]^{l-1} \end{aligned} \quad (53)$$

以上より, 温度の保存式 (9) を差分化したものは以下ようになる.

$$\begin{aligned} &\frac{T^{l+1} - T^{l-1}}{2\Delta t} \alpha_2 \\ &= \sum_{b=1}^6 V_b A_b T_b + A_v \frac{\alpha_2}{\Delta_{k+1/2}} \left[ \frac{T_{k-1} - T_k}{\Delta_k} - \frac{T_k - T_{k+1}}{\Delta_{k+1}} \right]^{l-1} \\ &\quad + A_H \alpha_2 \left[ \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \frac{1}{\Delta_{i+1}} \left( \frac{T_{i+3/2} - T_{i+1/2}}{\Delta_{i+3/2}} - \frac{T_{i+1/2} - T_{i-1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \frac{1}{\Delta_{j+1}} \left( \cos \varphi \frac{T_{j-1/2} - T_{j+1/2}}{\Delta_{j+1/2}} - \cos \varphi \frac{T_{j+1/2} - T_{j+3/2}}{\Delta_{j+3/2}} \right) \right]^{l-1} \end{aligned} \quad (54)$$

## 5.5 まとめ

- (43)と  $v$  成分の対応する式により,  $(u', v')^{l+1}$  が予報される. これを用いて, 以下の式より  $(\hat{u}, \hat{v})^{l+1}$  が求まる.

$$(\hat{u}, \hat{v})^{l+1} = (u', v')^{l+1} - \frac{1}{H} \sum_{k=1}^K (u', v')^{l+1} \Delta_{k+1/2} \quad (55)$$

- (47)(45)(46) より,  $(\bar{u}, \bar{v})^{l+1}$  が予報される.
- 以上より,  $(u, v)^{l+1}$  が得られる.

$$(u, v)^{l+1} = (\bar{u}, \bar{v})^{l+1} + (\hat{u}, \hat{v})^{l+1} \quad (56)$$

- (54)と  $S$  の対応する式により,  $(T, S)^{l+1}$  が予報される.
- 新しい時間レベルにおける予報変数  $u, v, T, S$  の値が求まれば, 連続方程式, 状態方程式という2つの診断関係式を用いて新しい時間レベルにおける  $w, \rho$  が求まる.

# A 全訳

## 1 序論

海洋循環の研究は、エクマンの先駆的研究に始まって、この20年でますます弾みがついてきた。海洋循環の主要な特徴のいくつかを説明することにおいてはかなりの進歩がなされた。しかしながら、観測的研究と理論的研究の間には重要な隔たりがまだ存在する。理論海洋学者たちの注意を引き付けた海洋力学における基本的問題は、海洋探検から返された温度、塩分や他の水塊特性のデータを解釈する仕事とはまったくかけ離れているように思われることがしばしばだった。最近の進歩は、この状況は変わりつつあるという希望を与える。まず一方では、直接流速測定に対する新しい技術が、海流やより小規模な海の乱れのより完全な描写をもたらしつつある。他方では、水力学の中で海洋循環研究に最も密接に関係した部分により注目が集まっている。回転流体を使った室内実験に再び関心がでてきたことは、先代の探検家たちのなした基本的な仕事の重要性に対する評価をもたらした。

海洋循環理論において進歩の障害となってきたのは、非常に簡単化された海洋循環モデルでさえその方程式を解くのに数学的困難さがあることである。この困難さの原因は、複雑な海盆の地形と、さらに重要なことには方程式の非線形性にある。近年大規模計算機が入手できるようになったことで、現在は、直接の計算機的アプローチをもちいる“数値実験”が可能になった。このアプローチを使うと、複雑すぎて解析的手法では扱えないような問題にたいして解を得ることができる。このような方針に沿って行われた最初の海洋循環研究は、ソ連の Sarkisyan (1955,1962) による一連の研究においてなされた。

この論文では海洋循環研究において使われる計算手順を詳細に述べている。ここで述べる手法は、二つの先行する傾圧海洋の研究 (Bryan and Cox, 1967, 1968) に使われるものと共通した特徴がいくつかあるが、ここでは多くの簡単化を行い、不規則な海岸線と海底地形をもつ海盆を扱うよう一般化もされている。本研究の計算手続と最近 Crowley (1968) によって提案された手法における主な違いは、非線形項

の扱いと、海面での鉛直速度の境界条件が含まれる。本モデルにおける非線形項は、Fromm(1963) と Arakawa(1966) によって与えられたものと同じ一般的手法を使った中心差分に基づいて公式化されている。Crowley は、時間に関する前方差分と、Marchuk(1964) によって提案された手法と同様な非線形移流を評価する time splitting 法を使っている。本論文の計算手続は、非粘性の場合に流体のあるエネルギー特性が厳密に保存する Marchuk の方法に比べて利点がある。しかしながら、本方法は計算機のメモリーに二つの時間水準の変数を保持することが必要であるという欠点がある。本方法のエネルギー特性についての説明を Appendix に与えてある。

Crowley(1968) では海面の鉛直変位を認めているが、ここでは認めていない。この強制は、rigid lid 近似と呼ばれる。この効果により、海面における圧力変化が含まれ、海面変化の力学的影響が除かれる。外部慣性重力波は、定常な海洋循環を歪ませることなく、低周波運動をほとんど歪ませることなしに取り除かれる。海洋の他のタイプの擾乱に比べて外部重力波は動きが速いので、こうした高速度の波を取り除くことにより、時間ステップの大きさのオーダーを増加させることができる。この計算の膨大な節約は、rigid lid 近似に必要とされる数値計算手法において増えた複雑さを示している。

## 2 モデルの方程式

### 2.1 方程式の一般形

モデルの方程式を組み立てるのに、ナビエ-ストークスの方程式を三つの重要な点で修正した。第一に、浮力項を除いて密度変化を無視する、すなわちブジネスク近似である。第二に、運動方程式の  $w$  成分において局所加速度項とそれと同じオーダーの項を無視し、静水圧近似にした。静水圧近似は、海底地形のアスペクト比が 1 よりもずっと小さい限り非常に正確であることが示されるだろう。第三に、大規模運動のみを明示的に取り扱い、小規模運動によってもたらされる応力は渦粘性仮定 (turbulent viscosity hypothesis) によって考慮に入れる。通常の粘性、伝導性は効果が非常に小さく、結果として無視される。

次のようにおく。

$$\begin{aligned} m &= \sec \varphi \\ n &= \sin \varphi \\ u &= a\dot{\lambda}/m \\ v &= a\dot{\varphi} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$a$  は地球の半径,  $\varphi$  は緯度,  $\lambda$  は経度である。移流演算子を次のように定義しておく  
と便利である。

$$\mathcal{L}\mu = \frac{m}{a}[(u\mu)_\lambda + (v\mu/m)_\varphi] + (w\mu)_z \quad (2.2)$$

ここで  $\mu$  はあるスカラー量である。すると、運動方程式は次のように書ける。

$$u_t + \mathcal{L}u - 2\Omega nv - mnwv/a = -\frac{m}{a}(p/\rho_0)_\lambda + F^\lambda \quad (2.3)$$

$$v_t + \mathcal{L}v + 2\Omega nu + mnwu/a = -\frac{1}{a}(p/\rho_0)_\varphi + F^\varphi \quad (2.4)$$

静水圧の関係は

$$\rho g = -p_z \quad (2.5)$$

連続方程式は

$$w_z + \frac{m}{a}[u_\lambda + (v/m)_\varphi] = 0 \quad (2.6)$$

次の二つの保存式がある。

$$T_t + \mathcal{L}T = Q \quad (2.7)$$

$$S_t + \mathcal{L}S = \sigma \quad (2.8)$$

温度において圧縮の効果は含まれていない。圧縮の効果は相対的に小さく、速度場を決定する水平面の密度勾配の計算にはそれほど変化を与えない。状態方程式は、

次の形が基本である.

$$\rho = F(T, S, p) \quad (2.9)$$

(2.9)の便利な代数表現は, Eckart(1958)によって与えられている. (2.9)における圧力の効果は,  $p$  を  $-\rho_0 g z$  で置き換えることにより非常に正確に見積もることができるだろう.  $F^\lambda, F^\varphi, Q, \sigma$  の各項は, 渦粘性と渦拡散を表す.

$$\Delta\mu = m^2\mu_{\lambda\lambda} + m(\mu_\varphi/m)_\varphi \quad (2.10)$$

とすると,

$$F^\lambda = A_v u_{zz} + \frac{A_M}{a^2} \{ \Delta u + (1 - m^2 n^2) u - 2nm^2 v_\lambda \} \quad (2.11)$$

$$F^\varphi = A_v v_{zz} + \frac{A_M}{a^2} \{ \Delta v + (1 - m^2 n^2) v + 2nm^2 u_\lambda \} \quad (2.12)$$

$$Q = \frac{A_v}{\delta} T_{zz} + \frac{A_H}{a^2} \Delta T \quad (2.13)$$

$$\sigma = \frac{A_v}{\delta} S_{zz} + \frac{A_H}{a^2} \Delta S \quad (2.14)$$

等方でない場合の  $F_\lambda$  と  $F_\varphi$  の表現は, 鉛直方向の混合が水平方向のそれと異なるのだが, Saint-Guilly(1956)によってなされている. Bryan and Cox(1967)による運動量の混合の公式化は正しくない. もっとも, その誤りは極地方の緯度において重要であるにすぎない.

鉛直混合は密度成層に複雑に依存していて, 未だに理解が非常に乏しい. 本モデルでは, 密度成層の効果は, 余分にパラメータを指定するのを避ける非常に簡単なやり方で考慮に入れる. 本モデルにおいては, 鉛直混合は全ての安定な場合に対して一定であり, 不安定な場合においては無限である. 今, ある水パーセルについてその場所の圧力を海面圧力にまで減少させた時にそのパーセルがもつ密度を  $\rho''$  とする. (2.13) と (2.14) における  $\delta$  は次のように与えられる.

$$\delta = \begin{cases} 1 & (\rho'')_z < 0 \\ 0 & (\rho'')_z > 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

側壁における速度, 温度, 塩分の境界条件は,

$$u, v, T_n, S_n = 0 \quad (2.16)$$

ここで,  $( )_n$  は壁の法線方向の座標に関する局所微分を表す. 上部境界では,

$$\left. \begin{aligned} w &= 0 \\ \rho_0 A_v (u_z, v_z) &= \tau^\lambda, \tau^\varphi \end{aligned} \right\} z = 0 \quad (2.17)$$

ここで  $\tau^\lambda$  と  $\tau^\varphi$  はそれぞれ表面応力の東西, 南北成分である.  $\rho_0$  は海面圧力, 標準温度, 標準塩分での海水の密度である.

温度と塩分の場合は、二つ境界条件が可能である。海面において、熱フラックス、塩分フラックスを指定しても良いし、あるいは温度場、塩分場自体を指定しても良い。

海面において  $w = 0$  と設定することを rigid lid 近似と呼ぶ。海面の小さい変位の力学的効果を考慮に入れない。はじめにで述べたように、これによって非常に速度の大きな表面慣性重力波が取り除かれるので、計算がはるかに効率的になる。

下部境界では、非常に小さい地熱流の効果は無視され、

$$(T_z, S_z) = 0, \quad z = -H \quad (2.18)$$

$$w(-H) = -\frac{u(-H)}{a} m H_\lambda - \frac{v(-H)}{a} H_\varphi \quad (2.19)$$

また、

$$\rho_0 A_v(u_z, v_z) = \tau_B^\lambda, \tau_B^\varphi \quad (2.20)$$

海底の応力を計算するのに使用する特定の法則はここでは指定しない。いくつか思いつくが、その中ではエクマンの理論が最も簡単である。Gill(1968) 他によって展開させられた地衡流抵抗法則 (geostrophic drag law) も良いかも知れない。

## 2.2 圧力の消去

有限差分方程式を公式化するには、圧力を消去することが必要である。連続方程式を  $z$  に関して積分して、

$$\begin{aligned} w(0) - w(-H) &= -\frac{m}{a} \left[ \left( \int_{-H}^0 u dz \right)_\lambda + \left( \int_{-H}^0 \frac{v}{m} dz \right)_\varphi \right] \\ &\quad + \frac{u}{a}(-H) m H_\lambda + \frac{v}{a}(-H) H_\varphi \end{aligned} \quad (2.21)$$

海面では、rigid lid 近似より次式を満たすことが必要である。

$$w(0) = 0 \quad (2.22)$$

(2.19),(2.21),(2.22) をあわせて考えることにより、次のような流線関数を定義することができる。

$$\begin{aligned} m\psi_\lambda &= a \int_{-H}^0 \rho_0 v dz \\ \psi_\varphi &= -a \int_{-H}^0 \rho_0 u dz \end{aligned} \quad (2.23)$$

静力学の関係を用いて、

$$p(z) = p_s + g \int_z^0 \rho dz \quad (2.24)$$

ここで,  $p_s$  は海面圧力である.

輸送流線関数 (transport stream function) に対する予報方程式 (prediction equation) を得るために, (2.3),(2.4) を  $z$  で積分し, それぞれ  $a\rho_0/mH$ ,  $a\rho_0/H$  をかけると,

$$-(\psi_\varphi/Hm)_t = -(p_s)_\lambda + 2\Omega n\psi_\lambda/H + \frac{FU}{m} \quad (2.25)$$

$$m(\psi_\lambda/H)_t = -(p_s)_\varphi + 2\Omega n\psi_\varphi/H + FV \quad (2.26)$$

ここで,

$$FU = \frac{-a\rho_0}{H} \int_{-H}^0 [\mathcal{L}u - mn uv/a - F^\lambda + \frac{gm}{a\rho_0} \int_z^0 \rho_\lambda dz'] dz \quad (2.27)$$

$$FV = \frac{-a\rho_0}{H} \int_{-H}^0 [\mathcal{L}v - mn u^2/a - F^\varphi + \frac{g}{a\rho_0} \int_z^0 \rho_\varphi dz'] dz$$

である. 海面圧力は, (2.25) と (2.26) を交差微分することにより消去できる. その結果, 次の式が得られる.

$$(m\psi_\lambda/H)_{\lambda t} + (\psi_\varphi/Hm)_{\varphi t} = (FV)_\lambda - (FU)_\varphi + \psi_\lambda(2\Omega n/H)_\varphi + \psi_\varphi(2\Omega n/H)_\lambda \quad (2.28)$$

水柱全体の鉛直平均を, バー

$$\bar{(\quad)} = \frac{1}{H} \int_{-H}^0 (\quad) dz \quad (2.29)$$

で表し, 鉛直平均からの偏差を ( $\hat{\quad}$ ) で表すとしよう. すると, 速度成分は次のように表現できる.

$$(u, v) = (\bar{u}, \bar{v}) + (\hat{u}, \hat{v}) \quad (2.30)$$

成分  $\bar{u}, \bar{v}$  は (2.23),(2.28) から予測できる.  $\hat{u}, \hat{v}$  を予測するには, (2.3),(2.4) を用い, 圧力項に (2.24) の右辺を代入する. 海面圧力  $p_s$  は仮に 0 としておく.

$$u'_t + \mathcal{L}u - 2\Omega nv - mn uv/a = \frac{-mg}{\rho_0 a} \left( \int_z^0 \rho dz \right)_\lambda + F^\lambda \quad (2.31)$$

$$v'_t + \mathcal{L}v + 2\Omega nu + mn uv/a = \frac{-g}{\rho_0 a} \left( \int_z^0 \rho dz \right)_\varphi + F^\varphi \quad (2.32)$$

$u', v'$  は  $u, v$  とは異なる. その理由は圧力傾度力のうち海面圧力に依存する部分を無視しているからである.  $\hat{u}, \hat{v}$  を決定するために, 次のようにおく.

$$(\hat{u}, \hat{v}) = (u' - \bar{u}', v' - \bar{v}') \quad (2.33)$$

$\hat{u}, \hat{v}$  の決定において, 海面圧力の無視による  $u', v'$  の誤差は重要ではない. なぜならば, その誤差は  $z$  に対して独立であり, それゆえ  $\bar{u}', \bar{v}'$  を引くことによって消去されるからである.

### 3 輸送流線関数の境界条件

海盆が閉じていて島 (island) がないという簡単な場合では, (2.28) の境界条件は単純に次のようになる.

$$\psi = 0 \quad (\text{側面境界において}) \quad (3.1)$$

たくさんの島が存在する世界海洋は多重連結領域 (multipli-connected region) である. それぞれの島の海岸において境界条件は

$$\psi = \mu_r \quad r = 1, 2, 3, \dots, R \quad (3.2)$$

である.  $r$  は島の指標である. 一般に  $\mu$  は時間の関数である.  $\mu_r$  の数値計算法は, Kamenkovitch(1962) による南極周極流 (Antarctic circumpolar current) の研究で用いられたものに基づいている.

$\mathbf{v}$  を水平速度ベクトルとし,

$$(\mathbf{v})_t = -\nabla(p/\rho_0) + \mathbf{G} \quad (3.3)$$

とする.  $\nabla$  は水平勾配演算子,  $G$  は運動方程式の残りの項を表すもう一つの水平ベクトルである.(3.3) の積分形は,(2.25) 及び (2.26) と同様にして,

$$\mathbf{k} \times \nabla \psi_t = -\int_{-H}^0 (\nabla p/\rho_0 - \mathbf{G}) dz \quad (3.4)$$

となる.  $k$  は水平面に垂直な方向の単位ベクトルである. (3.4) を  $H$  で割り, 回転をとると,

$$\nabla \times (\mathbf{k}/H \times \nabla \psi_t) = -\nabla \times \frac{1}{H} \int_{-H}^0 (\nabla p/\rho_0 - \mathbf{G}) dz \quad (3.5)$$

を得る. 島の存在する閉じた海盆を考えよう (図 1 参照). 輸送流線関数が次のように表されるとする.

$$\psi = \psi_0 + \sum_{r=1}^R \mu_r \psi_r \quad (3.6)$$

(3.6) において  $\psi_0$  と  $\mu_r$  だけが時間の関数である.  $\psi_r$  の場合は方程式

$$\nabla \times (\mathbf{k}/H \times \nabla \psi_r) = 0 \quad (3.7)$$

を満足する. ただし, 境界条件は

$$\begin{aligned} \psi_r &= 1 \quad (\text{島 } r \text{ の周囲}) \\ \psi_r &= 0 \quad (\text{他の全ての島}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

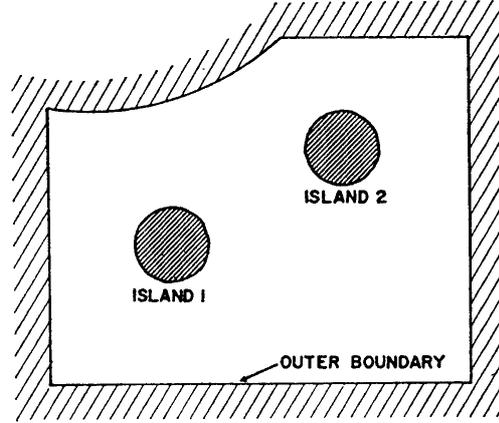


FIG. 1. A closed ocean basin with two islands.

図 1: 2 つ島の存在する閉じた海盆

(3.6) の表現を使い, 輸送流線関数の局所時間微分の中央差分形は次のようになる.

$$\psi_t = \left[ \psi_0^{l+1} + \sum_{r=1}^R \mu_r^{l+1} \psi_r - \psi^{l-1} \right] / 2\Delta t \quad (3.9)$$

ここで上付き記号  $l$  は時間レベルを表す.

各時間レベルにおける  $\psi_0$  を計算するには,(3.5),(3.7),(3.9) を用いて,

$$\nabla \times (\mathbf{k}/H \times \nabla \psi_0^{l+1}) = \nabla \times (\mathbf{k}/H \times \nabla \psi^{l-1}) - 2\Delta t \left[ \nabla \times \frac{1}{H} \int_{-H}^0 (\nabla p / \rho_0 - \mathbf{G}) dz \right] \quad (3.10)$$

境界条件は

$$\psi = 0, \quad (\text{全ての境界}) \quad (3.11)$$

$\mu_r$  ( $r = 1, 2, 3, \dots, R$ ) を決定するには, 各島領域まわりの経路に沿った線積分を利用する.  $s$  は線積分の経路方向の単位ベクトルを表すとしよう.

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{s} \left[ \mathbf{k}/H \times \nabla \sum_{r=1}^R \mu_r^{l+1} \psi_r \right] dS \\ = - \oint \mathbf{s} \left\{ \mathbf{k}/H \times \nabla (\psi_0^{l+1} - \psi^{l-1}) - \frac{2\Delta t}{H} \int_{-H}^0 [\nabla(p/\rho_0) - G] dz \right\} dS \end{aligned} \quad (3.12)$$

各島周りの経路に対する,(3.12) の形の  $R$  個の方程式が,  $\mu_r^{l+1}$  ( $r = 1, 2, 3, \dots, R$ ) を決定する連立一次方程式系を構成する. 海面圧力が (3.12) の右辺から除かれることに注意する. 経路が閉じているので,

$$\oint \mathbf{s} \left[ \frac{1}{H} \int_{-H}^0 \nabla p_s dz \right] dS = 0 \quad (3.13)$$

ここで,  $p_s$  は海面圧力である. ゆえに,(2.24) を用いると,

$$\oint \mathbf{s} \left[ \frac{1}{H} \int_{-H}^0 \nabla p dz \right] dS = \oint \mathbf{s} \frac{g}{H} \left[ \int_{-H}^0 \left( \nabla \int_z^0 \rho dz' \right) dz \right] dS \quad (3.14)$$

となる.

## 4 有限差分の一般的方法

有限差分スキーム (finite differencing scheme) を構成するにあたっては、いくつかの積分制限が守られることが保証されるようにしたい。特に、運動量、エネルギー、温度と塩分の変化が拡散効果のないときに保存されるように、有限差分方程式を組み立てたい。このアプローチが有利なことを初めて指摘したのは Arakawa(1966) である。Arakawa の示すところによると、エネルギーにおける積分条制限が維持されるならば、計算は、Phillips(1959) によって最初に指摘された、悩ましい“非線形”不安定から解放されるだろう。エネルギー特性の一貫した公式化も、海洋モデルの長期間数値積分の実行には非常に重要である。そのような公式化によって時間とともに増える系統誤差 (systematic error) を回避できるだろう。

例をあげるために、スカラー場  $q$  に対する次の方程式を考えよう。

$$q_t + \nabla \cdot \mathbf{v}q = 0 \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.2)$$

ここで、 $\mathbf{v}$  は速度ベクトルである。 $\mathbf{n}$  を全体積の外部境界に対する法線ベクトルとする。速度の法線成分は外部境界全体にわたって存在しないという条件は次のように与えられる。

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.3)$$

考えている全体積を  $\eta$  個の分割体積、すなわちセルに分ける。各セルの体積を  $\alpha_\eta$  としよう。各セルにおける  $q$  の平均を  $Q_\eta$  とする。各セルにおいて (4.1) を積分すると、

$$\alpha_\eta \frac{d}{dt} Q_\eta = - \oint q \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.4)$$

この場合、 $\mathbf{n}$  はセルの境界に対する単位ベクトルである。我々の有限差分化は、もとの微分方程式 (4.1) よりもむしろ (4.4) に基づいている。

各セルは、指標  $b$  によって記される  $B$  個の隣接するセルと境を接しているとする。立方配列の場合、取り囲むセルの総数は 6 になるが、その数は多かれ少なかれ幾何学に依存する。 $A_b$  を各境界面の面積、 $V_b$  を法線方向の速度とする。すると、(4.4) は次のように近似できる。

$$\alpha_\eta \frac{d}{dt} Q_\eta = - \sum_{b=1}^B q_b V_b A_b \quad (4.5)$$

ここで  $q_b$  は境界面  $b$  における  $q$  の値である。各セルの対応する連続方程式は、

$$\sum_{b=1}^B V_b A_b = 0 \quad (4.6)$$

である. 有限差分方程式を組み立てることにおけるこのアプローチは, Noh(1965) によって議論されていたそれと同じである.

有限差分の積分特性は, 長期間にわたって時間に関する数値積分を行うことにおいて特に重要である. 次の量を考える.

$$I_1 = \sum_{\eta=1}^N Q_{\eta} \alpha_{\eta} \quad (4.7)$$

$$I_2 = \sum_{\eta=1}^N Q_{\eta}^2 \alpha_{\eta} \quad (4.8)$$

$N$  は全体積中のセルの総数である.  $I_1$  は  $q$  の体積積分に対する有限差分表現であり,  $I_2$  は  $q^2$  の体積積分に対する有限差分表現である. 全てのセルに対する (4.5) の和をとると,

$$\frac{dI_1}{dt} = - \sum_{\eta=1}^N \sum_{b=1}^B q_b V_b A_b \quad (4.9)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = -2 \sum_{\eta=1}^N \sum_{b=1}^B q_b Q_{\eta} V_b A_b \quad (4.10)$$

を得る.(4.9) では右辺の多くの項が全ての内部の境界面に沿って組になって現れるので,  $dI_1/dt = 0$  であることがわかる. 隣接する境界面どうしの寄与は等しく符号が反対で, 体積全体にわたって和をとると互いに打ち消しあう. (Bryan,1966) にある論点を繰り返して述べると, 一般に (4.10) の左辺は消えないことがわかる. しかしながら,  $q_b$  の境界値

$$q_b = (Q_{\eta} + Q_b)/2 \quad (4.11)$$

に対して適切な補間公式を用いるならば消すことができる.  $Q_b$  は境界面に隣接するセルにおける  $q$  の平均値である. (4.10) に (4.11) を代入して,

$$\frac{dI_2}{dt} = - \sum_{\eta=1}^N \left[ Q_{\eta}^2 \sum_{b=1}^B V_b A_b + \sum_{b=1}^B Q_{\eta} Q_b V_b A_b \right] \quad (4.12)$$

連続の関係 (4.6) を適用すると, 右辺第一項が 0 になることがわかる. 右辺第二項は境界面において等しく符号が反対の組から成る. (4.9) について議論したのと同様の打ち消しあう効果により右辺第二項は消える.

この簡単な例は, 次の節において有限差分方程式を作るアプローチに対する動機づけを暗に与えるだろう. ここで述べる方法は, Arakawa(1966) の着想を一般化したものである. Arakawa(1966) では, セルの配列を問題に便利なやり方を選ぶことを可能にしている.

## 5 変数の配置

指標  $i'$ ,  $j'$ ,  $k'$  のセルは, 座標  $\lambda_{i'}$ ,  $\varphi_{j'}$ ,  $z_{k'}$  で与えられる点を中心とするように置く. ここで,  $\lambda_{i'}$ ,  $\varphi_{j'}$ ,  $z_{k'}$  は次のように与えられる.

$$\lambda_{i'} = \sum_{i=1}^{i'} \Delta_i \quad (5.1)$$

$$\varphi_0 - \varphi_{j'} = \sum_{j=1}^{j'} \Delta_j \quad (5.2)$$

$$z_{k'} = - \sum_{k=1}^{k'} \Delta_k \quad (5.3)$$

速度の水平 2 成分は, 整数指標によって与えられる格子点を中心とするセルにおいて平均化される. 一方で, 温度, 塩分, 流線関数は,  $i' + \frac{1}{2}$ ,  $j' + \frac{1}{2}$ ,  $k'$  によって指定される格子点を中心とする. この場合,

$$\lambda_{i'+1/2} = \lambda_{i=1}^{i'} + \frac{1}{2} \Delta_{i'+1} \quad (5.4)$$

$$\varphi_{j'+1/2} = \varphi_{j=1}^{j'} - \frac{1}{2} \Delta_{j'+1} \quad (5.5)$$

である. 水平面における変数の配置は図 2 のようになる. 基本型は Leith(1965) で使われたものと同じである. この配置を選択する動機は, できるだけ細かい変数のメッシング (meshing) を得て, 依然として 2 つの速度成分を同じ時間水準, 同じ点で定義するためである.  $u$  と  $v$  を同じ点で定義する利点は次の節で議論する.

鉛直速度は, 速度の点, 塩分と温度の点それぞれに対して別々に計算しなければならない. 鉛直速度の点はセルの上と下の境界面に位置し, 次のような  $k' + \frac{1}{2}$  の指標を持つ.

$$z_{k'+1/2} = z_{k'} - \frac{1}{2} \Delta_{k'+1} \quad (5.6)$$

変数の配置は表 1 に要約される.

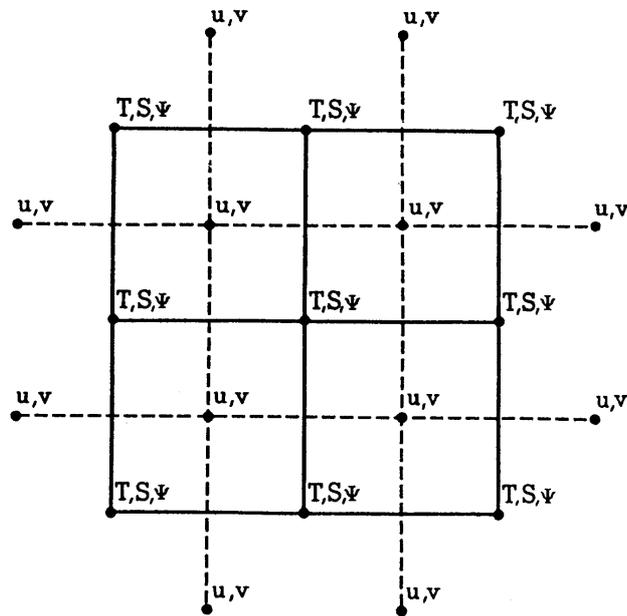


FIG. 2. The arrangement of variables in the horizontal plane for a grid with equal spacing in both directions.

図 2: 水平面における, 2 方向ともに等しい間隔をもつ格子に対する変数の配置.

TABLE I  
THE PATTERN OF VARIABLES<sup>a</sup>

	$i$	$j$	$k$
$u, v$	1	1	1
$T, S$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$w_{u,v}$	1	1	$\frac{1}{2}$
$w_{T,S}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

<sup>a</sup> An entry of 1 or 1/2 indicates whether a variable is located at an integer or half value of the index.

## 6 有限差分方程式

“box method” を用いて、まず最初に (2.31) で与えられる、成分  $u'$  の運動方程式を有限差分化したものを書き下す。セルの寸法は図 3a に示される通りである。セルの体積は次のように与えられる。

$$\alpha_1 = a^2 \Delta_{i+1/2} \Delta_{j+1/2} \Delta_{k+1/2} / m_j \quad (6.1)$$

ここで

$$\begin{aligned} \Delta_{i+1/2} &= (\Delta_i + \Delta_{i+1})/2 \\ \Delta_{j+1/2} &= (\Delta_j + \Delta_{j+1})/2 \\ \Delta_{k+1/2} &= (\Delta_k + \Delta_{k+1})/2 \end{aligned}$$

である。有限差分方程式は、

$$\begin{aligned} \alpha_1 [(u'^{l+1} - u'^{l-1})/2\Delta t - \Omega n(v'^{l+1} + v'^{l-1})] \\ = C_k - \frac{ag}{\rho_0} \Delta_{k+1/2} \Delta_{j+1/2} [\Delta_k (\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2})|_{k=1} + \sum_{q=2}^k (\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2})_{q-1/2} \Delta_q] \end{aligned} \quad (6.2)$$

$q$  は  $k$  の見せかけの指標である。(6.2) では、特に指定したものを除いて、全ての指標は  $i, j, k, l$  であると解釈される。(6.2) にはまだ未定義の変数がいくつか現れている。例えば、密度の点は整数  $j$  の点では定義されていない。これらの点は、それが定義されている近隣の点の単純な平均として理解される。

$$\begin{aligned} \rho_{j+1/2} + \rho_{j-1/2} &= 2\rho_j \\ \rho_k + \rho_{k+1} &= 2\rho_{k+1/2} \end{aligned}$$

運動の移流と粘性項は  $C_k$  に含まれ、それは次のようになる。

$$\begin{aligned} C_k &= - \sum_{b=1}^6 V_b A_b u_b + \alpha_1 u v m n / a \\ &+ a^2 A_v (\Delta_{j+1/2} \Delta_{i+1/2}) [(u_{k-1} - u_k) / \Delta_k - (u_k - u_{k+1}) / \Delta_{k+1}]^{l-1} \\ &+ A_M \left\{ m \Delta_{j+1/2} \Delta_{k+1/2} [(u_{i+1} - u_i) / \Delta_{i+1} - (u_i - u_{i-1}) / \Delta_i] \right. \\ &\quad + \Delta_{i+1/2} \Delta_{k+1/2} [(u_{j-1} - u_j) / m \Delta_j - (u_j - u_{j+1}) / m \Delta_{j+1}] \\ &\quad \left. + \alpha_1 (1 - n^2 m^2) u / a^2 - 2nm \Delta_{j+1/2} \Delta_{k+1/2} (v_{i+1/2} - v_{i-1/2}) \right\}^{l-1} \end{aligned} \quad (6.3)$$

粘性項は (6.2) 右辺の残りの項に対して時間が一段階遅れていることに注意されたい。このことは、差分方法が圧力項と非線形項に対しては時間に関して中央差分であるが、粘性項に関しては時間水準が  $2\Delta t$  だけ前にとられていることを意味

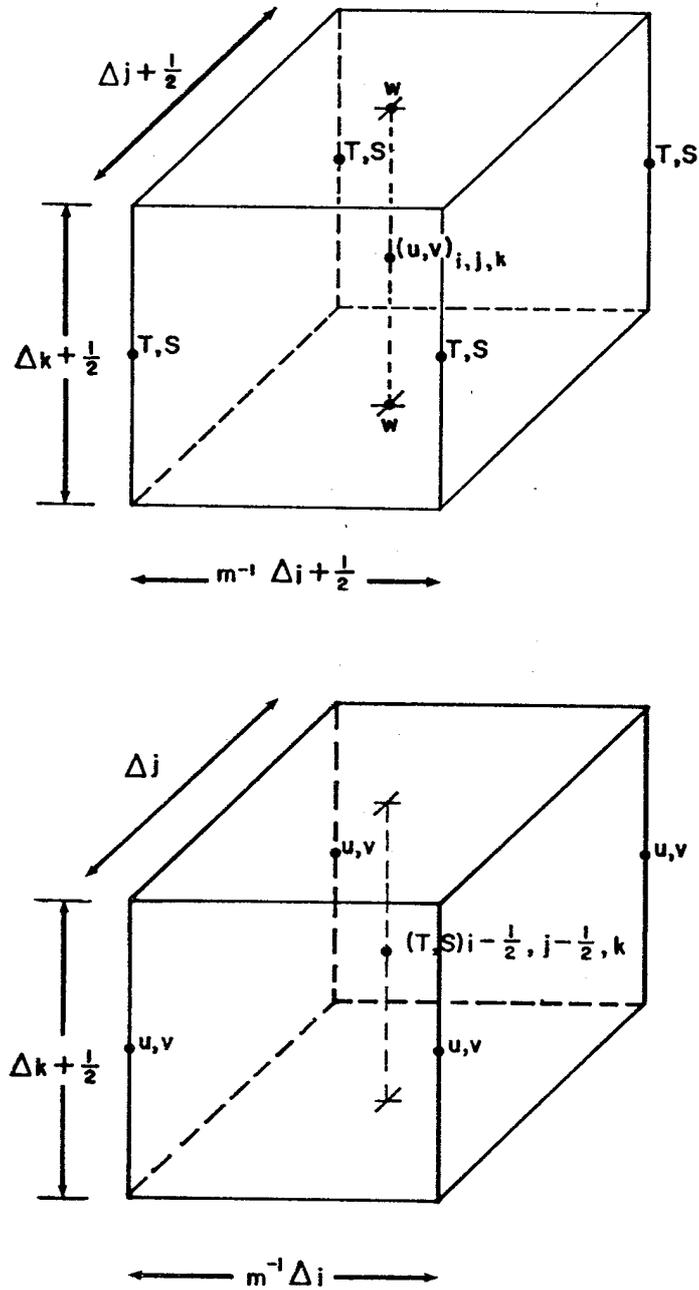


FIG. 3. a) The finite difference cell centered on the points at which the horizontal velocity is calculated. b) The finite difference cell centered on the temperature and salinity points.

図 3: a) 水平速度を計算する点を中心とした有限差分セル. b) 温度と塩分の点を中心とした有限差分セル.

する. この配置は, Richtmyer(1957) によって与えられた同様な時間依存問題の数値安定性の議論に基づいている.

数値格子の水平面における変数の設定により, (6.2) におけるコリオリ項は  $l+1$  と  $l-1$  の時間水準間の平均によって近似できる. この配置は, ソ連において大気の数値モデルに広く使われている (Marchuk, 1964). そのような配置は, 他の全ての安定基準が満たされるならば, コリオリ項を陰的 (implicit) に扱うということに等しく, 時間の幅は慣性周期 (inertial period) よりも長くとることができる. これは, 緯度と経度が  $4^\circ$  よりも大きなメッシュをもつ海岸格子 (coarse grid) に対して特に有利である. このタイプの海岸格子は, 調節 (adjustment) の第一の期間に計算を保持する海洋循環計算において便利であろう. より詳細な解は, 初期解をよりよい格子 (grid) に書き換えることによって得られる.

(6.3) の非線形項の詳細は下に示したようになる. 再び, 他に特に指定しない限り, 全ての指標は  $i, j, k, l$  であるとする.

$$V_1 A_1 u_1 = \Delta_{k+1/2} \Delta_{j+1/2} u_{i+1/2} \times [a \hat{u}_{i+1/2} - (\psi_{i+1/2, j-1/2} - \psi_{i+1/2, j+1/2}) / (H_1 \Delta_{j+1/2})] \quad (6.4)$$

$$V_2 A_2 u_2 = -\Delta_{k+1/2} \Delta_{j+1/2} u_{i-1/2} \times [a \hat{u}_{i-1/2} - (\psi_{i-1/2, j-1/2} - \psi_{i-1/2, j+1/2}) / (H_2 \Delta_{j+1/2})] \quad (6.5)$$

$$V_3 A_3 u_3 = \Delta_{k+1/2} \Delta_{i+1/2} u_{j-1/2} \times \left[ a \left( \frac{\hat{v}}{m} \right)_{j-1/2} - (\psi_{i+1/2, j-1/2} - \psi_{i-1/2, j-1/2}) / (H_3 \Delta_{i+1/2}) \right] \quad (6.6)$$

$$V_4 A_4 u_4 = -\Delta_{k+1/2} \Delta_{i+1/2} u_{j+1/2} \times \left[ a \left( \frac{\hat{v}}{m} \right)_{j+1/2} - (\psi_{i+1/2, j+1/2} - \psi_{i-1/2, j+1/2}) / (H_4 \Delta_{i+1/2}) \right] \quad (6.7)$$

$$V_5 A_5 u_5 = \alpha_1 u_{k-1/2} w_{k-1/2} / (m \Delta_{k+1/2}) \quad (6.8)$$

$$V_6 A_6 u_6 = -\alpha_1 u_{k+1/2} w_{k+1/2} / (m \Delta_{k+1/2}) \quad (6.9)$$

(6.4) ~ (6.7) において  $\hat{u}$  と  $\hat{v}$  の項は次のように定義される.

$$(\hat{u}, \hat{v})_k = (u, v)_k - \frac{1}{H} \sum_{q=1}^{KM} (u_q, v_q) \Delta_{q+1/2}$$

また, 深さの値  $H_1, H_2, H_3, H_4$  は次のように定義される.

$$H_1 = \text{maximum of } (H_{i,j} \text{ or } H_{i+1,j}) \quad (6.10)$$

$$H_2 = \text{maximum of } (H_{i,j} \text{ or } H_{i-1,j}) \quad (6.11)$$

$$H_3 = \text{maximum of } (H_{i,j} \text{ or } H_{i,j-1}) \quad (6.12)$$

$$H_4 = \text{maximum of } (H_{i,j} \text{ or } H_{i,j+1}) \quad (6.13)$$

連続の方程式から導かれる個別の診断関係式 (diagnostic relation) が,  $u, v$  の点と  $T, S$  の点での鉛直速度を計算するのに必要である.

$$\frac{\alpha_1}{\Delta_{k+1/2}}(w_{k-1/2} - w_{k+1/2}) = - \sum_{b=1}^4 V_b A_b \quad (6.14)$$

$V_1, V_2, V_3, V_4$  の項は (6.4) ~ (6.7) の括弧内で与えられる.

$T, S$  に対する予報方程式は, 運動方程式に比べてかなり簡単である. “box”method の基礎となるセルは図 3b に示される通りである. 速度の点は  $T, S$  の点と同じ平面にあるが, セルの角に位置している. セルの体積は次のように与えられる.

$$\alpha_2 = a^2 \Delta_{i+1} \Delta_{j+1} \Delta_{k+1/2} / m_{j+1/2} \quad (6.15)$$

この後に出てくる中で, 全指標は, 他に特に指定しない限りは,  $i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k$  であることがわかるだろう. 上付き指標  $l$  もまた後で理解されるだろう.  $T$  に対する予報方程式のみを書き下した.  $S$  に対する方程式は,  $T$  に対する予報方程式と同一である.

$$\begin{aligned} & \alpha_2 (T^{l+1} - T^{l-1}) / 2\Delta t \\ &= - \sum_{b=1}^6 V_b A_b T_b + A_v \frac{\alpha_2}{\Delta_{k+1/2}} [(T_{k-1} - T_k) / \Delta_k - (T_k - T_{k+1}) / \Delta_{k+1}]^{l-1} \\ & \quad + A_H a \left\{ m \Delta_{j+1} \Delta_{k+1/2} [(T_{i+3/2} - T_{i+1/2}) / \Delta_{i+3/2} - (T_{i+1/2} - T_{i-1/2}) / \Delta_{i+1/2}] \right. \\ & \quad \left. + \Delta_{i+1} \Delta_{k+1/2} [(T_{j-1/2} - T_{j+1/2}) / m \Delta_{j+1/2} - (T_{j+1/2} - T_{j+3/2}) / m \Delta_{j+3/2}] \right\}^{l-1} \end{aligned} \quad (6.16)$$

移流項の詳細は以下の様になる.

$$A_1 V_1 T_1 = \frac{a}{2} \Delta_{k+1/2} T_{i+1} (u_{j+1} \Delta_{j+3/2} + u_j \Delta_{j+1/2})_{i+1} \quad (6.17)$$

$$A_2 V_2 T_2 = \frac{-a}{2} \Delta_{k+1/2} T_i (u_{j+1} \Delta_{j+3/2} + u_j \Delta_{j+1/2})_i \quad (6.18)$$

$$A_3 V_3 T_3 = \frac{a}{2m_j} \Delta_{k+1/2} T_j (v_{i+1} \Delta_{i+3/2} + v_i \Delta_{i+1/2})_j \quad (6.19)$$

$$A_4 V_4 T_4 = \frac{-a}{2m_{j+1}} \Delta_{k+1/2} T_{j+1} (v_{i+1} \Delta_{i+3/2} + v_i \Delta_{i+1/2})_{j+1} \quad (6.20)$$

$$A_5 V_5 T_5 = \frac{\alpha_2}{m \Delta_{k+1/2}} T_{k-1/2} w_{k-1/2} \quad (6.21)$$

$$A_6 V_6 T_6 = \frac{-\alpha_2}{m \Delta_{k+1/2}} T_{k+1/2} w_{k+1/2} \quad (6.22)$$

$i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}$  の点に対応する  $W$  を計算するために, (6.14) と同様な方程式が, 上の (6.17) ~ (6.20) に与えられる  $V_b A_b$  ( $b = 1, 2, 3, 4$ ) とともに使われる.

各時間レベルにおいて,  $T^{l+1}$ ,  $S^{l+1}$  の予備値 (preliminary value) が, (6.16) とそれに対応する塩分の式に基づいて予測される. すると, 2 節の (2.9) 式で与えられる Eckart の公式を用いて  $\rho^{l+1}$  が計算される. それより, 水柱全体をテストして静的安定性を調べる.  $\rho''$  を, 海面圧力に起因する, その場所の温度と塩分に対応した密度としよう.

$$(\rho'')_k^{l+1} > (\rho'')_{k+1}^{l+1} \quad (6.23)$$

がある  $k$  で成り立つとすると, その情報は保持される. 水柱全体が調べられた後で, 温度と塩分が隣接する層の集団において均一になるように  $T^{l+1}$  と  $S^{l+1}$  がリセットされる.

$$(T'_k, T'_{k+1}, \dots, T'_{k+N}) = \frac{\sum_{k'=k}^{k+N} T_{k'} \Delta_{k'+1/2}}{\sum_{k'=k}^{k+N} \Delta_{k'+1/2}} \quad (6.24)$$

ここで,  $k \dots k+N$  は隣接する不安定層の指標である. (6.24) によって与えられる配置は水柱のうち不安定な部分の無限混合 (infinite mixing) に対応する. 同様の配置は塩分に対してもなされる. 以上が実行されると, 再び (6.23) が成り立つ点はまだあるが調べるために水柱全体が調べられる. 不安定性が現れた場合, 全過程を必要だけ何回も繰り返す.

速度成分と輸送流線関数の関係は以下によって与えられる.

$$a \sum_{k=1}^K \rho_0 u \Delta_{k+1/2} = -(\psi_{j-1/2} - \psi_{j+1/2})_{i+1/2} / \Delta_{j+1/2} \quad (6.25)$$

$$a \sum_{k=1}^K \rho_0 \left(\frac{v}{m}\right) \Delta_{k+1/2} = (\psi_{i+1/2} - \psi_{i-1/2})_{i+1/2} / \Delta_{i+1/2} \quad (6.26)$$

鉛直平均の速度成分を  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  と書こう. 成分  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  は, (6.25) と (6.26) の右辺に  $(\rho_0 a H)^{-1}$  と  $(\rho_0 a H)^{-1} m$  をそれぞれかけることにより, 輸送流線関数から得ることができる.

輸送流線関数に対する予想方程式は系を完結させる. 全変数は, 特に他に指定しなければ, 下付き指標  $i + \frac{1}{2}$ ,  $i + \frac{1}{2}$  を持つ.

$$\begin{aligned} & \Delta_{i+1} \Delta_{j+1} L(\psi^{l+1} - \psi^{l-1}) / 2\Delta t \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \Delta_{i+1/2} \left( \frac{FU_{i,j}}{m_j} - \frac{FU_{i,j+1}}{m_{j+1}} \right) + \Delta_{i+3/2} \left( \frac{FU_{i+1,j}}{m_j} - \frac{FU_{i+1,j+1}}{m_{j+1}} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \Delta_{i+1/2} (FV_{i+1,j} - FV_{i,j}) + \Delta_{i+3/2} (FV_{i+1,j+1} - FV_{i,j+1}) \right] \\ &- \Omega \left\{ \Delta_{i+1/2} \left[ n_j \left(\frac{\bar{v}}{m}\right)_{i,j} - n_{j+1} \left(\frac{\bar{v}}{m}\right)_{i,j+1} \right] \right. \\ &\quad \left. + \Delta_{i+3/2} \left[ n_j \left(\frac{\bar{v}}{m}\right)_{i+1,j} - n_{j+1} \left(\frac{\bar{v}}{m}\right)_{i+1,j+1} \right] \right. \\ &\quad \left. + \Delta_{j+1/2} [n_j (\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i,j})] + \Delta_{j+3/2} [n_{j+1} (\bar{u}_{i+1,j+1} - \bar{u}_{i,j+1})] \right\} \end{aligned} \quad (6.27)$$

(6.27) 左辺の演算子  $L$  は (6.28) によって定義される.

$$L\psi = \frac{m(\psi_{i+3/2} - \psi_{i+1/2}) \Delta_{j+1}}{(H_{i+1,j} \Delta_{j+1/2} + H_{i+1,j+1} \Delta_{j+3/2}) \Delta_{i+3/2} \Delta_{i+1/2}}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{m(\psi_{i+1/2} - \psi_{i-1/2})\Delta_{j+1}}{(H_{i,j}\Delta_{j+1/2} + H_{i,j+1}\Delta_{j+3/2})\Delta_{i+1/2}\Delta_{i+1/2}} \\
& + \frac{m(\psi_{j-1/2} - \psi_{j+1/2})\Delta_{i+1}}{m_{j+1/2}(H_{i,j}\Delta_{i+1/2} + H_{i+1,j}\Delta_{i+3/2})\Delta_{j+1/2}\Delta_{j+1/2}} \\
& - \frac{m(\psi_{j+1/2} - \psi_{j-3/2})\Delta_{i+1}}{m_{j+3/2}(H_{i,j+1}\Delta_{i+1/2} + H_{i+1,j+1}\Delta_{i+3/2})\Delta_{j+3/2}\Delta_{j+1}} \quad (6.28)
\end{aligned}$$

各時間の段階において,  $L\psi^{l+1} = M_{i+1/2,j+1/2}$  の形の 2 次方程式 (second order equation) は緩和 (relaxation) によって解くことができる. 緩和は, 海盆の存在する複雑な地形を扱うのに十分一般的な, いくつかの方法のうちの一つである. 緩和過程において, 前の時間段階に対する輸送流線関数の値は最初の推測値として使うことができる. この手続きは収束過程を非常に早める.

(6.27) における量  $FV$  はまだ定義されてなく,

$$\begin{aligned}
FU_{ij} = & \frac{a\rho_0}{H_{ij}} \sum_{k=1}^{K_{ij}} (\Delta_{k+1/2} C_k / \alpha_1) \\
& - \frac{g}{H_{ij}} \sum_{k=1}^{K_{ij}} \frac{m\Delta_{k+1/2}}{\Delta_{i+1/2}} \left\{ \Delta_k (\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}) \Big|_{k=1} + \sum_{q=2}^k \Delta_q (\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2})_{q-1/2} \right\} \quad (6.29)
\end{aligned}$$

$FV$  に対する表現は正確に対応する形を持つ. 前で述べたのと同様に,  $q$  は  $k$  に関する和の内部の疑似的鉛直指標に相当する.

今までで, 数値積分の手続きを要約することができる. 温度と塩分の新しい値は (6.16) で与えられる形の方程式から予測できる. 関係式 (6.2) と  $v$  成分の対応する式は,  $(u', v')^{l+1}$  を予測するのに役立つ. すると, これらの成分は  $(\hat{u}, \hat{v})^{l+1}$  の新しい値を見付けるのに使われる.

$$(\hat{u}, \hat{v})^{l+1} = (u', v')^{l+1} - \frac{1}{H} \sum_{k=1}^K (u', v')^{l+1} \Delta_{k+1/2} \quad (6.30)$$

$(\bar{u}, \bar{v})$  の予測値は輸送流線関数の新しい値を用いて (6.25) と (6.26) から得ることができる.

ひとたび予報変数 (predicted variables) に対する新しい時間水準が求めれば, 連続方程式と状態方程式に基づく診断関係式を用いて, 新しい時間水準に対する  $w$  と  $\rho$  が求まる. 経験より, leap-frog time 差分法は隣接する時間水準間に深刻な分裂 (split) をもたらすことがわかった (Lilly, 1965). このことは, 中心差分が予想方程式を時間に関して一次から二次へ人為的に変えてしまうという事実によってもたらされる. Arakawa の示唆するところに従うと, この困難さは, 中央の時間水準を前方の時間

水準で周期的に置き換えることにより回避される. この手続きは, 分裂が重大になる前に正式な間隔での二つの解のうち一つを捨てることに等しい. 23 の leap-frog 時間段階と一つの前方時間段階の比は大量計算に使われる典型的な値である.

## 7 有限差分方程式の境界条件

境界条件における基本情報は、指標  $i + \frac{1}{2}$ ,  $i + \frac{1}{2}$  で与えられる各  $T, S$  の点での、海面から下に向かって積まれたセルの数である。そのセルの数を  $K_{i+1/2, j+1/2}$  で与えられるとすると、

$$H_{i+1/2, j+1/2} = \sum_{k=1}^{K_{i+1/2, j+1/2}} \Delta_k \quad (7.1)$$

すると、速度の点におけるセルの数は次のように与えられる。

$$K_{ij} = \text{Minimum of } (K_{i+1/2, j+1/2}, K_{i-1/2, j+1/2}, K_{i-1/2, j-1/2}, K_{i+1/2, j-1/2}) \quad (7.2)$$

$i, j$  での深さは (7.1) に対応する公式に従って計算することができる。速度の境界条件は非常に簡単で、

$$(u, v)_{i,j} = 0 \quad k > K_{i,j} \quad (7.3)$$

であり、輸送流線関数の場合は、

$$\psi_{i+1/2, j+1/2} = \text{constant}, \quad K_{i+1/2, j+1/2} = 0 \quad (7.4)$$

$$\psi_{i+1/2, j} - \psi_{i-1/2, j} = 0, \quad K_{ij} = 0 \quad (7.5)$$

$$\psi_{i, j-1/2} - \psi_{i, j+1/2} = 0, \quad K_{ij} = 0 \quad (7.6)$$

である。(7.4) の constant は大陸と各島の海岸で異なった値を持つ。これらの値を計算する手続きは 3 節で与えられる。

温度と塩分の場合、境界条件は壁に隣接する各点に対して設定しなければならない。不規則な海底地形のゆえに、水平面のある一つの点に対して境界条件はある水準から次の水準に変わり得る。初めにテストを行う。

$$k > K_{i+1/2+A, j+1/2+B} \quad (7.7)$$

とすると、

$$T_{i+1/2+A, j+1/2+B, k} = T_{i+1/2, j+1/2, k} \quad (7.8)$$

が成り立つ。ここで、

$$(A, B) = (1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1) \quad (7.9)$$

である。(7.7) によるテストは、隣接する温度塩分の点で  $k$  が水準の最大数を上回るかどうかを示している。このことは隣接した壁が存在することを示す。(7.7) ~ (7.9) に従った境界条件を設定するのに使われる厳密な計算手続きは、当然使われる計算装置に依存するだろう。計算の進行する間にテストするのが最適な場合もある。別の場合では、表の形で初期検査の際に実行されたテストの結果を蓄えておくのがより効果的な場合もある。その表は境界条件を設定するのに使うことができるだろう。

## 8 島の有限差分公式

島の公式化は、多少扱いにくいものの、簡単である。手法は、3節の連続方程式に関して与えた概略に従う。 $R$ を島の数とすると、流線関数に対する $R+1$ 個の分割場が必要である。

$$\psi^l = \psi_0^l + \sum_{r=1}^R \mu_r^l \psi_r \quad (8.1)$$

$\psi_0$ のみが時間の関数であり、残りの場 $\psi_r$ は固定されたままで、計算機の永久記憶に蓄えられる。各島、各時間水準に対して振幅 $\mu_r$ を再計算することだけが必要である。

$G$ を次のようなある水平ベクトルとする。

$$\mathbf{G} = iG^x + jG^y \quad (8.2)$$

数値的に線積分に相当するものを演算子 $B$ で定義すると、

$$B\mathbf{G} = \sum_{i=I}^{I+\Delta I} [G_{i,J}^x - G_{i,J+\Delta J}^x] \frac{\Delta_{i+1/2}}{m} + \sum_{j=J}^{J+\Delta J} [G_{I+\Delta I,j}^y - G_{I,j}^y] \Delta_{j+1/2} \quad (8.3)$$

となる。線積分は $i, j$ 平面において反時計周りにとる。(8.3)で与えられる積分は単純な長方形の経路である。島の周囲では、近隣の他の島や大陸境界のために、単純な長方形の経路を作れない場合もある。そのような場合では、様々な形を持つ、いくつかの隣り合う長方形の周囲を経路としてとる必要があるだろう。

(3.6)に対応して、次のような鉛直平均流ベクトルを定義することができる。

$$\bar{\mathbf{v}}^l = \bar{\mathbf{v}}_0 + \sum_{r=1}^R \mu_r^l \bar{\mathbf{v}}_r \quad (8.4)$$

ここで、

$$\bar{\mathbf{v}} = (aH)^{-1} [-i(\psi_{i,j-1/2} - \psi_{i,j+1/2})/\Delta_{j+1/2} + jm(\psi_{i+1/2,j} - \psi_{i-1/2,j})/\Delta_{i+1/2}] \quad (8.5)$$

である。閉じた経路周りの線積分を表すために(8.3)で与えられる演算子を使うと、(3.10)の差分形に相当するものを次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} B[1 + 2\Omega n \Delta t \mathbf{k} \times ( \quad )] (\bar{\mathbf{v}}_0^{l+1} + \sum_{r=1}^R \mu_r^{l+1} \bar{\mathbf{v}}_r) \\ = B[1 - 2\Omega n \Delta t \mathbf{k} \times ( \quad )] \bar{\mathbf{v}}^{l-1} + 2\Delta t B(iFU + iFV)^l \end{aligned} \quad (8.6)$$

$FU$ と $FV$ の項は前の節の(6.29)で既に定義した。各島周りの閉じた経路に対して、(8.6)と同様な $R$ 個の方程式が書ける。(8.6)の右辺は既知であるので、これら $R$

個の方程式は  $\mu_r$  を求めるのに十分な線形方程式系を構成する. (8.6) 左辺における係数の行列は, 時間に関してあまり変化しないので, 計算の初めに決定させ, 反転し, メモリーに蓄えることができる. ひとたび (8.6) の左辺が各時間段階において計算されれば,  $\mu_r^{+1}$  は簡単な行列のかけ算によって計算できる.

## 9 本手法を用いた計算の実行

本手法がどのように適用されるかを説明するために、二つの例を手短に述べよう。詳細な結果は別のところで与えるつもりである。M.D.Cox によってなされた最初の計算に対する格子の配置は図4に示される通りである。範囲はインド洋を扱い、アジア大陸から南へ  $18^{\circ}\text{S}$  まで及ぶ。西はアフリカで境界を接し、東は  $102^{\circ}\text{S}$  の経線、マレー半島で境を接する。計算の第一段階は  $4^{\circ}$  のメッシュと、鉛直方向は6つの水準で行った。気候地図から持ってきた温度場、塩分場、風応力場はその年の季節の関数として海面で指定する。計算の第一段階では、時間ステップを12時間にとることができる。各時間ステップは UNIVAC 1108 計算機で計算するのに10秒要する。いくつかの場のみが計算機の 65K 高速アクセスメモリーに永久的に蓄えられる。大部分の場は磁気ドラムに保持し、必要なときにメモリーを通じて回帰させる。磁気ドラムからメモリーへの移動は計算の進行中になされ、それゆえ移動の過程で余分な時間を必要としない。

経験から、 $A_M$  は大きな値で始め、格子の精度がうまく上がるに従って、その値を小さくするのが有利である。水平拡散係数  $A_H$  は計算全体にわたって小さい値に保つ。この手続きを用いる動機としては、密度場は非常にゆっくり順応する一方で、速度場はどんな横摩擦係数の変化に対しても比較的速く順応するということがある。新たな計算の段階では、中央時間ステップの次にくる前方時間ステップで始めなけ

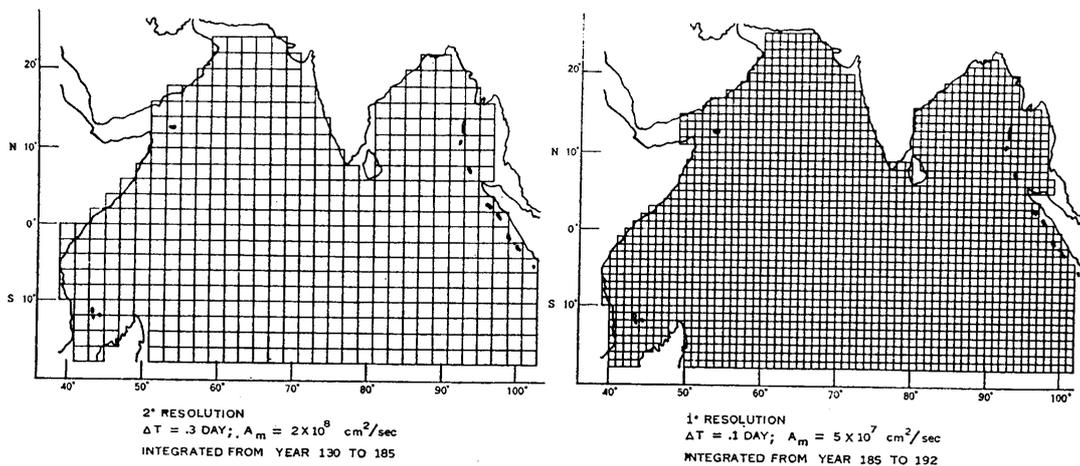


FIG. 4. Numerical grid used for calculation of the seasonal changes in circulation of the Indian Ocean. (Left)  $2^{\circ}$  resolution and (right)  $1^{\circ}$  resolution.

図4: インド洋の循環の季節変化を計算するのに使用する数値格子。(左) 解像度  $2^{\circ}$  (右) 解像度  $1^{\circ}$

ればならない。

計算の第二, 第三段階における格子の配置を図4に示す。最終的なメッシュの大きさは緯度と経度で  $1^\circ$  である。開境界に沿って, 輸送流線関数を Welander(1959) によって計算されたスヴェルドラップ輸送の図から持ってくる。鉛直断面における温度と塩分の分布は, その範囲を含み, 世界海洋データセンター A (World Oceanographic Data Center A) によって供給される海洋データ (hydrographic data) から持ってきた。 $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  を速度成分の鉛直平均からの偏差とする。境界を通しての全輸送は輸送流線関数により決定し,  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  の境界に対して法線方向の勾配は 0 に設定する。この条件により, 入ってくる流れと出ていく流れの鉛直断面図は境界で指定した密度場に対して地衡流的に順応する。

本モデルを用いてなされた二番目の計算は, 南半球の海洋における熱塩循環研究の一部である。質量輸送流線関数の最終形態を図5に示す。これは, 永続的な変動の効果を取り除くために実行の最終部分に対してとられた平均に基づいている。海盆は球形の地形を含み, 赤道から  $70^\circ S$  まで広がり, 子午面の壁の  $60^\circ$  付近に切れ目がある。切れ目において循環的な境界条件を仮定するので, 入ってくる流れは正確に出ていく流れに等しい。切れ目を通した全流れは, 3節で概要を述べた Kamenkovitch の方法に従って計算されなければならない。計算は回転率を地球のそれよりも大きさが 1 オーダー小さい回転率で実行する。海洋循環は, 海面にかかる風応力分布と密度勾配の両方によって駆動されている。初め, 全密度海面は平坦であり流体は完全に静止している。遅い回転が西岸境界流の非現実的な幅を説明している。

計算は平坦な海底に対して実行する。全ての横の境界に沿って余分な解像度を用意するために可変のメッシュ幅を使用する。壁付近の最小のメッシュ幅は約  $1^\circ$  である。一方, 内部の格子点はおおよそ  $6^\circ$  間隔で位置する。鉛直方向には 8 つの水準が存在する。典型的な時間ステップは一日の  $1/10$  であり, 図5の平衡解はモデル時間で 30 年後である。この計算には Univac 1108 で全部で 200 時間を要する。地球に関して正しい回転率を用い現実的な場合を実験するには, さらなる計算が必要である。その理由は, 平衡に達するまでの時間がより長く, 境界流はより細く, 正確な解像度のためにはさらに格子点が必要だからである。

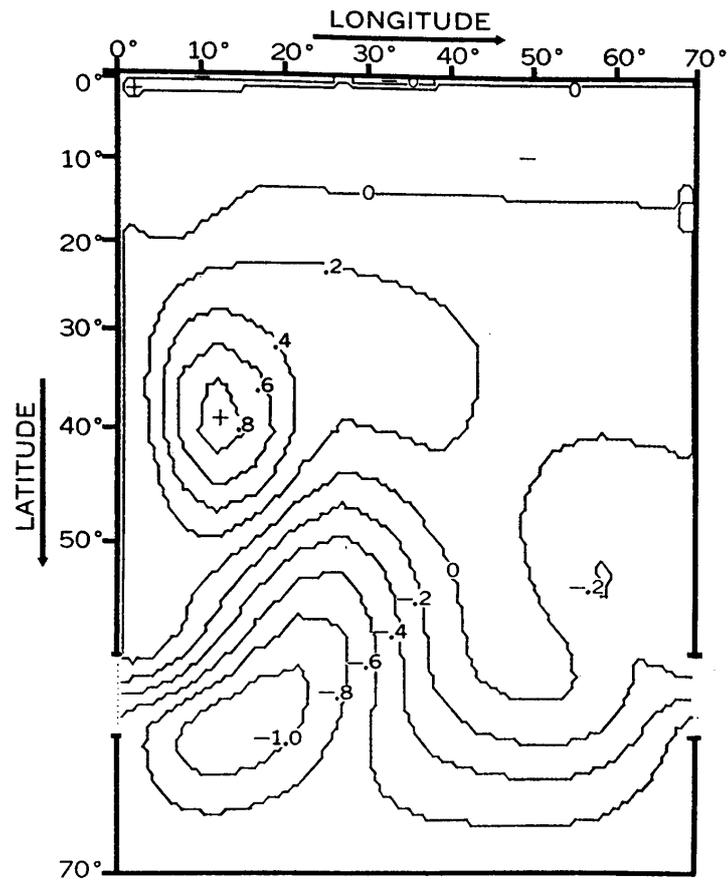


FIG. 5. The pattern of transport stream function obtained in a theoretical study of the Antarctic Circumpolar Current.

図 5: 南極周極流の理論的研究において得られた輸送流線関数のパターン

## 付録

普遍的スキームは長期にわたって水力学システムのふるまいを研究するのに有用であるということに気を付けるために、エネルギー平衡について注意深い点検がなされるべきである。本論文で与えられる数値スキームの選択は主にエネルギーの考察を動機としている。流体の重要な特性を極端に弱めることなしに、Phillips(1959)によって記述された特別な形態の不安定を回避できるのはエネルギー整合的スキームだけであろう。

今、 $K$  を次のようにおく。

$$K = \bar{K} + \hat{K} \quad (\text{A.1})$$

ここで、

$$\bar{K} = \rho_0(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)/2 \quad (\text{A.2})$$

$$\hat{K} = \rho_0(\hat{u}^2 + \hat{v}^2)/2 \quad (\text{A.3})$$

とする。 $\bar{K}$  は外部モード (external mode) の運動エネルギー、 $\hat{K}$  は内部モード (internal mode) の運動エネルギーとみなすことができる。 $\{ \}$  は閉じた海盆における体積積分を表すとする。(2.28) の左辺に  $m\psi/(a^2 H \rho_0)$  を掛けて体積全体にわたり積分すると、

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\psi m}{a^2 H \rho_0} [(m\psi_{\lambda t}/H)_\lambda + (\psi_{\varphi t}/Hm)_\varphi] \right\} \\ &= \left\{ \frac{m}{a^2 H \rho_0} [(m\psi\psi_{\lambda t}/H)_\lambda + (\psi\psi_{\varphi t}/Hm)_\varphi] \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{m^2}{a^2} \psi_{\lambda t}^2 / H^2 \rho_0 + \frac{1}{a^2} \psi_{\varphi t}^2 / H^2 \rho_0 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

右辺第一項は、側面境界に沿って  $\psi = 0$  であるという境界条件から消える。従って、

$$\{\bar{K}_t\} = - \left\{ \frac{\psi m}{a^2 H \rho_0} [(m\psi_{\lambda t}/H)_\lambda + (\psi_{\varphi t}/Hm)_\varphi] \right\} \quad (\text{A.5})$$

(2.28) の右辺に  $-\psi m/(a^2 H \rho_0)$  を掛けると、

$$\{\bar{K}_t\} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \quad (\text{A.6})$$

を得る。ここで、

$$I_1 = \left\{ \frac{\psi m}{a^2 H} \left[ \left( \frac{a}{H} \int_{-H}^0 \mathcal{L}v dz \right)_\lambda - \left( \frac{a}{Hm} \int_{-H}^0 \mathcal{L}u dz \right)_\varphi \right] \right\} \quad (\text{A.7})$$

$$I_2 = \left\{ \frac{\psi m}{a^2 H} \left[ \left( \frac{mn}{H} \int_{-H}^0 u^2 dz \right)_\lambda + \left( \frac{n}{H} \int_{-H}^0 uv dz \right)_\varphi \right] \right\}$$

$$I_3 = \left\{ \frac{-\psi m}{a^2 H} \left[ \left( \frac{2}{H} \int_{-H}^0 F^\varphi dz \right)_\lambda - \left( \frac{a}{Hm} \int_{-H}^0 F^\lambda dz \right)_\varphi \right] \right\} \quad (\text{A.8})$$

$$I_4 = \left\{ \frac{\psi m}{a^2 H} \left[ \left( \frac{1}{H} \int_{-H}^0 (p - p_s)_\varphi dz \right)_\lambda - \left( \frac{1}{H} \int_{-H}^0 (p - p_s)_\lambda dz \right)_\varphi \right] \right\} \quad (\text{A.9})$$

である.  $p - p_s$  の完全な表現は (2.24) で与えられる.

$\hat{K}$  の表現を書き下すためには, (2.31) と (2.32) にそれぞれ  $\rho_0 \hat{u}$  と  $\rho_0 \hat{v}$  を掛けなければならない. それらの結果の和を全体積にわたって積分すると,

$$\{\hat{K}_i\} = I_5 + I_6 + I_7 + I_8 \quad (\text{A.10})$$

$$I_5 = -\{\rho_0 \hat{u} \mathcal{L}u + \rho_0 \hat{v} \mathcal{L}v\} \quad (\text{A.11})$$

$$I_6 = \left\{ \frac{\rho_0 m n}{a} (\hat{u} v v - \hat{v} u u) \right\}$$

$$I_7 = \{\rho_0 \hat{u} F^\lambda + \rho_0 \hat{v} F^\varphi\} \quad (\text{A.12})$$

$$I_8 = \left\{ \frac{\hat{u} m}{a} (p - p_s)_\lambda + \frac{\hat{v}}{a} (p - p_s)_\varphi \right\} \quad (\text{A.13})$$

を得る. 本モデルがエネルギー的に矛盾していないことを証明するために, 我々は次のことを示したい. (a) 差分方程式の非線形項が運動エネルギーの全量に対して正味の効果を持たない. (b) ポテンシャルと運動エネルギーの交換項 (exchange term) が正確に見積もられる. 必要条件 (a) は次が成り立つとき満足する.

$$I_1 + I_5 = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$I_2 + I_6 = 0$$

必要条件 (b) は次に等しい.

$$\begin{aligned} I_4 + I_8 &= -\{g\rho w\} \\ &= -\left\{ g w_z \int_{-z}^0 \rho dz \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

(A.14) と (A.15) が本数値スキームに対して成り立つのを証明することには少し複雑な代数的操作を伴う. 導出を簡単化するために我々は Lilly(1964) と同じ表記とアプローチを使う.

次のように置く.

$$2\bar{\eta}^\lambda = \eta_{i+1/2} + \eta_{i-1/2} \quad (\text{A.16})$$

$$\delta_\lambda \eta = \eta_{i+1/2} - \eta_{i-1/2} \quad (\text{A.17})$$

次の規則がある.

$$\eta \delta_\lambda \beta + \overline{\beta \delta_\lambda \eta}^\lambda = \delta(\bar{\eta}^\lambda \beta) \quad (\text{A.18})$$

$$\overline{\bar{\eta}^\lambda \beta}^\lambda - \eta \bar{\beta}^\lambda = \frac{1}{4} \delta_\lambda (\beta \delta_\lambda \eta) \quad (\text{A.19})$$

(A.18) と (A.19) は単純に (A.16) と (A.17) を代入することにより容易に確かめられる.  $\lambda$  を  $\varphi$  に代えても, 同様なやり方で (A.16) ~ (A.19) が成り立つことは明らかである. (A.18) で  $\beta$  に  $\bar{\zeta}^\varphi$  を代入して (A.19) を用いると

$$\eta \delta_\lambda \bar{\zeta}^\lambda + \overline{\bar{\zeta}^\varphi \delta_\lambda \eta}^{\varphi\lambda} = \delta_\lambda (\bar{\eta}^\lambda \bar{\zeta}^\varphi) + \frac{1}{4} \delta_\varphi (\overline{\bar{\zeta}^\varphi \delta_\lambda \eta})^\lambda \quad (\text{A.20})$$

(A.18),(A.19)の場合と同様に,(A.20)で与えられる規則は方程式の全ての点で  $\varphi$  と  $\lambda$  を交換しても成り立つ.

$I_1$  の表現は (6.27) に  $\psi$  を掛けて半整数の点全部で和をとることにより得られる.  $m/H$  は体積積分で消えるので, 必要なのは  $a\psi m/H$  ではなく  $a\psi$  を掛けることだけである.

$$I_1 = - \sum_{i+1/2} \sum_{j+1/2} a\psi \left[ \overline{\left( \frac{\mathcal{L}u}{m} \Delta_{i+1/2} \right)^\lambda} - \delta_\lambda \overline{(\mathcal{L}v \Delta_{j+1/2})^\varphi} \right] \quad (\text{A.21})$$

記号の付いていない上線は鉛直平均を表し, 記号付き上線は (A.16) によって定義される 2 点水平平均である.

$$\begin{aligned} I_1 = & -a \sum_{i+1/2} \sum_{j+1/2} \left[ \overline{\left( \frac{-\delta_\varphi \psi^\lambda}{\Delta_{j+1/2}} \mathcal{L}u + \frac{m \delta_\lambda \psi^\varphi}{\Delta_{i+1/2}} \mathcal{L}v \right) \Delta_{i+1/2} \Delta_{j+1/2} m^{-1}}^{\varphi\lambda} \right. \\ & + \delta_\varphi \left( \overline{\psi^\varphi \frac{\mathcal{L}u}{m} \Delta_{i+1/2}} \right)^\lambda - \delta_\lambda \left( \overline{\psi^\lambda \mathcal{L}v \Delta_{j+1/2}} \right)^\varphi \\ & \left. + \frac{1}{4} \delta_\lambda \left( \delta_\lambda \delta_\varphi \psi \cdot \frac{\mathcal{L}u}{m} \Delta_{i+1/2} \right) - \frac{1}{4} \delta_\varphi \left( \delta_\lambda \delta_\varphi \psi \cdot \mathcal{L}v \Delta_{j+1/2} \right) \right] \quad (\text{A.22}) \end{aligned}$$

7 節で与えられる輸送流線関数の境界条件は,(A.22) の後ろ 4 項が消えるような条件である. また,(6.25) と (6.26) から次が得られることに注意する.

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{a\rho_0 H} \left( -\frac{\delta_\varphi \psi^\lambda}{\Delta_{j+1/2}}, m \frac{\delta_\lambda \psi^\varphi}{\Delta_{i+1/2}} \right) \quad (\text{A.23})$$

(A.23) を (A.22) に代入し, 積分で消える項を捨てると,

$$I_1 = - \sum_{i+1/2} \sum_{j+1/2} a^2 \overline{[\rho_0 H (\bar{u} \mathcal{L}u + \bar{v} \mathcal{L}v) \Delta_{i+1/2} \Delta_{j+1/2} m^{-1}]^{\varphi\lambda}} \quad (\text{A.24})$$

となる. すると今  $I_1$  と  $I_5$  を結びつけて次のように書くことができる.

$$I_1 + I_5 = - \sum_{i+1/2} \sum_{j+1/2} \sum_k a^2 \rho_0 \overline{[(\bar{u} + \hat{u}) \mathcal{L}u + (\bar{v} + \hat{v}) \mathcal{L}v] \Delta_{i+1/2} \Delta_{j+1/2} \Delta_{k+1/2} m^{-1}}^{\varphi\lambda} \quad (\text{A.25})$$

このとき次の関係を用いた.

$$H \bar{u} \mathcal{L}u = \sum_k \bar{u} \mathcal{L}u \Delta_{k+1/2} \quad (\text{A.26})$$

(6.3) から (A.25) は次のように書けることがわかる.

$$\begin{aligned} I_1 + I_5 = & - \sum_{i+1/2} \sum_{j+1/2} \sum_{k+1/2} a^2 \alpha_1^{-1} \rho_0 \left[ (\bar{u} + \hat{u}) \sum_{b=1}^6 m V_b A_b u_b \right. \\ & \left. + (\bar{v} + \hat{v}) \sum_{b=1}^6 m V_b A_b v_b \right] \Delta_{i+1/2} \Delta_{j+1/2} \Delta_{k+1/2} m^{-1} \quad (\text{A.27}) \end{aligned}$$

ここで,

$$\sum_{b=1}^6 V_b A_b = 0 \quad (\text{A.28})$$

は各セルに対する局所的連続方程式である.  $I_1 + I_5$  が 0 であることを証明するには, 4 節で与えた議論を繰り返すだけで良い.  $u_b$  と  $v_b$  が隣接するセルの間の算術平均として定義されるとすれば, 非線形項は全体積の平均運動エネルギーに変化を与えないであろう. これにより (A.14) の導出は完成する. (A.14a) を導出するには,  $I_1$  を  $I_2$  で置き換え,  $I_5$  を  $I_6$  で置き換えて, (A.21) ~ (A.25) 示されるのと同じ手続きに従う. 証明は (A.14) に対するそれと極めて類似するので, 詳細な方程式を書き下すことはしない.

次に圧力項を調べる. (6.27) に  $\psi$  を掛けると, (A.21) ~ (A.24) の議論を繰り返して次式が示せる.

$$I_4 = - \sum_{i+1/2} \sum_{j+1/2} \sum_k \left[ \frac{\bar{u}m}{a} \frac{\delta_\lambda(\overline{p-p_s})^\varphi}{\Delta_{i+1/2}} + \frac{\bar{v}}{a} \frac{\delta_\varphi(\overline{p-p_s})^\lambda}{\Delta_{j+1/2}} \right] \overline{\Delta_{i+1/2} \Delta_{j+1/2} \Delta_{k+1/2} m^{-1}}^{\varphi\lambda} \quad (\text{A.29})$$

(6.2) に  $\hat{u}$  を掛け,  $v'$  成分の対応する式に  $\hat{u}$  を掛けてそれらの結果を組み合わせると,

$$I_4 = - \sum_{i+1/2} \sum_{j+1/2} \sum_k \left[ \frac{\hat{u}m}{a} \frac{\delta_\lambda(\overline{p-p_s})^\varphi}{\Delta_{i+1/2}} + \frac{\hat{v}}{a} \frac{\delta_\varphi(\overline{p-p_s})^\lambda}{\Delta_{j+1/2}} \right] \overline{\Delta_{i+1/2} \Delta_{j+1/2} \Delta_{k+1/2} m^{-1}}^{\varphi\lambda} \quad (\text{A.30})$$

を得る. 従って和  $I_4 + I_8$  は  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  を完全な成分  $u$ ,  $v$  でそれぞれ置き換えた  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  の式と同様の表現となる.

次に (A.20) を利用する. 結果は次のようになる.

$$I_4 + I_8 = \sum_{i+1/2} \sum_{j+1/2} \sum_k (p-p_s) \Delta_{k+1/2} \left[ \delta_\lambda(\overline{u\Delta_{j+1/2}})^\varphi + \delta_\varphi\left(\frac{v}{m}\overline{\Delta_{i+1/2}}\right)^\lambda \right] \quad (\text{A.31})$$

$i + \frac{1}{2}$ ,  $j + \frac{1}{2}$  の点における連続方程式は

$$am^{-1} \Delta_{i+1} \Delta_{j+1} \frac{\delta_z w}{\Delta_{k+1/2}} = -\delta_\lambda(\overline{u\Delta_{j+1/2}})^\varphi - \delta_\varphi\left(\frac{v}{m}\overline{\Delta_{i+1/2}}\right)^\lambda \quad (\text{A.32})$$

(A.32) を (A.31) に代入して,

$$I_4 + I_8 = \sum_{i+1/2} \sum_{j+1/2} \sum_k a^2 [(p-p_s) \delta_z w] \Delta_{i+1} \Delta_{j+1} m^{-1} \quad (\text{A.33})$$

(A.33) の表現は連続な場合としての (A.15) と同等であり, 導出は完成する.

## 文献

- Arakawa,A.,1966: Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion:two-dimensional incompressible flow.part 1. *J.Comput.Phys.*,1,119-143.
- Bryan,K.,1966: A scheme for numerical integration of the equation of motion on an irregular grid free of nonlinear instability. *Mon.Wea.Rev.*,94,39-40.
- Bryan,K.,and Cox,M.D.,1967: A numerical investigation of oceanic general circulation. *Tellus*,19,54-80.
- Bryan,K.,and Cox,M.D.,1968: A nonlinear model of an ocean driven by wind and differential heating:part 1. Description of the three-dimensional velocity and density fields. *J.Atmos.Sci.*,25,945-967.
- Crowley,W.P.,1968, *J.Comput.Phys.*,3,111.
- Eckart,C.,1958, *Amer.J.Sci.*,256,225.
- 遠藤昌宏, 1997: 海洋大循環のシミュレーション. 岩波講座 地球惑星科学 7 数値地球科学, 岩波書店, 127-154.
- Fromm,J.E.,1963, Los Alamos Report,2910.
- Gill,A.E.,1968: Similarity theory and geostrophic adjustment. *Q.J.R.Met.Soc.*,94,586-588.
- Kamenkovitch,V.M.,1962, *Trudy Instituta Okeanologii,Akad.Nauk SSSR* 56,241.
- Leith,C.E.,1965: Numerical simulation of the earth's atmosphere. *Methods in Computational Physics*,vol.4, Academic Press,New York,1-28.
- Lilly,D.K.,1964: Numerical solutions for the shape-preserving two-dimensional thermal convection element. *J.Atmos.Sci.*,21,83-98.
- Lilly,D.K.,1965: On the computational stability of numerical solutions of time-dependent non-linear geophysical fluid dynamics problems. *Mon.Wea.Rev.*,93,11-25.

- Marchuk,G.I.,1964, Dokl.Akad.Nauk SSSR,155,1062.
- Noh,W.F.,1965, Methods in Computational Physics,vol.3, Academic Press,New York.
- Phillips,N.A.,1959, Contribution to “The Atmosphere and the Sea in Motion.” Rockefeller Press,New York,501.
- Richtmyer,R.D.,1957, “Difference Methods for Initial Value Problems.” Wiley(Interscience),New York.
- Saint-Guilly,B.,1956, Ann.L’Inst.Ocean.(Paris),33,1.
- Sarkisyan,A.S.,1962, Izv.Akad.Nauk SSSR,Ser.Geofiz,6,554.
- Sarkisyan,A.S.,1962, Okeanologia 11:3,393.
- 高野健三, 1974: 大規模な海水運動の数値実験. 海洋学講座 1 海洋物理学 I 寺本俊彦編, 東京大学出版会, 35-67.
- Welander,P.,1959, Contribution to “The Atmosphere and the Sea in Motion.” Rockefeller Press,New York,95.