

数值予報モデルのための気象力学
Dynamic Meteorology
for Numerical Prediction Model

森川 靖大

Morikawa Yasuhiro

北海道大学理学部 地球科学科
地球流体力学研究室

2003 年 2 月 10 日

要旨

数値予報モデル, 特に大気大循環モデル (AGCM; *Atmospheric General Circulation Model*) の理解およびその作成には, 大気の力学の理解が不可欠である. 本論文では, “Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1979: *Numerical Prediction and Dynamic Meteorology*. John Wiley & Sons, 477pp” をもとに, 数値予報/GCM のために必要となる気象力学の基礎を紹介する.

本論文は 5 つの章で構成されており, それぞれ以下の内容を取り扱っている.

第 1 章では, 気象予報の発達の歴史から, 数値予報誕生のいきさつを紹介する. また, 数値予報モデルの気象予報に対する重要性を述べる.

第 2 章では気象力学の基礎となっている様々な物理法則を紹介する. 始めに, 支配方程式系を構成する運動方程式, 連続の式, 状態方程式, 熱力学第 1 法則を紹介する. 次にその方程式系が球面座標系ではどのように扱われるのか, また, 平面地図に投影した際にどのように扱われるのかを議論する. 鉛直座標として高さではなく圧力や温位を用いた場合の方程式系についても議論する. これらの座標系を考えるのは, これらの方程式系がデカルト直線直交座標系よりも数値予報モデルに向いているためである. その後はエネルギーの式を考え, 運動エネルギーと位置エネルギーの変換を議論する. 最後に, 渦度の式と発散の式を紹介する. これらの式は大気の現象を表現する上で便利であり, 数値予報モデルにもよく利用される.

第 3 章では大気の波動に注目した議論を行う. 線形化した方程式から様々な大気の波動の分散関係を導出し, 波動の性質を考察する. 具体的には, 音波, 内部重力波, 浅水波, 慣性重力波, ロスビー波を取り扱う. これらの情報は, 安定した数値予報モデルを作成するために必要となる.

第 4 章ではスケールの解析を行うことで, 順圧大気と傾圧大気における準地衡流の方程式系を導く. これらの方程式系は, 中緯度総観規模における大気の運動を良く表すものとして, 数値予報モデルの結果の解釈に用いられている. また, 熱帯や惑星規模の運動を良く表す方程式系も紹介する.

第 5 章では第 3 章の話をもとに発展させ, 順圧大気と傾圧大気の安定性について議論する. 順圧大気については, 具体的にいくつかの風速プロファイルを考え, 大気的不安定の条件を考察する. 傾圧大気については, 簡単な線形シアの場合と, 2 層モデルの場合の大気的不安定を議論する. これらは実際に数値予報モデルを利用する際に基礎となる知識である.

目次

第 1 章	はじめに	1
第 2 章	支配方程式系	3
2-1	第 2 章の概要	3
2-2	運動方程式	4
2-3	連続の式	6
2-4	状態方程式	8
2-5	熱力学第一法則	9
2-6	完全系の方程式	14
2-7	座標系	15
2-8	地図投影法	24
2-8-1	極射影図法	24
2-8-2	メルカトル図法	27
2-8-3	ランベルト正角投影図法	27
2-8-4	追記	28
2-9	より使いやすい鉛直座標系	34
2-9-1	圧力鉛直座標系	36
2-9-2	規格化圧力座標系 $\sigma = p/p_s$ (Phillips, 1957)	37
2-9-3	等エントロピー鉛直座標系	39
2-10	エネルギーの関係式	50
2-10-1	運動エネルギー	50
2-10-2	位置エネルギー	50
2-11	有効位置エネルギー	61
2-12	渦度と発散の方程式	69
2-12-1	渦度方程式	69
2-12-2	発散の方程式	70
第 3 章	大気の波動 第 1 部	77
3-1	さまざまな大気現象	77
3-2	線形方程式	80
3-3	(純粋な) 音波	86
3-4	音波と内部重力波	93
3-5	表面重力波	100
3-6	慣性重力波とロスビー波	106
3-7	初期条件の応答	113
3-8	地衡風調節	117

第 4 章	スケール解析	126
4-1	スケール解析とは	126
4-2	浅水方程式系	129
4-3	傾圧方程式	138
4-4	中緯度解析	142
4-5	熱帯	149
4-6	惑星規模解析	151
4-7	バランスシステム	152
第 5 章	大気の波動 第 2 部	154
5-1	より複雑な大気現象	154
5-2	ロスビー波	155
5-3	順圧不安定の条件	158
5-4	2 つの不安定プロファイル	164
5-5	線形シア	176
5-6	大気の順圧効果	178
5-7	傾圧不安定	179
5-8	線形シアにおける傾圧不安定	182
5-9	2 層モデル	186
5-10	波の構造	193
謝辞		200
数学公式		201
A-1	ベクトル演算子	201
A-2	積分公式	202
A-3	一般的直交座標系での関係式	203
参考文献		204

第1章 はじめに

数値予報 (*Numerical Weather Prediction*) とは、コンピュータを用い、地上、上空の大気の情報から未来の大気の様子を数値的に予測する手法である。現在、その予測精度の高さから、この数値予報という手法が気象予報をおこなう上で最も重要になっている。

数値予報に限らず、気象の予報はここ数十年で新しくできた技術ではなく、古くから研究されてきた分野である。それは、気象が農業、工業、交通、通信、娯楽などを通して人間の生活に大きな影響を及ぼしてきたからである。そのため、気象予報は私達に数多くの恩恵をもたらしてきた。身近な例を挙げれば、台風の進路予測がその一つだろう。その予測によって私達の生活の安全性は非常に向上した。もちろん気象予測による恩恵はもっと多方面に及んでおり、今では私達の生活に不可欠なものとなっている。本論文の内容を紹介する前に、数値予報が用いられるようになるまでの気象予報の歴史を簡単に振り返ってみる。

気象予報の始まりは、1643年のTorricelliによる気圧計の発明であったと言われている。気圧と気象とは密接な関係にあることから、この気圧計は天気を知るための便利な道具として重宝された。しかし、このことがすぐに現在のような気象予報につながったわけではない。現在気象予報に利用されているような総観規模の気圧配置図が作成されたのは1820年になってからのことであった。また、この気圧配置図もしばらくは気象予報に使われることは無かった。なぜなら、通信手段の問題により、気象予報に使うことが出来るような最新の気圧配置図を手に入れるのは困難だったからである。この問題は1845年の電報の発明により解決された。それにより最新の気圧配置図が入手できるようになり、効果的な気象予報が可能になって気象予報の分野は発展していった。しかし、数値予報が気象予報の主役になるのはまだしばらく経ってからのことであった。

1850~1920年は経験的主観的気象予報が主役であった。このころにはまだ地上の大気の情報しか手に入らなかったからであった。転機は1904年に訪れた。Bjerknesによって、数値予報の可能性が示唆されたのである。しかし、Bjerknesはまた、数値予報のための数値計算が途方もなく大変であることも述べている。それでも、数値予報のための研究は始められた。第一次世界大戦の戦中、戦後にはRichardsonが手計算でナビエストークスの式を数値的に解こうと試みるなど、懸命の努力が続けられた。こういった研究の間に、1930年代にはラジオゾンデの発明により上空の広範囲の大気データが利用可能になり、1940年代の後半にはそれまでの計算機の計算能力を遥かに凌ぐ電子計算機が発明された。そしてついに1950年には、プリンストン大学のCharney, Fjortoft, von Neumannが当時最新のコンピュータを使い、500mbでの数値予報に始めて成功した。彼らの用いたモデルは簡単なものだったが、その予測精度は当時の経験的手法を用いた予報の精度と匹敵するものだった。その後、数値予報の技術はさらに改良され、10年と経たない内に経験的予報の予測精度を上回った。現在では数値予報の予測精度は経験的予報を遥かに上回り、この手法は気象予報に

とって必要不可欠なものとなっている。

数値予報モデルとは、実際に数値予報をおこなうプログラムのことを指す。この数値予報モデルの開発は、数値予報の発達に大きく貢献してきた。今まで、Charney らによって初めて数値予報が成功してから、多くの研究者によって様々な数値予報モデルが試されてきた。現在の数値予報にしても、その精度や効率も数値予報モデルによって大きく左右される。また、一口に数値予報モデルと言っても、扱う現象の規模や種類によって様々な種類のモデルが存在する。全球規模のモデルで言えば、代表的なものに大気大循環モデル AGCM (*Atmospheric General Circulation Model*) や海洋大循環モデル OGCM (*Oceanic General Circulation Model*) がある。これらにしても、より優れたモデルを生み出すべく、日々研究が続けられている。

本論文ではこの数値予報モデル—特に AGCM—の理解や作成、利用に必要な気象力学について紹介する。第 2 章では運動方程式や連続の式といった基本的な方程式系を紹介する。第 3 章では大気の波動について取り扱う。第 4 章ではスケール解析をおこない、大気の様々な現象を個別に表現できるいくつかの方程式系を見ていく。第 5 章では順圧、傾圧不安定を考える。なお、各章の内容が具体的に数値予報モデルとどう関わってくるのかは各章の始めに記すことにする。もちろん数値予報モデルの理解や作成にはこれら気象力学の知識だけでなく、モデル作成のために必要な技術も学ぶ必要があるが、その紹介はまたの機会にしたい。

第2章 支配方程式系

2-1 第2章の概要

第2章では、気象力学の基礎となる非常に基本的な物理法則を紹介する。2~6節では、支配方程式系と呼ばれる運動方程式、連続の式、状態方程式、熱力学の式を説明する。これらにより構成される方程式系は、これからの全ての議論の土台となる。7節では、それまで直交直線座標系で扱っていた方程式系を球面座標で取り扱ってみる。これは全球を扱うような大規模な数値モデルで必要になってくる。8節では、球面である地球表面の全体または一部を平面地図で表すための手法を述べる。9節では、鉛直方向の座標を圧力 p や規格化圧力 σ 、もしくは温位 θ とした場合の方程式系を考える。これらの方程式系は数値予報をする上で非常に便利である。実際に、多くの大気大循環モデルでは高さ z ではなく p や σ を鉛直座標にしている。10, 11節では、エネルギーの式を取り扱う。エネルギーの変換や保存を表す数値モデルは、物理的なプロセスの表現や誤差の原因の追求などに用いられる。12節では渦度方程式、発散方程式を紹介する。これらの式は力学的解析や数値計算に便利な場合が多い。実際に、数値モデルにおいて水平面ベクトルで表記した運動方程式の代わりに用いている場合が多い。

2-2 運動方程式

ニュートンの運動の第2法則は慣性座標系では以下のように表すことができる。

$$\frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt} = M. \quad (2-1)$$

ここで M [N/kg] は単位質量あたりの力の合計のベクトルを表す。添字の a が付いているものは、それが慣性座標系から見た速度と加速度の値であることを意味する。これらの量は地球上で観測されるが、地球は宇宙空間を移動しているため、運動方程式は地球との相対関係で表される変数で表現したい。主な運動は地球の回転で説明する必要があるが、公転など他の運動は無視して良い。地球が角速度 Ω [1/s] で回転していると仮定すると、粒子の絶対速度 \mathbf{V}_a [m/s] は回転により、地球との相対速度 \mathbf{V} [m/s] と角速度により表現できる。

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V} + \Omega \times \mathbf{r}. \quad (2-2)$$

ここで \mathbf{r} は地球の中心を原点とした時の粒子の位置ベクトル表す。今、 i, j, k を絶対座標系での直交軸の単位ベクトルとし、 i', j', k' を回転座標系での単位ベクトルとする。ここで任意のベクトル \mathbf{A} をこの2つの座標系で表現すると以下ようになる。

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} = A_x' \mathbf{i}' + A_y' \mathbf{j}' + A_z' \mathbf{k}'.$$

これを時間の導関数で表すと、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \frac{dA_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt} \mathbf{k} \\ &= \frac{dA_x'}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dA_y'}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dA_z'}{dt} \mathbf{k}' + A_x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + A_y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + A_z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt}, \end{aligned}$$

となる¹⁾。単位ベクトルの導関数は $d\mathbf{i}'/dt = \Omega \times \mathbf{i}'$ などで与えられるので、

$$\frac{d_a \mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \Omega \times \mathbf{A}. \quad (2-3)$$

ここで d_a/dt は固定系での変化の割合を表し、 d/dt は回転系での変化の割合を表す。

このように固定系での任意のベクトルの導関数の和は回転系での導関数の和と $\Omega \times \mathbf{A}$ の項で表現することができる。

この定理より以下の式を導くことができる。

$$\frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{V}_a}{dt} + \Omega \times \mathbf{V}_a.$$

(2-2) をこの式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt} &= \frac{d(\mathbf{V} + \Omega \times \mathbf{r})}{dt} + \Omega \times (\mathbf{V} + \Omega \times \mathbf{r}), \\ \frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt} &= \frac{d\mathbf{V}}{dt} + 2\Omega \times \mathbf{V} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2-4)$$

となる²⁾。

¹⁾ i, j, k は時間に対して定常なので、 $\frac{di}{dt} = 0$ などとなるのに対し、 i', j', k' は回転座標系の単位ベクトルなので時間に依存し、 $\frac{di'}{dt} \neq 0$ などとなるので無視できない。

²⁾ $\frac{d}{dt}(\Omega \times \mathbf{r}) = \Omega \times \mathbf{V}$ を用いた。

大気運動での主な力は圧力, 重力 g_a , そして摩擦力 F である. これらの力と絶対加速度の式 (2-4) を (2-1) に代入すると以下の関係式が得られる.

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\alpha \nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \mathbf{g} + \mathbf{F}. \quad (2-5)$$

ここで α [m^3/kg] は比容, \mathbf{g} は重力の和, $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ は遠心力であり,

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_a - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}). \quad (2-5a)$$

である³⁾. (2-5) の右辺第 2 項の $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}$ はコリオリ力と呼ばれる.

2-2-A 遠心力に関する補足

(2-5a) の右辺第 2 項の遠心力 $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ を地球の場合 ($\boldsymbol{\Omega} = {}^t(0, 0, \Omega)$) で考えてみると,

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) &= -\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{r}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \\ &= -\boldsymbol{\Omega}(r_z \Omega) + \mathbf{r}(\Omega^2) \\ &= -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_z \Omega^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_x \Omega^2 \\ r_y \Omega^2 \\ r_z \Omega^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_x \Omega^2 \\ r_y \Omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる^{4) 5)}.

このことから, 第 3 軸に対して回転している地球上では, 第 3 軸に垂直な方向にのみ, 遠心力が働くことがわかる.

³⁾ 2-2-A にこの式に関する補足を載せてあるので参照のこと.

⁴⁾ $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ を用いた.

⁵⁾ $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ とした.

2-3 連続の式

2つめの基本的な法則は質量保存の法則である。これは次のような数式で表すことができる。図 2-1 における微小体積 $\delta x, \delta y, \delta z$ を考えてみよう。単位時間に x 面に流入する量は $\rho u \delta y \delta z$ である。ここで ρ [kg/m^3] は密度、 u [m/s] は速度の x 成分である。反対の面から流出する量は $[\rho u + (\partial \rho u / \partial x) \delta x] \delta y \delta z$ である。よって、単位体積あたりの流入量と流出量の違いは $-\partial(\rho u) / \partial x$ となる。これは単位体積あたりの x の局所質量変化、つまり、密度の変化を表す。3方向の全てを考慮すると、以下のような結果が得られる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \nabla \rho. \quad (2-6)$$

また、 $\alpha = 1/\rho$ を用いることによって、この微小体積における時間微分を含んだ別の形の式を得ることができる¹⁾。

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{V}. \quad (2-7)$$

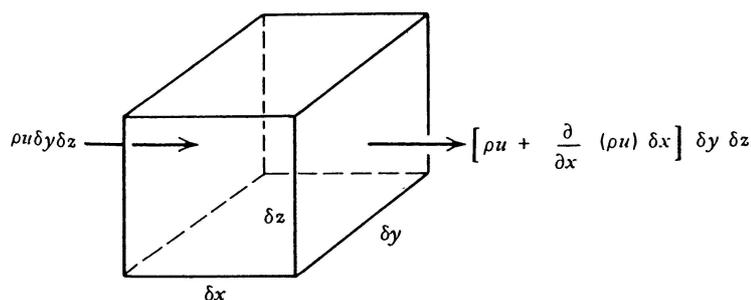


Figure 1-1. Mass conservation.

図 2-1: 質量保存 (Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1979: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology. John Wiley & Sons, 477pp)

2-3-A (2-7) の導出

(2-6) から (2-7) を導出する。

まずは、ラグランジュ微分とオイラー微分の関係式を導く。時間 dt におけるある流体粒子の密度 $d\rho$ は空間の固定点に関する量で表すと、時間変化 ($\partial/\partial t$) と空間変化 (∇) とに分けることができる。

¹⁾(2-6) の導出に関しては 2-3-A を参照のこと。

$d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ 離れた 2 点の同じ時刻での密度の違いは以下のように表すことができる.

$$dx \frac{\partial \rho}{\partial x} + dy \frac{\partial \rho}{\partial y} + dz \frac{\partial \rho}{\partial z} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\rho. \quad (2-3-A-1)$$

時間変化の要素も足し合わせ, 密度変化を以下のように表すことができる.

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)dt + (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\rho. \quad (2-3-A-2)$$

両辺を dt で割ると以下のようなラグランジュ微分とオイラー微分の関係式を得ることができる.²⁾

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla\right)\rho \\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\rho. \end{aligned} \quad (2-3-A-3)$$

(2-3-A-3) を (2-6) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} - (\mathbf{V} \cdot \nabla)\rho &= -\rho \nabla \cdot \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \nabla)\rho, \\ -\frac{d\rho}{dt} &= \rho \nabla \cdot \mathbf{V}, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= \nabla \cdot \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (2-3-A-4)$$

$\alpha = 1/\rho$ を使って (2-3-A-4) の左辺を変形すると,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= -\alpha \frac{d\alpha^{-1}}{dt} \\ &= -\alpha \frac{d\alpha^{-1}}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} \\ &= -\alpha(-\alpha^{-2}) \frac{d\alpha}{dt} \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt}. \end{aligned} \quad (2-3-A-5)$$

(2-3-A-5) を (2-3-A-4) に代入すると, (2-7) が導かれる.

余談だが, (2-7) は以下のようにも書ける.

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{V}.$$

ここで, α [m^3/kg] は一定質量に対する体積であるため, 左辺は体積の膨張と収縮を意味し, それが右辺の発散と同じ意味を持つことが想像できるだろう.

²⁾一般的には $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$.

2-4 状態方程式

3つの熱力学変数 p [N/m²], α [m³/kg], そして T [K] が独立のものでないことは Boyle と Charles によって早くから証明されていた。全ての物質には以下のような状態方程式として知られる関係が存在する。

$$f(p, \alpha, T) = 0.$$

実際の物質ではこの関係は非常に複雑なので、単純に解析的な表現はできない。しかし、変数の限定範囲を満たす解析的な式は存在する。その一般的な式は、ある理想化された状態を仮定することで導かれる。例えば、Boyle の法則と Charles の法則に厳密に従う理想気体を定義した場合、以下のような形の状態方程式が容易に成り立つ。

$$p\alpha = RT. \quad (2-8)$$

完全な理想気体は存在しないが、(2-8) は多くの場面で近似された実在気体に利用され、多くの結果を出している。大気は実際には多数の気体の混合物なのだが、大気を構成する個々の気体の気体定数の平均から求められた気体定数 R [J·kg⁻¹·K⁻¹] を与えることで、(2-8) は成り立つ¹⁾。

2-4-A 気体定数 R について

本文では R に関しては『気体定数である』ということしか記述していないので、ここで少し気体定数について触れる。

気体定数 R はその大気のも分子量に依存する量である。この気体定数 R を一般気体定数 (*universal gas constant*) R^* ²⁾ から求める。一般気体定数を用いて状態方程式を書くと以下ようになる。

$$pV = nR^*T. \quad (2-4-A-1)$$

ここで n [mol] はモル数、 V [m³] は気体の体積である。次に、 M [kg] を大気のも質量とすると、比容 α は $\alpha = V/M$ となり、(2-4-A-1) は

$$p\alpha = \frac{nR^*T}{M}.$$

となる。(2-8) と比較すると、

$$R = \frac{n}{M}R^*$$

という関係が成り立つことがわかるだろう。ここで分子量 $W = M/n$ [kg/mol] を代入すると

$$R = \frac{R^*}{W}$$

となり、大気のも気体定数 R は一般気体定数 R^* の値と大気のも分子量 W によって決まることがわかるだろう。

¹⁾ 気体定数 R に関しては 2-4-A 参照。

²⁾ $R^* = 8.3143$ [J mol⁻¹ K⁻¹] である。

2-5 熱力学第一法則

熱力学第一法則はエネルギー保存則の一つである。エネルギー保存則とは、「ある系のエネルギーの変化の量はその系の境界から出入りするエネルギーの量と等しい」ということを意味する。一般的に、この法則は位置エネルギー、運動エネルギー、熱エネルギー、放射エネルギー、磁気エネルギー、電気エネルギー、化学エネルギーなどといった全ての種類のエネルギーに関して成り立つ。しかし、ここで気象熱力学を考える場合には非常に単純化した関係式を用いる。後で紹介するが、ニュートンの運動方程式は力学エネルギーのバランスを表現している。したがって、運動エネルギーと重力場による位置エネルギーの和は圧力と摩擦力による仕事と等しい。このことからこれらの特定の項は熱力学第一法則から除外する。あとは、気体の圧力や摩擦力による仕事が残っているが、これは気体の膨張や変形として扱う。

化学、磁気、そして電気エネルギーが除外できるならば、熱力学第一法則は以下の簡単な形であらわすことができる。

$$Q = \frac{dI}{dt} + W.$$

ここで Q [$\text{J kg}^{-1} \text{s}^{-1}$] は単位時間で単位体積に加えられた熱エネルギーをあらわし、 W [$\text{J kg}^{-1} \text{s}^{-1}$] は単位時間で単位体積に気体が膨張（または収縮）することでその周囲に及ぼす仕事をあらわし、 dI/dt [$\text{J kg}^{-1} \text{s}^{-1}$] はある物体の単位体積分の内部エネルギーの時間変化をあらわす。理想気体を考えた場合、単位体積あたりの内部エネルギーの時間変化は $c_v dT/dt$ [$\text{J kg}^{-1} \text{s}^{-1}$] で与えられる¹⁾。ここで c_v [$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$] は定積比熱である²⁾。一方、非粘性気体の可逆膨張による単位質量、単位時間での仕事は $p d\alpha/dt$ [$\text{J kg}^{-1} \text{s}^{-1}$] で与えられる³⁾。これらの表現を熱力学方程式に代入すると以下の式が得られる。

$$Q = c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt}. \tag{2-9a}$$

(2-8) 式を使うと以下のような形でも書くことができる⁴⁾。

$$Q = c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = c_p T \frac{d(\ln \theta)}{dt}. \tag{2-9b}$$

ここで

$$\theta \equiv T(p_0/p)^\kappa, \quad \kappa \equiv R/c_p, \quad c_p - c_v = R, \quad p_0 = 1000\text{mb}$$

である。 c_p [$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$] は定圧比熱であり、 p_0 [N/m^2] は地上での気圧である⁵⁾。

水の状態変化を考えた場合（例えば蒸気から液体へ変化する場合）には式 (2-9b) は以下のような形をとる⁶⁾。

$$Q - L \frac{dq}{dt} - c_l l \frac{dT}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt}. \tag{2-10}$$

¹⁾ $dI/dt = c_v dT/dt$ の導出に関しては 2-5-B 参照。

²⁾ 定積比熱とは「体積一定の場合に、1kg の物質を 1K だけ上げるのに必要な（熱）エネルギー」のことである。

³⁾ p [N/m^2], α [m^3/kg] より $p d\alpha/dt$ の単位は [$\text{N m}^3/\text{m}^2 \text{kg t}$] [$\text{N m}/\text{kg t}$] [$\text{J}/\text{kg t}$] となる。

⁴⁾ 2-5-A 参照。

⁵⁾ θ [K] は温位 (*potential temperature*) と呼ばれる量だが、本文では触れられていない。温位は 1 章 9 節『より使いやすい鉛直座標系』にて登場する。

⁶⁾ この式の導出に関しては 2-5-C 参照。

ここで q [kg kg^{-1}] は水蒸気に関する比湿⁷⁾ である。 l [kg kg^{-1}] は単位質量の大気中の水 (液体) の質量である。 L [J/kg] は潜熱である。 c_l [$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$] は水 (液体) の比熱である。ここでは Q は潜熱以外の熱エネルギーを表している。

2-5-A (2-9b) の導出

2-5-A-a (2-9b) の真中の式の導出

式 (2-9a) と式 (2-8) を用いて (2-9b) の真中の式を導出する。

(2-8) の両辺を t で微分する。

$$\frac{d(p\alpha)}{dt} = \frac{d(RT)}{dt}.$$

気体定数 R 以外は時間変化するので、

$$\begin{aligned} p \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \frac{dp}{dt} &= R \frac{dT}{dt} \\ p \frac{d\alpha}{dt} &= -\alpha \frac{dp}{dt} + R \frac{dT}{dt}. \end{aligned}$$

この式を (2-9a) に代入すると、

$$Q = c_v \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} + R \frac{dT}{dt}.$$

となり、ここで定圧比熱 c_p [$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$] ($c_p = c_v + R$) を導入すると (2-9b) の真中の式までが求まる。

$$Q = c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt}.$$

2-5-A-b (2-9b) の右辺の導出

(2-9b) の右辺の導出をおこなう。ただし、中辺 (さきほど求めた部分を便宜的にそう呼ぶ) からの右辺の導出は難しかったため、ここでは右辺から中辺を求めるのみとする。

⁷⁾比湿とは水蒸気の密度 ρ_W [kg/m^3] の湿潤空気の密度 ρ [kg/m^3] に対する比 q [kg kg^{-1}] のことである。

$$q \equiv \frac{\rho_W}{\rho}.$$

なお、似通ったものに混合比 r [kg kg^{-1}] というものがあるが、これは水蒸気の密度 ρ_W の乾燥空気の密度 ρ_d [kg/m^3] に対する比である。

$$r \equiv \frac{\rho_W}{\rho_d}.$$

$\rho = \rho_W + \rho_d$ であるから、比湿と混合比の間に以下のような関係が成り立つこともわかるだろう。

$$q \equiv \frac{\rho_W}{\rho} = \frac{r}{1+r}.$$

比湿と混合比は湿潤空気の圧縮・膨張や加熱・冷却には影響しないため、純粋に水蒸気の凝結・蒸発にのみ影響される。

(2-9b) の右辺である $c_p T \frac{d(\ln \theta)}{dt}$ を変形していく。なお、本文中でも定義されていた

$$\begin{aligned} \theta &= T(p_0/p)^\kappa, \quad \kappa = R/c_p, \quad c_p - c_v = R, \\ p\alpha &= RT \end{aligned}$$

を利用する。

$$\begin{aligned} \ln \theta &= \ln T \left(\frac{p_0}{p} \right)^\kappa \\ &= \ln T + \kappa \ln \left(\frac{p_0}{p} \right) \\ &= \ln T + \kappa \ln p_0 - \kappa \ln p, \\ \frac{d \ln \theta}{dt} &= \frac{d \ln T}{dt} - \frac{d \kappa \ln p}{dt} \\ &= \frac{dT}{dt} \frac{d \ln T}{dT} - \kappa \frac{dp}{dt} \frac{d \ln p}{dp} \\ &= \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} - \kappa \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}, \\ c_p T \frac{d \ln \theta}{dt} &= c_p T \left\{ \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{R}{c_p} \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \right\} \\ &= c_p \frac{dT}{dt} - \frac{TR}{p} \frac{dp}{dt} \\ &= c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt}. \end{aligned}$$

このように、(2-9b) の導出を行うことができた。

2-5-B $dI/dt = c_v dT/dt$ の導出

$dI/dt = c_v dT/dt$ の関係式を導出する。なお、本文での内部エネルギーは I で表記されているが、一般的には U で表されることが多いので、ここでは内部エネルギーは U と表記する。

内部エネルギー U [J] は温度 T と体積 V に依存すると考えられるので全微分 dU は以下のように記述できる。

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV. \tag{2-5-B-1}$$

熱力学関係式より、

$$dU = TdS - pdV, \tag{2-5-B-2}$$

定積比熱の定義より、

$$c_v = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \tag{2-5-B-3}$$

が成り立つ⁸⁾. (2-5-B-2) を定温で体積微分すると,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p \quad (2-5-B-4)$$

となる. 次に, 自由エネルギーの関係式 $dF = -SdT - pdV$ から以下の関係式が成り立つ⁹⁾.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V. \quad (2-5-B-5)$$

(2-5-B-4) に (2-5-B-5) を代入すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T &= T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \\ &= T \left(\frac{nR}{V}\right) - p \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2-5-B-6)$$

となる. 2行目は状態方程式を利用している. このことから U は V には依存せず, T にのみ依存していることがわかる.

(2-5-B-1) に (2-5-B-3) と (2-5-B-6) を代入すると

$$dU = c_v dT \quad (2-5-B-7)$$

2-5-B-a 補足

自由エネルギーの関係式から (2-5-B-5) が導かれたが, 同様にしてその他のエネルギーの関係式から似たような関係式を導くことができる. 以下はその対応である. 導出は自由エネルギーの時と同様.

$$\begin{aligned} dU &= TdS - pdV & \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S &= -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V, \\ dH &= TdS + Vdp & \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S &= \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p, \\ dG &= -SdT + Vdp & \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T &= -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \end{aligned}$$

⁸⁾ 定積比熱の式の真中の項と右の項とが等しいのは, 熱力学第一法則 $dQ = dU + pdV$ よりわかるだろう.

⁹⁾ 全微分 dF は以下のように表すことができる.

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T dV.$$

これと上記の関係式との対応より,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V &= -S, & \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T &= -p \\ \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} &= -\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T, & \frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} &= -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \end{aligned}$$

となるため, (2-5-B-5) が成り立つ.

2-5-C 水の状態変化を考えた熱力学関係式

(2-10) を導出してみる. 単位質量の大気中 (微小の水 (液体) を含む) の乾燥空気の質量を m_d [kg kg⁻¹], 水蒸気の質量を m_v [kg kg⁻¹], 水 (液体) の質量を m_l [kg kg⁻¹] とし, 乾燥空気の定圧比熱を c_d , 水蒸気の定圧比熱を c_v , 水 (液体) の定圧比熱を c_l とし, 潜熱の発生を考慮し, 以下のようになる.

$$Q + L \frac{dm_l}{dt} = (c_l m_l + c_v m_v + c_d m_d) \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt}.$$

水が増加する質量と水蒸気が減少する質量は一致する, つまり $dm_l/dt = -dm_v/dt$ である. また, $1 = m_l + m_v + m_d$ かつ $m_d \gg m_v$, $m_d \gg m_l$ であることから $c_v m_v + c_d m_d \simeq c_d$ と近似する. これらから,

$$Q - L \frac{dm_v}{dt} = (c_l m_l + c_d) \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt}$$

となる. 本文では, $m_v = q$, $m_l = l$, $c_d = c_p$ となっているので,

$$Q - L \frac{dq}{dt} - c_l l \frac{dT}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt}$$

となる.

2-6 完全系の方程式

乾燥大気では, 式 (2-5)¹⁾, (2-7), (2-8), (2-9) は 6 つのスカラー方程式 (*six scalar equations*) と 6 つの未知数 (*six unknowns*), p, α, T, u, v, w の閉じた系 (*complete system*) を構成する. 摩擦力 F と熱量 Q (非断熱の系で考えている) は関数として知られているか, もしくは他の変数によって表現されるものとして知られていると仮定する. それゆえ, 原則的には, 全ての未来の状態はこの系を解くことで決定できる.

大気に湿気が含まれている場合は, 状態方程式と熱力学第一法則に修正を加える必要がある. そのうえ, 方程式の中に水分の保存に関する表現を追加する必要がある. 今のところは乾燥気体の場合のみを考える. 湿気の効果に関してはも考慮した場合については, Haltiner(1979) の第 9 章などを参照せよ.

大規模な大気の運動では, 大気は静水圧平衡であると仮定できる. そのため, 鉛直方向の加速度はコリオリ力の鉛直成分と一緒に無視することができる. 静水圧近似が利用可能な場合は, 式 (2-5) は下の 2 式と等しくなる²⁾.

$$\frac{d\mathbf{V}_H}{dt} = -\alpha\nabla p - \mathbf{f} \times \mathbf{V}_H + \mathbf{F}_H, \quad (2-11)$$

$$0 = -\alpha \frac{\partial p}{\partial z} - g. \quad (2-12)$$

ここで \mathbf{V}_H [m/s] は風速の水平成分である. ∇ [1/m] は 2 次元での微分演算子である. \mathbf{F}_H [N/kg] は (単位質量当たりの) 摩擦力の水平成分である. $\mathbf{f} = f\mathbf{k}$, $f = 2\Omega \sin \varphi$ [1/s] はコリオリパラメータ (*coriolis parameter*), $\mathbf{f} \times \mathbf{V}_H$ [N/kg] はコリオリ力である. なお, コリオリパラメータとは地球の渦度の鉛直成分である³⁾.

¹⁾(2-5) は 3 成分の式なので, スカラー方程式 3 つ分.

²⁾(2-12) は静水圧平衡を表す式である. 直感的に分かりやすいのは以下の形であろう. 簡単な変形で以下の式は (2-12) になる.

$$\Delta p = -g\rho\Delta z.$$

³⁾正確には惑星渦度の鉛直成分である.

2-7 座標系

運動方程式におけるベクトル表記は様々な項の物理的解釈を容易にし、かつ簡潔である。しかし、実際の問題（特に数値気象予報など）に利用する場合には座標系での記述が必要となる。地球表面における大規模な大気の運動は準水平面的であるため、球面座標が非常に有効となる。いくつかのベクトル演算子（本論文の最後に掲載されている数学公式 (A-17) ~ (A-24)¹⁾）によって一般化された表式は式 (2-5) を球面座標に変換するのに利用できる。

球面座標として考える時、 $x_1 = \lambda$, $x_2 = \varphi$, $x_3 = r = z + a$ とする。ここでは λ , φ , r , a , そして z は経度、緯度、地球の中心からの距離、地球の平均半径、平均海面からの高度である。座標方向における曲線の線要素 ds とスケール因子²⁾（規格化因子）(metric coefficient) h_j は以下ようになる³⁾。

$$ds_1 = r \cos \varphi d\lambda, \quad ds_2 = r d\varphi, \quad \text{and} \quad ds_3 = dr,$$

$$h_1 = r \cos \varphi, \quad h_2 = r, \quad \text{and} \quad h_3 = 1,$$

$$u = ds_1/dt = r \cos \varphi d\lambda/dt,$$

$$v = ds_2/dt = r d\varphi/dt,$$

$$w = ds_3/dt = dr/dt = dz/dt,$$

$$\mathbf{V} = ui' + vj' + wk'. \quad (2-13)$$

u, v, w はそれぞれ東向き、北向き、鉛直方向（ここでは、地球中心からの動経方向を意味する）への曲線速度成分を表している。 i', j', k' はそれらの方向への直交単位ベクトルである。ベクトル表記された運動方程式 (2-5) は前述した h_1, h_2, h_3 といった変数と、演算子 (A-17) ~ (A-22) を用いて球座標で表現することができる。（直接 (A-23) 式を用いる方法もある）。前者の方法 (h_j と (A-17) ~ (A-22) を使用する方法) を用いる場合、導関数 $d\mathbf{V}/dt$ の計算の際には i', j', k' は緯度、経度によって変化するため区別しなければならない。これは u, v, w の場合と同様で、(A-22) において示されている。このわかりやすい方法は Haltiner と Martin によって発見された (1957 年)。別のアプローチとして、展開式も利用する ((A-8) 参照)⁴⁾。

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) + (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V}. \quad (2-13-1)$$

上記の式を (2-5) に代入する。その上で、一般化されたベクトル演算子 (A-17) と (A-21) を用いて計算を行う。いくつかの明らかとなっていない項から以下のような結果が得られている。

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = 2\boldsymbol{\Omega}(j \cos \varphi + k \sin \varphi) \times (ui + vj + wk)$$

$$= (2\boldsymbol{\Omega} \cos \varphi w - fv)i + fuj - 2\boldsymbol{\Omega} \cos \varphi uk,$$

1) これら数学公式に関しては 2-7-J を参照のこと。

2) スケール因子に関しては 2-7-A 参照

3) 球面座標の簡単な概念図が 2-7-B にある。

4) ラグランジュ微分とオイラー微分の関係式より

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$$

であり、付録の数学公式 (A-8) より

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nabla(V^2/2) + (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V}$$

となることから上記の式を得ることができる。

なお、ここでは直交直線座標系を仮定している。

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{V} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rv) \right] \mathbf{i} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(ur) - \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial w}{\partial \lambda} \right] \mathbf{j} \\ &\quad + \frac{1}{r \cos \varphi} \left[\frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \varphi}(u \cos \varphi) \right] \mathbf{k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) &= \left[\mathbf{V} \cdot \nabla u - (uv \tan \varphi - uw)/r \right] \mathbf{i} \\ &\quad + \left[\mathbf{V} \cdot \nabla v + (u^2 \tan \varphi - vw)/r \right] \mathbf{j} \\ &\quad + \left[\mathbf{V} \cdot \nabla w - (u^2 + v^2)/r \right] \mathbf{k}.\end{aligned}$$

これらの式は、直交直線座標系で表記された式 (2-5) を球面座標系で表現するための式である。1 つ目の式は単純に回転の計算から得られる⁵⁾。2 つ目の式は前述したスケール因子 h_j の値と、付録の数学公式 (A-20)⁶⁾ から得ることができる。3 つ目の式は、2 つ目の式と付録の数学公式 (A-17) から得ることができる⁷⁾。なお、3 つ目の式の右辺は直交直線座標における $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}$ と等しい。つまり、直交直線座標系での $d\mathbf{V}/dt$ は球面座標では以下のように表現できる。

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \left\{ -\frac{uv \tan \varphi - uw}{r} \mathbf{i} + \frac{u^2 \tan \varphi + vw}{r} \mathbf{j} - \frac{u^2 + v^2}{r} \mathbf{k} \right\}.$$

(式 (2-5) の) 残った項を展開し、各成分に分けると以下の式が導かれる⁸⁾。

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \left(2\Omega + \frac{u}{r \cos \varphi} \right) (v \sin \varphi - w \cos \varphi) + F_\lambda, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \left(2\Omega + \frac{u}{r \cos \varphi} \right) u \sin \varphi - \frac{vw}{r} + F_\varphi, \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \left(2\Omega + \frac{u}{r \cos \varphi} \right) u \cos \varphi + \frac{v^2}{r} + F_z.\end{aligned}\tag{2-14}$$

ここで x, y, z は曲面座標での東方向、北方向、鉛直方向を示す。上記の方程式は地球の楕円率を無視しているため正確ではない⁹⁾ という指摘が Phillips(1966) によっておこなわれた。しかし、(楕円であっても) 角運動量は保存されるため、以下の式がなりたつ。¹⁰⁾

$$\frac{d}{dt} [r \cos \varphi (u + \Omega r \cos \varphi)] = r \cos \varphi F_\lambda.\tag{2-15}$$

⁵⁾ 地球の角速度は、直交直線座標では $\Omega = \Omega \mathbf{k}$ であり、球面座標では $\Omega = \Omega \cos \varphi \mathbf{j}' + \Omega \sin \varphi \mathbf{k}'$ と表せる。(既に本文中では球面座標での単位ベクトルを $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ と記述していることに注意)。直交直線座標系での角速度表現を球面座標での表現に変形する方法は 2-7-C を参照のこと。

なお、 f は前節で登場したコリオリ・パラメータ ($f = 2\Omega \sin \varphi$) である。

⁶⁾

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \frac{\mathbf{a}_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 F_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} (h_2 F_2) \right] + \frac{\mathbf{a}_2}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 F_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} (h_3 F_3) \right] \\ &\quad + \frac{\mathbf{a}_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 F_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 F_1) \right]\end{aligned}$$

⁷⁾ この 3 つ目の式は直交直線座標の $d\mathbf{V}/dt$ を球面座標で考えた際にどのような形になるか知るために必要となる式である。

$d\mathbf{V}/dt$ は (2-13-1) 式で表せる。その式の右辺の第 2, 3 項を球面座標を表現することで $d\mathbf{V}/dt$ を球面座標系表示で示すことになる。

この式の導出にかんしては 2-7-E を参照のこと。

⁸⁾ 2-7-F 参照。

⁹⁾ 楕円の場合、重力加速度 g が鉛直成分にのみ現れるのはおかしい。

¹⁰⁾ 角運動量保存則は (2-14) 式に $r \cos \varphi$ を掛けて計算することで導出できる。詳しい計算は 2-7-I 参照。

ここで F_λ は東向きの外力 (圧力勾配も含む) を表す.

大気は地球を包む比較的薄い層なので, (正確な) 半径 r はわずかな誤差を無視して平均海面の地球中心からの距離 a に置き換えることができる (つまり $r \simeq a = \text{const}$). 式 (2-13) における速度成分でも同様に扱うことができる ($dr/dt \simeq da/dt = 0$). しかし, 角運動量保存則を満たすためには (2-14) の (i 成分の) 右辺の w を含む項は除外しなければならない¹¹⁾. 結果的には式 (2-15) において r を a で置き換えた近似式となる. それに加え, 式 (2-11) を考慮すると整合性により最後の方程式 (式 (2-14) の k 成分) の特定の項が除外される.¹²⁾ これらの結果, 近似された方程式は以下のようになる¹³⁾.

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \left(f + \frac{u \tan \varphi}{a} \right) v + F_\lambda, \quad (2-16)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \left(f + \frac{u \tan \varphi}{a} \right) u + F_\varphi, \quad (2-17)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z. \quad (2-18)$$

ここで地球の渦度の鉛直成分 ($f = 2\Omega \sin \varphi$) はコリオリ・パラメータと呼ばれる. 最後の方程式系において成り立つと考えられている角運動量保存則はちょうど (2-15) 式にて r を a に近似している式と同じである.

鉛直方向の不安定が水平方向に比べ非常に小さい場合は鉛直加速度 dw/dt は無視できる. そして摩擦を除くと (2-18) 式は静水圧方程式 (*hydrostatic equation*) となる.

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \quad (2-19)$$

熱力学方程式 (2-9b) は全微分を含んでおり, その全微分はあらゆる座標系 (A-21) にすぐに変形できるため, (2-9b) は今のところそのまま利用できる.

2-7-A スケール因子 (規格化因子)

スケール因子 (規格化因子) h_j とはある一般座標 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) における座標曲線方向 ξ_j の接ベクトルの大きさ (長さ) である. 一般的な式は以下のように書ける.

$$h_j = \left| \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial \xi_j} \mathbf{e}_3 \right|.$$

¹¹⁾ 2-7-G 参照

¹²⁾ 「整合性」の意味は 2-7-H 参照

¹³⁾ いろいろと余計な項を消すために操作しているが, Phillips(1966) によれば, スケール因子を $h_1 = a \cos \varphi$, $h_s = a$, $h_3 = 1$ と置き直して (2-14) を導出しようとする, (2-15) 式がスマートに導出できる.

例えば、今回の曲線座標系 (λ, φ, z) の場合の λ 方向のスケール因子 h_1 は以下のようして求めることができる。

$$\begin{aligned} h_1 &= \left| \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \lambda} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial \lambda} \mathbf{e}_3 \right| \\ &= \left| \frac{\partial}{\partial \lambda} (r \cos \varphi \cos \lambda) \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial \lambda} (r \cos \varphi \sin \lambda) \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial \lambda} (r \sin \varphi) \mathbf{e}_3 \right| \\ &= \left| -r \cos \varphi \sin \lambda \mathbf{e}_1 + r \cos \varphi \cos \lambda \mathbf{e}_2 \right| \\ &= \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + r^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda} \\ &= r \cos \varphi. \end{aligned}$$

古くから慣れ親しんできた直交直線座標系 (x, y, z) の場合は以下の式などから $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ となることが分かる。

$$h_1 = \left| \frac{\partial x}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial x} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{e}_3 \right| = 1.$$

このスケール因子は ξ_j 方向の接ベクトル $(\partial x_1 / \partial \xi_j \mathbf{e}_1 + \partial x_2 / \partial \xi_j \mathbf{e}_2 + \partial x_3 / \partial \xi_j \mathbf{e}_3)$ を ξ_j 方向の単位ベクトルにするのに使われる。 ξ_j 方向の単位ベクトルを \mathbf{e}'_j とすると以下ようになる。

$$\mathbf{e}'_j = \frac{1}{h_j} (\partial x_1 / \partial \xi_j \mathbf{e}_1 + \partial x_2 / \partial \xi_j \mathbf{e}_2 + \partial x_3 / \partial \xi_j \mathbf{e}_3).$$

2-7-B 球面座標概念図

以下の図 2-7-B-1 は球面座標の概念図である。

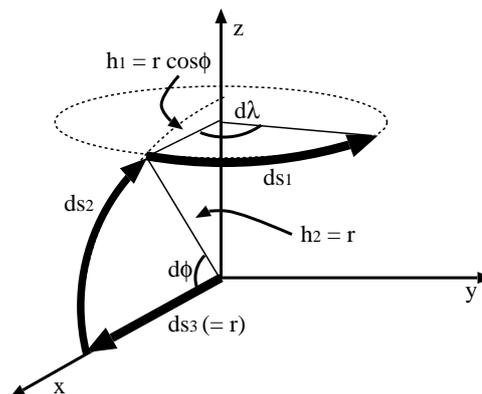


図 2-7-B-1: 球面座標概念図

2-7-C 直交曲線座標下での地球の角速度

地球の角速度を Ω とした場合、直交直線座標系での地球の角運動は $\Omega = \Omega \mathbf{k}$ と表すことができる。この地球の角速度を球座標で表現すると $\Omega = \Omega \cos \varphi \mathbf{j}' + \Omega \sin \varphi \mathbf{k}'$ となる。ここでは直交直線座標での単位ベクトルを球面座標での単位ベクトルに変形し、球面座標での地球の角速度が上記のように表せる理由を述べる。

直交直線座標系での鉛直方向ベクトル \mathbf{k} を考える。一般座標系の単位ベクトルは

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_j &= \frac{1}{h_j} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_j} \\ &= \left(\frac{1}{h_j} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j} \mathbf{e}'_1 + \frac{1}{h_j} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \mathbf{e}'_2 + \frac{1}{h_j} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_j} \mathbf{e}'_3 \right) \end{aligned}$$

なので、 \mathbf{k} の場合で考えると、 $x_1 = \lambda = \arctan(y/x)$, $x_2 = \varphi = \arctan(z/\sqrt{x^2 + y^2})$, $x_3 = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であることから、

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \frac{1}{h_j} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\arctan(y/x) \right) \mathbf{i}' + \frac{\partial}{\partial z} \left(\arctan(z/\sqrt{x^2 + y^2}) \right) \mathbf{j}' + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \mathbf{k}' \right\} \\ &= \frac{1}{h_j} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\arctan(z/\sqrt{x^2 + y^2}) \right) \mathbf{j}' + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \mathbf{k}' \right\} \\ &= \frac{1}{h_j} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{1 + \frac{z^2}{x^2 + y^2}} \mathbf{j}' + \frac{z}{r} \mathbf{k}' \right\} \\ &= \frac{1}{h_j} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{j}' + \frac{z}{r} \mathbf{k}' \right\} \end{aligned}$$

となる¹⁴⁾。ここで、 $x = r \cos \varphi \cos \lambda$, $y = r \cos \varphi \sin \lambda$, $z = r \sin \varphi$ なので、

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{r^2} \mathbf{j}' + \cos \varphi \mathbf{k}' \\ \mathbf{k} &= \frac{1}{r} \sin \varphi \mathbf{j}' + \cos \varphi \mathbf{k}' \end{aligned}$$

¹⁴⁾

$$\frac{\partial}{\partial x} \arctan(ax) = \frac{a}{1 + (ax)^2}$$

2-7-E 球面座標系での $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) + 1/2\nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})$ の導出

球面座標系での $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) + 1/2\nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})$ を求める.

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} &= \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rv) \right] & \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(ur) - \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial w}{\partial \lambda} \right] & \frac{1}{r \cos \varphi} \left[\frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \varphi}(u \cos \varphi) \right] \\ u & v & w \end{pmatrix} \\
&= \left\{ \frac{w}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(ur) - \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial w}{\partial \lambda} \right] - \frac{v}{r \cos \varphi} \left[\frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \varphi}(u \cos \varphi) \right] \right\} \mathbf{i} \\
&\quad + \left\{ \frac{u}{r \cos \varphi} \left[\frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \varphi}(u \cos \varphi) \right] - \frac{w}{r} \left[\frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rv) \right] \right\} \mathbf{j} \\
&\quad + \left\{ \frac{v}{r} \left[\frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rv) \right] - \frac{u}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(ur) - \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial w}{\partial \lambda} \right] \right\} \mathbf{k} \\
&= \left\{ \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v}{r \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{w}{r \cos \varphi} \frac{\partial w}{\partial \lambda} - (uv \tan \varphi - uw)/r \right\} \mathbf{i} \\
&\quad + \left\{ \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + w \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + (u^2 \tan \varphi + vw)/r \right\} \mathbf{j} \\
&\quad + \left\{ \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial w}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - u \frac{\partial u}{\partial r} - v \frac{\partial v}{\partial r} - (u^2 + v^2)/r \right\} \mathbf{k} \quad (2-7-E-1)
\end{aligned}$$

となる. 一方,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbf{i} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{k} \right) (u^2 + v^2 + w^2) \\
&= \left(\frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{r \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{w}{r \cos \varphi} \frac{\partial w}{\partial \lambda} \right) \mathbf{i} \\
&\quad + \left(\frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \mathbf{j} + \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial r} \right) \mathbf{k} \quad (2-7-E-2)
\end{aligned}$$

となるため,

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} + \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) &= \left\{ \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \frac{\partial u}{\partial r} - (uv \tan \varphi - uw)/r \right\} \mathbf{i} \\
&\quad + \left\{ \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \frac{\partial v}{\partial r} + (u^2 \tan \varphi + vw)/r \right\} \mathbf{j} \\
&\quad + \left\{ \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial w}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + w \frac{\partial w}{\partial r} - (u^2 + v^2)/r \right\} \mathbf{k} \\
&= \{ \mathbf{V} \cdot \nabla u - (uv \tan \varphi - uw)/r \} \mathbf{i} \\
&\quad + \{ \mathbf{V} \cdot \nabla v + (u^2 \tan \varphi + vw)/r \} \mathbf{j} \\
&\quad + \{ \mathbf{V} \cdot \nabla w - (u^2 + v^2)/r \} \mathbf{k}. \quad (2-7-E-3)
\end{aligned}$$

ここでは以下の式を使用した.

$$\mathbf{V} \cdot \nabla A = \frac{u}{r \cos \varphi} \frac{\partial A}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial A}{\partial \varphi} + w \frac{\partial A}{\partial r}.$$

2-7-F (2-14) 式の導出

(2-14) 式は式 (2-5) 式の球面座標系表示である。この (2-14) 式は式 (2-5)

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\alpha\nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \mathbf{g} + \mathbf{F}$$

に以下の方程式群を代入し、変形することで得ることができる。

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{\text{(直交直線座標系表現)}} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \left\{ -\frac{uv \tan \varphi - uw}{r} \mathbf{i} + \frac{u^2 \tan \varphi + vw}{r} \mathbf{j} - \frac{u^2 + v^2}{r} \mathbf{k}, \right\}$$

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = (2\Omega \cos \varphi w - 2\Omega \sin \varphi v) \mathbf{i} + 2\Omega \sin \varphi u \mathbf{j} - 2\Omega \cos \varphi u \mathbf{k},$$

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{g} = g \mathbf{k},$$

$$\mathbf{F} = F_\lambda \mathbf{i} + F_\varphi \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}.$$

2-7-G w を含む項を除外する理由

角運動量保存の式 (2-15) 式を展開すると式 (2-14) の i 成分になる。この段階で $r \simeq a$ 近似を使うと、以下の式となる。(この式では F_λ は圧力項を含む)

$$\frac{du}{dt} = \left(2\Omega + \frac{u}{a \cos \varphi}\right) (v \sin \varphi - w \cos \varphi) + F_\lambda \tag{2-7-G-1}$$

ではこの式は $r \simeq a$ 近似時における角運動量保存則を満たすのだろうか。近似時の角運動量保存則を求める。なお、本文の近似より $dr/dt \simeq da/dt = 0$ を用いる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [a \cos \varphi (u + \Omega a \cos \varphi)] &= a \cos \varphi F_\lambda, \\ \frac{du}{dt} &= \left(2\Omega + \frac{u}{a \cos \varphi}\right) v \sin \varphi + F_\lambda. \end{aligned} \tag{2-7-G-2}$$

角運動量は保存されなければならない量なので、式 (2-7-G-2) は式 (2-7-G-1) よりも優先される。このため、式 (2-7-G-1) において w を含む項は除外されなければならないのである。

2-7-H 「整合性」の意味

本文に出てきた「整合性」という言葉はエネルギー保存則を満たすという性質を意味する。外力を $\mathbf{F} = (F_\lambda, F_\varphi, F_z)$ とし、単位質量で考えた場合、エネルギー保存則は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}^2\right) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} \tag{2-7-H-1}$$

となる. 式 (2-14) の i 成分に u , をかけてみると (圧力や重力はそれぞれ, $F_\lambda, F_\varphi, F_z$ に含めている),

$$\begin{aligned} u \frac{du}{dt} &= u \left(2\Omega + \frac{u}{r \cos \varphi} \right) (v \sin \varphi - w \cos \varphi) + u F_\lambda, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) &= 2\Omega u v \sin \varphi - 2\Omega u w \cos \varphi + \frac{u^2 v}{r} \tan \varphi - \frac{u^2 w}{r} + u F_\lambda. \end{aligned} \quad (2-7-H-2)$$

同様にして, j 成分に v , k 成分に w をかけて計算すると,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = -2\Omega u v \sin \varphi - \frac{u^2 v}{r} \tan \varphi - \frac{v^2 w}{r} + v F_\varphi, \quad (2-7-H-3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} w^2 \right) = 2\Omega u w \sin \varphi + \frac{u^2 w}{r} + \frac{v^2 w}{r} + v F_\varphi. \quad (2-7-H-4)$$

これらの 3 成分の式を足し合わせると (2-7-H-1) 式になることが分かる.

ここで, $\Omega \times V$ の項は, それぞれの成分の項が打ち消し合ってゼロになっていることに注目して欲しい. (2-7-H-2) の右辺第 1 項と (2-7-H-3) の右辺第 1 項, (2-7-H-2) の右辺第 2 項と (2-7-H-4) の右辺第 1 項, (2-7-H-2) の右辺第 3 項と (2-7-H-3) の右辺第 2 項, (2-7-H-2) の右辺第 4 項と (2-7-H-4) の右辺第 2 項, (2-7-H-3) の右辺第 3 項と (2-7-H-4) の右辺第 3 項が対応していることが分かるだろう. エネルギー保存則が満たされるためには, ある項が除外された場合にはそれに対応する項も除外しなければならない. これが「整合性による項の除外」である.

具体的には, 角運動量保存の法則で式 (2-14) の i 成分の式の uw/r の項が除外されたために k 成分の式の u^2/r と $2\Omega u \cos \varphi$ を除外する必要がある.

また, 式 (2-11) より「水平成分の速度変化は水平成分の外力及び速度から求まる」はずなので, 式 (2-14) の j 成分の式の vw/r の項は除外され, それに対応する k 成分の式の v^2/r も除外される.

これらによって式 (2-16) ~ (2-18) 式が得られる.

2-7-I 角運動量保存則の導出

(2-14) に $r \cos \varphi$ をかけて計算することで角運動量保存則である (2-15) を求めることができる. 以下はその計算である. なお, 圧力勾配の項は外力 F_λ に含まれているとする.

$$\begin{aligned} r \cos \varphi \frac{du}{dt} &= (2\Omega r \cos \varphi + u)(v \sin \varphi - w \cos \varphi) + r \cos \varphi F_\lambda \\ \frac{d}{dt} (ru \cos \varphi) - u \cos \varphi \frac{dr}{dt} + ru \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} &= 2\Omega r \cos \varphi (v \sin \varphi - w \cos \varphi) + uv \sin \varphi - uw \cos \varphi + r \cos \varphi F_\lambda. \end{aligned}$$

$v = r d\varphi/dt$, $w = dr/dt$ であることから,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(ru \cos \varphi) &= 2\Omega r \cos \varphi (v \sin \varphi - w \cos \varphi) + r \cos \varphi F_\lambda \\ &= 2\Omega r \cos \varphi \left(r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - \cos \varphi \frac{dr}{dt} \right) + r \cos \varphi F_\lambda \\ &= 2\Omega r \cos \varphi \left\{ -\frac{d}{dt}(r \cos \varphi) \right\} + r \cos \varphi F_\lambda \\ &= -\Omega \frac{d}{dt}(r^2 \cos^2 \varphi) + r \cos \varphi F_\lambda \end{aligned}$$

となる. よって角運動量保存則

$$\frac{d}{dt}[r \cos \varphi (u + \Omega r \cos \varphi)] = r \cos \varphi F_\lambda$$

が導かれる.

2-7-J 一般座標

一般座標の勾配, 発散, 回転に関しては松井 他 (1996) 付録を参照のこと.

2-8 地図投影法

球面である地球表面の全体、または一部を平面地図で表すことは気象現象の解析、予報、描画において有用である。地図の作成にあたっては平面地図に書き出されるものはできるだけ球面に近いものでなければならないが、平面にする以上、ある程度球面の特徴は失われてしまう。交差する曲線の角度を維持するのは重要なことで、例えば円状の緯線と子午線は直角に交差するのもそうである。こういった重要な特性を持つ地図投影法は正角投影法 (*conformal*) と呼ばれる。球面における距離が平面地図に投影されても維持されているような投影法は等角投影法 (*isometric*) と呼ばれる。この地図は気象学者の間で使われている分にはあまり生かされていない。その一方で、距離の歪みはかなり良いレベルまで押えられている。

一般的に使われている地図には3種類ある。1つは極射影図法 (*polar stereographic*) と呼ばれ、半球の地図を作成するのに向いている。2つめはメルカトル式円筒図法 (*Mercator cylindrical projection*) といい、特に赤道帯の地図の作成に便利な図法である。3つめはランベルト円錐図法 (*Lambert conical projection*) である。これらの全ては図の1-2に示されている。極射影図法とメルカトル図法はランベルト円錐図法の特殊なものの一つである。球面を平面に投影した地図を使用するにあたっては、平面用に新たな座標系を用意し、さらに運動方程式もこの座標系用に変形することが望まれる。

以降では良く利用される投影法における基礎方程式系を扱う。なお、地図学の詳しい解説は野村正七著「地図投影法」などを参考にされたい(ただし、この本は絶版)。

2-8-1 極射影図法

この図法は数値気象予報において広く使われている。球面から平面への投影は以下の変形によって行われる。

$$r = 2a \tan(\phi/2) \quad \text{and} \quad \theta = \lambda. \quad (2-21)$$

一つ目の公式は図2-2からすぐに得られる。記号 a は地球半径の平均値を表し、 r は地図上の緯線の円の半径である。 ϕ は余緯度 (*colatitude*) と呼ばれ、本来の緯度 φ とは $\phi = \pi/2 - \varphi$ という関係にある。式(2-21)は以下のように書くことができる¹⁾。

$$r = a m(\varphi) \cos \varphi \quad \theta = \lambda \quad m(\varphi) = 2/(1 + \sin \varphi). \quad (2-22)$$

ここでの $m(\varphi)$ はマップファクター (*map factor*) と呼ばれる量で投影図の縮尺である²⁾。

¹⁾三角関数の関係式

$$\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

より、

$$\tan(\phi/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{1 + \cos \phi}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \phi}{(1 + \cos \phi)^2}} = \frac{\sin \phi}{1 + \cos \phi} = \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi}.$$

なお、 $\phi = \pi/2 - \varphi$ より、 $\sin \phi = \cos \varphi$ 、 $\cos \phi = \sin \varphi$ である。

²⁾ $m(\varphi)$ の意味については2-8-A参照。

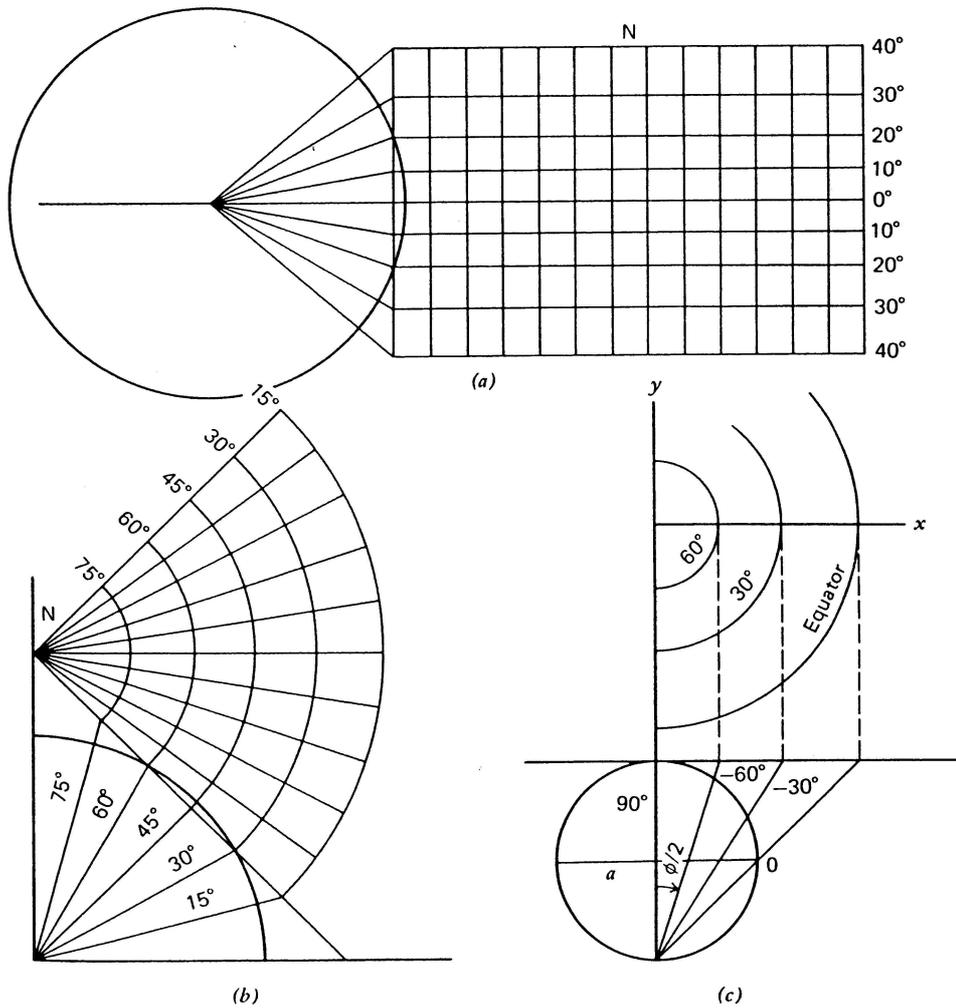


Figure 1-2. (a) Mercator cylindrical projection true at 20° latitude, (b) Lambert conical projection true at 30° and 60° latitude, (c) polar stereographic projection true at 90°.

図 2-1: (a) メルカトル円筒図法は緯度が 20° では正しい, (b) ランベルト円錐図法は緯度 30° と 60° で正しい, (c) 極射影図法は 90° で正しい. (Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1979: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology. John Wiley & Sons, 477pp)

この極射影図に $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ としてデカルト座標を導入する. x, y は φ, λ を用いて以下のように記述することができる.

$$x = \frac{2a \cos \varphi \cos \lambda}{1 + \sin \varphi}, \quad y = \frac{2a \cos \varphi \sin \lambda}{1 + \sin \varphi}, \quad z = z. \tag{2-23}$$

これらの式を微分することで極射影図上での距離 (dx, dy) と球面上での距離 (dx_s, dy_s) との関係式

を導くことができる。関係式は以下のような行列形式になる。³⁾

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \frac{2}{1 + \sin \varphi} \begin{pmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_s \\ dy_s \end{pmatrix}. \quad (2-24)$$

係数 $2/(1 + \sin \varphi)$ は球面から極射影図に投影された際の拡大率 $m(\varphi)$ を表す。また、行列は球面座標系の回転を表す。そのため、極射影図法でのスケール因子 h_x, h_y は

$$h_x = h_y = 1/m(\varphi) = (1 + \sin \varphi)/2 \quad (2-25)$$

となる。式 (2-24) から明らかなことだが、極射影図座標系での風速 (U, V) は地球上での東向きと北向きの速度 (u_s, v_s) と関係している。その関係式は式 (2-24) と同様に以下のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s \\ v_s \end{pmatrix}, \quad (2-26)$$

$$U = h_x \dot{x} \quad \text{and} \quad V = h_y \dot{y}. \quad (2-27)$$

極射影図座標系での運動方程式を得るには前述の関係式を式 (2-14) に代入すると良い。その結果は以下のようなになる⁴⁾。

$$\frac{dU}{dt} - V \left(f - \frac{xV - yU}{2a^2} \right) - \frac{W}{a} [(1 + \sin \varphi)\Omega y - U] = -m\alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2-28)$$

$$\frac{dV}{dt} + U \left(f - \frac{xV - yU}{2a^2} \right) + \frac{W}{a} [(1 + \sin \varphi)\Omega x + V] = -m\alpha \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2-29)$$

$$\frac{dW}{dt} - \frac{1}{a} [U^2 + V^2 + \Omega(1 + \sin \varphi)(xV - yU)] = -\alpha \frac{\partial p}{\partial z} - g. \quad (2-30)$$

ここでは $f = 2\Omega \sin \varphi$ であり、 F は除外してある。ただし、

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + m \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) + W \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2-31)$$

となる⁵⁾。

静水圧近似が仮定できる場合は式 (2-11) で表されるように速度 U, V の時間変化は速度 W に依存していないため、式 (2-28), (2-29) の右辺の W を含む項は除外されなければならない。また、運動エネルギー保存則で考えると (2-28) ~ (2-30) の左辺は以下のような形となる。

$$\frac{d}{dt} (U^2 + V^2 + W^2) = \dots$$

エネルギー保存則を考えた場合、(2-28), (2-29) の W を含む項が除外される場合は (2-30) の $-(1/a) [U^2 + V^2 + \Omega(1 + \sin \varphi)(xV - yU)]$ の項も除外される必要がある⁶⁾。このように式 (2-28)

³⁾ 導出は 2-8-B 参照

⁴⁾ 導出の方法は 2-8-C 参照.

⁵⁾ 本論文の最後に掲載している数学公式 (A-21) 参照

⁶⁾ ここらへんの具体的な手順は 2-7 節 座標系の 2-7-H 「整合性」の意味を参照のこと

~ (2-30) のいくつかの項を落とすと, (2-16) ~ (2-18) と似たような以下の形になる.

$$\frac{dU}{dt} - V \left(f - \frac{xV - yU}{2a^2} \right) = -m\alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2-32)$$

$$\frac{dV}{dt} + U \left(f - \frac{xV - yU}{2a^2} \right) = -m\alpha \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2-33)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \quad (2-34)$$

なお, 連続の式には少し変更が加わり, 以下のようになる⁷⁾.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + m^2 \left[\frac{\partial(\rho U/m)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V/m)}{\partial y} \right] + \frac{\partial(\rho W)}{\partial z} = 0. \quad (2-35)$$

2-8-2 メルカトル図法

メルカトル図法は以下の式で定義される.

$$x = (a \cos \varphi_0) \lambda, \quad y = a \cos \varphi_0 \ln [(1 + \sin \varphi) / \cos \varphi].$$

ここで, φ_0 は投影図が⁸⁾ “正確な” 緯度である. マップファクター $m(\varphi)$ は $m(\varphi) = \cos \varphi_0 / \cos \varphi = 1/h_x = 1/h_y$ となる. そして, 水平面での運動方程式は以下のようになる⁹⁾.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + m \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) + w \frac{\partial U}{\partial z} - \left(f + \frac{U \tan \varphi}{a} \right) V = -\frac{m}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2-36)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + m \left(U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) + w \frac{\partial V}{\partial z} + \left(f + \frac{U \tan \varphi}{a} \right) U = -\frac{m}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (2-37)$$

$U = h_x dx/dt$, $V = h_y dy/dt$ である.

2-8-3 ランベルト正角投影図法

ランベルト正角投影図は以下の式で定義される.

$$r = r_0 \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right]^K, \quad \theta = K(\lambda - \lambda_0). \quad (2-38)$$

2つの定数 r_0 と K は緯度 φ_1 および φ_2 にて投影図が⁸⁾ “正確” になるように設定される. この設定を行うと, (2-38) は以下のように書くことができる.

$$r = (a/K) m(\varphi) \cos \varphi, \quad \theta = K(\lambda - \lambda_0). \quad (2-39)$$

ここでは

$$m(\varphi) = \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_1} \right) (K - 1) \left(\frac{1 + \sin \varphi_1}{1 + \sin \varphi} \right) K, \\ K = \ln \left(\frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} \right) \bigg/ \ln \left\{ \frac{\tan [(\pi/4) - (\varphi_1/2)]}{\tan [(\pi/4) - (\varphi_2/2)]} \right\}. \quad (2-40)$$

運動方程式は (2-32) ~ (2-34) の形と一致する.

⁷⁾ 付録の数学公式 (A-18) 参照.

⁸⁾ ここでいう「正確な緯度」とは, 球面に対し投影図のスケールが等しい緯度のことを示す. 捕捉すると, この緯度よりも小さい緯度では投影図は縮小され, 大きい緯度では拡大される.

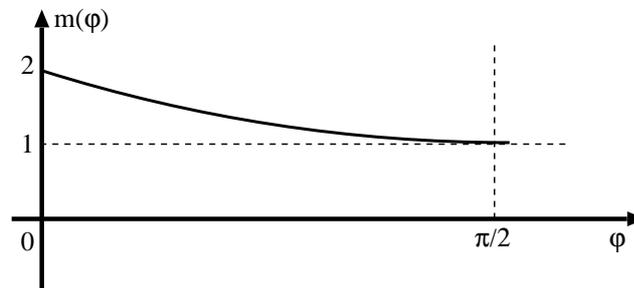
⁹⁾ この式の導出に関しては 2-8-D 参照.

2-8-4 追記

予報のための方程式系の全世界的な統合は気象学の研究のために約 10 年前から行われていた。そして世界的な気象予報はそのような限られた特別な環境下で狭い範囲から広範囲にわたって行われていた。しかし、最近ではコンピュータのパワーが強力になり、普通の環境下でも 100km から 200km メッシュでの世界的な気象予報が様々な形で行われるようになった。全球モデルの一つの利点は水平面での境界条件を気にしなくて良い点である。それに対し、限られた領域内では水平面の境界条件を考慮する必要がある。これからの全球モデルは狭いスケールやメソスケールの現象を説明するために限定領域でのモデルの良いところを吸収していくだろう。

2-8-A 投影図の縮尺 $m(\varphi)$ について

$m(\varphi) = 2/(1 + \sin \varphi)$ は投影図 (この場合は極射影図) での実際の球面に対する拡大率を表す。 φ を変数に持つ値のため、緯度に依存することがわかる。 φ を横軸にとり、 $m(\varphi)$ を縦軸にとって $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ の範囲で簡単なグラフを書くと以下の図 2-8-A-1 のようになる。つまり、極射影図の中心 ($\varphi = \pi/2$) では縮尺は 1 なので極射影図での距離と球面上での距離とはと全く一致する。逆に極射影図の端 ($\varphi = 0$) では縮尺は 2 となり、極射影図上での距離は球面上での実際の距離の 2 倍となっている。これは、極射影図上では地球の円周が $2\pi \times 2a = 4\pi a$ となっており、実際の円周 $2\pi a$ の 2 倍となっていることから理解できる。

図 2-8-A-1: マップファクター $m(\varphi)$

2-8-B 球面での距離と極射影図上での距離の関係式

式 (2-23) を微分して式 (2-24) を導出する。

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi, \quad (2-8-B-1)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi. \quad (2-8-B-2)$$

ここで、先に φ 成分の微分を行っておく.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \right) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \cos \varphi (1 + \sin \varphi)^{-1} \right\} \\ &= -\sin \varphi (1 + \sin \varphi)^{-1} - \cos^2 \varphi (1 + \sin \varphi)^{-2} \\ &= -\frac{\sin \varphi + \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{(1 + \sin \varphi)^2} \\ &= -\frac{1 + \sin \varphi}{(1 + \sin \varphi)^2} \\ &= -\frac{1}{1 + \sin \varphi}. \end{aligned} \tag{2-8-B-3}$$

(2-8-B-1) を解く. φ の微分には (2-8-B-3) を用いる.

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{2a \cos \varphi \cos \lambda}{1 + \sin \varphi} \right) d\lambda + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{2a \cos \varphi \cos \lambda}{1 + \sin \varphi} \right) d\varphi \\ &= -\frac{2a \cos \varphi \sin \lambda}{1 + \sin \varphi} d\lambda - \frac{2a \cos \lambda}{1 + \sin \varphi} d\varphi \\ &= \frac{2}{1 + \sin \varphi} (-a \cos \varphi \sin \lambda d\lambda - a \cos \lambda d\varphi). \end{aligned} \tag{2-8-B-4}$$

(2-8-B-2) も同様に計算する.

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{2a \cos \varphi \sin \lambda}{1 + \sin \varphi} \right) d\lambda + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{2a \cos \varphi \sin \lambda}{1 + \sin \varphi} \right) d\varphi \\ &= \frac{2}{1 + \sin \varphi} (a \cos \varphi \cos \lambda d\lambda - a \sin \lambda d\varphi). \end{aligned} \tag{2-8-B-5}$$

ここで、球面上での距離 (dx_s, dy_s) は以下のように表せる. (式 (2-13) 参照).

$$\begin{aligned} dx_s &= a \cos \varphi d\lambda, \\ dy_s &= a d\varphi. \end{aligned}$$

これらの関係式を (2-8-B-4), (2-8-B-5) に代入して行列形式に変形すると, 式 (2-24) が導出できる.

2-8-C 極射影図座標系での運動方程式の導出

極射影図座標系での運動方程式 (2-28) ~ (2-30) は, 球面座標での運動方程式 (2-14) ¹⁰⁾ に, 球面での速度 (u_s, v_s) と極射影図上での速度 (U, V) との関係式 (2-26) ¹¹⁾ を代入することで導出できる.

¹⁰⁾

$$\begin{aligned} \frac{du_s}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_s} + (2\Omega + \frac{u_s}{r \cos \varphi})(v_s \sin \varphi - w_s \cos \varphi) + F_\lambda, \\ \frac{dv_s}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_s} - (2\Omega + \frac{u_s}{r \cos \varphi})u_s \sin \varphi - \frac{v_s w_s}{r} + F_\varphi, \\ \frac{dw_s}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_s} - g + (2\Omega + \frac{u_s}{r \cos \varphi})u_s \cos \varphi + \frac{v_s^2}{r} + F_z. \end{aligned}$$

¹¹⁾

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s \\ v_s \end{pmatrix}.$$

式 (2-14) に代入するために式 (2-26) を以下のように変形しておく.

$$u_s = -U \sin \lambda + V \cos \lambda, \quad v_s = -U \cos \lambda - V \sin \lambda, \quad w_s = W. \quad (2-8-C-1)$$

三つ目の関係式は式 (2-23) より導かれる.

2-8-C-a (2-28) の導出

式 (2-14) の i 成分と j 成分の式に (2-8-C-1) を代入して足し合わせることで, 式 (2-28) を導出する. なお, 本文にもあるとおり $r = a$ とし, 外力 F は除外する.

まず, i に代入すると,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (-U \sin \lambda + V \cos \lambda) \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_s} + \left(2\Omega + \frac{-U \sin \lambda + V \cos \lambda}{a \cos \varphi} \right) (-U \cos \lambda - V \sin \lambda) \sin \varphi \\ & \quad - \left(2\Omega + \frac{-U \sin \lambda + V \cos \lambda}{a \cos \varphi} \right) W \cos \varphi, \\ & -\sin \lambda \frac{dU}{dt} - U \cos \lambda \frac{d\lambda}{dt} + \cos \lambda \frac{dV}{dt} - V \sin \lambda \frac{d\lambda}{dt} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_s} + \left(2\Omega + \frac{-U \sin \lambda + V \cos \lambda}{a \cos \varphi} \right) (-U \cos \lambda - V \sin \lambda) \sin \varphi \\ & \quad - 2\Omega W \cos \varphi - \left(\frac{-U \sin \lambda + V \cos \lambda}{a} \right) W. \end{aligned} \quad (2-8-C-2)$$

次に, j に代入すると,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (-U \cos \lambda - V \sin \lambda) \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_s} - \left(2\Omega + \frac{-U \sin \lambda + V \cos \lambda}{a \cos \varphi} \right) (-U \sin \lambda + V \cos \lambda) \sin \varphi \\ & \quad - \left(\frac{-U \cos \lambda - V \sin \lambda}{a} \right) W, \\ & -\cos \lambda \frac{dU}{dt} + U \sin \lambda \frac{d\lambda}{dt} - \sin \lambda \frac{dV}{dt} - V \cos \lambda \frac{d\lambda}{dt} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_s} + \left(2\Omega + \frac{-U \sin \lambda + V \cos \lambda}{a \cos \varphi} \right) (U \sin \lambda - V \cos \lambda) \sin \varphi \\ & \quad - \left(\frac{-U \cos \lambda - V \sin \lambda}{a} \right) W. \end{aligned} \quad (2-8-C-3)$$

(2-8-C-2) $\times \sin \lambda$ + (2-8-C-3) $\times \cos \lambda$ とすると,

$$\begin{aligned} -\frac{dU}{dt} - V \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \left(\sin \lambda \frac{\partial}{\partial x_s} + \cos \lambda \frac{\partial}{\partial y_s} \right) p \\ & \quad + \left(2\Omega + \frac{-U \sin \lambda + V \cos \lambda}{a \cos \varphi} \right) (-V) \sin \varphi \\ & \quad - 2\Omega W \sin \lambda \cos \varphi - \frac{-UW}{a} \end{aligned} \quad (2-8-C-4)$$

となる. 式 (2-13) より

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{u_s}{a \cos \varphi} = \frac{-U \sin \lambda + V \cos \lambda}{a \cos \varphi}$$

となるので, これを (2-8-C-4) に代入すると,

$$\begin{aligned} -\frac{dU}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \left(\sin \lambda \frac{\partial}{\partial x_s} + \cos \lambda \frac{\partial}{\partial y_s} \right) p \\ &\quad - 2\Omega V \sin \varphi + V \left(\frac{-U \sin \lambda + V \cos \lambda}{a \cos \varphi} \right) (1 - \sin \varphi) \\ &\quad + 2\Omega W \sin \lambda \cos \varphi - \frac{-UW}{a}. \end{aligned} \tag{2-8-C-5}$$

式が複雑になるので, (2-8-C-5) を各項に分けて計算する. まず, (2-8-C-5) の右辺第 1 項について考える.

式 (2-24) より, 以下の関係式が成り立つ ($m = 1/(1 + \sin \varphi)$ である).

$$\begin{aligned} dx &= -m \sin \lambda dx_s - m \cos \lambda dy_s, \\ dy &= m \cos \lambda dx_s - m \sin \lambda dy_s, \\ dz &= dz_s. \end{aligned}$$

変形すると,

$$\begin{aligned} dx_s &= \frac{1}{m} (-\sin \lambda dx + \cos \lambda dy), \\ dy_s &= \frac{1}{m} (-\cos \lambda dx - \sin \lambda dy), \\ dz_s &= dz \end{aligned}$$

これらの式より, 以下の関係式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_s}{\partial x} &= -\frac{\sin \lambda}{m}, & \frac{\partial x_s}{\partial y} &= \frac{\cos \lambda}{m}, & \frac{\partial x_s}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial y_s}{\partial x} &= -\frac{\cos \lambda}{m}, & \frac{\partial y_s}{\partial y} &= -\frac{\sin \lambda}{m}, & \frac{\partial y_s}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial z_s}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial z_s}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial z_s}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{2-8-C-6}$$

よって,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z_s} \frac{\partial z_s}{\partial x}, \\ &= -\frac{\sin \lambda}{m} \frac{\partial p}{\partial x_s} - \frac{\cos \lambda}{m} \frac{\partial p}{\partial y_s}, \\ m \frac{\partial p}{\partial x} &= -\sin \lambda \frac{\partial p}{\partial x_s} - \cos \lambda \frac{\partial p}{\partial y_s}. \end{aligned} \tag{2-8-C-7}$$

次に, (2-8-C-5) の右辺第 2, 3 項について考える. (2-23) を変形した以下の式を利用する.

$$\sin \lambda = y \frac{1 + \sin \varphi}{2a \cos \varphi}, \quad \cos \lambda = x \frac{1 + \sin \varphi}{2a \cos \varphi}.$$

これらの式を右辺の第 2, 3 項を代入すると,

$$\begin{aligned}
 & -2\Omega V \sin \varphi + V \left(\frac{-U \sin \lambda + V \cos \lambda}{a \cos \varphi} \right) (1 - \sin \varphi) \\
 & = -2\Omega V \sin \varphi + V \left(\frac{xV - yU}{2a^2 \cos^2 \varphi} (1 + \sin \varphi) \right) (1 - \sin \varphi) \\
 & = -V \left(f + \frac{xV - yU}{2a^2} \right). \tag{2-8-C-8}
 \end{aligned}$$

以前にもあったとおり, $f = 2\Omega \sin \varphi$ である.

最後に, (2-8-C-5) の右辺第 4, 5 項について考える.

$$\begin{aligned}
 -2\Omega W \sin \lambda \cos \varphi - \frac{-UW}{a} & = -\frac{W}{a} (2a\Omega \sin \lambda \cos \varphi - U) \\
 & = -\frac{W}{a} [(1 + \sin \varphi)\Omega y - U]. \tag{2-8-C-9}
 \end{aligned}$$

(2-8-C-7), (2-8-C-8), (2-8-C-9) を (2-8-C-5) に代入することで以下の式 (2-28) が導出できた.

$$\frac{dU}{dt} - V \left(f - \frac{xV - yU}{2a^2} \right) - \frac{W}{a} [(1 + \sin \varphi)\Omega y - U] = -m\alpha \frac{\partial p}{\partial x}.$$

2-8-C-b (2-29) の導出

式 (2-29) の導出は式 (2-28) の導出の方法とほとんど同じようにおこなう. 今回は (2-8-C-2) $\times -\cos \lambda + (2-8-C-3) \times \sin \lambda$ とする. すると,

$$\begin{aligned}
 -\frac{dV}{dt} + U \frac{d\lambda}{dt} & = \frac{1}{\rho} \left(\cos \lambda \frac{\partial}{\partial x_s} - \sin \lambda \frac{\partial}{\partial y_s} \right) p \\
 & + \left(2\Omega + \frac{-U \sin \lambda + V \cos \lambda}{a \cos \varphi} \right) U \sin \varphi \\
 & + 2\Omega W \cos \lambda \cos \varphi - \frac{-VW}{a} \tag{2-8-C-10}
 \end{aligned}$$

となる. この式も (2-28) の導出と同様に変形を行うと, 以下の式 (2-29) に変形できる.

$$\frac{dV}{dt} + U \left(f - \frac{xV - yU}{2a^2} \right) + \frac{W}{a} [(1 + \sin \varphi)\Omega x + V] = -m\alpha \frac{\partial p}{\partial y}.$$

2-8-C-c (2-30) の導出

(2-30) は (2-14) の k 成分に (2-8-C-1) を代入して導出することができる.

$$\begin{aligned}
 \frac{dW}{dt} & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + 2\Omega \cos \varphi (-U \sin \lambda + V \cos \lambda) \\
 & + \frac{(-U \sin \lambda + V \cos \lambda)^2}{a} + \frac{(-U \cos \lambda - V \sin \lambda)^2}{a} \\
 & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{\Omega}{a} (xV - yU) (1 + \sin \varphi) + \frac{U^2 + V^2}{a}, \\
 \frac{dW}{dt} - \frac{1}{a} [U^2 + V^2 + \Omega(1 + \sin \varphi)(xV - yU)] & = -\alpha \frac{\partial p}{\partial z} - g.
 \end{aligned}$$

2-8-D メルカトル図法座標系での運動方程式

メルカトル図法でも極射影図法の場合と同じ方法で運動方程式を求める。まず、 (x_s, y_s) と (x, y) との関係式 (または (u_s, v_s) と (U, V) との関係式) を式 (2-14) に代入してメルカトル図法座標系の運動方程式を求める。その後、水平面近似を利用して w を含む項を削除する。

まず、本文の以下の関係式から (x_s, y_s) と (x, y) 、および (u_s, v_s) と (U, V) との関係式を求める。

$$x = (a \cos \varphi_0) \lambda \quad y = a \cos \varphi_0 \ln [(1 + \sin \varphi) / \cos \varphi].$$

上記の式から (x_s, y_s) と (x, y) の関係式を考える。

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi \\ &= (a \cos \varphi_0) d\lambda \\ &= \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} dx_s, \end{aligned} \tag{2-8-D-1}$$

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi \\ &= a \cos \varphi_0 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \ln \left(\frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) \right\} d\varphi \\ &= a \cos \varphi_0 \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \frac{1}{1 - \sin \varphi} d\varphi \\ &= a \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} dy_s. \end{aligned} \tag{2-8-D-2}$$

この計算の途中で (2-13) を利用している。これらから (u_s, v_s) と (U, V) との関係式を求める。

$$u_s = \frac{dx_s}{dt} = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0} \frac{dx}{dt} = h_x \frac{dx}{dt} = U, \tag{2-8-D-3}$$

$$v_s = \frac{dy_s}{dt} = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0} \frac{dy}{dt} = h_y \frac{dy}{dt} = V. \tag{2-8-D-4}$$

最後に圧力項の関係式を求める。

$$\frac{\partial p}{\partial x_s} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_s} = m \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{2-8-D-5}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y_s} = \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y_s} = m \frac{\partial p}{\partial y}. \tag{2-8-D-6}$$

(2-8-D-3), (2-8-D-4), (2-8-D-5), (2-8-D-6) および (2-31) を (2-14) に代入する。なお、水平面近似によって w を含む項は除外してある。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + m \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) + w \frac{\partial U}{\partial z} - \left(f + \frac{U \tan \varphi}{a} \right) V &= -\frac{m}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + m \left(U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) + w \frac{\partial V}{\partial z} + \left(f + \frac{U \tan \varphi}{a} \right) U &= -\frac{m}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}$$

2-9 より使いやすい鉛直座標系

高さ z (または半径 r) を用いた座標系は多くの目的がある中でもっとも便利な座標系とは言えない。その利便さから使われている他の鉛直座標系としては、圧力 p , $\ln p/p_0$, 地上圧力で規格化された圧力 $\sigma = p/p_s$, そして温位 θ の座標系がある。

一般化した鉛直座標系 ζ [Kasahara (1974)] を考える。この ζ は高さ z に関する一価¹⁾ の単調関数²⁾ によって定義できる。 z 座標系においては、 ζ は x, y, z そして t の関数である。つまり、 $\zeta = \zeta(x, y, z, t)$ である。他の言い方をすると、 ζ の鉛直座標系では、 z は従属変数、つまり $z = z(x, y, \zeta, t)$ となる。あらゆるスカラー (またはベクトル) の従属変数 (ここでは仮に A とする) はどちらの座標系においても $A(x, y, z, t)$ または $A(x, y, \zeta, t)$ と表現できる。なぜならば、これらの関数は z または ζ をそれぞれ別の座標系の関数形で置き換えると同じになるからである。つまり、以下の式が成り立つということである。

$$A(x, y, \zeta, t) \equiv A(x, y, z(x, y, \zeta, t), t).$$

ここで s での偏微分を取り上げる。ここで s とは $s = x$, や y , t である。すると、

$$\left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_{\zeta} = \left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_z + \frac{\partial A}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_{\zeta} \quad (2-41)$$

となる。なお、添字の z と ζ はそれぞれの座標系でのものであることを示す³⁾。同様に鉛直方向の偏微分は以下のような関係にある。

$$\frac{\partial A}{\partial \zeta} = \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad \text{また、別な形では、} \quad \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \quad (2-42)$$

(2-42) を (2-41) に代入すると、その結果は以下ようになる。

$$\left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_{\zeta} = \left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_z + \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_{\zeta}. \quad (2-43)$$

この最後の式で $s = x$ と代入した式と $s = y$ と代入した式とを足し合わせることで A の勾配 (グラディエント) となる。同様に、 A の代わりにベクトル成分 B を用いると 2 次元発散の式となる。式で書くと以下ようになる。

$$\nabla_{\zeta} A = \nabla_z A + \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \nabla_{\zeta} z, \quad (2-44)$$

$$\nabla_{\zeta} \cdot B = \nabla_z \cdot B + \frac{\partial B}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \cdot \nabla_{\zeta} z. \quad (2-45)$$

$s = t$ とした場合は以下ようになる。

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{\zeta} = \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_z + \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{\zeta}. \quad (2-46)$$

なお、 ζ 座標系での全微分は以下ようになる。

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_{\zeta} + \mathbf{V} \cdot \nabla_{\zeta} A + \zeta \frac{\partial A}{\partial \zeta}. \quad (2-47)$$

1) 一つの z に対して一つの ζ が決まること。

2) 単調関数とは、単調増加または単調減少するような関数のこと。

3) この式に関しては 2-9-A を参照。

ここからは V は ζ 面での 2 次元速度, $\dot{\zeta} = d\zeta/dt$ は ζ 座標系における鉛直速度, そして A はスカラーまたはベクトルである (ベクトルの場合はスケールに関して考慮済みであると仮定している⁴⁾).

前述の式は運動方程式を z 座標系表記から ζ 座標系表記へ変形するのに利用できる. 式 (2-44) を利用すると水平面圧力の表記は以下のように変形できる.

$$-\alpha \nabla_z p = -\alpha \nabla_\zeta p + \alpha \frac{\partial p}{\partial z} \nabla_\zeta z = -\alpha \nabla_\zeta p - \nabla_\zeta \phi. \quad (2-48)$$

ここで ϕ はジオポテンシャル (geopotential)⁵⁾ であり, $\phi = gz$ である⁶⁾.

このようにして, 摩擦無しでの水平面の運動方程式は ζ 座標系では以下ようになる.

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\alpha \nabla_\zeta p - \nabla_\zeta \phi - f\mathbf{k} \times \mathbf{V} + \mathbf{F}. \quad (2-49)$$

(2-42) を静水圧平衡の式 $\alpha(\partial p/\partial z) + g = 0$ に代入すると,

$$\alpha \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial z} + g = 0 \quad \text{または} \quad \alpha \frac{\partial p}{\partial \zeta} + \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} = 0 \quad (2-50)$$

となる⁷⁾.

次に, 連続の式の座標系変換について考える. 連続の式を変形すると,

$$d(\ln \rho)/dt + \nabla_z \cdot \mathbf{V} + \partial w/\partial z = 0 \quad (2-51)$$

となる⁸⁾. まず始めに式 (2-42), (2-45) を発散の項 ((2-51) の右辺第 2, 3 項) に利用すると,

$$\nabla_z \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla_\zeta \cdot \mathbf{V} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \zeta} \cdot \nabla_\zeta z + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \quad (2-52)$$

となる. さらに,

$$w = dz/dt = (\partial z/\partial t)_\zeta + \mathbf{V} \cdot \nabla_\zeta z + \dot{\zeta} \partial z/\partial \zeta \quad (2-53)$$

なので⁹⁾, この式を ζ で偏微分すると以下ようになる.

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) + \mathbf{V} \cdot \nabla_\zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \zeta} \cdot \nabla_\zeta z + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right). \quad (2-54)$$

⁴⁾ 具体的には, 前節の式 (2-27) のように速度成分の中にスケール因子を含めるような操作のことである.

⁵⁾ 単位質量の物体を海面から地球の重力に抗してその高度にまで持ち上げるのに要するエネルギー [$N \cdot s/kg$].

⁶⁾ 静水圧平衡の式から以下の関係が成り立つ.

$$\alpha \partial p/\partial z = -g.$$

⁷⁾ 左の式の両辺に $\partial z/\partial \zeta$ を掛けると以下ようになって右の式が導出される.

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial z} + g \frac{\partial z}{\partial \zeta} &= 0, \\ \alpha \frac{\partial p}{\partial \zeta} + \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} &= 0. \end{aligned}$$

⁸⁾ ここでは, $\nabla_z \cdot \mathbf{V}$ は 2 次元 (水平面) のベクトルであり, $d(\ln \rho)/dt = (1/\rho)d\rho/dt$ であることを利用して変形を行っている.

⁹⁾ 式 (2-47) を利用している.

式 (2-52) に式 (2-54) を代入すると以下の式が導かれる.

$$\nabla_z \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla_\zeta \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_\zeta + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta}. \quad (2-55)$$

その上, $\partial \zeta / \partial z = (\partial z / \partial \zeta)^{-1}$ であることから, 右辺の真中の項はちょうど $d[\ln(\partial z / \partial \zeta)] / dt$ となる¹⁰⁾. この項は (2-51) の $d(\ln \rho) / dt$ と組み合わせることができて以下のようになる¹¹⁾.

$$d[\ln(\rho \partial z / \partial \zeta)] / dt = d(\ln \partial p / \partial \zeta) / dt.$$

このようにして, 変形された連続の式は以下のようになる.

$$\frac{d}{dt} \left(\ln \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) + \nabla_\zeta \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta} = 0. \quad (2-56)$$

最後は熱力学の式に関してである. 熱力学の式は鉛直座標系の変換を行っても見た目は変わらない. それは熱力学の式が以下のように温位 $\theta = T(p_0/p)^\kappa$ の全微分と T で表記されるからである.

$$c_p T (d \ln \theta) / dt = Q, \quad (1-57a)$$

または

$$c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = Q. \quad (1-57b)$$

次ではこれらの一般化した方程式系を特定の場合に応用してみる.

2-9-1 圧力鉛直座標系

$\zeta = p$ である場合を考える. この場合, $\nabla_\zeta p = \nabla_p p = 0$ であり, $\partial p / \partial p = 1$ であるため, 運動方程式 (2-49) と静水圧の式 (2-50) は以下のようになる.

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla_p \phi - f \mathbf{k} \times \mathbf{V} + \mathbf{F}, \quad (2-58)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\alpha. \quad (2-59)$$

連続の式 (2-56) では, $\zeta = p$ により $\ln(\partial \zeta / \partial p) = \ln(\partial p / \partial p) = 0$ となるため第 1 項は消え,

$$\nabla_p \cdot \mathbf{V} + \partial \omega / \partial p = 0 \quad (2-60)$$

¹⁰⁾ $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla_\zeta + \zeta(\partial/\partial \zeta)$ であることに注意.

¹¹⁾ 静水圧の式 $dp = -\rho g dz$ から

$$\partial p / \partial \zeta = -\rho g \partial z / \partial \zeta.$$

この式の自然対数をとると

$$\ln(\partial p / \partial \zeta) = \ln(\rho \partial z / \partial \zeta) + \ln(-g).$$

この式を時間微分すると, 重力加速度 g は定常であることから

$$d[\ln(\partial p / \partial \zeta)] / dt = d[\ln(\rho \partial z / \partial \zeta)] / dt.$$

となる. ここで $\omega = dp/dt = \dot{p}$ は p -座標系での鉛直速度である. なお, この方程式は線形 (*linear*) であることに注意. この式を $p = 0$ (ここでは $\omega = 0$) から任意の圧力 p を持つ高さまでの範囲で積分すると ω を求める式となる.

$$\omega = - \int_0^p \nabla_p \cdot \mathbf{V} dp. \quad (2-61)$$

地表面では鉛直方向の流れは無いという運動学的境界条件 (*kinematic boundary condition*) を仮定すると,

$$\omega_s = dp_s/dt = \partial p_s/\partial t + \mathbf{V}_s \cdot \nabla p_s \quad (2-62)$$

となる¹²⁾. このことから, $p_s(x, y, t)$ までの積分を行うと, 地表面圧力に関する以下の方程式が得られる.

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \mathbf{V}_s \cdot \nabla p_s = - \int_0^{p_s} \nabla_p \cdot \mathbf{V} dp. \quad (2-63)$$

最後は熱力学の式に関してである. 熱力学の式 (2-57b) の dp/dt は ω で置き換えることができ, 他に変化するのは無い.

p -座標系が z のものより優れているところは連続の式 (2-60) が線形であることと, 式 (2-58) において圧力項が線形化されているところである¹³⁾. 後者は密度を削除できるので¹⁴⁾, 地衡風と温度風の関係を簡単に表現できる. 例えば以下のような式がそうである¹⁵⁾.

$$\frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial p} = f^{-1} \mathbf{k} \times \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} \quad \text{and} \quad \Delta \mathbf{V}_g = f^{-1} \mathbf{k} \times \nabla \Delta \phi.$$

ちなみに, 2 つ目の式の Δ は差分を意味する.

2-9-2 規格化圧力座標系 $\sigma = p/p_s$ (Phillips, 1957)

この鉛直座標系を考える場合, 地表面圧力 $p_s = p_s(x, y, t)$ を思い出して欲しい. 式 (2-48) で $\zeta = \sigma$ とすると,

$$-\alpha \nabla_z p = -\alpha \nabla_\sigma p - \alpha (\partial p/\partial z) \nabla_\sigma z = -\alpha \nabla_\sigma (\sigma p_s) - \nabla_\sigma \phi$$

となる. $\alpha \nabla_\sigma (\sigma p_s) = \alpha \sigma \nabla p_s$ となることから, 運動方程式 (2-49) は以下の式となる¹⁶⁾.

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_\sigma \mathbf{V} + \dot{\sigma} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \sigma} = -\nabla_\sigma \phi - (RT/p_s) \nabla p_s - f \mathbf{k} \times \mathbf{V} + \mathbf{F}. \quad (2-64)$$

静水圧の式 (2-50) では $\partial p/\partial \sigma = \partial(\sigma p_s)/\partial \sigma = p_s$ となるので¹⁷⁾,

$$\partial \phi/\partial \sigma + \alpha p_s = 0 \quad (2-65)$$

¹²⁾ この式の導出に関しては 2-9-B 参照.

¹³⁾ これはつまり, $-\alpha \nabla_z p = -\alpha \nabla_p - \nabla_p \phi \simeq -\nabla_p \phi$ となっていることを指している.

¹⁴⁾ p -座標系と z -座標系でそれぞれ温度風の式を求めてみると, ここで言う『密度を削除できる』の意味がわかるだろう. p -座標系での温度風の式の導出は 2-9-C を, z -座標系での温度風の式の導出は 2-9-D を参照のこと.

¹⁵⁾ p -座標系での運動方程式 (2-58) から地衡風の関係式および温度風の関係式を導出する方法は 2-9-C を参照.

¹⁶⁾ 状態方程式より, $\alpha = RT/p$ なので, $\alpha \sigma = RT/p_s$.

¹⁷⁾ ここでは $p_s = p_s(x, y, t)$ であることから $\partial p_s/\partial \sigma = 0$ である.

となる.

連続の式 (2-56) の第 1 項は $d(\ln p/\partial\sigma)/dt$ となり, $\partial p/\partial\sigma = p_s$ となるため σ -座標系の連続の式は以下ようになる.

$$d(\ln p_s)/dt + \nabla_\sigma \cdot \mathbf{V} + \partial\dot{\sigma}/\partial\sigma = 0. \quad (2-66)$$

第 1 項 \dot{p}_s/p_s を展開すると代わりに以下の式が得られる.

$$\partial p_s/\partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla p_s + \dot{\sigma} \partial p_s/\partial\sigma + p_s \nabla_\sigma \cdot \mathbf{V} + p_s \partial\dot{\sigma}/\partial\sigma = 0.$$

p_s は σ に関しては変化しないので, $\partial p_s/\partial\sigma = 0$ である. このことから上の式は

$$\partial p_s/\partial t = -\nabla \cdot (p_s \mathbf{V}) - \partial(p_s \dot{\sigma})/\partial\sigma \quad (2-67)$$

となる. “鉛直速度” $\dot{\sigma} = d\sigma/dt$ の境界条件は

$$\begin{aligned} \text{地表面} & ; & p = p_s; & \text{よって} & \sigma = 1, & \dot{\sigma} = 0, \\ \text{大気上端} & ; & p = 0; & \text{よって} & \sigma = 0, & \dot{\sigma} = 0 \end{aligned} \quad (2-68)$$

となる. この境界条件下で (2-67) を大気全体 ($0 \leq \sigma \leq 1$) で積分すると,

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = - \int_0^1 \nabla \cdot (p_s \mathbf{V}) d\sigma \quad (2-69)$$

となる¹⁸⁾. これは地表面圧力に関する方程式である. $\sigma = 0$ から任意の値 σ まで積分した場合は σ における鉛直速度 $\dot{\sigma}$ を含む方程式となる.

$$\sigma \frac{\partial p_s}{\partial t} + \int_0^\sigma \nabla \cdot (p_s \mathbf{V}) d\sigma = -p_s \dot{\sigma}. \quad (2-70)$$

式 (2-69) から $\partial p_s/\partial t$ の値が得られたら, それを使って (2-70) から $\dot{\sigma}$ を求めることができる. 今度はその $\dot{\sigma}$ を使って運動方程式 (2-64) の $\dot{\sigma} \partial \mathbf{V}/\partial\sigma$ の値を求めることができる. 熱力学の式¹⁹⁾ についても同様である. これらの作業は, 数値気象予報モデルにおいて, \mathbf{V}, T などの値の局所での時間変化を求めるのに必要な手順の一つである.

地表面において $\dot{\sigma} = 0$ となるのは, 地表面では流れは地表に沿っていなければならない (つまり, 鉛直成分はゼロでなければならない) からである. この簡単な下部境界条件が σ -座標系が p -座標系よりも優れている点である²⁰⁾. この簡単な下部境界条件の結果, 簡潔な式 (2-69) が存在し, 地表面圧力の時間変化の導出に利用される.

¹⁸⁾(2-67) を $0 \leq \sigma \leq 1$ で積分すると,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial p_s}{\partial t} d\sigma &= - \int_0^1 \nabla \cdot (p_s \mathbf{V}) d\sigma - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\sigma} (p_s \dot{\sigma}) d\sigma \\ &= - \int_0^1 \nabla \cdot (p_s \mathbf{V}) d\sigma - [p_s \dot{\sigma}]_0^1 \end{aligned}$$

となり, (2-68) より $\dot{\sigma} = 0$ at $\sigma = 0, 1$ なので式 (2-69) となる.

¹⁹⁾(2-57b) より,

$$c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{d(\sigma p_s)}{dt} = Q.$$

²⁰⁾具体的なことに関しては 2-9-E を参照.

2-9-3 等エントロピー鉛直座標系

等エントロピー面 (エントロピーが一定の面), または (同じ意味だが) 温位面が鉛直座標として一般的になったのは 1930~1940 年代のことである. 長い間ほとんど使われていなかったが 1970 年代半ばから θ -座標系は日の目を浴びることになった. θ -座標系の魅力的なところは, 乾燥断熱 (*dry adiabatic*) 運動においてはそれぞれのパーセル (*parcel*)²¹⁾ において温位が保存されることである. つまり $d\theta/dt = 0$ となる. また, 等エントロピー面がそのまま物質面 (*material surface*) となる²²⁾. ただし, これは非断熱 (*diabatic*) な条件下では成り立たない. この座標系は他にも優れた特徴があり, 断熱運動の研究に限らず幅広く利用されている. 例えば, 前線付近の様子などは θ -座標系で良く表すことができる.

(2-44) を用いて水平面圧力を毎度のように変形すると,

$$-\alpha \nabla_z p = -\alpha \nabla_\theta p - \alpha \frac{\partial p}{\partial z} \nabla_\theta z = -\alpha \nabla_\theta p + g \nabla_\theta z \quad (2-71)$$

となる. $\theta = T(p_0/p)^\kappa$ であることから, $\nabla_\theta \ln T - (R/c_p) \nabla_\theta \ln p = \nabla_\theta \ln \theta = 0$ となる. このことから $-\nabla_\theta p = -(p c_p / RT) \nabla_\theta T$ が成り立つ. よって水平面圧力 (2-71) は以下のように書き表せる.

$$-\alpha \nabla_z p = -\nabla_\theta (c_p T) - \nabla_\theta \phi.$$

この式を水平面運動方程式に代入すると以下の式が得られる.

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_\theta \mathbf{V} + \dot{\theta} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta} = -\nabla_\theta (c_p T + \phi) - f \mathbf{k} \times \mathbf{V}. \quad (2-72)$$

物理量 $c_p T + \phi = M$ は普通モンゴメリー流線関数 (*Montgomery stream-function*) と呼ばれる. 温位の定義式から p と T を取り出して対数を取り, その後微分すると静水圧の式を利用できる. まず, 温位の定義式 $\theta = T(p_0/p)^\kappa$ の対数をとって微分すると,

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{R}{p c_p} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

となる²³⁾. 次に静水圧の式 (2-50) を利用して $\partial p / \partial \theta$ を $-\rho \partial \phi / \partial \theta$ に置き換えると,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (c_p T + \phi) = \frac{c_p T}{\theta} \quad (2-73)$$

となる. つまり, モンゴメリー流線関数 M は θ に関しては $c_p T / \theta$ で変化する.

²¹⁾ パーセル (*parcel*) とは仮想的な気塊のことである. このパーセルという考え方をを用いると, 大気はパーセルの集合体だと言うことができる.

²²⁾ 「物質面」に関しては 2-9-F 参照.

²³⁾ もう少し詳細に書く. まず, 温位の定義式の対数をとる.

$$\ln \theta = \ln T + \kappa (\ln p_0 - \ln p).$$

そして θ で微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\ln \theta)}{\partial \theta} &= \frac{\partial (\ln T)}{\partial \theta} + \kappa \left\{ \frac{\partial (\ln p_0)}{\partial \theta} - \frac{\partial (\ln p)}{\partial \theta} \right\}, \\ \frac{1}{\theta} &= \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\kappa}{p} \frac{\partial p}{\partial \theta} \end{aligned}$$

となり, 本文の式となる.

次は連続の式に関してである。連続の式 (2-56) は以下の式になる。

$$\frac{d}{dt} \left(\ln \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \nabla_{\theta} \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} = 0. \quad (2-74)$$

この式を展開して θ で積分すると地表面圧力の時間変化 $\partial p_s / \partial t$ に関する式が得られる²⁴⁾。熱力学の式 (2-57a) には変換は必要無い。 $\dot{\theta}$ の境界条件は (2-68) と類似していて、以下のようになる²⁵⁾。

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= 0 & \text{at } \theta &= \theta_{\text{top}}, \\ \dot{\theta} &= \partial \theta_s / \partial t + \mathbf{V}_s \cdot \nabla \theta_s & \text{at } \theta &= \theta_s \end{aligned} \quad (2-75)$$

2-9-A 異なる座標系での偏微分の関係式

(2-41) を考える。図 2-9-A-1 で考えてみよう。それぞれ点 a, b, c での A を A_a, A_b, A_c として, a c, a b, b c をそれぞれ微分形で書き表してみると,

$$\begin{aligned} \text{a c:} & \quad \frac{A_c - A_a}{dx} \rightarrow \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_{\zeta} \\ \text{a b:} & \quad \frac{A_b - A_a}{dx} \rightarrow \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_z \\ \text{b c:} & \quad \frac{A_c - A_b}{dz} \frac{dz}{dx} \rightarrow \frac{\partial A}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{\zeta} \end{aligned}$$

となる。これらを組み合わせると,

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_{\zeta} = \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_z + \frac{\partial A}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{\zeta}$$

という式となる。 x を s に置き換えて考えると (2-41) となる。詳しい解説については小倉 (2000) を参照してもらいたい。

2-9-B 地表面圧力 p_s の全微分の導出

(2-62) に関して議論する。圧力座標系では $p = p(x, y, z, t)$ である。地表面の高度を $z = H(x, y, t)$ と考えると、地表面の圧力は $p_s = p_s(x, y, H, t) = p_s(x, y, H(x, y, t), t) = p_s(x, y, t)$ となる。 $(p_s$ は p とは異なり、座標ではなく関数であることに注意)。すると、 p_s の変数から考えて、

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial p_s}{\partial t} + u \frac{\partial p_s}{\partial x} + v \frac{\partial p_s}{\partial y}$$

となる。結果として (2-62) が求められた。

²⁴⁾ この式の導出に関しては 2-9-G を参照のこと。

²⁵⁾ θ_{top} は温位モデルの頂点の温位 (Kasahara(1974) 参照)。

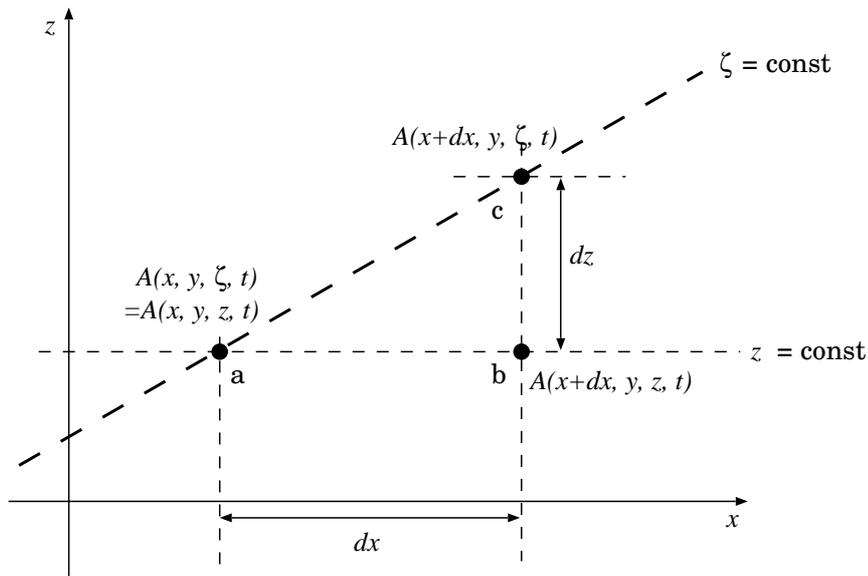


図 2-9-A-1: z-座標系と ζ-座標系の微分の取り方

2-9-C 地衡風, 温度風の関係式の導出

2-9-C-a 地衡風の関係式の導出

p -座標系での運動方程式 (2-58), 静水圧の式 (2-59), および状態方程式 (2-8) から地衡風の関係式を求める。なお, 地衡風が成り立つのはコリオリ力と気圧傾度力がつり合っている場合なので, 1) 式が線形化でき ($d\mathbf{V}/dt = \partial\mathbf{V}/\partial t$), 2) 摩擦力が無く ($\mathbf{F} = 0$), 3) 風速が定常で時間変化しない ($\partial\mathbf{V}/\partial t=0$) という条件下で考える。

以下が利用する 3 式である。

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla_p\phi - f\mathbf{k} \times \mathbf{V} + \mathbf{F}, \tag{2-9-C-1}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial p} = -\alpha, \tag{2-9-C-2}$$

$$p = \frac{RT}{\alpha}. \tag{2-9-C-3}$$

線形化できることと摩擦力を無視できること, そして風速が定常であることを考慮し, (2-9-C-1) を変形すると,

$$-f\mathbf{k} \times \mathbf{V} = \nabla_p\phi \tag{2-9-C-4}$$

という式が成り立つ。左辺がコリオリ力であり, 右辺が気圧傾度力である。これが地衡風の釣り合いの式である。以下ではこの関係を満たす風速 \mathbf{V} を地衡風 \mathbf{V}_g と表記する。この式の両辺に $(1/f)\mathbf{k}$

を掛けると,

$$\begin{aligned} -\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{V}_g) &= f^{-1} \mathbf{k} \times \nabla_p \phi \\ -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_g) \mathbf{k} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{V}_g &= f^{-1} \mathbf{k} \times \nabla_p \phi \\ \mathbf{V}_g &= f^{-1} \mathbf{k} \times \nabla_p \phi \end{aligned} \quad (2-9-C-5)$$

となる. この式から地衡風を求めることができる. なお, 計算の途中で, 本論文の最後に掲載されている数学公式 (A-1) を使用した. また, \mathbf{V}_g は水平面の成分しかないため $\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_g = 0$ となることにも注意すること. ちなみに, (2-9-C-5) を各成分に分けてみると,

$$u_g = -\frac{1}{f} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{f} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2-9-C-6)$$

となる. つまり, 等圧面において北上するにつれ高度が下がっている場合 (言い替えれば北上するにつれ気圧が減少している場合) は東向きの風が吹く. また, 等圧面において東の方ほど高度があがっている場合 (言い替えれば東に行くにつれ気圧が増加している場合) は北向きの風が吹く.

2-9-C-b 温度風の関係式の導出

次に (2-9-C-5) を変形して温度風の関係式を求める. (2-9-C-5) を p で偏微分すると,

$$\frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial p} = \frac{1}{f} \mathbf{k} \times \nabla_p \frac{\partial \phi}{\partial p} \quad (2-9-C-7)$$

となる. これは本文にあった式である. 続けて (2-9-C-7) を計算する. 静水圧の式 (2-9-C-2) と状態方程式 (2-9-C-3) を利用する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial p} &= \frac{1}{f} \mathbf{k} \times \nabla_p (-\alpha) \\ &= \frac{1}{f} \mathbf{k} \times \nabla_p \left(-\frac{RT}{p} \right) \\ &= -\frac{R}{fp} (\mathbf{k} \times \nabla_p T). \end{aligned} \quad (2-9-C-8)$$

(2-9-C-8) が温度風の関係式である. これを各成分に分けると以下ようになる.

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{R}{fp} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{R}{fp} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (2-9-C-9)$$

この式の物理的な意味を考えてみる. 例えば, ある等圧面上で北に行くほど温度が下がっていると ($\partial T / \partial y < 0$), その等圧面上で空気密度 ρ は北ほど大きい. したがって等圧面 p にくらべて等圧面 $p - \delta p$ はもっと北に向かって傾いている (下図参照). したがって等圧面 $p - \delta p$ 上の地衡風 u は等圧面 p 上のそれよりも大きく (すなわち $\partial u / \partial p < 0$) なければならない訳である. なお, ここでは南北方向で考えたが, 東西方向でも同様に考えると v の式についても理解できるだろう.

2-9-D z -座標系から求める温度風の関係式

2-9-C では p -座標系での運動方程式から簡潔な形の温度風の関係式 (2-9-C-9) を導くことができた. では, z -座標系での運動方程式 (および静水圧の式) から温度風の式を導くとどうなるのだろうか. 以下では z -座標系での運動方程式から温度風の式を求めてみる.

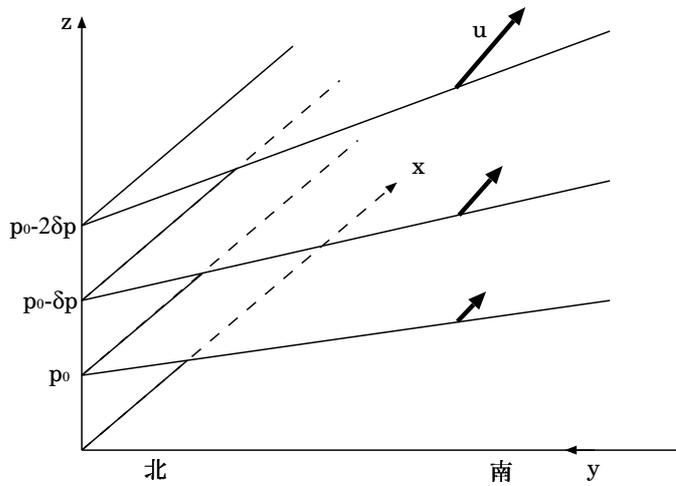


図 2-9-C-1: 温度風概念図

z -座標系での運動方程式, 静水圧の式, および状態方程式はそれぞれ,

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\alpha \nabla_z p - f \mathbf{k} \times \mathbf{V} + \mathbf{F}, \tag{2-9-D-1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{g}{\alpha}, \tag{2-9-D-2}$$

$$p = \frac{RT}{\alpha} \tag{2-9-D-3}$$

となっている。線形化でき, 摩擦力を無視でき, 風速が定常であるという条件下では (2-9-D-1) は以下のようなになる。

$$-f \mathbf{k} \times \mathbf{V} = \alpha \nabla_z p. \tag{2-9-D-4}$$

これは p -座標系での (2-9-C-4) の式と同様の地衡風の釣り合いの式である。 p -座標系の時の操作と同様に, 両辺に $(1/f)\mathbf{k}$ を掛けると,

$$\mathbf{V}_g = \frac{\alpha}{f} (\mathbf{k} \times \nabla_z p) \tag{2-9-D-5}$$

という式が導出できる。各成分に分けてみると,

$$u_g = -\frac{\alpha}{f} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_g = \frac{\alpha}{f} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{2-9-D-6}$$

となる。(2-9-D-5) から温度風を求めてみよう。

(2-9-D-5) の両辺を z で微分して計算を行う。なお, 計算の途中で (2-9-D-2) と (2-9-D-3) を利用

する.

$$\begin{aligned}
 f \frac{\partial \mathbf{V}_g}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \{ \alpha (\mathbf{k} \times \nabla_z p) \} \\
 &= \alpha \left(\mathbf{k} \times \nabla_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\partial \alpha}{\partial z} (\mathbf{k} \times \nabla_z p) \\
 &= -\alpha \left(\mathbf{k} \times \nabla_z \frac{g}{\alpha} \right) + \frac{\partial \alpha}{\partial z} (\mathbf{k} \times \nabla_z p) \\
 &= -\alpha \left(\mathbf{k} \times \nabla_z \frac{pg}{RT} \right) + \frac{\partial \alpha}{\partial z} (\mathbf{k} \times \nabla_z p) \\
 &= -\frac{\alpha g p}{R} \left(\mathbf{k} \times \nabla_z \frac{1}{T} \right) - \frac{\alpha g}{RT} (\mathbf{k} \times \nabla_z p) + \frac{\partial \alpha}{\partial z} (\mathbf{k} \times \nabla_z p) \\
 &= \frac{\alpha g p}{RT^2} (\mathbf{k} \times \nabla_z T) + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\alpha g}{RT} \right) (\mathbf{k} \times \nabla_z p) \\
 &= \frac{g}{T} (\mathbf{k} \times \nabla_z T) + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{g}{p} \right) (\mathbf{k} \times \nabla_z p) \\
 &= \frac{g}{T} (\mathbf{k} \times \nabla_z T) + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{g}{\alpha p} \right) (\mathbf{k} \times \nabla_z p) \\
 &= \frac{g}{T} (\mathbf{k} \times \nabla_z T) + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\alpha}{p} \frac{\partial p}{\partial z} \right) (\mathbf{k} \times \nabla_z p) \\
 &= \frac{g}{T} (\mathbf{k} \times \nabla_z T) + \frac{1}{p} \left(\frac{\partial}{\partial z} (p\alpha) \right) (\mathbf{k} \times \nabla_z p). \tag{2-9-D-7}
 \end{aligned}$$

この (2-9-D-7) が z -座標系の式から導かれた温度風の関係式と似た式である。しかし、 p -座標系の時と違いうまく α が式から消えないため、すっきりとは温度風の関係を示しているとは言えない。この式はあくまである程度すっきりとさせた式でしかない。このことが本文の「 p -座標系は密度を削除できるので…」ということの意味である。

2-9-E σ -座標系の利点

σ -座標系が p -座標系より優れている点は簡単な下部境界条件であると本文で述べられているが、これが具体的にはどういうことであるか説明する。以下の図 2-9-E-2 を見てほしい。図 2-9-E-2 において、太実線が地上面、実線が等 σ 面、破線が等 p 面である。図よりわかるように、等 p 面は地形の起伏により分断されている。これに対し、等 σ 面は地形と同じ形になり（ちょうど $\sigma = 1$ の面が地上の形と一致する）、いかな地形であっても分断されることは無い。例えば、数値計算ではある領域のパラメータを求めるのに隣接する領域のパラメータが必要になる。 p -座標系では地形の効果から隣のパラメータが得られない場合もありうるが、 σ -座標系ではそのようなことはない（図 2-9-E-1 参照）。これが σ -座標系の p -座標系より優れた点である。

2-9-F 物質面

ある粒子群を考えた時、その粒子群が移動する範囲が物質面と呼ばれるものである。例えば、等 σ 面などを考えるとそこに存在する粒子はあらゆる方向に移動するので σ 面は物質面とは言えない（図 2-9-F-1 参照）。ここで等 θ 面を考えてみる。本文にも $d\theta/dt = 0$ と書いてある通り、 θ は変化し

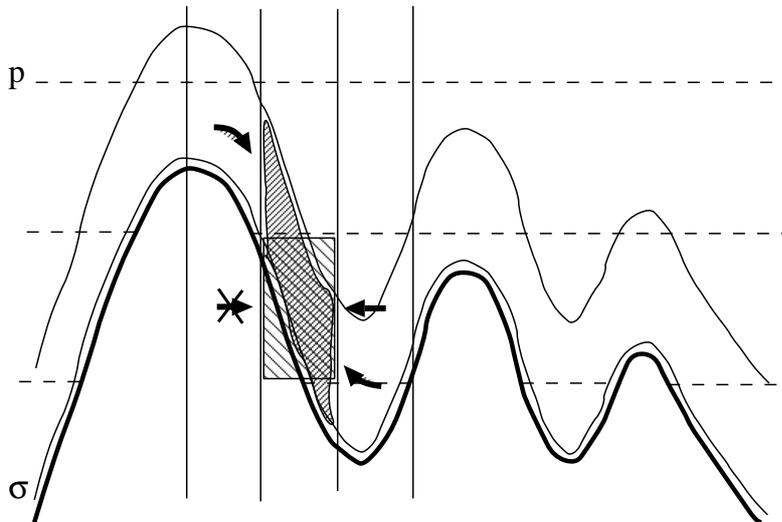


図 2-9-E-1: σ -座標系の利点

ない (図 2-9-F-1 参照). つまり粒子は等 θ 面内しか移動しない. このことは θ 面が物質面であることを示している. これが本文が意味することである.

2-9-G 連続の式からの地表面圧力の時間変化 $\partial p_s / \partial t$ の導出

θ -座標系での連続の式 (2-74) から地表面圧力 p_s の時間変化 $\partial p_s / \partial t$ の式を求めることができる. なお, この導出に関しては Kasahara (1974) を参考にした.

θ -座標系での連続の式 (2-74) は以下の式である.

$$\frac{d}{dt} \left(\ln \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \nabla_{\theta} \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} = 0. \quad (2-9-G-1)$$

なお, $\dot{\theta} = d\theta/dt$ である. この式を変形する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial p} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \nabla_{\theta} \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \mathbf{V} \cdot \nabla_{\theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial p}{\partial \theta} \left(\nabla_{\theta} \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \nabla_{\theta} \cdot \left(\mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\dot{\theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) &= 0. \end{aligned}$$

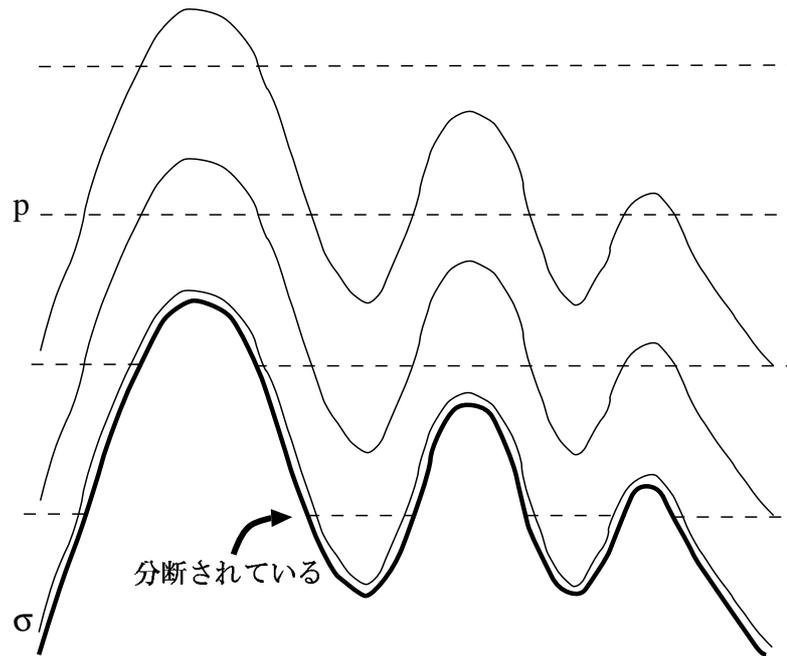


図 2-9-E-2: σ -座標系と p -座標系

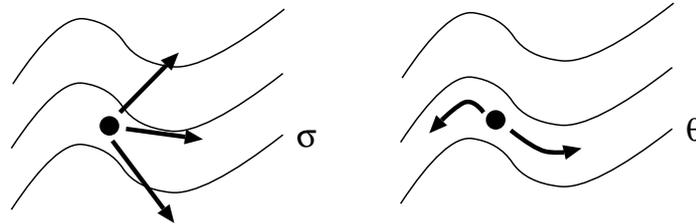


図 2-9-F-1: 物質面

この式をある任意の θ から θ_t ²⁶⁾ まで積分すると,

$$\int_{\theta}^{\theta_t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right) d\theta = - \int_{\theta}^{\theta_t} \left\{ \nabla_{\theta} \cdot \left(\mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\dot{\theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \right\} d\theta,$$

$$\int_{\theta}^{\theta_t} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) d\theta = - \int_{\theta}^{\theta_t} \left\{ \nabla_{\theta} \cdot \left(\mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\dot{\theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \right\} d\theta,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{\theta=\theta_t} - \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{\theta=\theta} = - \int_{\theta}^{\theta_t} \left\{ \nabla_{\theta} \cdot \left(\mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\dot{\theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \right\} d\theta,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{\theta} = \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{\theta_t} + \int_{\theta}^{\theta_t} \left\{ \nabla_{\theta} \cdot \left(\mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\dot{\theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \right\} d\theta$$

(2-9-G-2)

²⁶⁾ θ_t は温位のモデルの頂点の温位.

となる. ここで以下の境界条件を導入する. これは本文の (2-75) と同様のものである.

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= 0 & \text{at } \theta &= \theta_t, \\ \dot{\theta} &= \partial\theta_s/\partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla_\theta \theta_s & \text{at } \theta &= \theta_s. \end{aligned} \quad (2-9-G-3)$$

境界条件より, (2-9-G-2) は

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_\theta &= \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{\theta_t} + \int_{\theta_t}^{\theta_s} \nabla_\theta \cdot \left(\mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) d\theta + \left(\dot{\theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta_t} - \left(\dot{\theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \Big|_\theta \\ &= \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{\theta_t} + \int_{\theta_t}^{\theta_s} \nabla_\theta \cdot \left(\mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) d\theta - \left(\dot{\theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \Big|_\theta \end{aligned} \quad (2-9-G-4)$$

となる. $\theta = \theta_s$ とすると,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{\theta_s} &= \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{\theta_t} + \int_{\theta_s}^{\theta_t} \nabla_\theta \cdot \left(\mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) d\theta - \left(\dot{\theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta_s} \\ &= \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{\theta_t} + \int_{\theta_s}^{\theta_t} \nabla_\theta \cdot \left(\mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) d\theta - \left. \frac{\partial p}{\partial \theta} \right|_{\theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial t} - \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \mathbf{V} \cdot \nabla_\theta \theta_s \right)_{\theta=\theta_s} \end{aligned} \quad (2-9-G-5)$$

となる. ここで, 以下の4つの式を利用する²⁷⁾.

$$\frac{\partial p_t}{\partial t} = \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{\theta_t}, \quad (2-9-G-6)$$

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{\theta_s} + \left. \frac{\partial p}{\partial \theta} \right|_{\theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial t}, \quad (2-9-G-7)$$

$$-(\mathbf{V} \cdot \nabla_\theta \theta)_{\theta=\theta_t} = 0, \quad (2-9-G-8)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\theta \cdot \int_{\theta_s}^{\theta_t} \mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial \theta} d\theta &= \int_{\theta_s}^{\theta_t} \nabla_\theta \cdot \left(\mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) d\theta \\ &\quad + \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \mathbf{V} \cdot \nabla_\theta \theta_t \right)_{\theta=\theta_t} - \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \mathbf{V} \cdot \nabla_\theta \theta_s \right)_{\theta=\theta_s}. \end{aligned} \quad (2-9-G-9)$$

(2-9-G-6) と (2-9-G-7) より (2-9-G-5) は

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = \frac{\partial p_t}{\partial t} + \int_{\theta_s}^{\theta_t} \nabla_\theta \cdot \left(\mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) d\theta - \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \mathbf{V} \cdot \nabla_\theta \theta_s \right)_{\theta=\theta_s} \quad (2-9-G-10)$$

となり, 続けて (2-9-G-9) を利用すると,

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = \frac{\partial p_t}{\partial t} + \nabla_\theta \cdot \int_{\theta_s}^{\theta_t} \mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial \theta} d\theta - \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \mathbf{V} \cdot \nabla_\theta \theta_t \right)_{\theta=\theta_t}$$

となる. ここで (2-9-G-8) より右辺の第3項は消えるので,

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = \frac{\partial p_t}{\partial t} + \nabla_\theta \cdot \int_{\theta_s}^{\theta_t} \mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial \theta} d\theta \quad (2-9-G-11)$$

となる. これが本文で言われる「地表面圧力の時間変化 $\partial p_s/\partial t$ に関する式」である.

²⁷⁾(2-9-G-6), (2-9-G-7)(2-9-G-8) および (2-9-G-9) の導出に関してはそれぞれ 2-9-G-a 2-9-G-b, 2-9-G-c, 2-9-G-d を参照のこと.

2-9-G-a θ_t での圧力の時間変化の関係式

$\frac{\partial p_t}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{\theta_t}$ を導出する. ここで, 圧力は $p = p(x, y, \theta, t)$, 温位モデルの頂点での圧力は $p_t = p(x, y, \theta_t, t)$, 温位は $\theta_t = \theta_t(x, y, t)$ であるとする. 2-9-G-b と同様に考えると

$$\frac{\partial p_t}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{\theta_t} + \frac{\partial p}{\partial \theta} \Big|_{\theta_t} \frac{\partial \theta_t}{\partial t} \quad (2-9-G-12)$$

である. しかし, θ_t は温位モデルの頂点で時間変化, 空間変化ともに無いので $\partial \theta_t / \partial t = 0$ である. よって,

$$\frac{\partial p_t}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{\theta_t} \quad (2-9-G-13)$$

となる.

2-9-G-b θ_s (地表面) での圧力の時間変化の関係式

$\frac{\partial p_s}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{\theta_s} + \frac{\partial p}{\partial \theta} \Big|_{\theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial t}$ を導出する. 圧力は $p = p(x, y, \theta, t)$, 地表面圧力は $p_s = p(x, y, \theta_s, t)$, 地表面温位は $\theta_s = \theta_s(x, y, t)$ である. p の全微分は

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial p}{\partial t} dt \quad (2-9-G-14)$$

である. ここで $\theta = \theta_s$ とすると, $d\theta = d\theta_s$ である. また, $p_s = p(x, y, \theta_s, t)$ であることから $dp = dp_s$ である. よって, (2-9-G-14) は

$$dp_s = \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{\theta=\theta_s} dx + \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{\theta=\theta_s} dy + \frac{\partial p}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_s} d\theta_s + \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{\theta=\theta_s} dt \quad (2-9-G-15)$$

となる. $\theta_s = \theta_s(x, y, t)$ なので $d\theta_s = (\partial \theta_s / \partial x) dx + (\partial \theta_s / \partial y) dy + (\partial \theta_s / \partial t) dt$ であるため, (2-9-G-15) は

$$\begin{aligned} dp_s &= \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{\theta_s} dx + \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{\theta_s} dy + \frac{\partial p}{\partial \theta} \Big|_{\theta_s} \left\{ \frac{\partial \theta_s}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta_s}{\partial y} dy + \frac{\partial \theta_s}{\partial t} dt \right\} + \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{\theta_s} dt \\ &= \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{\theta_s} + \frac{\partial p}{\partial \theta} \Big|_{\theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \right\} dx + \left\{ \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{\theta_s} + \frac{\partial p}{\partial \theta} \Big|_{\theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial y} \right\} dy \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{\theta_s} + \frac{\partial p}{\partial \theta} \Big|_{\theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial t} \right\} dt \end{aligned} \quad (2-9-G-16)$$

となる. 時間微分を考えると, 右辺の第1項, 第2項は無視して考えられるので, p_s の時間変化は

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{\theta_s} + \frac{\partial p}{\partial \theta} \Big|_{\theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial t} \quad (2-9-G-17)$$

として得られる.

2-9-G-c (2-9-G-8) の導出

ここでは (2-9-G-8) の導出を行う。(2-9-G-3) より,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{\theta=\theta_t} = 0$$

である。この式を変形することで,

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_{\theta_t} = -(\mathbf{V} \cdot \nabla_{\theta}\theta)_{\theta_t}$$

となる。 θ_t は空間変化, 時間変化しないので, $(\partial\theta/\partial t)_{\theta_t} = (\partial\theta_t/\partial t) = 0$ となり, (2-9-G-8) が成り立つ。

2-9-G-d (2-9-G-9) の導出

ここでは (2-9-G-9) の導出のための計算を行う。まず, 見た目を簡単にするため x 成分だけを考えると, (2-9-G-9) の左辺 (の x 成分) は以下ようになる²⁸⁾。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\theta_s(x)}^{\theta_t(x)} u \frac{\partial p}{\partial \theta} d\theta &= \int_{\theta_s(x)}^{\theta_t(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) d\theta \\ &+ \left(u \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_t} \frac{\partial \theta_t}{\partial x} - \left(u \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2-9-G-18)$$

y 成分についても考えると,

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta} \cdot \int_{\theta_s}^{\theta_t} \mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial \theta} d\theta &= \int_{\theta_s}^{\theta_t} \nabla_{\theta} \cdot \left(\mathbf{V} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) d\theta \\ &+ \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \mathbf{V} \cdot \nabla_{\theta} \theta_t \right)_{\theta=\theta_t} - \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \mathbf{V} \cdot \nabla_{\theta} \theta_s \right)_{\theta=\theta_s} \end{aligned} \quad (2-9-G-19)$$

となる。

²⁸⁾ 積分の公式,

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, \theta) d\theta = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial x} d\theta + f(b) \frac{\partial b}{\partial x} - f(a) \frac{\partial a}{\partial x}$$

を利用した。

2-10 エネルギーの関係式

大気現象の力学的解析において、様々な擾乱をエネルギー論から研究することは非常に重要である。エネルギーの関係式は数値気象予報にとっても重要なものである。エネルギーの変換や保存を分析するような特徴をもつ数値モデルは、物理過程を表示したり、誤差の原因を追求したりする差分スキームを設計するのに便利な道具となる。

2-10-1 運動エネルギー

単位質量あたりの運動エネルギーに関する式は運動方程式に V を掛けることで簡単に導出できる。例えば、圧力座標系での運動方程式 (2-58) を利用した場合は以下の式が得られる¹⁾。

$$dK/dt = \partial K/\partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla K + \omega \partial K/\partial p = -\mathbf{V} \cdot \nabla_p \phi + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}. \quad (2-80)$$

ここで K は $K = V^2/2$ であり、 $\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}$ は運動エネルギーの拡散と消散²⁾を表す。 $(V$ と ∇ は水平面の速度と微分演算子である)。連続の式 (2-60)³⁾ に K を掛け、(2-80) に加えることで式 (2-80) はフラックスフォーム (flux form)⁴⁾ になる。実際に計算して得られたフラックスフォームは

$$\partial K/\partial t + \nabla \cdot K\mathbf{V} + \partial(K\omega)/\partial p = -\nabla \cdot (\phi\mathbf{V}) + \phi\nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} \quad (2-81)$$

である。同様に、連続の式は $\phi\nabla \cdot \mathbf{V}$ の項も表現できる。

$$\phi\nabla \cdot \mathbf{V} = -\phi\partial\omega/\partial p = -\partial(\phi\omega)/\partial p + \omega\partial\phi/\partial p.$$

最後に、静水圧の式 (2-59) と状態方程式より $\partial\phi/\partial p = -\alpha = -RT/p$ なので (2-81) は以下のようになる。

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \nabla \cdot [(K + \phi)\mathbf{V}] + \frac{\partial[(K + \phi)\omega]}{\partial p} = -\frac{RT\omega}{p} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}. \quad (2-82)$$

第2項と第3項は流れの発散項であり、一方第4項は運動エネルギーの湧き出しを、第5項は吸い込みを表す。

2-10-2 位置エネルギー

単位面積で地表から大気上端までの高さを持つ円柱の重力による位置エネルギーを考える。この位置エネルギー P [J] は以下の積分で得られる。

$$P = \int_0^\infty gz\rho dz = \int_0^{p_s} \phi \frac{dp}{g} = \frac{\phi p}{g} \Big|_0^{p_s} - \frac{1}{g} \int p d\phi.$$

¹⁾ 詳しくは 2-10-A 参照。

²⁾ 運動エネルギーの拡散と消散については 2-10-C を参照。

³⁾

$$\nabla_p \cdot \mathbf{V} + \partial\omega/\partial p = 0.$$

⁴⁾ フラックスフォーム (flux form) に関しては 2-10-D を参照。

ここでは重力加速度 g の鉛直方向の変化は無視し、部分積分と静水圧の式を用いることによって最後の形を導出できる⁵⁾。静水圧の式を再び用いると、

$$P = \phi_s p_s / g + \frac{1}{g} \int_0^{p_s} RT \, dp \quad (2-83)$$

という式となる⁶⁾。

同じ円柱での内部エネルギー (*internal energy*) I [J] は

$$I = \int_0^\infty c_v T \rho \, dz = \int_0^{p_s} \frac{c_v T \, dp}{g} \quad (2-84)$$

となる⁷⁾。関係式 $c_v + R = c_p$ を使うと、内部エネルギーと重力の位置エネルギーが組み合わさった最後の式が得られる。この内部エネルギーと重力の位置エネルギーの組み合わさったものを全位置エネルギー (*total potential energy*) と呼ぶ。これは以下の式で表される。

$$P + I = g^{-1} \int_0^{p_s} E \, dp + g^{-1} \phi_s p_s. \quad (2-85)$$

ここで $E = c_p T$ [J/kg] はエンタルピー (*enthalpy*) である。

この結果は、大気の円柱の全位置エネルギーがエンタルピーの積分の項と地表面の海面からの高さに比例した項に比例していることを示している。このため、全位置エネルギーの関係式を得るには熱力学の式 (2-57b) を使う。 $E = c_p T$ であることから、

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla E + \omega \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{RT}{p} \omega + Q - \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} \quad (2-86)$$

となる。ここでは \mathbf{V} および ∇ は水平面での速度と演算子であり、 $\omega = dp/dt$ で、 dE/dt は偏微分に展開されている。

次に連続の式 (2-60) に E を掛け、(2-86) に足し合わせると以下のフラックスフォームを得ることができる⁸⁾。

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E\mathbf{V}) + \frac{\partial(E\omega)}{\partial p} = \frac{RT\omega}{p} + Q - \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}. \quad (2-87)$$

(2-82) と (2-87) を比較すると、両方の式に $RT\omega/p$ という項があり、反対の符号がついていることがわかる。位置エネルギーがこの項の影響で局所的に増加する場合は運動エネルギーは逆に減少する。閉じた系でこの項を積分したものは運動エネルギーと位置エネルギーの変換を表す⁹⁾。(2-82) と (2-87) を足し合わせるとこの変換関数 (*transformation function*) は消え、以下のような $K + E$ の局所変化の方程式が得られる。

$$\frac{\partial(K + E)}{\partial t} + \nabla \cdot [(K + E + \phi)\mathbf{V}] + \frac{\partial}{\partial p} [(K + E + \phi)\omega] = Q. \quad (2-88)$$

⁵⁾変形に関しては 2-10-B 参照。

⁶⁾2-10-B 参照。

⁷⁾内部エネルギー I は 1-5 節 熱力学第一法則で登場し、ここでは単位体積あたりの内部エネルギーの変化率 $dI/dt = c_v dT/dt$ という関係式が使われた。

⁸⁾この式は位置エネルギーと内部エネルギーを既に足し合わせた全位置エネルギーのフラックスフォームだが、位置エネルギーと内部エネルギーとそれぞれのフラックスフォームに関するも考えてみる。詳細については 2-10-E を参照のこと。

⁹⁾運動エネルギー、位置エネルギー、内部エネルギー間のエネルギーの変換に関しては 2-10-F を参照。

次に、この方程式を大気的全質量で積分する。無限小要素は $\rho dx dy dz = -dx dy dp/g$ となる¹⁰⁾。

$$\frac{1}{g} \iiint_0^{p_s} \frac{\partial}{\partial t} (K + E) dp dx dy + \frac{1}{g} \iiint_0^{p_s} \nabla \cdot [(K + E + \phi) \mathbf{V}] dp dx dy + \frac{1}{g} \iint [(K + E + \phi) \omega]_s dx dy = \bar{Q}. \quad (2-89)$$

\bar{Q} の項は、大気が宇宙や下の地表面へ放出した、もしくはそれらから吸収した全熱量を表す¹¹⁾。鉛直方向の積分は3つ目の積分記号に当たる。次に微分演算子 $\partial/\partial t$ と $\nabla \cdot$ を p の積分の外に出す。この際にはライプニッツの公式¹²⁾ を利用する。また、変数の上限 p_s を考慮に入れる。結果は、

$$\iint \left\{ \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{p_s} (K + E) dp - \frac{\partial p_s}{\partial t} (K + E)_s + \nabla \cdot \int_0^{p_s} [(K + E + \phi) \mathbf{V}] dp - \nabla p_s \cdot [(K + E + \phi) \mathbf{V}]_s + [(K + E + \phi) \omega]_s \right\} dx dy = \bar{Q} \quad (2-90)$$

となる。ここで () は三重積分を表す。

これで $\partial/\partial t$ を積分記号の外に出すことができた。そして、球状である地球では水平面方向に境界が無い (p -面を横切る山脈などは無視する) ため、水平面の流れの発散を含む第3項は消える。その結果が以下の式である¹³⁾。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{K} + \bar{E}) - \iint \left\{ \frac{1}{g} (K + E)_s \frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{1}{g} \nabla p_s \cdot [(K + E + \phi) \mathbf{V}]_s - \frac{1}{g} [(K + E + \phi) \omega]_s \right\} dx dy = \bar{Q}. \quad (2-92)$$

地表面境界条件 (2-62), $\partial p_s/\partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla p_s = \omega_s$ より $(K + E)_s$ を含む項は打ち消される。また一方で $\phi_s(\omega_s - \mathbf{V} \cdot \nabla p_s)$ は $\phi_s \partial p_s/\partial t$ に置き換えることができる。このようにすると、全エネルギーの式 (2-91) は以下のような簡単な式になる。

$$\frac{\partial}{\partial t} [\bar{K} + \bar{E} + \frac{1}{g} \overline{\phi_s p_s}] = \bar{Q}. \quad (2-93)$$

ここで $\overline{\phi_s p_s}$ は2次元の積分であることに注意して欲しい。

¹⁰⁾ 静水圧の式を使用。

¹¹⁾ これは地表面との摩擦によって発生した熱なども含めた熱量である。なお $[(K + E + \phi) \omega]_s$ は p_s における $[(K + E + \phi) \omega]$ を表す。

¹²⁾ 以下がライプニッツの公式である。

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

よって、以下の式が成り立つ。

$$\int_0^{p_s} \frac{\partial}{\partial t} A(p) dp = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{p_s} A(p) dp - \frac{\partial p_s}{\partial t} A(p_s)$$

¹³⁾ K の三重積分 \bar{K} の定義を丁寧に書くと、

$$\bar{K} = \iiint K \rho dx dy dz = \frac{1}{g} \iiint K dx dy dp \quad (2-91)$$

である。 E も同様である。

(2-93) の左側は全運動エネルギーと (2-85) 式で定義されるような全位置エネルギーの時間変化 (実際は全微分 d/dt) である¹⁴⁾。一方, 右側は系に加えられた全エネルギー (摩擦などにより得られるエネルギーを含み) を表す。断熱下で, 摩擦の無い条件下では (2-92) の右側は消え, 全エネルギーは保存される。

2-10-A 運動方程式からエネルギーの式への変形

p -座標系での運動方程式 (2-58)¹⁵⁾ に \mathbf{V} を掛けると,

$$\mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\mathbf{V} \cdot \nabla_p \phi - f\mathbf{V} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{V}) + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} \quad (2-10-A-1)$$

となる。(2-10-A-1) の第 1 項は

$$\mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d(\mathbf{V}^2/2)}{dt} = \frac{dK}{dt} \quad (2-10-A-2)$$

となる。(2-10-A-1) の第 3 項は

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{V}) &= \mathbf{V} \cdot (-fv\mathbf{i} + fu\mathbf{j}) \\ &= -fvu + fuv \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2-10-A-3)$$

となる。(2-10-A-2) と (2-10-A-3) より (2-10-A-1) は (2-80) 式に変形できる。

2-10-B 位置エネルギーの式の変形

位置エネルギーの式

$$P = \int_0^\infty gz\rho dz \quad (2-10-B-1)$$

の本文での変形に関してもう少し詳細に説明する。

静水圧の式より, 以下の関係式が成り立つ。

$$\rho dz = -dp/g. \quad (2-10-B-2)$$

また, p と z は以下のような関係にある。

$$\begin{aligned} p &= p_s & \text{at} & \quad z = 0, \\ p &= 0 & \text{at} & \quad z = \infty. \end{aligned} \quad (2-10-B-3)$$

¹⁴⁾左辺の第 3 項は地形性によって有効になる項である。地形性が全く無いとすると ϕ_s は常に 0 となるためこの項は無視される。

¹⁵⁾

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla_p \phi - f\mathbf{k} \times \mathbf{V} + \mathbf{F}.$$

(2-10-B-2) と (2-10-B-3) と $\phi = gz$ より, (2-10-B-2) は以下のように変形できる.

$$P = - \int_{p_s}^0 \phi \frac{dp}{g} = \int_0^{p_s} \phi \frac{dp}{g}. \quad (2-10-B-4)$$

この式を部分積分すると,

$$P = \int_0^{p_s} \phi \frac{dp}{g} = \frac{\phi p}{g} \Big|_0^{p_s} - \frac{1}{g} \int_0^{p_s} p \frac{\partial \phi}{\partial p} dp \quad (2-10-B-5)$$

となる (鉛直方向 p には g は変化しないと仮定している). この最後の項で $(\partial \phi / \partial p) dp = d\phi$ とすることで本文の式が得られる.

(2-84) 式の導出

続けて (2-84) 式の導出を行う. p -座標系での静水圧の式 (2-59) と状態方程式より,

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\alpha = -\frac{RT}{p} \quad (2-10-B-6)$$

となる. (2-10-B-6) を (2-10-B-5) に代入すると,

$$P = \phi_s p_s / g + \frac{1}{g} \int_0^{p_s} RT dp \quad (2-10-B-7)$$

となる. なお, $\phi_s = \phi(x, y, p_s, t) = gz(x, y, p_s, t)$ である.

2-10-C 運動エネルギーの拡散

$F = \nabla^2 V$ という力が働いているとする. このとき $V \cdot F$ は

$$\begin{aligned} V \cdot F &= V \cdot (\nabla^2 V) \\ &= v_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} - \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} \right\} - \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left\{ \frac{1}{2} v_i^2 \right\} - \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 \\ &= \nabla^2 K - \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 \end{aligned}$$

となる. この時, 右辺の第 1 項を運動エネルギーの拡散, 第 2 項を運動エネルギーの消散と呼ぶ.

2-10-D フラックスフォーム

以下のような式の形をフラックスフォーム (*flux form*) と呼ぶ.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot (BV) = C. \quad (2-10-D-1)$$

フラックスフォームの利点はある量の保存についてきれいに表すことができる点である。 $C = 0$ とし、(2-10-D-1) をある空間 V で積分すると、

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (BV) dV = 0$$

となり、ガウスの法則によって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V A dV + \int_S BV \cdot dS &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_V A dV + \int_S BV \cdot n dS &= 0 \end{aligned}$$

と表すことができる。 (n は空間 V の表面 S に垂直な単位ベクトルである)。この式は、ある空間 V の内部のある量 A は V の表面 S から出入りする BV_n ($V_n = V \cdot n$) の量によって決まることを意味している。

もう一度 (2-10-D-1) を見てみる。 BV はフラックス (*flux*) と呼ばれる量で、 $\nabla \cdot (BV)$ は流入流出の差引による A の収束発散量であることはさきほどの例からもわかるだろう。ちなみに C は生成消滅項といい、フラックスでは書けない項の集まりである。

ここで以下の連続の式 (2-6) を思い出してみよう。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0.$$

これもフラックスフォームになっているのがわかるだろう。

2-10-E P, I それぞれのフラックスフォーム

本文では位置エネルギーと内部エネルギーが足し合わされたエンタルピーという量でフラックスフォームの式を作った。では、位置エネルギーと内部エネルギーでそれぞれフラックスフォームを作ったらどうなるのだろうか？ここでは位置エネルギー P と内部エネルギー I でそれぞれフラックスフォームを作り、考察してみる。

2-10-E-a 位置エネルギー P のフラックスフォーム

連続の式 (2-6) ¹⁶⁾ を用いて位置エネルギーのフラックスフォームを導く. ここで位置エネルギーは $P = gz\rho$ [J m^{-3}] として考える.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) &= 0, \\ z \frac{\partial \rho}{\partial t} + z \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (z\rho) + \nabla \cdot (z\rho \mathbf{V}) - \rho \left\{ \frac{\partial z}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla z \right\} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (gz\rho) + \nabla \cdot (gz\rho \mathbf{V}) &= g\rho \frac{dz}{dt}.\end{aligned}$$

静水圧平衡の式を利用すると¹⁷⁾,

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (P\mathbf{V}) &= g\rho \frac{dz}{dt} \\ &= g\rho \frac{\partial z}{\partial p} \frac{dp}{dt} \\ &= g\rho \left(-\frac{\alpha}{g} \right) \frac{dp}{dt} \\ &= -\frac{dp}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt} (\rho RT) \\ &= -RT \frac{d\rho}{dt} - R\rho \frac{dT}{dt} \\ &= -RT \frac{d\rho}{dt} - \rho (c_p - c_v) \frac{1}{c_p} \left(Q + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} \right) \\ &= -RT \frac{d\rho}{dt} - \rho Q + \rho \frac{c_v}{c_p} Q - \frac{R}{c_p} \frac{dp}{dt}\end{aligned}\tag{2-10-E-1}$$

となる.

¹⁶⁾

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0.$$

¹⁷⁾ここでは

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial p} \frac{dp}{dt}$$

としている.

2-10-E-b 内部エネルギー I のフラックスフォーム

エンタルピーのフラックスフォーム (2-86)¹⁸⁾ を用いて内部エネルギー I のフラックスフォームを導く. なお, z 鉛直座標系での内部エネルギー $I = c_v T \rho$ [J m^{-3}] を考える. マイヤーの関係式 $c_p = c_v + R$ より $E = c_p T = (c_v + R)T = c_p T + p\alpha$ となるので (2-86) は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(c_v T) + \frac{d}{dt}(p\alpha) &= \alpha \frac{dp}{dt} + Q, \\ \frac{d}{dt}(c_v T) &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + Q, \\ &= -p \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) + Q \end{aligned}$$

となり, 左辺を偏微分に展開すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(c_v T) + \mathbf{V} \cdot \nabla(c_v T) &= -p \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) + Q, \\ &= \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + Q, \\ \rho \frac{\partial}{\partial t}(c_v T) + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla(c_v T) &= \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \rho Q, \\ \frac{\partial}{\partial t}(c_v T \rho) + \nabla \cdot (c_v T \rho \mathbf{V}) - c_v T \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right\} &= \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \rho Q \end{aligned}$$

となる. 連続の式 (2-6)¹⁹⁾ より第3項目は消滅して,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(c_v T \rho) + \nabla \cdot (c_v T \rho \mathbf{V}) &= \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \rho Q, \\ \frac{\partial I}{\partial t} + \nabla \cdot (I \mathbf{V}) &= RT \frac{d\rho}{dt} + \rho Q \end{aligned} \tag{2-10-E-2}$$

となる. これが内部エネルギーのフラックスフォームである.

2-10-E-c $P + I$ のフラックスフォーム

(2-10-E-1) と (2-10-E-2) を足し合わせると,

$$\frac{\partial(P + I)}{\partial t} + \nabla \cdot \{(P + I) \mathbf{V}\} = \rho \frac{c_v}{c_p} Q - \frac{R}{c_p} \frac{dp}{dt} \tag{2-10-E-3}$$

となる.

¹⁸⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{V}_H \cdot \nabla_H E + \omega \frac{\partial E}{\partial p} &= \frac{RT}{p} \omega + Q, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla E &= \alpha \frac{dp}{dt} + Q, \\ \frac{dE}{dt} &= \alpha \frac{dp}{dt} + Q. \end{aligned}$$

¹⁹⁾

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0.$$

2-10-F 運動, 位置, 内部エネルギーの変換

本文では運動エネルギー K と位置エネルギー ϕ の式 (2-82) とエンタルピー E ²⁰⁾ の式 (2-87) との間でのエネルギーの変換については言及しているが, 3つのエネルギーのそれぞれの変換に関しては触れていないのでここで議論してみる.

2-10-F-a 運動エネルギーのフラックスフォーム

運動エネルギーのフラックスフォームは本文の (2-81) である以下の式である.

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t} + \nabla \cdot (K\mathbf{V}) + \frac{\partial(K\omega)}{\partial p} &= -\nabla \cdot (\phi\mathbf{V}) + \phi\nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} \\ &= -\mathbf{V} \cdot \nabla\phi + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (2-10-F-1)$$

2-10-F-b 位置エネルギーのフラックスフォーム

単位質量あたりの位置エネルギーはジオポテンシャル ϕ で考えることができる. 本文の式 (2-82)²¹⁾ から式 (2-81)²²⁾ を引くと以下のジオポテンシャルのフラックスフォームの式が得られる²³⁾.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi\mathbf{V}) + \frac{\partial(\phi\omega)}{\partial p} &= -\frac{RT\omega}{p} + \nabla \cdot (\phi\mathbf{V}) - \phi\nabla \cdot \mathbf{V}, \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi\mathbf{V}) + \frac{\partial(\phi\omega)}{\partial p} &= -\frac{RT\omega}{p} + \mathbf{V} \cdot \nabla\phi. \end{aligned} \quad (2-10-F-2)$$

ちなみにこの式は連続の式にジオポテンシャル ϕ を掛けた式 (式 (2-81) と式 (2-82) の間の式) と等価である.

²⁰⁾ 気象業界では内部エネルギー I の代わりにエンタルピー E を用いることが多い. なお, 内部エネルギーとエンタルピーの間には以下の関係式が成り立つ.

$$\begin{aligned} E &= I + RT \\ &= I + p\alpha. \end{aligned}$$

この関係式を用いるとエンタルピー $E = c_p T$ のフラックスフォーム (2-87) から内部エネルギー $I = c_v T$ のフラックスフォームの式を得ることもできる. 詳しくは 2-10-F-1 を参照のこと.

²¹⁾

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \nabla \cdot [(K + \phi)\mathbf{V}] + \frac{\partial[(K + \phi)\omega]}{\partial p} = -\frac{RT\omega}{p} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}.$$

²²⁾

$$\partial K/\partial t + \nabla \cdot K\mathbf{V} + \partial(K\omega)/\partial p = -\nabla \cdot (\phi\mathbf{V}) + \phi\nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}.$$

²³⁾ $\partial\phi/\partial t$ はゼロなので本来は記述されない.

2-10-F-c エンタルピーのフラックスフォーム

エンタルピーのフラックスフォームは本文の式 (2-87) そのものである.

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E\mathbf{V}) + \frac{\partial(E\omega)}{\partial p} = \frac{RT\omega}{p} + Q. \quad (2-10-F-3)$$

2-10-F-d エネルギーの変換項

(2-10-F-1), (2-10-F-2), (2-10-F-3) の 3 式の右辺に注目してほしい. (2-10-F-1) と (2-10-F-2) の式には $\mathbf{V} \cdot \nabla \phi$ の項があり, 符号が逆になっていることがわかる. つまり, z が増加すれば運動エネルギーが減少する代わりに位置エネルギーが増加し, 逆に z が減少すれば運動エネルギーが増加する代わりに位置エネルギーは減少する.

次に (2-10-F-2) と (2-10-F-3) には両方に $RT\omega/p$ の項があることに注目する. ここでは例えば空気塊が上昇することを考える. 上昇するということは $\omega < 0$ ²⁴⁾ であることに注意してほしい. 上昇するということは位置エネルギーは増加する. また, 上昇するのに伴い温度は下がるのでエンタルピー E は減少する. 空気塊が下降する時は当然これと逆のことが起こる. このことが (2-10-F-2) と (2-10-F-3) において $RT\omega/p$ の項が及ぼす影響である.

つまり, 運動エネルギーと位置エネルギーは $-\mathbf{V} \cdot \nabla \phi$ の項で変換され, 位置エネルギーとエンタルピー (つまりは内部エネルギー) は $RT\omega/p$ の項で変換される. この 3 つのエネルギーを足し合わせると, 当然これらの項は打ち消し合ってなくなるわけである.

2-10-F-e 内部エネルギーのフラックスフォーム

単位質量あたりの内部エネルギー $I = c_v T$ [J/kg] のフラックスフォームを (2-87) から導出してみる. マイヤーの関係式 $c_p = c_v + R$ より $E = c_p T = (c_v + R)T = c_p T + p\alpha$ となるので (2-86) は

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{RT\omega}{p} + Q, \\ \frac{d}{dt}(c_v T) + \frac{d}{dt}(p\alpha) &= \alpha \frac{dp}{dt} + Q, \\ \frac{d}{dt}(c_v T) &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + Q, \\ &= -p \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) + Q, \\ \frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla I + \omega \frac{\partial I}{\partial p} &= -p \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) + Q, \\ \frac{\partial I}{\partial t} + \nabla \cdot (I\mathbf{V}) + \frac{\partial(I\omega)}{\partial p} - I \left\{ \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \omega}{\partial p} \right\} &= -p \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) + Q. \end{aligned}$$

²⁴⁾ p -座標系は (z -座標系で言うところの) 下向きなので上昇流は $\omega < 0$ である.

となる。連続の式 (2-60) ²⁵⁾ より、

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \nabla \cdot (I\mathbf{V}) + \frac{\partial(I\omega)}{\partial p} = -p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + Q$$

となる。これが内部エネルギーのフラックスフォームである。この式とエンタルピーのフラックスフォームを見比べてみると、位置エネルギーとの変換という点に関してはエンタルピーのフラックスフォームの方が取り扱いやすいことがわかるだろう。

²⁵⁾

$$\nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (2-10-F-4)$$

2-11 有効位置エネルギー

自然界ではよくあることだが、様々な種類の位置エネルギーが単に存在するだけではそれらが他の形態のエネルギーに変換でき得るとは限らない。大気作用に関する状態を明確にするために、Lorenz(1955) は有効位置エネルギー (*available potential energy*) という量を定義した。この量はある時間にあてられた大気的全位置エネルギーとその温度場を断熱的に再配置して安定成層状態にしたと仮定して得られた仮想状態的全位置エネルギーの差である。なお、安定成層状態では p -面と T -面、および θ -面は一致する。

ここでまず、Lorenz の仮想的安定成層状態では位置エネルギーから運動エネルギーへのエネルギー変換はおこなわれないことを確認する。(2-82) より、閉じた領域内で位置エネルギーが運動エネルギーに変換される速度は積分 $-(R/g) \iiint (T\omega/p) dx dy dp$ で得られる¹⁾。これは等圧面上の T と ω の共分散²⁾ $\overline{T\omega}$ の鉛直方向の積分に比例する (共分散は $\overline{T\omega} = \overline{T'\omega'} + \overline{T\bar{\omega}}$ と変形できる³⁾)。つまり、 $\overline{T\omega} = 0$ となればそれ以上エネルギーの変換はおこなわれないことになる。以下では等圧面上で $\overline{T\omega} = 0$ となることを示す。Lorenz の大気の仮想的な安定成層状態では温度は等圧面上で一定である⁴⁾。つまり等圧面上では $T' = 0$ であるのだから、 $\overline{T\omega} = \overline{T\bar{\omega}}$ となる。次に、鉛直方向に積分した p -座標系における連続の式 (2-61) にガウスの定理を使う。(2-61) を水平面方向に積分すると、

$$\bar{\omega} \iint dx dy = \iint \omega dx dy = - \iiint_0^p \nabla_p \cdot \mathbf{V} dx dy dp \quad (2-93)$$

となる⁵⁾。この式の最後の項は、面が閉じている (水平面の境界が無い) 場合か、もしくは境界面における速度 V_n (境界の線から外向きの速度) が無い時にゼロとなる⁶⁾。このことから閉じられた等圧面上では $\iint \nabla_p \cdot \mathbf{V} dx dy = 0$ となり、つまり $\bar{\omega} = 0$ となる。つまり、大気を非断熱的に再配置した仮想状態では $\overline{T\omega} = \overline{T\bar{\omega}} = 0$ となる。このことはもうこれ以上位置エネルギーが運動エネルギーに変換されることは無いことと等しい。

ある任意の状態の大気的位置エネルギーと理想的な仮想状態の大気的位置エネルギーとの差を有効位置エネルギーと呼ぶことは前述した。後者へは非断熱的に達し、それ以上の運動エネルギーの変換はあり得ないことから、このエネルギーの差は運動エネルギーに変換可能な全位置エネルギーの一部であり、有効位置エネルギーという名前が実にふさわしいものだとわかるだろう⁷⁾。

有効位置エネルギー A の数理的な式を導く。簡単化のため、地形性は無視して地表面圧力は $p_s = 1000\text{mb}$ とし、温位 $\theta = T(p_s/p)^\kappa$ を導入する。全位置エネルギーの式 (2-85) に温位を導入すると、全位置エネルギー (**T**otal **P**otential **E**nergy) TPE は

$$TPE = (c_p/g) \int_0^{p_s} T dp + g^{-1} \phi_s p_s = g^{-1} c_p p_s^{-\kappa} \int_0^{p_s} \theta p^\kappa dp + \phi_s p_s / g$$

¹⁾ $\rho dx dy dz = -dx dy dp/g$ を利用

²⁾ 見た通り、 T と ω の積の等圧面上 (x - y 面上) での平均値である。

³⁾ 共分散の変形に関しては 2-11-C を参照のこと。

⁴⁾ p -面と T -面が一致することは前述した。

⁵⁾ $\bar{\omega}$ は ω の水平面での平均値を表す。

⁶⁾ (2-89) 式において第 2 項がそのままゼロとならなかったのは $(K + E + \phi)$ という変数が含まれていたからである。

⁷⁾ 「基準状態」はいくらか任意性が混じったものになる。なぜなら、自然の過程においてそれに達するという保証が無いからである。

となる. ここでは $\kappa = R/c_p$ である. 次に部分積分をおこなうと以下の式が得られる⁸⁾.

$$TPE = \frac{c_p p_s^{-\kappa}}{g(1+\kappa)} \left[(\theta p^{1+\kappa})_0^{p_s} + \int_{\theta_s}^{\theta_T} p^{1+\kappa} d\theta \right] + \phi_s p_s / g$$

定数項を無視し⁹⁾, 大気的全位置エネルギーの領域内での平均をとる¹⁰⁾. 領域内での平均をバーで表すと,

$$\overline{TPE} = \frac{c_p p_s^{-\kappa}}{g(1+\kappa)} \int \overline{p^{1+\kappa}} d\theta \quad (2-94)$$

となる. ここでは鉛直座標に温位を用いている. 次に Lorenz の仮想的な安定成層状態を考える. 大気が Lorenz の仮想状態に再配置されている場合の等温位面上の圧力を \tilde{p} とおく¹¹⁾. なお, この圧力 \tilde{p} は初期の圧力分布の平均値 \bar{p} と等しい. 領域内の有効位置エネルギーは (2-94) と仮想状態における \overline{TPE} との差なので,

$$\bar{A} = \frac{c_p p_s^{-\kappa}}{g(1+\kappa)} \int (\overline{p^{1+\kappa}} - \tilde{p}^{1+\kappa}) d\theta \quad (2-95)$$

となる¹²⁾.

これを使いやすい形にするために, $p = \tilde{p} + p'$ とし, $p^{1+\kappa}$ に代入して展開すると,

$$p^{1+\kappa} = (\tilde{p} + p')^{1+\kappa} = \tilde{p}^{1+\kappa} + \frac{(1+\kappa)\tilde{p}^\kappa p'}{1!} + \frac{\kappa(1+\kappa)\tilde{p}^{\kappa-1} p'^2}{2!} + \dots$$

となる. 領域平均をとると, 右辺の真中の項は消える. この結果¹³⁾ を (2-95) に代入すると,

$$\begin{aligned} \bar{A} &\doteq \frac{1}{2} \kappa c_p g^{-1} p_s^{-\kappa} \int_{\theta_s}^{\theta_T} \tilde{p}^{\kappa-1} \overline{p'^2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \kappa c_p g^{-1} p_s^{-\kappa} \int_{\theta_s}^{\theta_T} \tilde{p}^{1+\kappa} \overline{(p'/\tilde{p})^2} d\theta \end{aligned} \quad (2-96)$$

となる¹⁴⁾. このように, 領域内の有効位置エネルギーは等温位面上の圧力の変化に依存する¹⁵⁾. これは同様に, 圧力面における θ (または T) の変化に密接に関係するということである. \tilde{p} -面上での温位と温度の平均を $\tilde{\theta} (= \bar{\theta})$ や $\tilde{T} (= \bar{T})$ とすると,

$$p \doteq \tilde{p}[\theta(p)] \quad \text{and} \quad p' \doteq \tilde{p}(\theta + \theta') - \tilde{p}(\theta) = \theta' \partial \tilde{p} / \partial \theta$$

⁸⁾ ここでは地表面 ($p = p_s$) では $\theta = \theta_s$, 大気上端 ($p = 0$) では $\theta = \theta_T$ である.

⁹⁾ 後述するが, 有効位置エネルギーはある状態での位置エネルギーと理想的な安定成層状態での位置エネルギーの差によって求めるので定数項は省いて考える.

¹⁰⁾ ここまでの TPE は単位面積で地表から大気上端までの高さを持つ円柱内の全位置エネルギーを考えていた. ここで領域内での平均とは, 大気の全面積の平均を意味する.

¹¹⁾ ここでは仮想安定成層状態の大気の物理量はチルダ ($\tilde{\quad}$) で, 平均値は上線 ($\overline{\quad}$) で表すことにする.

¹²⁾ $\overline{p^{1+\kappa}}$ と $\bar{p}^{1+\kappa} (= \tilde{p}^{1+\kappa})$ との違いに関しては 2-11-A 参照.

¹³⁾

$$\overline{p^{1+\kappa}} - \tilde{p}^{1+\kappa} = \frac{\kappa(1+\kappa)\tilde{p}^{\kappa-1} \overline{p'^2}}{2!}.$$

$\tilde{p} \gg p'$ のため, これより後ろの項は無視している.

¹⁴⁾

$$\tilde{p}^{\kappa-1} \overline{p'^2} = \tilde{p}^{\kappa+1} \frac{\overline{p'^2}}{\tilde{p}^2} = \tilde{p}^{\kappa+1} \overline{\left(\frac{p'}{\tilde{p}}\right)^2} = \tilde{p}^{\kappa+1} \overline{\left(\frac{p'}{\tilde{p}}\right)^2}.$$

¹⁵⁾ 等温位面上で圧力が一切変化しない場合は安定成層状態 (つまりは Lorenz の仮想状態) なので有効位置エネルギーはゼロになる.

となる¹⁶⁾. このため $\overline{(p'/\bar{p})^2} = (1/\bar{p}^2)\overline{(\theta' \partial\bar{p}/\partial\theta)^2} = (1/\bar{p}^2)\overline{\theta'^2(\partial\bar{p}/\partial\theta)^2}$ となる. これらを (2-96) に代入すると,

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{1}{2} \kappa c_p g^{-1} p_s^{-\kappa} \int_{\theta_s}^{\theta_T} \frac{\bar{p}^\kappa}{\bar{p}} \theta'^2 \left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial\theta} \right)^2 d\theta \\ &= \frac{\kappa c_p}{2g p_s^\kappa} \int_{\bar{p}_s}^0 \bar{p}^{(\kappa-1)} \bar{\theta}^2 \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right)^2 \left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial\theta} \right) dp \end{aligned} \quad (2-97)$$

という形になる. ここで, 以下の関係式を用いる¹⁷⁾.

$$\begin{aligned} (\partial\bar{p}/\partial\theta)\kappa\bar{\theta}/(\gamma_d\bar{p}) &= -1/(\gamma_d - \tilde{\gamma}), \quad \gamma = -\partial T/\partial z, \quad \gamma_d = g/c_p, \\ \bar{\theta} &= \bar{T}(p_s/\bar{p})^\kappa \quad \text{and} \quad \theta'/\bar{\theta} \doteq T'/\bar{T}. \end{aligned}$$

これらを (2-97) に代入すると以下のような \bar{A} の最終的な形を導くことができる¹⁸⁾.

$$\bar{A} \doteq \frac{1}{2} \int_0^{p_s} \frac{\bar{T}}{\gamma_d - \tilde{\gamma}} \left(\frac{T'}{\bar{T}} \right)^2 dp. \quad (2-98)$$

なお, γ は遞減率¹⁹⁾, γ_d は乾燥断熱減率²⁰⁾ である²¹⁾.

典型的な場合で考えると, $\gamma \doteq 2\gamma_d/3$, $\overline{T'^2} = (15^\circ)^2$ となる. この場合は

$$\bar{A}/\overline{TPE} \sim 1/200 \quad (2-99)$$

である²²⁾. 運動エネルギーに変換されるのは全位置エネルギーの1パーセントに満たない. 単位面積の大気のパネルの運動エネルギー K と全位置エネルギー TPE はそれぞれ,

$$K = \frac{1}{2g} \int_0^{p_s} V^2 dp, \quad TPE = \frac{c_v}{gR} \int_0^{p_s} c^2 dp \quad (2-100)$$

となる. ここで $c^2 = c_p RT/c_v$ は音速の二乗である. (単位は c [m/s] である)²³⁾.

$V/c \sim 1/20$ の平均をとって大雑把に見積もると

$$\bar{K}/\overline{TPE} \sim 1/2000 \quad \text{and} \quad \bar{K}/\bar{A} \sim 1/10 \quad (2-101)$$

¹⁶⁾右の関係式は以下のテイラー展開の式

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &\quad + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

に, $f(x) = \bar{p}(x)$, $x = \theta + \theta'$, $a = \theta$ を代入し, 更に θ' は微小であることから θ' の2乗以上の項を除外すると,

$$\bar{p}(\theta + \theta') \simeq \bar{p}(\theta) + \theta' \frac{\partial\bar{p}}{\partial\theta}$$

となることから得られる.

¹⁷⁾1 つ目の関係式の導出については 2-11-D 参照. 2 つ目の関係式は等圧面上 ($\bar{p} = \text{一定}$) で成り立つ式である.

¹⁸⁾詳細な計算は 2-11-B 参照.

¹⁹⁾高度の上昇につれ温度が低下する割合.

²⁰⁾乾燥大気 (つまり潜熱が発生しない状況) で断熱的に空気塊を上昇させた時の温度が下がる割合.

²¹⁾この有効位置エネルギーの式に関して 2-11-E で考察している.

²²⁾この値の実際の導出に関しては 2-11-F を参照のこと.

²³⁾ R, c_v, c_p の単位は全て $[J \text{ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}]$ である. また, 運動エネルギーは $K = (1/2) \int \rho V^2 dz$ を $\rho dz = (1/g)dp$ の関係式で変形することからわかる. 全位置エネルギーに関しては, $c^2 = c_p RT/c_v$ を (2-100) の後ろの式に代入すると $TPE = (c_p/g) \int T dp$ となり, TPE を導入した式と同様になることからわかるだろう.

となる²⁴⁾。このように、運動エネルギーに変換される有効位置エネルギーは全位置エネルギーのほんの一部に過ぎない。しかし、それでも有効位置エネルギーは観測される運動エネルギーのおよそ10倍はある。運動エネルギーが発生しない場合、それは有効位置エネルギーとして定義されているエネルギーが足りないのではなく、エネルギーを開放するようなメカニズムが無いからである。

天気予報の数値計算スキームにおいて、 TPE の誤差がたった0.01パーセントであってもそれを運動エネルギーの量から見ると運動エネルギーの20パーセントにもなるようなエネルギー誤差量となる。これは当然許容範囲外の誤差である。

天気予報において、これは当然許容範囲外の誤差である。

保存則は(2-87)から(2-92)において E の代わりに A を使ったものが考えられる。しかしここでは取り上げない。

一方で、どんな場合にせよ非線形な移流項は運動エネルギーを生み出さない。そのため移流項の正しい数値的な取扱方は誤った運動エネルギーの発生を避けることである。

2-11-A $\overline{p^{1+\kappa}}$ と $\bar{p}^{1+\kappa}$ との違い

ここでは全大気は n 本の円柱(単位面積で高さは地表面から大気上端まで)で構成されていると考える。円柱には $k=1\sim n$ と番号付けする。 k 番目の円柱の圧力を $p_k(\theta)$ とすると、各円柱の全位置エネルギー TPE_k は

$$TPE_k = \alpha \int p_k^{1+\kappa} d\theta$$

となる。なお、 $\alpha = c_p p_s^{-\kappa} / g(1+\kappa)$ であり、定数項は無視している。

よって、全位置エネルギーの平均 \overline{TPE} は

$$\begin{aligned} \overline{TPE} &= \alpha \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int p_k^{1+\kappa} d\theta \\ &= \alpha \int \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k^{1+\kappa} d\theta \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\overline{p^{1+\kappa}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k^{1+\kappa}$ とおくことで式(2-94)となる。

一方、Lorenzの仮想状態では本文のとおり「等温面上の圧力 \tilde{p} は初期の圧力分布の平均値(\bar{p} とする)と等しい」ので、 $p_1(\theta) = p_2(\theta) = \dots = p_n(\theta) = \bar{p}(\theta)$ となる。このため、全位置エネルギーの平均は

$$\begin{aligned} \overline{TPE} &= \alpha \frac{1}{n} \int \tilde{p}^{1+\kappa} d\theta \\ &= \alpha \int \bar{p}^{1+\kappa} d\theta \end{aligned}$$

²⁴⁾運動エネルギーと全位置エネルギーの比の導出に関しては2-11-G参照。

となる.

2-11-B (2-98) 式の導出

(2-97) から以下の 5 つの関係式を用いて (2-98) を求める. (単純な計算だけど).

$$\begin{aligned} (\partial\tilde{p}/\partial\theta)\kappa\tilde{\theta}/(\gamma_d\tilde{p}) &= -1/(\gamma_d - \tilde{\gamma}), \\ \gamma &= -\partial T/\partial z, \\ \gamma_d &= g/c_p, \\ \tilde{\theta} &= \tilde{T}(p_s/\tilde{p})^\kappa, \\ \theta'/\tilde{\theta} &\doteq T'/\tilde{T}. \end{aligned}$$

(2-97) を変形する.

$$\bar{A} = \frac{\kappa c_p}{2gp_s^\kappa} \int_{p_s}^0 \tilde{p}^{(\kappa-1)} \overline{\left(\frac{\theta'}{\tilde{\theta}}\right)^2} \left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\theta}\right) dp.$$

ここで $\tilde{\theta} = \tilde{T}(p_s/\tilde{p})^\kappa$, $\theta'/\tilde{\theta} \doteq T'/\tilde{T}$, $\gamma_d = g/c_p$ を使うと,

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{1}{2} \frac{c_p}{g} \frac{\kappa}{p_s^\kappa} \int_{p_s}^0 \frac{\tilde{p}^\kappa}{\tilde{p}} \tilde{T} \left(\frac{p_s}{\tilde{p}}\right)^\kappa \overline{\left(\frac{T'}{\tilde{T}}\right)^2} \left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\theta}\right) dp \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{p_s^\kappa} \int_{p_s}^0 \frac{\kappa}{\gamma_d} \frac{\tilde{\theta}}{\tilde{p}} \left(\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\theta}\right) \tilde{p}^\kappa \frac{p_s^\kappa}{\tilde{p}^\kappa} \tilde{T} \overline{\left(\frac{T'}{\tilde{T}}\right)^2} dp \end{aligned}$$

となる. 最後に $(\partial\tilde{p}/\partial\theta)\kappa\tilde{\theta}/(\gamma_d\tilde{p}) = -1/(\gamma_d - \tilde{\gamma})$ を使うと,

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{1}{2} \int_{p_s}^0 -\frac{1}{\gamma_d - \tilde{\gamma}} \tilde{T} \overline{\left(\frac{T'}{\tilde{T}}\right)^2} dp \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{p_s} \frac{\tilde{T}}{\gamma_d - \tilde{\gamma}} \overline{\left(\frac{T'}{\tilde{T}}\right)^2} dp \end{aligned}$$

となる.

2-11-C 共分散の変形

ある等圧面上における温度 $T(x, y)$ と鉛直速度 $\omega(x, y)$ の共分散 $\overline{T\omega}$ の変形 $\overline{T\omega} = \overline{T'\omega'} + \overline{\bar{T}\bar{\omega}}$ について考察する.

T と ω をそれぞれ基本場 (x - y 平面における平均値) \bar{T} , $\bar{\omega}$ と擾乱場 (平均値からのずれ) T' , ω' に分けて表現すると,

$$T(x, y) = \bar{T} + T'(x, y), \quad \omega(x, y) = \bar{\omega} + \omega'(x, y)$$

となる。よって、 T と ω の積 $T\omega$ は、

$$\begin{aligned} T(x, y)\omega(x, y) &= (\bar{T} + T'(x, y))(\bar{\omega} + \omega'(x, y)) \\ &= \bar{T}\bar{\omega} + T'(x, y)\bar{\omega} + \bar{T}\omega'(x, y) + T'(x, y)\omega'(x, y) \end{aligned}$$

となる。更にここで $T\omega$ の平均をとると、

$$\overline{T(x, y)\omega(x, y)} = \overline{\bar{T}\bar{\omega}} + \overline{T'(x, y)\bar{\omega}} + \overline{\bar{T}\omega'(x, y)} + \overline{T'(x, y)\omega'(x, y)}$$

となる。 \bar{T} と $\bar{\omega}$ は既に x, y に依存しない平均値となっているため、

$$\overline{T(x, y)\omega(x, y)} = \bar{T}\bar{\omega} + \overline{T'(x, y)\bar{\omega}} + \overline{\bar{T}\omega'(x, y)} + \overline{T'(x, y)\omega'(x, y)}$$

となる。擾乱場の平均値はその定義から考えて $\overline{T'} = 0$, $\overline{\omega'} = 0$ となる。よって以下の関係が成り立つ。

$$\overline{T\omega} = \bar{T}\bar{\omega} + \overline{T'\omega'}$$

2-11-D 逓減率と乾燥断熱減率の関係式

関係式

$$(\partial\tilde{p}/\partial\theta)\kappa\tilde{\theta}/(\gamma_d\tilde{p}) = -1/(\gamma_d - \tilde{\gamma}) \quad (2-11-D-1)$$

を導出する。なお、 $\gamma = -\partial T/\partial z$, $\gamma_d = g/c_p$ である。静水圧平衡の式 (2-12) より以下の関係式

$$\frac{\partial}{\partial z} = -g\tilde{\rho}\frac{\partial}{\partial p} \quad (2-11-D-2)$$

を用いると

$$\tilde{\gamma} = g\tilde{\rho}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial p}$$

となる²⁵⁾。ここで温位、温度、圧力の関係式 $\tilde{T} = \tilde{\theta}(\tilde{p}/p_s)^\kappa$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= g\tilde{\rho}\frac{\partial}{\partial p}\left\{\tilde{\theta}\left(\frac{\tilde{p}}{p_s}\right)^\kappa\right\} \\ &= g\tilde{\rho}p_s^{-\kappa}\left\{\tilde{p}^\kappa\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial p} + \tilde{\theta}\frac{\partial\tilde{p}^\kappa}{\partial p}\right\} \\ &= g\tilde{\rho}p_s^{-\kappa}\left\{\tilde{p}^\kappa\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial p} + \kappa\tilde{\theta}\tilde{p}^{\kappa-1}\right\} \\ &= g\tilde{\rho}\left\{\left(\frac{\tilde{p}}{p_s}\right)^\kappa\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial p} + \left(\frac{\tilde{p}}{p_s}\right)^\kappa\frac{1}{\tilde{p}}\kappa\tilde{\theta}\right\} \end{aligned}$$

となる。ここで $(\tilde{p}/p_s)^\kappa = \tilde{T}/\tilde{\theta}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &= g\tilde{\rho}\left\{\frac{\tilde{T}}{\tilde{\theta}}\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial p} + \frac{\tilde{T}}{\tilde{\theta}}\frac{1}{\tilde{p}}\kappa\tilde{\theta}\right\} \\ &= g\tilde{\rho}\frac{\tilde{T}}{\tilde{\theta}}\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial p} + g\tilde{\rho}\frac{\tilde{T}}{\tilde{p}}\kappa \end{aligned}$$

²⁵⁾本文と同様、チルダ ($\tilde{\quad}$) は安定成層状態での物理量を表す。

となる。ここで状態方程式 $\tilde{p} = \tilde{\rho}R\tilde{T}$ を代入すると、

$$\tilde{\gamma} = \frac{g\tilde{p}}{R\tilde{\theta}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial p} + \kappa \frac{g}{R}$$

となり、 $\kappa = R/c_p$ であることから

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma_a \tilde{p}}{\kappa \tilde{\theta}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial p} + \frac{g}{c_p} \tag{2-11-D-3}$$

である。この (2-11-D-3) を (2-11-D-1) の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\gamma_d - \tilde{\gamma}} &= 1 / \left(\frac{\gamma_a \tilde{p}}{\kappa \tilde{\theta}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial p} \right) \\ &= \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \frac{\kappa \tilde{\theta}}{\gamma_a \tilde{p}} \end{aligned}$$

となり、(2-11-D-1) は導出された。なお、この議論では岸保 (1982) と Peixoto(1992) を参照した。

2-11-E 有効位置エネルギーの式に関する考察

以下の有効位置エネルギーの式 (2-98) に関してちょっと考察してみる。

$$\bar{A} \doteq \frac{1}{2} \int_0^{p_s} \frac{\tilde{T}}{\gamma_d - \tilde{\gamma}} \overline{\left(\frac{T'}{\tilde{T}}\right)^2} dp.$$

$\overline{\left(\frac{T'}{\tilde{T}}\right)^2}$: 平均温度に比べて擾乱が大きいほど有効位置エネルギーは大きくなる。(擾乱自体が大きくても平均温度も大きいとそれほど有効位置エネルギー) は大きくなる。

\tilde{T} : 平均温度が高いほど有効位置エネルギーは大きい。

$1/(\gamma_d - \tilde{\gamma})$: 遞減率が大きいほど (乾燥断熱減率に近づくほど) 有効位置エネルギーはおおきくなる。

2-11-F 有効位置エネルギーと全位置エネルギーの比

本文 (2-99) $\bar{A}/\overline{TPE} = 1/200$ を導出してみる。 \bar{A} と \overline{TPE} の比較には以下の式:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{1}{2} \int_0^{p_s} \frac{\bar{T}}{\gamma_d - \tilde{\gamma}} \overline{\left(\frac{T'}{\tilde{T}}\right)^2} dp \sim \frac{1}{2} \frac{\bar{T}}{\gamma_d - \tilde{\gamma}} \overline{\left(\frac{T'}{\tilde{T}}\right)^2} p_s, \\ \overline{TPE} &= \frac{c_p}{g} \int_0^{p_s} \bar{T} dp \sim \frac{1}{\gamma_d} \bar{T} p_s \end{aligned}$$

を使う。

$\bar{\gamma} = 2\gamma_d/3$, $\overline{T'^2} = 15^2$, $\bar{T} = 270$ と仮定すると,

$$\begin{aligned}\bar{A}/\overline{TPE} &= \left(\frac{1}{2} \frac{\bar{T}}{(1/3)\gamma_d} \overline{\left(\frac{T'}{\bar{T}}\right)^2} p_s \right) / \left(\frac{1}{\gamma_d} \bar{T} p_s \right) \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{\overline{T'^2}}{\bar{T}} \right) \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{18} \right) \\ &= \frac{1}{216} \simeq \frac{1}{200}\end{aligned}\tag{2-11-F-1}$$

となり, (2-99) を求めることができた.

2-11-G 運動エネルギーと全位置エネルギーの比

本文の式 (2-101) $\bar{K}/\overline{TPE} \sim 1/2000$ を導出する. 本文より $V/c \sim 1/20$ を仮定する. また 2 原子分子の定積比熱 c_v は自由度が 5 であることから $(5/2)R$ なので,

$$\begin{aligned}\bar{K}/\overline{TPE} &= \left(\frac{1}{2g} \int_0^{p_s} V^2 dp \right) / \left(\frac{c_v}{gR} \int_0^{p_s} c^2 dp \right) \\ &\sim \left(\frac{1}{2g} V^2 p_s \right) / \left(\frac{c_v}{gR} c^2 p_s \right) \\ &= \left(\frac{1}{2g} V^2 p_s \right) / \left(\frac{5}{2g} c^2 p_s \right) \\ &\sim 1^2 / (5 \times 20^2) \\ &= 1/2000\end{aligned}$$

となり, 運動エネルギーと全位置エネルギーが得られた.

2-12 渦度と発散の方程式

地球物理の力学の研究を目的とする場合や数値計算などの場合、水平面ベクトル運動方程式（もしくは2つのスカラー成分の方程式）を渦度 (*vorticity*) と発散 (*divergence*) という別の2つのスカラーの方程式に取り換えて用いる方が便利な場合が多い。

2-12-1 渦度方程式

三次元のベクトル渦度は単純に速度ベクトルの回転をとったものである。これは角速度の概念を一般化したものである。立体の回転の場合は渦度は単純に角速度の2倍である¹⁾。大気の大規模な流れでは水平面速度に比べ鉛直方向速度は数桁小さく、流れは準水平面であると考えられる。このことと大規模な系での力学の性質から、渦度の鉛直成分がもっとも重要なものであることがわかる。その結果として、水平面の風速とその渦度の鉛直成分 $\zeta = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{V}$ [m/s²] が普通は必要となる。ちなみに、球面座標で渦度を表現すると以下ようになる²⁾。

$$\zeta = (1/a \cos \varphi) \partial v / \partial \lambda - a^{-1} \partial u / \partial \varphi + u \tan \varphi / a. \tag{2-102}$$

ζ の時間変化の式を導くには、(2-16) と (2-17) をベクトル形式で記述し³⁾、本論文の最後に掲載されている数学公式 (A-9)⁴⁾ を使うのが便利である。変形した式は以下のように書ける。

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{V}^2/2) + \zeta \mathbf{k} \times \mathbf{V} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = -\alpha \nabla p - f \mathbf{k} \times \mathbf{V} + \mathbf{F} \tag{2-103}$$

1 2 3 4 5 6

ここで $f = 2\Omega \sin \varphi$ はコリオリ・パラメータである。また、 \mathbf{V} および ∇ は水平面での速度と微分演算子である。便利なように、 $\eta \equiv \zeta + f$ と定義し⁵⁾、3つ目と6つ目の項を足し合わせて $\eta \mathbf{k} \times \mathbf{V}$ とする。そして、方程式全体を $\mathbf{k} \cdot \nabla \times$ で演算する。付録の数学公式のベクトル演算を使うと簡単な式にできる。例えば、勾配の回転をとるとゼロになるので⁶⁾ 2つ目の項は消える。以下のもの⁷⁾ を除けば、大半の項の計算は簡単である。

$$\mathbf{k} \cdot [\nabla \times (\eta \mathbf{k} \times \mathbf{V})] = \mathbf{k} \cdot [\eta \mathbf{k} \nabla \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V} \nabla \cdot \eta \mathbf{k} - (\eta \mathbf{k} \cdot \nabla) \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \eta \mathbf{k}]$$

$\mathbf{k} \cdot \nabla = 0$ ⁸⁾ であることから、右辺の真中の2つの項は消える。

¹⁾ この「渦度が角速度の2倍」という表現に関しては2-12-Cを参照のこと。

²⁾ 1章7節の

$$(\nabla \times \mathbf{V})_k = (1/r \cos \varphi) [\partial v / \partial \lambda - (\partial / \partial \varphi)(u \cos \varphi)]$$

から導出できる。

³⁾ 実際は(2-11)の形にしてから代入すると良い((2-11)自体は地球近似がまだおこなわれていない。)

⁴⁾ $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nabla(\mathbf{V}^2/2) + \zeta \mathbf{k} \times \mathbf{V}$

⁵⁾ η [m/s²] は絶対渦度 (*absolute vorticity*) と呼ばれる量で、渦度 ζ (絶対渦度との区別のために相対渦度 (*relative vorticity*) と呼ばれることもある) とコリオリ・パラメータ f (惑星渦度 (*planetary vorticity*) と呼ばれる) を足し合わせたものである。

⁶⁾ 付録の数学公式 (A-2) より $\nabla \times \nabla a = 0$ 。

⁷⁾ 以下の付録の数学公式 (A-7) を利用する。

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

⁸⁾ ∇ の鉛直成分はゼロであることに注意。

その結果が以下の渦度方程式 (*vorticity equation*) となる⁹⁾.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \underset{1}{\mathbf{V}} \cdot \nabla \eta + w \underset{3,6}{\frac{\partial \zeta}{\partial t}} = -\underset{4}{\eta} \nabla \cdot \mathbf{V} - \underset{3,6}{\mathbf{k}} \cdot \nabla w \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + \underset{4}{\mathbf{k}} \cdot \nabla p \times \nabla \alpha + \underset{5}{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times \mathbf{F}. \quad (2-104)$$

ここでの番号は (2-103) での番号と対応している¹⁰⁾. この方程式を普通の形にするため, $\partial f / \partial t = \partial f / \partial z = 0$ を利用する. すると, (2-104) は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla(\zeta + f) + w \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial t} \\ = -(\zeta + f) \nabla \cdot \mathbf{V} - \mathbf{k} \cdot \nabla w \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + \mathbf{k} \cdot \nabla p \times \nabla \alpha + \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (2-105)$$

この式の左辺はちょうど $d(\zeta + f)/dt$ となる.

2-12-2 発散の方程式

3次元の発散は $\nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3$ である. しかしながら, 普段は水平面の発散, $D = \nabla \cdot \mathbf{V}$, に分けて用いることが多い. 理由は明らかであろう. ちなみに, 球面座標では $\nabla \cdot \mathbf{V} = (1/a \cos \varphi) \partial u / \partial \lambda + a^{-1} \partial v / \partial \varphi - v \tan \varphi / a$ である¹¹⁾.

D の時間の偏微分の式は水平面での運動方程式の2次元発散をとることで得ることができる. まずは,

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \cdot [(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}] + \nabla \cdot (f \mathbf{k} \times \mathbf{V}) + \nabla w \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + w \frac{\partial D}{\partial z} \\ = -\nabla \cdot (\alpha \nabla p) + \nabla \cdot \mathbf{F} \end{aligned} \quad (2-106)$$

となる.

⁹⁾ 渦度方程式の各項の意味については 2-12-B を参照.

¹⁰⁾ 上記の計算に用いた関係式を羅列する.

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \nabla \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \\ \mathbf{k} \cdot \nabla \times w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} &= \mathbf{k} \cdot \left[w \nabla \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + \nabla w \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right] \\ &= w \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \mathbf{k} \cdot \left[\nabla w \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right], \\ \mathbf{k} \cdot \nabla \times (\alpha \nabla p) &= \mathbf{k} \cdot [\alpha \nabla \times \nabla p + \nabla \alpha \times \nabla p] \\ &= -\mathbf{k} \cdot [\nabla p \times \nabla \alpha]. \end{aligned}$$

なお, 2, 3 式目は本論文の最後に掲載されている数学公式のような以下の関係式を利用している.

$$\nabla \times \nabla a = 0, \quad \nabla \times (a \mathbf{A}) = a \nabla \times \mathbf{A} + \nabla a \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}.$$

¹¹⁾ 2次元の発散の式は

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 A_2) \right]$$

である. 球面座標で考えると, $x_1 = \lambda$, $x_2 = \varphi$, $h_1 = a \cos \varphi$, $h_2 = a$, $A_1 = u$, $A_2 = v$ なので, 本文のような2次元の発散の式が求められる.

しかし、利用のためにはこの方程式をさらに展開し、最終的には重要度の低い項を除外して単純化する必要がある。特に水平面の移流項が含まれていることに注意する。(2-106)を変形すると、

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla D + w \frac{\partial D}{\partial z} + \nabla w \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + D^2 - 2J(u, v) + (\mathbf{k} \times \mathbf{V}) \cdot \nabla f - f\zeta = -\nabla \cdot (\alpha \nabla p) + \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (2-107)$$

となる¹²⁾。ここで $J(u, v) = (\partial u / \partial x)(\partial v / \partial y) - (\partial u / \partial y)(\partial v / \partial x)$ であり、ヤコビアン (Jacobian) と呼ばれる。なんらかの利点が無い限りは、2つのスカラーの水平面運動方程式をわざわざ更に高次の渦度と発散の偏微分方程式に置き換える理由はない。この公式化による利点としては、ある物理過程を保った状態での近似を簡単にすることが挙げられる。より具体的に言うと、近似は次に挙げる目的のために行われる。1つ目は、力学的解析を簡単にするため、2つ目は、ある特定の運動にフィルターをかけたたり、除外したりするため、3つ目は、数値予報モデルを簡単にするため、あるいはなんらかの他の目的のためである。

(2-107)の最初の5項は小さく、大抵は無視できる。また、最初の3項を落とすことで、ある種の擾乱を除去することができる。同様に、渦度方程式(2-105)では鉛直速度を含む項とメトリック項¹³⁾、そして $\zeta \nabla \cdot \mathbf{V}$ はよく無視される。これらのような様々な項の排除はスケーリングによって適当な仮定が与えられている時には行うことができる。このことは第4章で登場する。

ここで得られた渦度と発散の方程式は鉛直座標系として z を含んでいる。次では他の鉛直座標を考える。これによって方程式の形にも変化がでてくる。特に、よく使われる鉛直座標系 p ではいくつかの単純化が可能となる。例えば、水平面圧力は $-\nabla \phi$ という形になる¹⁴⁾。よって、 $\mathbf{k} \cdot \nabla \times \nabla \phi = 0$ となる¹⁵⁾。このようにして、発散の式(2-107)の右辺の最初の項は $-\nabla^2 \phi$ となり、式(2-104)での $\mathbf{k} \cdot \nabla p \times \nabla \alpha$ に対応するような項は無くてすむ。

2-12-A 発散の式の変形

式(2-106)から式(2-107)への式変形について解説する。

(2-106)と(2-107)を比べると式(2-106)の

$$\nabla \cdot [(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}] + \nabla \cdot (f \mathbf{k} \times \mathbf{V}) \quad (2-12-A-1)$$

と、(2-107)の

$$\mathbf{V} \cdot \nabla D + D^2 - 2J(u, v) + (\mathbf{k} \times \mathbf{V}) \cdot \nabla f - f\zeta \quad (2-12-A-2)$$

¹²⁾ この式変形に関しては 2-12-A 参照。
¹³⁾ (2-102)における $u \tan \varphi / a$ の項など。
¹⁴⁾ 1-9-1の式(2-58)参照。
¹⁵⁾ 発散の回転なのでゼロとなる。

とは等しいはずである。まず, (2-12-A-1) の第 1 項目から計算する。

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot [(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}] &= \nabla \cdot \left[\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) u \mathbf{i} + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) v \mathbf{j} \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) u + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) v \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
 &\quad + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \tag{2-12-A-3}
 \end{aligned}$$

次に, (2-12-A-2) の第 1 項目を計算する。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V} \cdot \nabla D &= \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
 &= u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\
 &= u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \tag{2-12-A-4}
 \end{aligned}$$

(2-12-A-2) の第 2 項目は,

$$\begin{aligned}
 D^2 &= (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 \\
 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \tag{2-12-A-5}
 \end{aligned}$$

となる。最後に, (2-12-A-2) の第 3 項目は,

$$-2J(u, v) = -2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2-12-A-6}$$

となる。(2-12-A-4), (2-12-A-5), (2-12-A-6) より, (2-12-A-3) は

$$\nabla \cdot [(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}] = \mathbf{V} \cdot \nabla D + D^2 - 2J(u, v) \tag{2-12-A-7}$$

となる。

次に, (2-12-A-1) の第 2 項目を計算する。付録の数学公式 (A-3) $\nabla \cdot (a\mathbf{A}) = a\nabla \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla a$ より,

$$\nabla \cdot (f\mathbf{k} \times \mathbf{V}) = f\nabla \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{V}) + (\mathbf{k} \times \mathbf{V}) \cdot \nabla f \tag{2-12-A-8}$$

となる。ここで, (2-12-A-8) の右辺第 2 項は (2-12-A-2) の第 4 項と一致するので, (2-12-A-8) の右辺第 1 項が (2-12-A-2) の第 5 項と一致することを確かめれば良い。(2-12-A-8) の右辺第 1 項を変形すると, 付録の数学公式 (A-6) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$ より,

$$\begin{aligned}
 f\nabla \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{V}) &= f\mathbf{V} \cdot (\nabla \times \mathbf{k}) - f\mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) \\
 &= -f\zeta \tag{2-12-A-9}
 \end{aligned}$$

となる。 \mathbf{k} は時間変化しないため, $\nabla \times \mathbf{k} = 0$ となった。

(2-12-A-7), (2-12-A-8), (2-12-A-9) より式 (2-106) を (2-107) に変形できた。

2-12-B 渦度方程式の各項の意味

以下の渦度方程式 (本文で言う所の (2-105) 式) の各項の意味について考える.

$$\frac{d(\zeta + f)}{dt} = -(\zeta + f)\nabla \cdot \mathbf{V} - \mathbf{k} \cdot \nabla w \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + \mathbf{k} \cdot \nabla p \times \nabla \alpha + \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{F}. \quad (2-12-B-1)$$

2-12-B-a 発散項 (*divergence term*)

(2-12-B-1) の右辺第 1 項 $-(\zeta + f)\nabla \cdot \mathbf{V}$ は発散項 (*divergence term*) と呼ばれる. これは回転している質点が角運動量を保存しながら, その回転半径を変化させると角速度が変化することに似ている. 発散が正であることは, 質点の回転半径が増大することに相当する. ふつう天気図で見られるような大規模な運動では絶対渦度 ($\zeta + f$) は正であるから, 発散は絶対渦度を減少させ, 収束は絶対渦度を増加させる (図 2-12-B-1 参照).

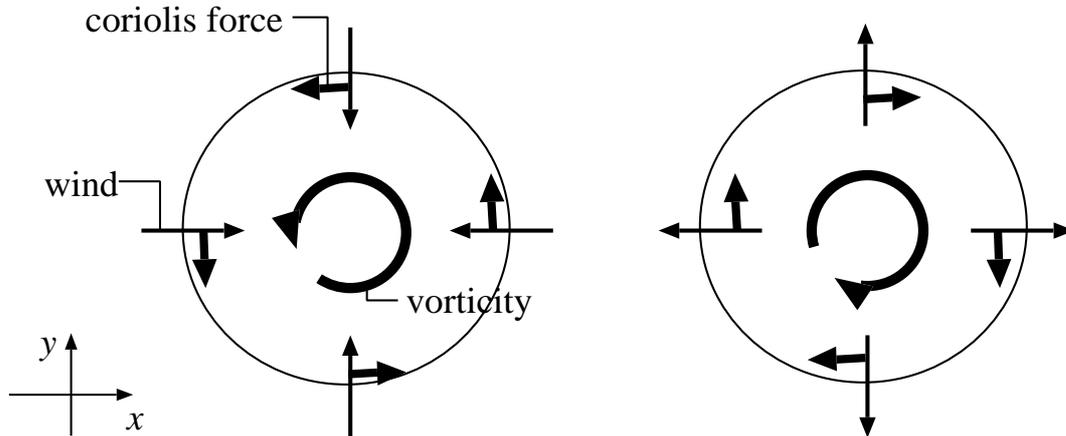


図 2-12-B-1: 発散と収束による渦度の発生 (絶対渦度を正と仮定)

2-12-B-b 立ち上り項 (*tilting term*)

(2-12-B-1) の右辺第 2 項 $-\mathbf{k} \cdot \nabla w \times \partial \mathbf{V} / \partial z$ は立ち上り項 (*tilting term* or *twisting term*) と呼ばれる¹⁶⁾. 鉛直速度が平面内で一様でないため, 始め水平方向に向いていた渦の軸が鉛直方向に立ち上がり, 渦度の鉛直成分が変化する効果を示す¹⁷⁾. $-\mathbf{k} \cdot \nabla w \times \partial \mathbf{V} / \partial z$ をスカラー表記すると $-\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z}$ となる. まず, $-\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z}$ の項を考える. ここでは v が上に行くにつれて減少し, w が x 方向に増加している場合を考える. この場合, $-\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z}$ は正となり, 絶対渦度 ($\zeta + f$) は増加

¹⁶⁾傾斜項とも呼ばれる.

¹⁷⁾式からも自明なことだが鉛直速度が一様な場合は渦が立ち上がることも無いため, この項は消滅する.

する。これを図 2-12-B-2 で考えてみる。 $\partial v/\partial z$ が負であることから図にあるような x 方向に伸びる渦の管ができる。さらに $\partial w/\partial x$ が正であることからこの渦管が図の太矢印の方向に回転し、立ち上がる。渦の回転方向から考えて、この結果渦度が増加することがわかるだろう。 $(\partial w/\partial y)(\partial u/\partial z)$ の項に関して同様に考えることができる。ちなみにこの項はメソ気象の竜巻の発生を議論する時に重要な役割を果たすと言われる。

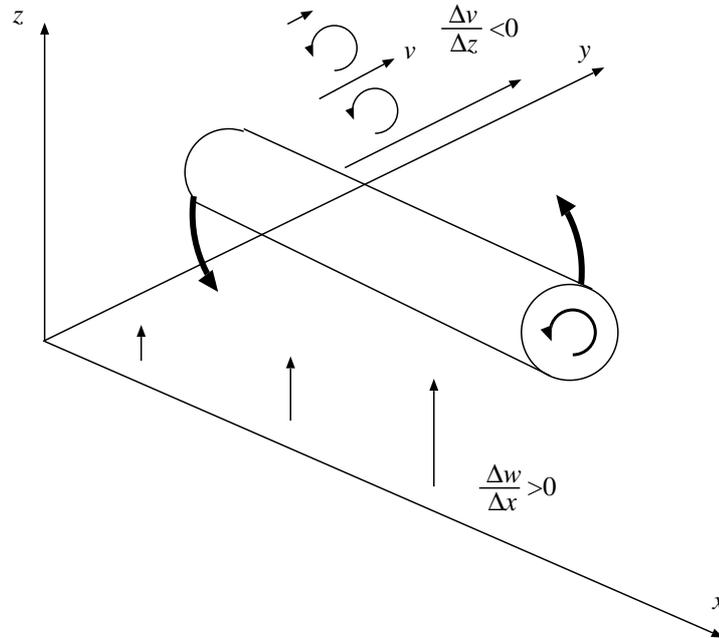


図 2-12-B-2: v の z 方向変化によって x 方向に平行な渦管が生じ、それがさらに w の x 方向の変化によって立ち上がって鉛直方向の渦度成分を作る。

2-12-B-c ソレノイド項 (solenoidal term)

(2-12-B-1) の右辺第 3 項 $\mathbf{k} \cdot \nabla p \times \nabla \alpha$ はソレノイド項 (solenoidal term) と呼ばれる。これは図 2-12-B-3 で考えると簡単である。(a) では等 p 面と等 α 面が交差している。圧力勾配によって流れが生じる訳だが、この際に (a) のような密度構造になっていると、密度の差によって流れに差ができ、その結果として渦が生じる。これがソレノイド項の効果である。これに対して (b) では等 p 面と等 α 面が平行になっている。この場合には流れに差はできず、渦は生じない。

ちなみに、鉛直座標に p をとった場合、当然のように $\nabla_p p = 0$ となり、ソレノイド項は消滅する。これは本節の最後でも述べられていることである。

これらの解説には小倉 (1978), 小倉 (2000), Peixoto(1992) を参照した。

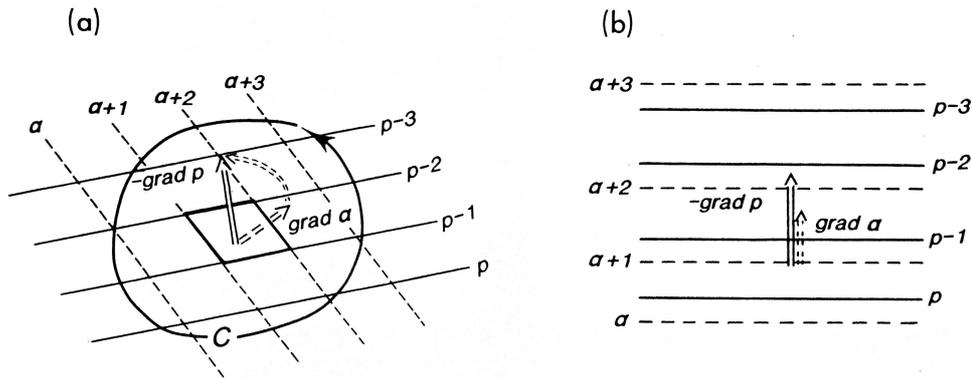


FIGURE 3.2 Schematic diagram showing isosteric-isobaric solenoids (a) enclosed by curve C in a baroclinic atmosphere. In (b) the atmosphere is barotropic and the isosteric and isobaric surfaces are parallel with no solenoids.

図 2-12-B-3: (a) では等 p 面と等 α 面が交差しているため、渦が生じる。これに対し、(b) では等 p 面と等 α 面が平行になっているため渦は生じない。(Peixoto, J. P. and A. H. Oort, 1992: Physics of Climate. Springer-Verlag, 520pp. より)

2-12-C 渦度と角速度の関係

本文の「渦度は角速度の 2 倍である」という表現について考察する。

2-12-C-a 速度ベクトルと角速度の関係

原点を通る固定軸の周りに剛体が回転運動しているとする。角速度ベクトルを Ω 、各位置 $r = (x, y, z)$ における速度を v とする時、 $v = \Omega \times r$ の関係式が成り立つことを示す。

簡単のため、回転軸を z 軸とすることで $\Omega = (0, 0, \Omega)$ と考える。この場合、

$$\Omega \times r = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y\Omega \\ x\Omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。一方、速度ベクトルは図 2-12-C-1 より分かるように $v = -y\Omega i + x\Omega j$ であるため、関係式 $v = \Omega \times r$ は成り立つ。

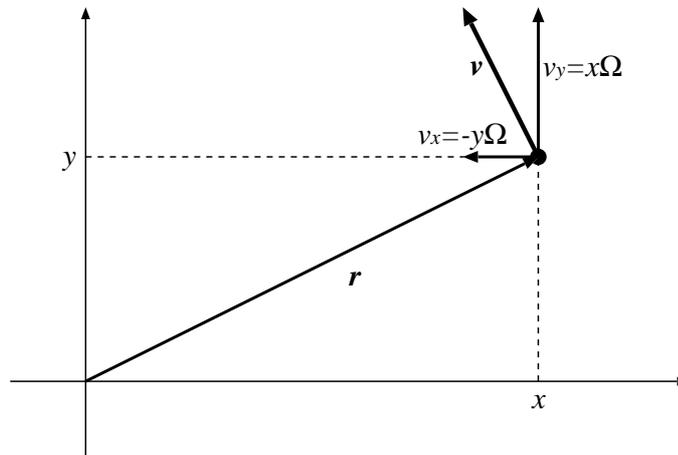


図 2-12-C-1: z 軸の周りを回転する物体の速度の x, y 成分

2-12-C-b 渦度と角速度との関係

上記で得た関係式 $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ を使って渦度と角速度の関係式を考える。この関係式の両辺に $\nabla \times$ をかける、つまりは回転をとる。なお、 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ としている。

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{v} &= \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \\
 &= \nabla \times \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ x & y & z \end{pmatrix} \\
 &= \nabla \times \begin{pmatrix} z\Omega_y - y\Omega_z \\ x\Omega_z - z\Omega_x \\ y\Omega_x - x\Omega_y \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z\Omega_y - y\Omega_z & x\Omega_z - z\Omega_x & y\Omega_x - x\Omega_y \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2\Omega_x \\ 2\Omega_y \\ 2\Omega_z \end{pmatrix} \\
 &= 2\boldsymbol{\Omega}
 \end{aligned}$$

この式から渦度 $\nabla \times \mathbf{v}$ が角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ の 2 倍であることがわかる。なお、この解説には倉本 (1999) を参照した。

第3章 大気の波動 第1部

3-1 さまざまな大気現象

概要

幅広い空間、時間スケールをもつ大気では様々な現象が起き、いろいろな種類の波動が発生する。この章では、線形化された方程式からこれらのいろいろな波動の解を導き、議論する。

図 3-1¹⁾ に見られるように、様々な空間、時間のスケールをもつ大気では実に様々な現象が起こる。この図にあるいくつかの用語について、以下で簡単に解説する。

スコールライン (*squall lines*) とは線状に長さ数十 km から数百 km に並んだ雷雨域のことである。線状のメソ対流系の一つであって、特に速く動くものをスコールラインと呼ぶ。熱帯の西大西洋では対流圏全層の風よりも速く動くスコールラインが見られる。このスコールラインの消滅する(つまりは降雨をもたらす)場所には集中豪雨をもたらされる。

多くの積乱雲が集合して雷雨やスコールラインなどのメソ対流系を組織している時、個々の積乱雲を対流セル (*convective cells*)、または降水セル (*precipitation cell*) と呼ぶ。

メソ対流系 (*mesoscale convective system*) とはメソスケールの雲の集団のことである。数個あるいは多くの積乱雲が集合して存在し、それに伴う層状の雲を含めてメソスケール (2~2,000km) の広がりを持つ。このメソ対流系の要素としては雷雨、集中豪雨、スコールラインなどが挙げられる。

個々の積乱雲は、時間・空間的にばらばらに分布していることもあるが、数個以上の積乱雲が群をなして組織化されていることが多い。このような時には気象衛星雲画像で見ると、隣接する積乱雲上部のかなとこ雲が連結するなどして、1つの大きな雲の塊として見える。これをクラウドクラスター (*cloud clusters*) と呼ぶ。大きさは普通、数十 km から数百 km 程度である。クラウドクラスターの内部を気象レーダーなどで見ると、いろいろな形態のメソ対流系から成り立っていることがわかる。また、クラウドクラスターが集まったものをスーパークラウドクラスター (*super cloud clusters*) と呼ぶ。これは熱帯収束帯 (*ITCZ*) 付近で発達し、東進して 30~60 日で地球を一周する。クラウドクラスターはこのスーパークラウドクラスター内の東方で生成し、西進して西方で消滅する。ちなみに中、高緯度ではこれ以外の構造が卓越するためクラウドクラスターのような現象は見られない。

¹⁾これと同様な図が気象科学事典や小倉 (1984) にも載っている。参照のこと。

偏東風波動 (easterly waves) とは熱帯域の対流圏で、偏東風中を西進する波状の擾乱のことである。台風の種となるとの見方もある。

ITCZ とは Intertropical Convergence Zone(熱帯収束帯) の略である。中部太平洋から東太平洋にかけて、北緯 5~10 度付近に 1 年中存在する東西に長く延びる対流圏下層の収束域で、雲量及び雨量が多い。北半球亜熱帯高圧帯から吹き出す北東貿易風と南半球亜熱帯高圧帯から吹き出す南東貿易風が収束してできる。熱帯では水蒸気量が豊富なため、下層収束に伴い降水活動が活発である。

この図では熱帯と中緯度帯の現象について別々に表示されている。水平面のスケールは規模の大きい方から、惑星規模 (planetary scale), 総観規模 (synoptic scale), メソスケール (mesoscale)²⁾, 対流規模 (convective scale), ミクروسケール (microscale) といった 5 つのスケールに分けられている。この章では、大気の運動を予測するための線形方程式から得られる波動解の種類について議論する。図 3-1 のどの現象とも合わない波動解もある。この情報は数値予報モデルを作る際に必要となる。

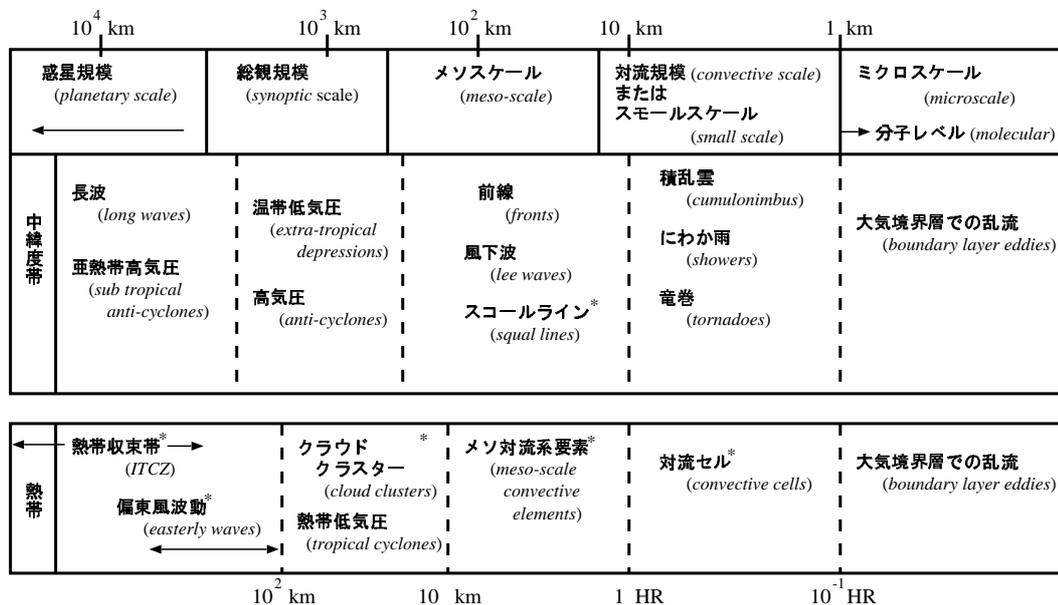


図 3-1: スケールの違いでみた大気諸現象 (Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1979: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology. John Wiley & Sons, 477pp)

最後に、各節で取り扱う内容を簡単に紹介する。2 節では支配方程式系の線形化をおこなう。この線形化された式は、大気の波動の位相速度を知るのに必要となる。3 節では音波について取り扱い、4 節ではこれに加えて内部重力波についても扱う。5 節では流体層表面で起こる重力波である浅水波と深水波を紹介する。6 節ではコリオリ力から生じる慣性重力波とロスビー波を取り扱う。具体的には各節において、それぞれの波の位相速度を調べ、位相速度がどのような物理量と関係するのかを知る。これらを知るにより、実際の気象現象がどのように駆動するのかを理解することが

²⁾最近ではメソスケールを更に細かく、メソ α , メソ β , メソ γ と区別している。メソ α の方がメソ γ よりもスケールは大きく、 α は前線や台風のスケールを指す。 β は集中豪雨やスコールライン、 γ は積乱雲やダウンバーストのスケールである。

出来る。この理解は数値モデル作成には不可欠である。また、安定した数値モデルを作成するには CFL 条件—2-4 節の (3-4-D-1) 参照—を満たしていなければならないが、それには大気の波動の位相速度を知っている必要がある。なお、7, 8 節では初期値の取り扱いのための基礎を学ぶ。

3-2 線形方程式

概要

この節では、支配方程式系（運動方程式、熱力学の式、連続の式）の線形化をおこなう。非常に簡単な条件を与えることで支配方程式系を簡略化し、その上で摂動法を用いることで方程式系を線形化する。

非常に複雑な大気の運動を理解するには、まず、その複雑な運動を構成する単純な運動の一つ一つを別々に分け、そしてその一つ一つの運動について解析するのが望ましい。この章ではこのようにして解析をおこなっていく。この目的のため、まずは x - z 平面の運動のみを考える。側面方向 (y 方向) は一様だと仮定し、地球の回転、摩擦は無視し、断熱系であると仮定する。以上の仮定によって、ニュートンの運動方程式、熱力学の式、連続の式は以下のように書き表すことができる¹⁾。

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{dw}{dt} + \alpha \frac{\partial p}{\partial z} + g &= 0, \\ \alpha \frac{dp}{dt} + p\gamma \frac{d\alpha}{dt} &= 0, \\ \alpha \nabla \cdot \mathbf{V} - \frac{d\alpha}{dt} &= 0.\end{aligned}\tag{3-1}$$

ここで $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, $\alpha = \frac{1}{\rho}$ である (γ は比熱比と呼ばれる)。

これらの方程式をいわゆる摂動法 (*perturbation method*) で線形化する。単純化のために、流れの基本場を U (一定)²⁾ とする。また、基本状態の熱力学変数を \bar{p} と $\bar{\alpha}$ とする。次に、従属変数を基本または非擾乱の値に擾乱を加えたもので表す。(例えば, $u = U + u'$)。そしてこれらを系 (3-1) に代入する。方程式から基本の流れだけを引き、擾乱の積を無視すると、以下のような擾乱の項に関する線形方程式が得られる³⁾。

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial x} &= 0, \\ \delta_1 \left(\frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{g\alpha'}{\bar{\alpha}} &= 0, \\ \bar{\alpha} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + U \frac{\partial p'}{\partial x} \right) - gw' + \bar{p}\gamma \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \bar{\alpha} - \delta_2 \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha'}{\partial x} \right) - w' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{3-2}$$

δ_1 と δ_2 の項は、この後におこなう解析でそれぞれ鉛直方向の加速度の項と圧縮率の項として扱われる。そしてこれらの項は除外されるか他の項に含まれるかすることによって 1 か 0 の値をとる。

¹⁾ これらの方程式の簡略化に関しては 3-2-A を参照のこと

²⁾ 本文中では明記していないが、 U は x 方向の流れであり、 z 方向には流れの基本場は無い。

³⁾ これらの式の導出に関しては 3-2-B 参照。

3-2-A 方程式の簡略化

3-2-A-a ニュートンの運動方程式の簡略化

ニュートンの運動方程式 (2-5)⁴⁾ を本文の仮定によって簡略化する。地球の回転を無視するので $\Omega = 0$ となる。つまり、このことによってコリオリ力を無視できる。摩擦力も無視できるので $F = 0$ である。また、 y 方向は一様であるため $dv/dt = 0$, $\partial p/\partial y = 0$ となり、 y 方向の運動方程式は事実上無くなる。よって (2-5) は

$$\frac{du}{dt} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{3-2-A-1}$$

$$\frac{dw}{dt} + \alpha \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \tag{3-2-A-2}$$

となる。

3-2-A-b 熱力学の式の簡略化

熱力学の式 (2-9) を簡略化する。(2-9a)⁵⁾, (2-9b)⁶⁾ のどちらからおこなっても同じ結果になるが、ここでは (2-9b) から簡略化する。

まず、断熱系であることから $Q = 0$ である。そして、状態方程式 (2-8) から $T = p\alpha/R$ が成り立つので、これを代入すると、

$$\begin{aligned} c_p \frac{d}{dt} \left(\frac{p\alpha}{R} \right) - \alpha \frac{dp}{dt} &= 0, \\ \frac{c_p}{R} p \frac{d\alpha}{dt} + \frac{c_p}{R} \alpha \frac{dp}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} &= 0, \\ \frac{c_p}{R} p \frac{d\alpha}{dt} + \frac{c_p - R}{R} \alpha \frac{dp}{dt} &= 0, \\ \frac{c_p}{R} p \frac{d\alpha}{dt} + \frac{c_v}{R} \alpha \frac{dp}{dt} &= 0, \quad (c_p - c_v = R), \\ \frac{c_p}{c_v} p \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \frac{dp}{dt} &= 0, \\ p\gamma \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \frac{dp}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{3-2-A-3}$$

となる。

4)

$$\frac{dV}{dt} = -\alpha \nabla p - 2\Omega \times V + g + F.$$

5)

$$Q = c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt}.$$

6)

$$Q = c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt}.$$

3-2-A-c 連続の式の簡略化

連続の式は (2-7) ⁷⁾ のままである.

3-2-B 方程式の線形化

以下では簡略化された方程式系 (3-1) を摂動法にて線形化する. ここでは以下の手順で線形化をおこなう.

- a. 基本場 (擾乱を含まない) の方程式系を導出
- b. 擾乱を含む方程式系を導出した後, 基本場の方程式系を引き, 擾乱の積を除外
- c. 与えられた仮定 (静水圧平衡など) を用いて線形化

3-2-B-a 基本場の方程式系の導出

擾乱を含んだ方程式系を導く前に, 基本場のみで考えた方程式系を導く. この場合には各従属変数は以下ようになる. (本文で挙げられていた仮定は最後に用いる).

$$\begin{aligned}
 u(x, z, t) &= U(x, z, t), \\
 w(x, z, t) &= W(x, z, t), \\
 p(x, z, t) &= \bar{p}(x, z, t), \\
 \alpha(x, z, t) &= \bar{\alpha}(x, z, t).
 \end{aligned}
 \tag{3-2-B-1}$$

この (3-2-B-1) を簡略化した方程式系 (3-1) に代入すると以下のような方程式系が得られる.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \bar{\alpha} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0, \tag{3-2-B-2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} + \bar{\alpha} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g = 0, \tag{3-2-B-3}$$

$$\bar{\alpha} \left\{ \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + W \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right\} + \bar{p} \gamma \left\{ \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} + W \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right\} = 0, \tag{3-2-B-4}$$

$$\bar{\alpha} \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right\} - \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t} - U \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} - W \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} = 0. \tag{3-2-B-5}$$

⁷⁾

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{V}.$$

3-2-B-b 擾乱を含んだ方程式系の導出

b-1 擾乱を含む各従属変数

各従属変数を時間変化しない(ものによっては空間変化もしない)基本場と擾乱に分ける。具体的には以下ようになる

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= U(x, z, t) + u'(x, z, t), \\ w(x, z, t) &= W(x, z, t) + w'(x, z, t), \\ p(x, z, t) &= \bar{p}(x, z, t) + p'(x, z, t), \\ \alpha(x, z, t) &= \bar{\alpha}(x, z, t) + \alpha'(x, z, t). \end{aligned} \tag{3-2-B-6}$$

b-2 運動方程式 (x 方向)

(3-2-B-6) を (3-1) の最初の式に代入し、計算をおこなうと、

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial(U + u')}{\partial t} + (U + u') \frac{\partial(U + u')}{\partial x} + (W + w') \frac{\partial(U + u')}{\partial z} + (\bar{\alpha} + \alpha') \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

となる。この式から基本場の x 方向の運動方程式 (3-2-B-2) を引くと、(3-2-B-7) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial U}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + W \frac{\partial u'}{\partial z} + w' \frac{\partial U}{\partial z} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} \\ + \bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial x} + \alpha' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \alpha' \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

となる。さらに、本文にもあるように擾乱の積を無視すると、

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial u'}{\partial z} + w' \frac{\partial U}{\partial z} + \bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial x} + \alpha' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0 \tag{3-2-B-7}$$

となる。

b-3 運動方程式 (z 方向)

(3-1) の z 方向の運動方程式に (3-2-B-6) を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} + \alpha \frac{\partial p}{\partial z} + g &= 0 \\ \frac{\partial(W + w')}{\partial t} + (U + u') \frac{\partial(W + w')}{\partial x} + (W + w') \frac{\partial(W + w')}{\partial z} \\ + (\bar{\alpha} + \alpha') \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial z} + g &= 0 \end{aligned}$$

となる. この式から基本場の z 方向運動方程式 (3-2-B-3) を引き, 擾乱の積を無視すると,

$$\alpha \frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} + u' \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial w'}{\partial z} + w' \frac{\partial W}{\partial z} + \bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial z} + \alpha' \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0 \quad (3-2-B-8)$$

となる.

b-4 熱力学の式

(3-1) の熱力学の式に (3-2-B-6) を代入すると,

$$\begin{aligned} \alpha \frac{dp}{dt} + p\gamma \frac{d\alpha}{dt} = 0 \\ (\bar{\alpha} + \alpha') \left\{ \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial t} + (U + u') \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x} + (W + w') \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial z} \right\} \\ + (\bar{p} + p')\gamma \left\{ \frac{\partial(\bar{\alpha} + \alpha')}{\partial t} + (U + u') \frac{\partial(\bar{\alpha} + \alpha')}{\partial x} + (W + w') \frac{\partial(\bar{\alpha} + \alpha')}{\partial z} \right\} = 0 \end{aligned}$$

となる. 基本場の熱力学の式 (3-2-B-4) を引き, 擾乱の積を無視すると,

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} \left\{ \frac{\partial p'}{\partial t} + U \frac{\partial p'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + W \frac{\partial p'}{\partial z} + w' \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right\} + \alpha' \left\{ \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + W \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right\} \\ \bar{p}\gamma \left\{ \frac{\partial \alpha'}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} + W \frac{\partial \alpha'}{\partial z} + w' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right\} + p'\gamma \left\{ \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} + W \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3-2-B-9)$$

となる.

b-5 連続の式の線形化

(3-1) の熱力学の式に (3-2-B-6) を代入すると,

$$\begin{aligned} \alpha \nabla \cdot \mathbf{V} - \frac{d\alpha}{dt} = 0 \\ (\bar{\alpha} + \alpha') \left\{ \frac{\partial(U + u')}{\partial x} + \frac{\partial(W + w')}{\partial z} \right\} \\ - \frac{\partial(\bar{\alpha} + \alpha')}{\partial t} - (U + u') \frac{\partial(\bar{\alpha} + \alpha')}{\partial x} - (W + w') \frac{\partial(\bar{\alpha} + \alpha')}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

となる. 基本場の連続の式 (3-2-B-5) を引き, 擾乱の積を無視すると,

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} \left\{ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right\} + \alpha' \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right\} \\ - \frac{\partial \alpha'}{\partial t} - U \frac{\partial \alpha'}{\partial x} - u' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} - W \frac{\partial \alpha'}{\partial z} - w' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (3-2-B-10)$$

となる.

3-2-B-c 仮定を用いて線形化

c-1 与えられた仮定から使用する関係式を得る

本文から以下が仮定されている.

$$U \text{ は一定, } W = 0. \quad (3-2-B-11)$$

以上の仮定と (3-2-B-2) ~ (3-2-B-5) を用いて線形化に必要な関係式を得る. (3-2-B-2) ~ (3-2-B-5) に仮定を用いると,

$$\bar{\alpha} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0, \quad (3-2-B-12)$$

$$\bar{\alpha} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g = 0, \quad (3-2-B-13)$$

$$\bar{\alpha} \left\{ \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right\} + \bar{p} \gamma \left\{ \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} \right\} = 0, \quad (3-2-B-14)$$

$$-\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t} - U \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial x} = 0. \quad (3-2-B-15)$$

となる. (3-2-B-12) より \bar{p} は x には依存しないことがわかる. (3-2-B-13) より静水圧の式が成り立つ. (3-2-B-12) と (3-2-B-15) を (3-2-B-14) に代入すると $\partial \bar{p} / \partial t = 0$ となり \bar{p} は t にも依存せず, 結果として \bar{p} は z にのみ依存することがわかった. このことと (3-2-B-13) より $\bar{\alpha}$ も z にのみ依存することがわかる. 結果として以下の関係式が成り立つ.

$$\bar{p}, \bar{\alpha} \text{ は } z \text{ にのみ依存, } \bar{\alpha} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -g. \quad (3-2-B-16)$$

c-2 方程式系を線形化

擾乱を含んだ方程式系 (3-2-B-7) ~ (3-2-B-10) に (3-2-B-11), (3-2-B-16) を用いることで以下の線形方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} + \bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{g \alpha'}{\bar{\alpha}} &= 0, \\ \bar{\alpha} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + U \frac{\partial p'}{\partial x} \right) - g w' + \bar{p} \gamma \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right) &= 0, \\ \bar{\alpha} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) - \frac{\partial \alpha'}{\partial t} - U \frac{\partial \alpha'}{\partial x} - w' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

3-3 (純粋な) 音波

概要

この節では音波について考える。無重力などの条件を与え、擾乱は波動解であると仮定し、前節で得た方程式系を解くことで音波の関係式を導く。

音波は $g = 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 1$ および \bar{p} と $\bar{\alpha}$ を定数とすることで取り出すことができる疎密波である。今、擾乱¹⁾ を係数がついた x, z, t の調和関数²⁾ だと仮定すると、

$$\begin{aligned} u' &= S e^{i(\mu x + k z + \nu t)} & w' &= W e^{i(\mu x + k z + \nu t)} \\ p' &= P e^{i(\mu x + k z + \nu t)} & \alpha' &= A e^{i(\mu x + k z + \nu t)} \end{aligned} \quad (3-3)$$

である。これらは x および z 方向に波数 (wave number) μ, k をとり、振動数 (frequency) に ν をとった平面波である。実際の物理量は解の虚部を無視し、実部を取り出すことで得られる³⁾。式 (3-2) は線形なので、どんな線形の解の組合せでも解くことができる。そのため一つの調和関数さえ考えれば良い⁴⁾。関数 (3-3) を (3-2) に代入すると、以下のような、振幅 S, W, P, A に関する同次代数方程式系が得られる。

$$\begin{aligned} (\mu U - \nu)S + \bar{\alpha}\mu P &= 0, \\ (\mu U - \nu)W + \bar{\alpha}k P &= 0, \\ \bar{\alpha}(\mu U - \nu)P + \bar{p}\gamma(\mu U - \nu)A &= 0, \\ \mu\bar{\alpha}S + \bar{\alpha}k W - (\mu U - \nu)A &= 0. \end{aligned} \quad (3-4)$$

この方程式系は以下のように行列形式で書き表すこともできる。

$$\begin{bmatrix} (\mu U - \nu) & 0 & \bar{\alpha}\mu & 0 \\ 0 & (\mu U - \nu) & \bar{\alpha}k & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\alpha}(\mu U - \nu) & \bar{p}\gamma(\mu U - \nu) \\ \bar{\alpha}\mu & \bar{\alpha}k & 0 & -(\mu U - \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ W \\ P \\ A \end{bmatrix} = 0. \quad (3-5)$$

振幅 S, W, P, A はゼロにはならないので、この式が満たされるのは同次方程式系の行列式が打ち消しあって消える時のみである。行列式を展開すると以下のような振動数に関する式が得られる⁵⁾。

$$\bar{\alpha}(\mu U - \nu)^2 [-(\mu U + \nu)^2 + \gamma\bar{p}\bar{\alpha}(k^2 + \mu^2)] = 0. \quad (3-6)$$

次数が 4 なので以下の 4 つの解を持つ。

$$\begin{aligned} \nu &= \mu U \quad (\text{重解}), \\ \nu &= \mu U \pm (k^2 + \mu^2)^{1/2} \sqrt{\gamma R \bar{T}}. \end{aligned} \quad (3-7)$$

¹⁾ u' や w' など。

²⁾ 調和関数 (harmonic function) とは以下のようなラプラス演算子に関する固有関数のことである。

$$\nabla^2 \phi = A \phi$$

³⁾ ちなみに S や W など実数ではなく複素数であることに注意。

⁴⁾ 本来は様々な波長、振動数の波があるので $u' = \sum_{\mu, k, \nu} S e^{i(\mu x + k z + \nu t)}$ などとするべきだが、方程式系が線形であるため、ある一つの波に関して解いた後に足し合わせをおこなって解くことができる。

⁵⁾ この式の導出に関しては 3-3-A を参照。

(3-7) は単なる移流⁶⁾ である。また、下の解には基本状態の状態方程式⁷⁾ を利用した。なお、平均風速の存在は x 方向への伝搬に U が加えられるだけの影響しか及ぼさないことに注意してほしい。

位相速度⁸⁾ は位相線 ($\mu x + kz = \text{一定}$) がその線の法線方向に動く速度である⁹⁾。位相速度 c は振動数 ν と以下のような関係にある。

$$c = \nu \mathcal{L} / 2\pi \quad (3-8)$$

\mathcal{L} は位相線の法線方向への波長である。波長は $\mathcal{L} = 2\pi(k^2 + \mu^2)^{-1/2}$ と表せる。これは $\mathcal{L}_x = 2\pi\mu^{-1}$, $\mathcal{L}_z = 2\pi k^{-1}$ を使い、三角法を用いることで得られる¹⁰⁾。 \mathcal{L} に関するこの関係を用いると (3-8) は以下のように書くことができる。

$$c = \nu(k^2 + \mu^2)^{-1/2}. \quad (3-9)$$

ここで $U = 0$ として (3-9) に (3-7) を代入すると、

$$c = \pm \sqrt{\gamma R \bar{T}} \quad (3-10)$$

という良く知られた音速の式が得られる¹¹⁾。音速というものは伝播の方向には依存しないことがわかるだろう。

⁶⁾ 位相速度が $c_x = (\nu/\mu) = U$ であることから、位相は基本場の流れのみによって流されている。これが「移流」である。

⁷⁾ $\bar{p}\bar{\alpha} = R\bar{T}$.

⁸⁾ 位相速度に関しては 3-3-B 参照。

⁹⁾ 「位相線」に関しては 3-3-C 参照。

¹⁰⁾ 波長 \mathcal{L} の導出に関しては 3-3-D 参照。

¹¹⁾ この式に実際に数値を代入して音波の速度を求めてみると、乾燥大気では $c = \pm(331.1 + 0.606t)$ [m/s] となった。この導出に関しては 3-3-E を参照。

3-3-A (3-6) の導出

(3-5) の同次方程式系の行列式がゼロになるための関係式を求める.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} (\mu U - \nu) & 0 & \bar{\alpha}\mu & 0 \\ 0 & (\mu U - \nu) & \bar{\alpha}k & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\alpha}(\mu U - \nu) & \bar{p}\gamma(\mu U - \nu) \\ \bar{\alpha}\mu & \bar{\alpha}k & 0 & -(\mu U - \nu) \end{bmatrix} = 0 \\
 & \begin{bmatrix} (\mu U - \nu) & 0 & \bar{\alpha}\mu & 0 \\ 0 & (\mu U - \nu) & \bar{\alpha}k & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\alpha}(\mu U - \nu) & \bar{p}\gamma(\mu U - \nu) \\ 0 & \bar{\alpha}k & \frac{-(\bar{\alpha}\mu)^2}{\mu U - \nu} & -(\mu U - \nu) \end{bmatrix} = 0 \\
 & (\mu U - \nu) \begin{bmatrix} (\mu U - \nu) & \bar{\alpha}k & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}(\mu U - \nu) & \bar{p}\gamma(\mu U - \nu) \\ \bar{\alpha}k & \frac{-(\bar{\alpha}\mu)^2}{\mu U - \nu} & -(\mu U - \nu) \end{bmatrix} = 0 \\
 & (\mu U - \nu) \begin{bmatrix} (\mu U - \nu) & \bar{\alpha}k & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}(\mu U - \nu) & \bar{p}\gamma(\mu U - \nu) \\ 0 & \frac{-\bar{\alpha}^2(k^2 + \mu^2)}{\mu U - \nu} & -(\mu U - \nu) \end{bmatrix} = 0 \\
 & (\mu U - \nu)^2 \begin{bmatrix} \bar{\alpha}(\mu U - \nu) & \bar{p}\gamma(\mu U - \nu) \\ \frac{-\bar{\alpha}^2(k^2 + \mu^2)}{\mu U - \nu} & -(\mu U - \nu) \end{bmatrix} = 0 \\
 & (\mu U - \nu)^2 [-\bar{\alpha}(\mu U + \nu)^2 + \gamma\bar{p}\bar{\alpha}^2(k^2 + \mu^2)] = 0 \\
 & \bar{\alpha}(\mu U - \nu)^2 [-(\mu U + \nu)^2 + \gamma\bar{p}\bar{\alpha}(k^2 + \mu^2)] = 0.
 \end{aligned}$$

3-3-B 位相速度

位相速度 (*phase velocity*) とは等位相面 ($\theta = \text{const}$) が空間上を移動する速度である. 今回のように x - z 平面で考えると位相は

$$\theta = \mu x + kz - \nu t$$

である. ここで x 方向への位相速度を考える ($z = \text{const}$). 微小時間 δt が経過した時, x も δx 変化する. その際に $\theta = \text{const}$ なので,

$$\mu x + kz - \nu t = \mu(x + \delta x) + kz - \nu(t + \delta t)$$

である. この式を変形すると,

$$\frac{\delta x}{\delta t} = \frac{\nu}{\mu}$$

となる. つまり, x 方向への位相速度 c_x は

$$c_x \equiv \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{\nu}{\mu}$$

となる. 同様にして, z 方向への位相速度は $c_z = (\delta z / \delta t) = \nu / k$ となる.

3-3-C 位相線

本文の「位相線」とはどのようなものか考える. まず, x 方向に動く波上のある点を考え, その波を横から見ると, 図 3-3-C-1 のように見えるだろう. 次に, 図 3-3-C-1 を上から見てみると図 3-3-C-2 のようになり, 先ほどの点が線で表示される. この線が本文で言われるところの『位相線』である. 図 3-3-C-2 の波は x 方向へのみ伝播する波だが, $x-z$ 平面上を伝播する波を考えると, 図 3-3-C-3 のようになる. この波は図の太矢印の方向に伝播する. 位相速度はこの太矢印方向への速度であり, この方向が本文で言う『位相線の法線方向』であることは図からわかるだろう. なお, この解説には木村 (1983) を参照した.

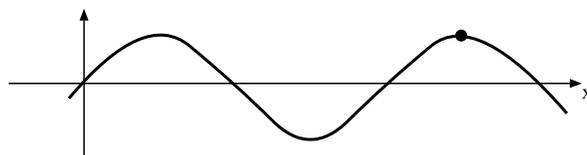


図 3-3-C-1: 横から見た波

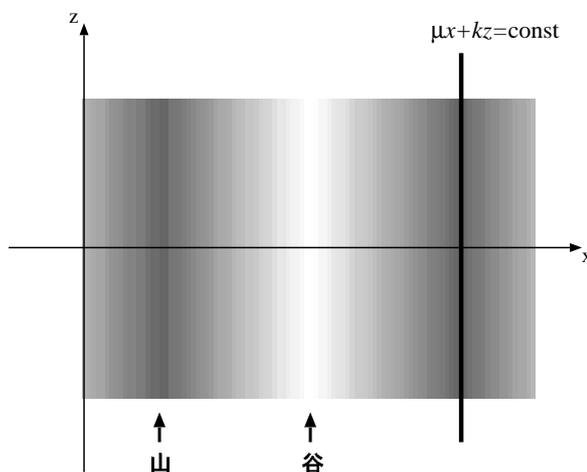
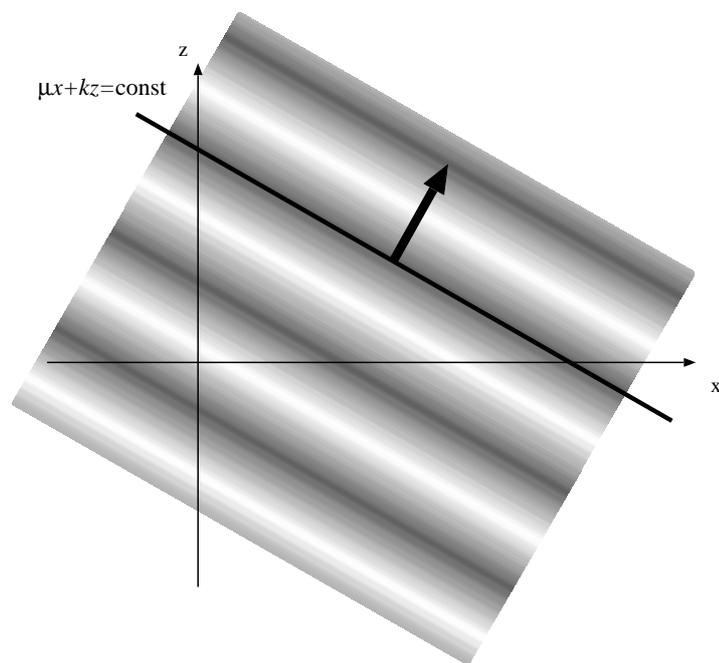


図 3-3-C-2: 上から見た波

図 3-3-C-3: x - z 平面上を伝播する波

3-3-D 位相線の法線方向への波長の導出

位相線の法線方向 (つまり位相の進行方向) への波長は, x, z 方向のそれぞれの波長から簡単に求めることができる. 図 3-3-D-1 では, x, z 方向への矢印がそれぞれの方向への波長, L と書いてある太矢印が位相の進行方向への波長である. あとは簡単な幾何学である. 図 3-3-D-2 では三角形の面積から $(1/2)ab = (1/2)cd$ の関係式が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned} L_x L_z &= L \sqrt{L_x^2 + L_z^2} \\ L &= \frac{L_x L_z}{\sqrt{L_x^2 + L_z^2}} \\ &= \frac{4\pi^2(\mu k)^{-1}}{\sqrt{4\pi^2\mu^{-2} + 4\pi^2k^{-2}}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu^2 + k^2}} \end{aligned}$$

となる.

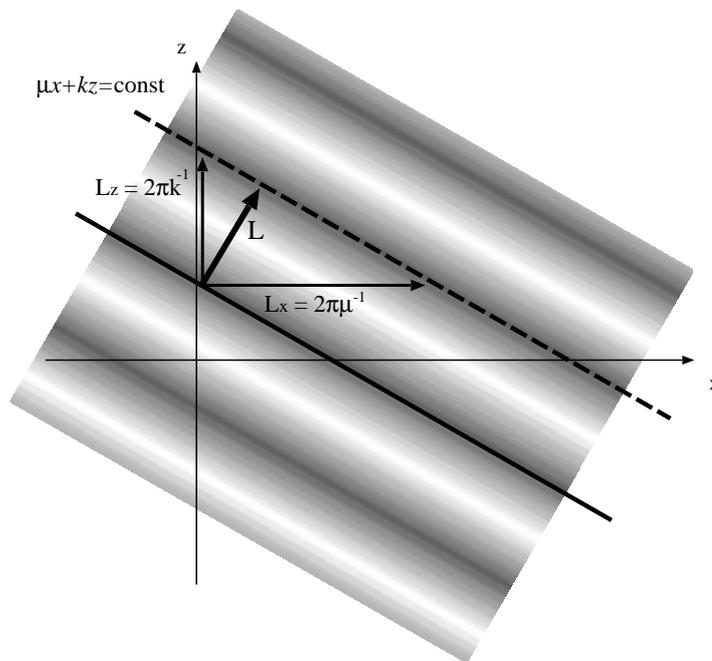


図 3-3-D-1: 位相線の法線方向への波長と各成分の波長との関係

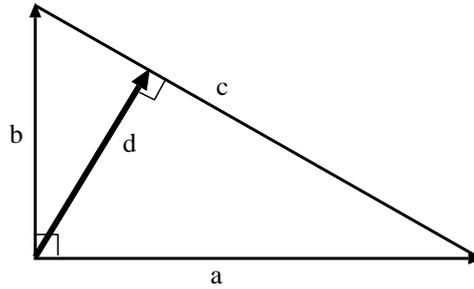


図 3-3-D-2: 三角形

3-3-E 乾燥大気での音速

式 (3-10)¹²⁾ を用い, 乾燥大気での実際の音速を求めてみる. 空気の定圧比熱, 定積比熱がそれぞれ $c_p = 1004 \text{ [J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}]$, $c_v = 717 \text{ [J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}]$ なので, $\gamma = c_p/c_v = 1.4$ となる. 乾燥気体の分子量は $W_d = 28.97 \times 10^{-3} \text{ [kg mol}^{-1}]$ なので, 乾燥大気の気体定数 R_d は $R_d = R^*/W_d = 287 \text{ [J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}]$ となる. ちなみに $R^* = 8.3143 \text{ [J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}]$ は一般気体定数である. よって音速は,

$$\begin{aligned} c &= \pm\sqrt{1.4 \times 287T} \\ &= \pm 20.04\sqrt{T} \end{aligned}$$

となる. ここで摂氏 $t = T - 273 \text{ []}$ を代入すると,

$$c = \pm 20.04\sqrt{273 + t} \quad (3-3-E-1)$$

となる. ここで, $f(t) = \sqrt{273 + t}$ とおいて $f(t)$ を $t = 0$ のまわりでテイラー展開してみると,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \sqrt{273} + \frac{t}{2\sqrt{273}} - \dots \\ &\simeq \sqrt{273} + \frac{t}{2\sqrt{273}} \end{aligned}$$

となる. これを (3-3-E-1) に代入すると,

$$c = \pm(331.1 + 0.606t)$$

となった.

¹²⁾

$$c = \pm\sqrt{\gamma RT}.$$

3-4 音波と内部重力波

概要

重力波について考える。今回は前節の音波の話では扱わなかった重力を考慮する。重力を考慮した波動解と 2-2 節で得られた方程式系を使用して重力波に関する関係式を導き、重力波について考察する。また、大気大循環モデルにおける音波の取り扱いについても考察する。

重力波 (*gravity wave*) は同じ高度にある空気塊の密度の差から生じる重力の差によって発生する。重力の効果を考える場合、高さ z にのみ依存する \bar{p} と $\bar{\alpha}^1$ の静水圧平衡の式、状態方程式を考える必要がある:

$$\begin{aligned} 0 &= -\bar{\alpha} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g, \\ \bar{p} \bar{\alpha} &= R\bar{T}. \end{aligned}$$

等温大気を考える場合、これらの式の解は

$$\bar{p} = \bar{p}(0) e^{-z/H}, \quad \bar{\alpha} = \bar{\alpha}(0) e^{z/H} \tag{3-11}$$

となる。 $H = R\bar{T}/g$ はスケールハイト²⁾ と呼ばれる量である。これらの条件下でのある一つの波の波動解は以下のような形になる³⁾:

$$\begin{aligned} u' &= S\bar{\alpha}^{1/2} e^{i(\mu x + kz + \nu t)}, & w' &= W\bar{\alpha}^{-1/2} e^{i(\mu x + kz + \nu t)}, \\ p' &= P\bar{\alpha}^{1/2} e^{i(\mu x + kz + \nu t)}, & \alpha' &= A\bar{\alpha}^{3/2} e^{i(\mu x + kz + \nu t)}. \end{aligned} \tag{3-12}$$

これらを (3-2) に代入すると、位置や時間の関数ではない要素から成り立つ行列式が得られる。

$$\begin{bmatrix} -\nu & 0 & \mu & 0 \\ 0 & -\delta_1 \nu & k + \frac{i}{2\bar{\alpha}} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} & ig \\ 0 & \left(-g + \frac{\gamma R\bar{T}}{\bar{\alpha}} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z}\right) i & \nu & \gamma R\bar{T} \nu \\ \mu & k + \frac{i}{2\bar{\alpha}} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} & 0 & \delta_2 \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ W \\ P \\ A \end{bmatrix} = 0. \tag{3-13}$$

ここでは U は単に x 方向への伝播を加えるだけなので除外してある。次に (3-11) を (3-13) に代入し、行列式はゼロと等しいとすると、次のような振動数の方程式が得られる:

$$\begin{aligned} \delta_1 \delta_2 \nu^4 - \left\{ \gamma R\bar{T} (k^2 + \mu^2 \delta_1) + \frac{g}{4H} [(2\delta_2 - 1)\gamma + 2(1 - \delta_2)] \right. \\ \left. + g(\gamma - 1)(\delta_2 - 1)ik \right\} \nu^2 + \mu^2 g^2 (\gamma - 1) = 0. \end{aligned}$$

大抵の場合、鉛直方向の波長 $2\pi/k$ は $4\pi H$ に比べ小さいので、 ν^2 の係数項のうち g の項は $\gamma R\bar{T} k^2$ との比較から落とすことができる⁴⁾。また、最後の項は温位で書き直すことができる⁵⁾。書き直すと

¹⁾ 上線は大気が安定成層状態である場合の値を意味する。

²⁾ スケールハイト (*scale height*) とは (3-11) でも意味しているように、大気の大気圧及び密度が e^{-1} 倍となる高度である。

³⁾ この $\bar{\alpha}^{1/2}$ は上空ほど密度が小さく、振幅が大きくなることを考慮にいれてつけられたものである。例えば u' によるエネルギーを例にとって考えると、 $\bar{p} = \bar{p}_0 e^{-z/H}$ なので $\bar{p} u'^2 = \bar{p}_0 e^{-z/H} S^2 \bar{\rho}_0^{-1} e^{z/H} e^{2i\theta} = S^2 e^{2i\theta}$ となり、高度に依存する変数が無くなる。この $\bar{\alpha}^{1/2}$ が高度による振幅の変化を吸収するため以降は高度による振幅の変化を考えずに済み、計算も簡単になる。

⁴⁾ $2\pi/k \ll 4\pi H$ より $1/4H \ll k/2$ なので $1/4H \ll k^2$ であるため、 $g/4H$ の項は落とすことができる。また、 k が大きいことから $k \ll k^2$ なので 3 つ目の $g(\gamma - 1) \dots$ の項も落とすことができる。

⁵⁾ 詳しくは 3-4-A 参照。

以下の式になる.

$$\delta_1 \delta_2 \nu^4 - \gamma R \bar{T} (k^2 + \mu^2 \delta_1) \nu^2 + \mu^2 \frac{\gamma R \bar{T} g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = 0. \quad (3-14)$$

この4つの根はそれぞれ音波のペアと内部重力波 (*internal gravity wave*) のペアである. g をゼロにすることで重力波は取り除くことができる. この結果は2-3節で得られたものと一緒である. 重力波だけにしたい場合は $\delta_2 = 0$ (非圧縮), $\delta_1 = 1$ とする. すると以下の式が得られる.

$$\nu^2 = \frac{\mu^2 \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}}{k^2 + \mu^2}. \quad (3-15)$$

(3-9)⁶⁾ を使うと, 位相速度は

$$c = \pm \frac{\mu}{\mu^2 + k^2} \left(\frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{1/2} \quad (3-16)$$

となる⁷⁾. この公式は等温条件下でなくても適当な近似をおこなうことで得ることができる⁸⁾. これらの重力振動は温度減率が $\partial \bar{\theta} / \partial z > 0$ の場合⁹⁾ は安定である. 逆に $\partial \bar{\theta} / \partial z < 0$ の場合¹⁰⁾ は擾乱が増幅する¹¹⁾.

擾乱の鉛直スケール¹²⁾ が水平スケールに比べて大きい場合, すなわち $\mu^2 \gg k^2$ である場合は (3-15) から

$$\nu \doteq \pm \left(\frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{1/2} \quad (3-17)$$

である. これは鉛直方向の振動の振舞を表すブラント-バイサラ振動数 (*Brunt-Vaisala frequency*)¹³⁾ と呼ばれる.

一方, 鉛直スケールが水平スケールよりはるかに小さい場合, 静水圧平衡近似が成り立ち, (3-14) において δ_1 はゼロとなる. この場合, 振動数は

$$\nu^2 = \frac{\mu^2 g}{k^2 \bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$$

となる. この式は $k^2 \gg \mu^2$ を用いて (3-15) から求めることもできる. 鉛直方向の変化に伴う水平伝播の解は以下のように $+k$ と $-k$ の解を足し合わせることで作ることができる¹⁴⁾:

$$e^{i(\mu x + k z - \nu t)} + e^{i(\mu x - k z - \nu t)} = 2 \cos k z e^{i(\mu x - \nu t)}.$$

⁶⁾ $c = \nu(k^2 + \mu^2)^{-1/2}$.

⁷⁾ 位相速度が波数 μ, k に依存していることから内部重力波は分散波であることがわかる. これは分散関係の式 (3-15) からわかる.

余談だが, 音波は2-3節の分散関係の式 (3-7), 位相速度 (3-10) から分散波ではないことがわかる.

⁸⁾ 等温という条件を使わない場合はまず (3-11) における \bar{p} と $\bar{\alpha}$ の解は別の形となる. その結果, (3-12), (3-13) が本文のものとは多少異なってくる. しかし, (3-14) を導出する際におこなった近似でそれらの異なった部分を落とすと, 結局等温大気と同じ分散関係が得られる. 詳しくは田中 (1975) を参照のこと.

⁹⁾ このことを *subadiabatic* という.

¹⁰⁾ このことを *superadiabatic* という.

¹¹⁾ $\partial \bar{\theta} / \partial z < 0$ の場合は (3-15) より ν は虚数となる. 簡単のためこの場合の ν を $\nu = \nu_r i$ とすると (ν_r は実数), 波動解の指数部分は $e^{i(\mu x + k z) - \nu_r t}$ となり, t については振動せずに増幅 (もしくは減衰) する.

¹²⁾ z 方向の擾乱のことである.

¹³⁾ ブラント-バイサラ振動数 (*Brunt-Vaisala frequency*) は浮力振動数 (*buoyancy frequency*) とも呼ばれる. 九大 大気海洋環境システム専攻 (2001) を参照のこと.

¹⁴⁾ こうすることによって鉛直方向の構造は水平方向の構造や時間からは独立になる. つまり, x と t だけで波の伝播を考えることができるようになる.

この操作は ν が k に対して独立である場合におこなうことができる¹⁵⁾。この場合には伝播は水平方向にのみ起こり、位相速度は

$$c = \frac{\nu}{\mu} = \pm \frac{1}{k} \left(\frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)^{1/2} \quad (3-18)$$

となる¹⁶⁾。 k の正負に関わらず、 ν は正負のペアの解 $\nu = \pm(\mu/k) \left\{ (g/\bar{\theta})(\partial\bar{\theta}/\partial z) \right\}^{1/2}$ を持つため、(3-18) で c は正負の 2 つの解を持つ。(3-14) における音波と重力波の解はそれぞれに分けて取り出すことができる。 ν^2 が大きいと仮定することで音波だけを、 ν^2 が小さいと仮定することで重力波だけを取り出すことができる^{17) 18)}。

音波が目立って重要な力学的役割を果たすような気象現象は無い。そのため方程式系からは音波を取り除いた方が望ましい場合が多い¹⁹⁾。(3-14) で見られるように、静水圧近似 ($\delta_1 = 0$) または非圧縮 ($\delta_2 = 0$) を使った場合は音波は除外される。内部重力波は熱対流や山岳波といったスケールの小さい大気の運動では重要な役割を果たす。適切な条件²⁰⁾ を与えれば内部重力波は大気中においてエネルギーを上方向に伝播する²¹⁾。重力波はその他に地衡風調節 (*geostrophic adjustment*) と呼ばれる役割も果たす。これについては後で 2-8 節にて議論する。

大気の大規模循環モデルでは静水圧平衡を近似するためほとんどの音波は除外できる。しかし、中には静水圧平衡を用いても除外できない特殊な音波もある。それがラム波 (*Lamb wave*) である。以下ではこのラム波について考える。方程式 (3-2) は (3-12) のような形の解以外にも等温大気における波動解を持っている。ここで考える波は鉛直速度を持たず、水平方向に音速で伝播する。以下の解を (3-2) に直接代入することで、これらの解が (3-2) を満たすことがわかる²²⁾：

$$\begin{aligned} u' &= S e^{(\gamma-1)z/\gamma H} e^{i\mu(x-ct)}, \\ w' &= 0, \\ p' &= P e^{-z/\gamma H} e^{i\mu(x-ct)}, \\ \alpha' &= A e^{(2\gamma-1)z/\gamma H} e^{i\mu(x-ct)}. \end{aligned} \quad (3-19)$$

ここでは $c = \pm\sqrt{\gamma R \bar{T}}$ である。この解がラム波である²³⁾。この波は自動的に $w = 0$ が境界において成り立つという条件を満たす。この解は後の節で議論する外部重力波 (*external gravity wave*) と非常に良く似ている。このラム波は大気中においてエネルギーをほとんど輸送しないが、数値予報

¹⁵⁾ k が μ や ν に依存している場合は本文のように $+k$ と $-k$ の 2 つを両方とも考えることはできない。(μ や ν によって k が決定してしまうから)

¹⁶⁾ (3-8) $c = \nu L / 2\pi$ より、ここでは水平方向の位相速度のみを考えているので $L = 2\pi/\mu$ なので $c = \nu/\mu$ となる。

また、以前に求めた $\nu^2 = (\mu^2 g / k^2 \bar{\theta})(\partial\bar{\theta}/\partial z)$ を前述した式に代入することで (3-18) は導出できる。

¹⁷⁾ ν (振動数) が大きい場合を仮定するということは、高周波の波だけを取り出すということである。つまり、高周波の波だけをとりだすと音波が取り出せ、低周波の波をだけ取り出すと内部重力波が得られるということである。「重力を取り除くと音波のみが取り出せ、非圧縮にすると内部重力波が取り出せる」ということはこの節で前述したが、このように振動数(周波数)による区別によっても音波と内部重力波を分離することができる。

¹⁸⁾ ν^2 が大きいと仮定すると (3-14) の左辺第 3 項は第 1, 第 2 項と比べて小さいので落とすことができ、結果として音波の解だけが残る。一方 ν^2 が小さいと仮定すると左辺の第 1 項は第 2 項, 第 3 項に比べて小さいので落とすことができ、結果として重力波の解のみが残る。

¹⁹⁾ 音波を取り除けばそれだけ数値計算が簡単になる。詳しいことは松井 他 (1996) や九大 大気海洋環境システム専攻 (2001) を参照のこと。

²⁰⁾ 群速度が上向きになるような条件のこと。

²¹⁾ この内部重力波によるエネルギーの伝播については九大 大気海洋環境システム専攻 (2001) を参照のこと。

²²⁾ 実際に (3-19) を (3-2) に代入してみた結果に関しては 3-4-B を参照のこと。

²³⁾ $W = 0$ という条件をつけた音波 (つまりはラム波なわけだが) の分散関係の導出に関しては 3-4-C 参照。

モデルでは重要である。なぜなら、ラム波によって静水圧の式の数値積分における最大のタイムステップに厳しい制限が加わるからである²⁴⁾。

3-4-A (3-14) の最後の項の導出

行列式 (3-13) から求めた関係式の最後の項 $\mu^2 g^2 (\gamma - 1)$ から (3-14) の最後の項 $\mu^2 \frac{\gamma R \bar{T} g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$ への変形をおこなう。

温位の関係式²⁵⁾ $\bar{\theta} = \bar{T} (p_s / \bar{p})^\kappa$ を z で積分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} &= \bar{T} p_s^\kappa \frac{\partial \bar{p}^{-\kappa}}{\partial z} \\ &= -\bar{T} \left(\frac{p_s}{\bar{p}} \right)^\kappa \frac{\kappa}{\bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \end{aligned}$$

となる。ここで静水圧の関係式 $\partial \bar{p} / \partial z = -g / \bar{\alpha}$ とさきほど使用した温位の関係式を用いると、

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \bar{\theta} \frac{\kappa g}{\bar{p} \bar{\alpha}}$$

となる。さらに静水圧平衡の式 $\bar{p} \bar{\alpha} = R \bar{T}$ を使うことで、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} &= \bar{\theta} \frac{\kappa g}{R \bar{T}} \\ \frac{\gamma R \bar{T} g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} &= g^2 \gamma \left(\frac{R}{c_p} \right) \\ &= g^2 \gamma \left(\frac{c_p - c_v}{c_p} \right) \\ &= g^2 \gamma \left(1 - \frac{c_v}{c_p} \right) \\ &= g^2 \gamma \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \\ &= g^2 (\gamma - 1) \\ \mu^2 \frac{\gamma R \bar{T} g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} &= \mu^2 g^2 (\gamma - 1) \end{aligned} \tag{3-4-A-1}$$

となることがわかる。

3-4-B ラム波の解

ラム波の解 (3-19) が方程式 (3-2) を満たすことを示す。

²⁴⁾ラム波と数値計算との関係については 3-4-D 参照。

²⁵⁾ $\bar{\theta}, \bar{T}, \bar{p}$ はそれぞれ安定成層状態での温位、温度、気圧を意味する。

以下の (3-2) の式:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial x} &= 0, \\
 \delta_1 \left(\frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{g\alpha'}{\bar{\alpha}} &= 0, \\
 \bar{\alpha} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + U \frac{\partial p'}{\partial x} \right) - gw' + \bar{p}\gamma \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} \right) &= 0, \\
 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \bar{\alpha} - \delta_2 \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha'}{\partial x} \right) - w' \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial z} &= 0
 \end{aligned} \tag{3-4-B-1}$$

に以下のラム波の解 (3-19) を代入する.

$$\begin{aligned}
 u' &= S e^{(\gamma-1)z/\gamma H} e^{i\mu(x-ct)}, \\
 w' &= 0, \\
 p' &= P e^{-z/\gamma H} e^{i\mu(x-ct)}, \\
 \alpha' &= A e^{(2\gamma-1)z/\gamma H} e^{i\mu(x-ct)}.
 \end{aligned} \tag{3-4-B-2}$$

したがって, (3-4-B-1) のそれぞれの式は

$$\begin{aligned}
 cS e^{z/H} - \bar{\alpha}P &= 0, \\
 (\bar{\alpha}/\gamma H)P + (g/\bar{\alpha})A e^{2z/H} &= 0, \\
 \bar{\alpha}cP + \bar{p}\gamma cA e^{2z/H} &= 0, \\
 \bar{\alpha}S e^{z/H} + cA e^{2z/H} &= 0.
 \end{aligned}$$

となる. なお, $U = 0$ としている. 行列形式で書くと,

$$\begin{bmatrix} c e^{z/H} & -\bar{\alpha} & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}/\gamma H & (g/\bar{\alpha}) e^{2z/H} \\ 0 & \bar{\alpha}c & \bar{p}\gamma c e^{2z/H} \\ \bar{\alpha} e^{z/H} & 0 & c e^{2z/H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ P \\ A \end{bmatrix} = 0 \tag{3-4-B-3}$$

となる. この行列式を展開すると,

$$\begin{aligned}
 (\bar{\alpha}/\gamma H)\bar{p}\gamma c e^{2z/H} - \bar{\alpha}c(g/\bar{\alpha}) e^{2z/H} &= c e^{2z/H} \{ \bar{\alpha}\bar{p}/H - g \} \\
 &= c e^{2z/H} \{ g(\bar{\alpha}\bar{p}/R\bar{T}) - g \} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

となる. 途中で状態方程式 $\bar{p}\bar{\alpha} = R\bar{T}$ とスケールハイト $H = R\bar{T}/g$ を利用した.

これによって, ラム波の解 (3-19) が (3-2) を満たすことが示された.

3-4-C ラム波の分散関係の導出

$W = 0$ の波であるラム波の分散関係を導出する. $W = 0$ として鉛直方向の運動方程式を考えない場合, (3-13) は以下ようになる.

$$\begin{bmatrix} -\nu & \mu & 0 \\ 0 & \nu & \gamma R\bar{T}\nu \\ \mu & 0 & \delta_2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ P \\ A \end{bmatrix} = 0.$$

この行列式がゼロと等しいとすると, 以下の関係式が導かれる.

$$\nu \{ \delta_2\nu^2 - \mu^2\gamma R\bar{T} \} = 0.$$

非圧縮 ($\delta_2 = 1$) である場合は以下の分散関係式が導かれる.

$$\nu = \pm\mu\sqrt{\gamma R\bar{T}}.$$

(3-7)²⁶⁾ を利用することでラム波の位相速度が得られる:

$$c = \pm\sqrt{\gamma R\bar{T}}.$$

この解は全く音波と同じである. (ラム波も音波なのだから当然). ただし, ラム波が音波と違う所は静水圧平衡の近似では消滅しない点である. このおかげで, 数値計算においてはラム波を考慮する必要が生じるのである.

3-4-C-a 鉛直方向への伝搬

本文中ではラム波は水平方向にのみ伝搬すると述べている. これはラム波が $W = 0$ であるという定義から知ることができる. 音波の同次方程式 (3-4) の 2 つ目の式²⁷⁾ に $W = 0$ を用いると $\bar{\alpha}kP = 0$ となる. $\bar{\alpha}$ や P は常にゼロとなるわけではないので $k = 0$ となる. つまり鉛直波数がゼロになるということなので鉛直方向には波は伝播しないことがわかる.

3-4-D ラム波と数値計算との関係

本文でも述べているが, 数値計算をする際にはできるだけ音波は除いた方がよい. 普通の音波は大規模モデルで使用する静水圧平衡近似によって取り除かれるのだが, このラム波だけはこの近似によって取り除くことはできない²⁸⁾. 以下ではなぜ音波を除くことが必要とされ, ラム波が残ってしまうことが問題となるのかを述べる.

²⁶⁾ $c = \nu / \sqrt{k^2 + \mu^2}$.

²⁷⁾ $(\mu U - \nu)W + \bar{\alpha}kP = 0$.

²⁸⁾ たいてい数値計算ではプリミティブ方程式系 (p を鉛直座標とした方程式系のこと. 1-9 節参照) を使用する. この方程式系では一見したところ密度の項は方程式系から消えているが, 決して非圧縮を仮定したものではないのでラム波は消滅しない.

数値計算では CFL 条件 (*Courant-Friedrichs-Lewy condition*) というものが存在する。これは以下のような条件である。

$$\Delta t < \Delta x / c. \tag{3-4-D-1}$$

c : 速度, Δt : 数値積分のタイムステップ, Δx : 空間ステップ

この条件が満たされない場合, 数値計算は不安定になってしまう²⁹⁾。音波は内部重力波に比べて速度 c が非常に大きいため, 音波を考慮した場合はタイムステップ Δt を小さくしなければならない。逆に言えば, ラム波を無視してタイムステップを大きく取ってしまった場合には数値計算はどんどん不安定になってしまうわけである。これが本文の「ラム波によって最大のタイムステップに厳しい制限が加わる」ことの意味である。

なお, この節では高周波 (音波), 低周波 (内部重力波) や特殊な音波であるラム波が登場したわけだが, 図 3-4-D-1 はこれらの波の分散関係を表示したグラフである。詳しくは小倉 (1978) を参照してもらいたい。

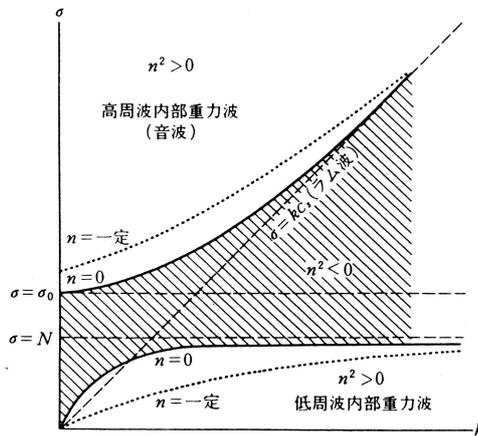


図 7.1 等温大気中の重力波は, k (水平波数)と σ (振動数)の平面上で $n=0$ の線を境として3つの領域にわけられることを示す。

図 3-4-D-1: 高周波, 低周波, ラム波の分散関係 (小倉義光, 1978: 気象力学通論. 東京大学出版会, 249pp. より) .

²⁹⁾CFL 条件に関しては岩崎 (1997) を参照のこと。

3-5 表面重力波

概要

流体の境界面で発生する表面重力波 (*surface gravity waves*) について議論する。均質な流体層を仮定し、その境界面で発生する波の位相速度を導出する。静水圧平衡を仮定する場合としない場合で性質の異なる波が見える。静水圧を仮定する場合の波を浅水波 (*shallow-water wave*), 仮定しない場合の波を深水波 (*deep-water wave*) と呼ぶ。

この節では、対流圏を均質で非圧縮な一つの流体層と考える。数学的、物理的に簡単な解は表面海洋波および複雑な大気のプロセスの理解を助ける。

流体は非圧縮で均質 ($\alpha' = 0$) であり、上部境界は自由表面であるとする。この場合、線形方程式 (3-2) は以下ようになる。なお、プライム (') は記号から取り除いてあるので注意すること¹⁾：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (3-20a)$$

$$\delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (3-20b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3-20c)$$

擾乱の無い流れでの静水圧平衡の式は以下ようになる。

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -g\bar{\rho}.$$

この式を $z = 0$ から擾乱の無い流れの頂点 $z = H$ まで積分すると、

$$g\bar{\rho}H = p_0 \quad (3-21)$$

となる。 p_0 は $z = 0$ での圧力である。次に擾乱を調和関数だと仮定すると、

$$\begin{aligned} u &= \Psi(z)e^{i\mu(x-ct)}, \\ w &= \Phi(z)e^{i\mu(x-ct)}, \\ \frac{p}{\bar{\rho}} &= P(z)e^{i\mu(x-ct)} \end{aligned} \quad (3-22)$$

となる。(3-22) を (3-20) に代入し、簡単な形にすると以下の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} (U - c)\Psi(z) + P(z) &= 0, \\ i\mu\delta(U - c)\Phi(z) + \frac{\partial P(z)}{\partial z} &= 0, \\ i\mu\Psi(z) + \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (3-23)$$

(3-23) の最初の 2 つの式を用いて $P(z)$ を消し、さらにその式と (3-23) の最後の式を用いて $\Psi(z)$ を消すと以下の式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \Phi(z)}{\partial z^2} - \mu^2 \delta \Phi(z) = 0. \quad (3-24)$$

¹⁾ 大気为非圧縮で均質であると言う条件から $\alpha' = 0$, $\bar{\alpha} = \text{const}$ である。この 2 式を (3-2) の 1,2,4 式に代入することで本文中の (3-20a) ~ (3-20c) の式が得られる。

ここで、2つの場合を考える。 $\delta = 1$ (鉛直加速度がある)の場合と $\delta = 0$ (擾乱が静水圧平衡を満たす)の場合である。これらの解はそれぞれ以下ようになる²⁾。

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= a_1 e^{\mu z} + a_2 e^{-\mu z}, & \delta &= 1, \\ \Phi(z) &= a'_1 z + a'_2 & \delta &= 0.\end{aligned}$$

この a は境界条件から決められる任意の定数である。静水圧を仮定すると、下部境界面では鉛直速度は消える。このため鉛直加速度が存在する(つまり $\delta = 1$)では $a_1 = -a_2 \equiv a$ となる。つまり $\Phi(z)$ は以下ようになる。

$$\Phi(z) = a(e^{\mu z} - e^{-\mu z}) \quad \delta = 1. \tag{3-25}$$

この指数の項をべき級数として展開し³⁾、さらに近似をおこなうことで $\Phi(z)$ は以下ようになる。

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= 2a\mu z + \dots \\ &\simeq 2a\mu z.\end{aligned}$$

静水圧平衡($\delta = 0$)の場合は $a'_2 = 0$ となる。 $a'_1 = a$ とおくと、

$$\Phi(z) = az \tag{3-26}$$

となる。

2つ目の境界条件は、上部境界面のある点(この点は境界面から出ることはいかなる)において全圧力(基本場と擾乱の合計)が変化しないことである⁴⁾。よって自由表面で

$$d(\bar{p} + p) / dt = 0$$

となる。これは線形化によって近似され、以下の式となる。

$$\frac{\partial p}{\partial t} + U \frac{\partial p}{\partial x} + w \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = H. \tag{3-27}$$

解(3-25)、(3-26)と系(3-23)を利用することで以下に続くような結果が得られる。

まずは、静水圧平衡でない場合を考える。(3-25)と系(3-23)によって以下の結果が得られる。

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= ia(e^{\mu z} + e^{-\mu z}), \\ P(z) &= -ia(U - c)(e^{\mu z} + e^{-\mu z}).\end{aligned} \tag{3-28}$$

²⁾この指数の解は(3-3)の解の形と同じとなる。そのためこの解は(3-5)の特殊な場合での解として得られる。

³⁾指数関数は以下のようにべき級数展開される。

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad [|x| < \infty].$$

これを利用すると、

$$e^{\mu z} = 1 + \mu z + (\mu z)^2 / 2 + \dots, \quad e^{-\mu z} = 1 - \mu z + (\mu z)^2 / 2 - \dots$$

となる。結果として

$$e^{\mu z} - e^{-\mu z} = 2\mu z + (\mu z)^3 / 3 + \dots$$

となる。ここで右辺の第2項以降を無視することで本文の解になる。

⁴⁾具体的にこのような境界条件を用いているものとして海洋がある。海洋表面の境界条件として、全圧力は常に大気圧する場合が多い。

(3-25) と (3-28) を (3-27) に代入することで得られる振動数 ($\nu = \mu c$) の式を解くと以下の位相速度が得られる⁵⁾ :

$$c = U \pm \left(\frac{g\mathcal{L}}{2\pi} \tanh \frac{2\pi H}{\mathcal{L}} \right)^{1/2}. \quad (3-29)$$

なお, \mathcal{L} は波の波長で波数 μ とは $\mu = 2\pi/\mathcal{L}$ という関係にある.

次に, 静水圧平衡の場合を考える. (3-26) と系 (3-23) によって以下の結果が得られる.

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \frac{ia}{\mu}, \\ P(z) &= -\frac{ia(U-c)}{\mu}. \end{aligned} \quad (3-30)$$

(3-26) と (3-30) を (3-27) に代入して簡単になると静水圧平衡とした場合の位相速度が得られる.

$$c = U \pm \sqrt{gH}. \quad (3-31)$$

(3-31) で与えられた位相速度で進む波は普通, 浅水波 (*shallow-water wave*) もしくは長波 (*long wave*) と呼ばれる. (3-29) における比 H/\mathcal{L} が比較的大きい場合 (およそ 0.5 以上)⁶⁾, 位相速度は近似的に

$$c \doteq U \pm \sqrt{\frac{g\mathcal{L}}{2\pi}}$$

となる. この波は深水波 (*deep-water wave*)⁷⁾ と呼ばれる. この場合, 流体粒子の軌道はほぼ円を描く⁸⁾. 一方, H/\mathcal{L} が小さい (0.04 以下) の場合は (3-29) は (3-31) の形になる⁹⁾. この場合の粒子の軌跡はよく伸びた楕円状になり, 結果としてほぼ水平線になる. 均質大気を仮定する場合, (3-21) と状態方程式より $gH = p_0/\rho = RT$ となる¹⁰⁾. すると (3-31) は以下のように書くこともできる.

$$c = U \pm \sqrt{RT}. \quad (3-32)$$

このようにすると, 「長」重力波の速度は (3-10) で得られた音波やラム波の速度とほとんど同じになることがわかる.

(3-31) で与えられた長重力波と呼ばれる波の位相速度は鉛直方向加速度を除外した場合, すなわち擾乱が静水圧平衡な場合に得られる. この結果は以下のようにもう少し直接的な方法でも得るこ

⁵⁾この解の導出に関しては 3-5-A 参照.

⁶⁾ $H/\mathcal{L} \gtrsim 0.5$ の場合, $e^{2\pi H/\mathcal{L}} \gtrsim 23.1407$, $e^{-2\pi H/\mathcal{L}} \lesssim 0.0432$ となり, $e^{2\pi H/\mathcal{L}} \gg e^{-2\pi H/\mathcal{L}}$ である. よって

$$\tanh(2\pi H/\mathcal{L}) = \frac{e^{2\pi H/\mathcal{L}} - e^{-2\pi H/\mathcal{L}}}{e^{2\pi H/\mathcal{L}} + e^{-2\pi H/\mathcal{L}}} \simeq \frac{e^{2\pi H/\mathcal{L}}}{e^{2\pi H/\mathcal{L}}} = 1$$

となる.

⁷⁾「深水波」は $H \gg \mathcal{L}$ の場合, つまり流体の深さ (高さ) が波長に比べて十分に大きい場合の水面波の呼称である. 逆に $H \ll \mathcal{L}$ の場合には流体の深さが波長に比べて十分に小さいため, この場合の波を「浅水波」と呼ぶ.

⁸⁾木村 (1983) を参照のこと.

⁹⁾ $2\pi H/\mathcal{L} = x$ とおき, e^x , e^{-x} をテイラー展開すると, $e^x = 1 + x + x^2 + \dots$, $e^{-x} = 1 - x + x^2 - \dots$ となる. $2\pi H/\mathcal{L} = x$ は微小であることから x の 2 乗以上を無視すると,

$$\tanh x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) \simeq \frac{2x}{2} = x = 2\pi H/\mathcal{L}$$

となる. これを (3-29) に代入すると, (3-31) と同じになる.

¹⁰⁾ここでの ρ , T は均質大気の密度, 温度を表す.

とができる。静水圧平衡を仮定すると、流体のいかなる点でも $g\bar{\rho}(h-z) = p$ が成り立つ¹¹⁾。 h は自由表面の高さである。 $h = H + h'$, $p = \bar{p} + p'$ とおき、基本場は静水圧平衡をみたすとすると、 $g\bar{\rho}(H-z) = \bar{p}$ より、 $g\bar{\rho}h' = p'$ が得られる¹²⁾。このようにすると、以下の式が成り立つ。(プライム(')は記号から外してあるので注意すること)。

$$g \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

上記の式を利用すると、(3-20)の最初方程式は以下のように書くことができる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \tag{3-33}$$

u や h は擾乱である。

u と h に関する2つ目の式は連続の式(3-20c)を鉛直方向に積分することで得られる。しかし、質量保存の式は以下のように簡単に直接得ることもできる(図2-2を見よ)：

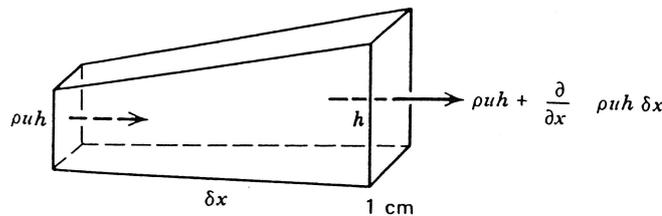


Figure 2-2 Illustrating mass continuity.

図 3-2: 質量の流入出 (Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1979: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology. John Wiley & Sons, 477pp)

$$\frac{\partial(\bar{\rho}h)}{\partial t} = - \frac{\partial(\bar{\rho}uh)}{\partial x}.$$

線形化し、簡単にすることで以下の式が得られる¹³⁾。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{3-34}$$

¹¹⁾自由表面上 $z = h$ では $p = 0$ としている。

¹²⁾ $g\bar{\rho}(H-z) = \bar{p}$ より、

$$\begin{aligned} g\bar{\rho}(h-z) &= p \\ g\bar{\rho}(H+h'-z) &= \bar{p} + p' \\ g\bar{\rho}h' &= p'. \end{aligned}$$

¹³⁾ $h = H + h'$, $u = U + u'$ であり、 $\bar{\rho}$ は一定なので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}h)}{\partial t} &= -\frac{\partial(\bar{\rho}uh)}{\partial x} \\ \frac{\partial(H+h')}{\partial t} &= -(U+u')\frac{\partial(H+h')}{\partial x} - (H+h')\frac{\partial(U+u')}{\partial t} \end{aligned}$$

となる。この式を線形化することで(3-34)が得られる。

ここで h および u は擾乱である。 h は z の関数ではない¹⁴⁾ ので u も z の関数ではなくなる¹⁵⁾。よって h と x は以下の形で書くことができる。

$$u = u_0 e^{i\mu(x-ct)}, \quad h = h_0 e^{i\mu(x-ct)}.$$

u_0, h_0 は定数である。これらを (3-33) および (3-34) に代入し、得られた同次系の行列式¹⁶⁾ をゼロとすることで浅水波の位相速度が得られる。

$$c = U \pm \sqrt{gH}.$$

これは (3-31) と等しい。

ここで述べられた重力波は普通外部重力波 (*external gravity wave*)¹⁷⁾ と呼ばれる。それはこの波の最大振幅がちょうど流体の境界となるからである。また、2-4 節でも登場した内部重力波というものもある。これは密度の異なる流体同士の境界で発生したり、密度が連続的に異なる場所で発生する。そのような内部重力波の伝播速度はここで述べられた外部波とは全く異なる場合もある。簡単な例として、2 つの半無限大の層が密度と速度のゼロ桁の不連続面で分けられているとする。この場合の波の速度は以下の式で与えられる。(Haltiner and Martin, 1957¹⁸⁾ を見よ)。

$$c = \frac{\rho U + \rho' U'}{\rho + \rho'} \pm \left[\frac{gL(\rho - \rho')}{2\pi(\rho + \rho')} - \frac{\rho\rho'(U - U')^2}{(\rho + \rho')^2} \right]^{1/2}.$$

ここでのプライム (') は上層での変数を表す。この結果を得るためには擾乱が $\pm\infty$ (上と下) において消えることを仮定しなければならない。以前に議論した「深水」波の位相速度はこの公式で $\rho' = 0$ とおくことができる特別な場合のみ得ることができる。その他にもシアの無い波の場合は $U = U'$ 、純粋にシアの波の場合は $\rho = \rho'$ とすることでこれらの波の位相速度を知ることができる。ここで注意しなければならないのは、根号内の量が負になった場合である。この場合、位相速度は複素数となり、不安定な波が生じる。このような増幅する解はケルビン-ヘルムホルツ波 (*Kelvin-Helmholtz wave*) と呼ばれる。

3-5-A 非静水圧平衡での表面波の位相速度の導出

(3-29) の導出をおこなう。(3-25) と (3-28) より圧力の擾乱 p と鉛直速度の擾乱 w は以下のようになる。

$$p = -i\bar{\rho}a(U - c)(e^{\mu z} + e^{-\mu z})e^{i\mu(x-ct)}, \quad (3-5-A-1)$$

$$w = a(e^{\mu z} - e^{-\mu z})e^{i\mu(x-ct)}. \quad (3-5-A-2)$$

¹⁴⁾ h は自由表面の擾乱なので当然 z に依存しない。

¹⁵⁾ つまり、静水圧を導入したことで $u(x, z, t)$ であったものが $u(x, t)$ となるのがわかる。

¹⁶⁾

$$\begin{bmatrix} U - c & g \\ H & U - c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ h_0 \end{bmatrix} = 0.$$

¹⁷⁾ 全くの余談だが、鉛直方向には波として伝播せず、振幅が単調に減少しているような波を総称して外部波 (*external wave*) と呼ぶ。例えば、水平方向には重力波または音波として伝播するが、高さ方向には伝播しない波がある。ここまでに紹介した外部重力波 (*external gravity wave*) とラム波 (*Lamb wave*) である。

更に余談だが、水面における外部重力波は水面波 (*water wave*) と呼ばれる。詳しくは気象科学事典 (1998) 参照。

¹⁸⁾ 詳しくは Drazin(1981) や Haltiner(1957) を参照のこと。

(3-5-A-1) より

$$\begin{aligned}\partial p / \partial t &= -\bar{\rho} a c \mu (U - c) (e^{\mu z} + e^{-\mu z}) e^{i \mu (x - ct)}, \\ U \partial p / \partial x &= U \bar{\rho} a \mu (U - c) (e^{\mu z} + e^{-\mu z}) e^{i \mu (x - ct)}\end{aligned}\quad (3-5-A-3)$$

(3-5-A-2) と (3-5-A-3) と擾乱無しの静水圧の式¹⁹⁾ を (3-27) に代入して計算すると,

$$\begin{aligned}-\bar{\rho} a c \mu (U - c) (e^{\mu H} + e^{-\mu H}) e^{i \mu (x - ct)} + U \bar{\rho} a \mu (U - c) (e^{\mu H} + e^{-\mu H}) e^{i \mu (x - ct)} \\ - g \bar{\rho} a (e^{\mu H} - e^{-\mu H}) e^{i \mu (x - ct)} &= 0 \\ -c \mu (U - c) (e^{\mu H} + e^{-\mu H}) + U \mu (U - c) (e^{\mu H} + e^{-\mu H}) - g (e^{\mu H} - e^{-\mu H}) &= 0 \\ -c(U - c) + U(U - c) - \frac{g}{\mu} \left(\frac{e^{\mu H} - e^{-\mu H}}{e^{\mu H} + e^{-\mu H}} \right) &= 0 \\ c^2 - 2cU + U^2 &= \frac{g}{\mu} \tanh(\mu H) \\ (c - U)^2 &= \frac{g}{\mu} \tanh(\mu H) \\ c = U \pm \left\{ \frac{g}{\mu} \tanh(\mu H) \right\}^{1/2}\end{aligned}$$

となる. 波は x 方向へのみ伝播するので (つまり z 方向は考えないので), 波長 \mathcal{L} は $\mathcal{L} = 2\pi/\mu$ である. これより位相速度は

$$c = U \pm \left\{ \frac{g\mathcal{L}}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi H}{\mathcal{L}}\right) \right\}^{1/2}$$

となる.

¹⁹⁾

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -g\bar{\rho}.$$

3-6 慣性重力波とロスビー波

概要

地球の自転を考慮するとコリオリ力が働き、慣性重力波 (*inertial gravity wave*) やロスビー波 (*Rossby wave*) といった波が発生する。この節ではこれらの波について議論する。浅水方程式系 (*shallow-water equations*) を線形化して波動解を与えることにより、これらの波の性質を示す関係式を得る。また、慣性重力波とロスビー波のそれぞれについて渦度と発散のどちらが支配的かを調べてみる。

この節では、前節で導出した静水圧を満たす一つの層に関する方程式系に地球の回転の効果を加えて考える。コリオリ力によって引き起こされる歪みは低周波である重力波に影響を及ぼす。さらに、コリオリパラメータが空間的变化¹⁾ することによってロスビー波が生ずる。この地球の回転を考えた場合の運動方程式は以下のような形で書くことができる^{2) 3)}。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (3-35a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0. \quad (3-35b)$$

静水圧と密度一定を仮定しているため、水平方向気圧傾度力⁴⁾ は高さに依存しない。また、速度場は高さに依存しないと始めに仮定しており、(3-35) における鉛直移流項は除外されている。非圧縮を仮定することで、連続の式は以下のように線形化される。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3-36)$$

(3-36) を z 方向に $z = 0$ から $z = h$ まで積分すると、

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) h + w_h - w_0 = 0 \quad (3-37)$$

となる。運動学的境界条件を考えると、下部境界は動かないため $z = 0$ での w は消えなければならない。(つまり $w_0 = 0$ となる)。一方、上部境界における $w = dz/dt$ は自由表面が上下する変化率を表す。そのため、 $w_h = dh/dt$ となり、(3-37) は以下ようになる。

$$h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{dh}{dt} = - \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right). \quad (3-38)$$

この式は 2-5 節で得られた (3-34) と同じ形だが、ここではいくらか違う方法で得られた。方程式 (3-35a), (3-35b), (3-38) によって 3 つの未知数 u, v, h に関する 3 つの方程式系が構成される。この方程式系は浅水方程式系 (*shallow-water equations*) と呼ばれる。これら 3 つの式の組み合わせから

¹⁾ コリオリパラメータ $f = 2\Omega \sin \varphi$ はこの定義からも分かるように緯度 φ によって変化する。

²⁾ この物理量は擾乱ではないので注意。

³⁾ この式は (2-16), (2-17) から得ることができる。(2-16), (2-17) から外力とメトリック項を省き、前節で得た関係式 $g\partial h/\partial x = (1/\rho)\partial p/\partial x$, $g\partial h/\partial y = (1/\rho)\partial p/\partial y$ を利用して圧力項を書き直すと (3-35) の両式になる。

⁴⁾ つまり、 $\partial p/\partial x = 0, \partial p/\partial y = 0$ ということ。

重要な方程式が得られる。(3-35b) を x で微分した式と (3-35a) を y で微分した式の差をとると、このモデルでの渦度方程式が得られる。以下がその式である⁵⁾。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \beta v = -(\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = (\zeta + f) \frac{1}{h} \frac{dh}{dt}. \quad (3-39a)$$

$\beta = \partial f / \partial y$ である。この式は以下のようにも書ける。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta + f}{h} \right) = 0. \quad (3-39b)$$

この式によりポテンシャル渦度 (potential vorticity)⁶⁾ と呼ばれる量 $(\zeta + f)/h$ が保存されることがわかる。これは Ertel によって提唱された一般的なポテンシャル渦度理論⁷⁾ からすると特別なケースである。方程式 (3-39b) は絶対角運動量の保存の式と対応する。これは、回転している円柱流体での高さの変化による影響を考えてみるとわかる。 h が増えるにつれ円柱の断面積は小さくなるので円柱はより早く回転する。このことは円柱の角速度が $(\zeta + f)/2$ であることから (3-39b) と一致する。

方程式 (3-35) と (3-38) を U (一定) と H で線形化する。これらの量は以下のような地衝風のな関係にある⁸⁾。

$$U = -\frac{g}{f} \frac{\partial H}{\partial y}. \quad (3-40)$$

H はここまでで考えてきた密度一定の流体の深さである。擾乱 u, v, h ⁹⁾ と f が y に依存しないとすると、方程式系 (3-35a), (3-35b), (3-38) は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} \right) - f v + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + f u &= 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (3-41)$$

δ のついている項は発散方程式において dD/dt ($D = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y$) となる項である。一般的な発散方程式は運動方程式の u, v 成分を x, y で微分することで得られる。今回の場合、 $\partial v / \partial y = 0$ なので u の項だけで発散になる。係数 H を定数と扱い¹⁰⁾、擾乱を $u_0 e^{i\mu(x-ct)}$, $v_0 e^{i\mu(x-ct)}$, $h_0 e^{i\mu(x-ct)}$ という調和関数と仮定すると、(3-41) は以下の方程式系に変形する。

$$\begin{aligned} \delta(U - c) i \mu u_0 - f v_0 + g i \mu h_0 &= 0, \\ f u_0 + i \mu (U - c) v_0 &= 0, \\ i \mu H u_0 + \partial H / \partial y v_0 + i \mu (U - c) h_0 &= 0. \end{aligned} \quad (3-42)$$

⁵⁾ この式の導出に関しては 3-6-A 参照。

⁶⁾ ポテンシャル渦度に関しては Pedlosky(1987) を参照のこと。

⁷⁾ 業界によって様々な「ポテンシャル渦度の式」が存在するため、それらと区別するため Ertel のポテンシャル渦度の式と言う。

⁸⁾ この関係式は (3-35b) において $u = U, v = 0, h = H$ とすることで得ることができる。関係式 $fU = g(\partial H / \partial y)$ の左辺はコリオリ力の項であり、右辺は気圧傾度力の項である。(この項は元々 $(1/\rho)(\partial p / \partial y)$ を変形したものである)。

⁹⁾ ここからは u, v, h は擾乱の量になるので注意。

¹⁰⁾ ここでは多少特殊な仮定をおこなう。 H を定数と扱うのだが、 $\partial H / \partial y$ も定数と扱うのである。 H を定数と扱うならば $\partial H / \partial y = 0$ となりそうなものだが、そうは扱わない。

(3-42) が u_0, v_0, h_0 に関して自明でない解を持つためには以下の条件が満たされねばならない。

$$\begin{vmatrix} \delta(U-c)i\mu & -f & g\mu i \\ f & (U-c)i\mu & 0 \\ i\mu H & \partial H/\partial y & (U-c)i\mu \end{vmatrix} = 0.$$

この行列式を展開すると、以下の振動数に関する 3 次元方程式が得られる。

$$\delta(U-c)^3 - (gH + f^2/\mu^2)(U-c) - \frac{fg}{\mu^2} \frac{\partial H}{\partial y} = 0. \quad (3-43)$$

この方程式は 2 つの早い重力波の解と 1 つの遅い気象学的解を持つ。早い解だけを取り出すためには $U=0, \delta=1$ とする。すると以下のような位相速度の解が得られる。

$$c = \pm \sqrt{gH + f^2/\mu^2}. \quad (3-44)$$

もう一つの解は $c=0$ である。これらは慣性重力波 (*inertial gravity wave*) と呼ばれる波である。 $f=0$ にすると (3-44) は浅水波に関する公式 (3-31) になる。

もしも根号内の 1 つ目の項が 2 つ目の項との比較で落とせるのならば、以下のように慣性振動 (*inertial oscillation*) のみを取り出すことができる¹¹⁾。

$$\nu = \mu c = \pm f. \quad (3-45)$$

スケール ($1/\mu$) が十分に大きいか、もしくは gH が十分に小さい場合にこの状態は成り立つ。この慣性重力波の解は圧力勾配を無視することで非線形の運動方程式から直接得ることができる。

$$\frac{du}{dt} = -fv, \quad \frac{dv}{dt} = fu. \quad (3-46)$$

これらの式を組み合わせることで以下の式が得られる。

$$\frac{d^2u}{dt^2} + f^2u = 0. \quad (3-47)$$

この式は以下のような形の解を持つ。

$$u = u_0 e^{\pm ift}. \quad (3-48)$$

この解から $\nu = \pm f$ であることがわかる。このことから慣性振動の周期は $2\pi/\nu = 2\pi/f = 12/\sin\varphi$ [1/hr] であることがわかる¹²⁾。

次に、(3-43) の遅い気象学的な解は $\delta=0$ とすることで得ることができる。

$$c = U + \frac{(f/H)\partial H/\partial y}{\mu^2 + (f^2/gH)}.$$

この式は基本状態のポテンシャル渦度 $\bar{q} = f/H$ で書くことができる。ポテンシャル渦度の y 微分は、

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = -\frac{f}{H^2} \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{f^2 U}{gH^2} \quad (3-49)$$

¹¹⁾ いまさらだが、 $f = 2\Omega \sin\varphi$ [1/s] である。

¹²⁾ 地球は 24 時間で一回転するので $\Omega = 2\pi/24$ [1/hr] である。コリオリパラメータは $f = 2\Omega \sin\varphi$ なので、 $2\pi/f = \pi/\Omega \sin\varphi = 12/\sin\varphi$ である。

となる。自由表面の高さ $H(y)$ は基本場での地衡流平衡 (3-40) を満たすため y 方向に勾配を持つ。そのため基本状態でのポテンシャル渦度の勾配はゼロにはならない¹³⁾。(3-49) によって位相速度は次のように書くことができる。

$$c = U - \frac{H \partial \bar{q} / \partial y}{\mu^2 + (f^2 / gH)}. \quad (3-50)$$

この解はロスビー波 (*Rossby wave*) の形である。この位相速度は観測される総観規模での擾乱とよく一致する。この式は f が緯度によって変化する場合に一般化される。この場合はポテンシャル渦度の勾配は以下のようになる。

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \left(\beta - \frac{f}{H} \frac{\partial H}{\partial y} \right) / H = [\beta + (f^2 U / gH)] / H. \quad (3-51)$$

$\beta = df/dy$ である。これはロスビー波が基本場の流れに相対的な方向 $k \times \nabla \bar{q}$ へ伝播する法則の一つの例である¹⁴⁾。 f の y 方向変化 (つまり β) に依存する位相速度は (3-50) と (3-51) から得ることができる。これは (3-41) において $f = f(y)$ を使い、 v の運動方程式を線形化した渦度方程式にすることで確認できる。

ロスビー波は (3-41) において $\delta = 0$ とすることで (3-43) で取り出すことができる。この場合、 v 成分は地衡流的である。つまり、

$$fv = g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3-52)$$

である。しかし、 u 成分は発散に比例し、地衡流的ではない。

擾乱場が x と y で変化する場合、解析をおこなうには式 (3-35a) と (3-35b) を渦度と発散の式に変形する必要がある。この場合、発散方程式において発散の時間微分 (dD/dt) が無視される時、重力波は排除されることが分かる¹⁵⁾。これによって風の回転の要素と高さとの関係が分かる。具体的には地衡流の状態を表す式 (3-52) がその関係式に当たる。

ここまでで考えてきた 2 種類の波の渦度と発散を比較すると面白い。この比較は今回のように物理量が y 方向に変化しない場合には特に簡単で、以下のようになる。

$$\left| \frac{D}{\zeta} \right| = \left| \frac{\partial u / \partial x}{\partial v / \partial x} \right|. \quad (3-53)$$

慣性重力波 ($U = 0$) の場合の比較をおこなうために、(3-41) の v 成分の式において $v = e^{i\mu(x-ct)}$ とすると、以下の関係式が得られる¹⁶⁾。

$$v = -\frac{ifu}{\mu c}. \quad (3-54)$$

¹³⁾ここでは f は y 方向に変化しないことにしているので注意。

¹⁴⁾ロスビー波の伝搬方向に関しては 3-6-C を参照のこと。

¹⁵⁾(3-41) で考えてみる。 u 成分の式を x で微分して発散の式を作る。なお、擾乱は y 方向には変化しないため、発散 D は $D = \partial u / \partial x$ である。

$$\frac{\partial D}{\partial t} + U \frac{\partial D}{\partial x} - f \frac{\partial v}{\partial x} + g \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) = 0.$$

ここで D の時間微分 ($= dD/dt$) を無視すると、関係式 $fv = g\partial h/\partial x$ が成り立つ。これは (3-52) と同じ式である。つまり、 D の時間微分を無視することは (3-41) にて δ の項を排除することと同じ結果になる。

¹⁶⁾ $U = 0$ であるため、(3-41) の v 成分の式は $\partial v/\partial t + fu = 0$ となる。 $v = e^{i\mu(x-ct)}$ とすると、 $\partial v/\partial t = -i\mu c e^{i\mu(x-ct)} = -i\mu c v$ となり、関係式 (3-45) が得られる。

(3-54) と (3-44) より比 (3-53) は以下ようになる。

$$\left| \frac{D}{\zeta} \right|_{I-G} = (1 + \mu^2 g h f^{-2})^{1/2}. \quad (3-55)$$

この量は常に 1 よりも大きい。つまり慣性重力波においては発散は渦度に対して支配的であるということが分かる。

地衡風もしくはロスビー波 ($\delta = 0$) の場合、渦度と発散を h の項で記述すると便利である。(3-52) から渦度を得ることができる¹⁷⁾。

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\mu^2 g}{f} h. \quad (3-56)$$

以下の u と h に関する診断方程式¹⁸⁾ は $\delta = 0$ として (3-41) から導出できる¹⁹⁾。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{f^2}{gH} u = \frac{U}{H} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \quad (3-57)$$

この式は風の発散要素についての準地衡流方程式 (*quasi-geostrophic equation*) である。指数的な波形を与え²⁰⁾、さらに x で微分すると²¹⁾、以下の式が得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{i\mu U g h}{gH + (f^2/\mu^2)}. \quad (3-58)$$

(3-56) と (3-58) を (3-53) に代入すると比は

$$\left| \frac{D}{\zeta} \right|_R = \frac{(U\mu/f)}{(\mu^2 g H / f^2) + 1} \quad (3-59)$$

となる。この量は数値計算においてはロスビー数 (*Rossby number*) と呼ばれ、総観規模の運動ではだいたい 1/10 くらいの値を持つ。分母は 1 より非常に大きいため、ロスビー波では発散は渦度に比べて小さい。これは第 4 章のスケール解析の定式化において役に立つ。

3-6-A 渦度方程式とポテンシャル渦度保存の式の導出

渦度方程式 (3-39a) とポテンシャル渦度保存の式 (3-39b) の式を導出する。

¹⁷⁾ h を $e^{i\mu(x-ct)}$ とおいて (3-52) を x で微分するとこの式が得られる。ちなみに $\partial u / \partial y = 0$ なので渦度は $\zeta = \partial v / \partial x$ である。

¹⁸⁾ 時間微分の項を含まない式のこと。

¹⁹⁾ この式の導出に関しては 3-6-B 参照。

²⁰⁾ 具体的には $u = u_0 e^{i\mu(x-ct)}$, $h = h_0 e^{i\mu(x-ct)}$ のように波形を仮定する。

²¹⁾ 指数的な波形を与えたことで $\partial^2 u / \partial x^2 = -\mu^2 u$, $\partial^2 h / \partial x^2 = -\mu^2 h$ となる。これによって $u = Ugh / (gH + f^2/\mu^2)$ という関係式が成り立つ。更にこの式を x で微分する。

渦度方程式 (3-39a)

(3-35b) を x で微分した式と (3-35a) を y で微分した式はそれぞれ

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + f \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0, \quad (3-6-A-1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - f \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial f}{\partial y} + g \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) = 0 \quad (3-6-A-2)$$

となる. (3-6-A-1) から (3-6-A-2) を引くと,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \\ & + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) + f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - v \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (3-6-A-3)$$

となる. 渦度は $\zeta = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$ なので, (3-6-A-3) は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial x} + \zeta \frac{\partial v}{\partial y} + f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \beta v = 0 \\ & \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \beta v = -(\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3-6-A-4)$$

となる. $\beta = \partial f / \partial y$ である. 最後に (3-38) を (3-6-A-4) の右辺に使うと, 以下の渦度の式となる.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \beta v = (\zeta + f) \frac{1}{h} \frac{dh}{dt}. \quad (3-6-A-5)$$

ポテンシャル渦度保存の式 (3-39b)

(3-6-A-5) の式を変形してポテンシャル渦度保存の式を導出する. f は y のみに依存し, $\partial f / \partial t = \partial f / \partial x = 0$ であることに注意すること.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + v \frac{\partial f}{\partial y} + (\zeta + f) h \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{h} \right) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial t} (\zeta + f) + u \frac{\partial}{\partial x} (\zeta + f) + v \frac{\partial}{\partial y} (\zeta + f) + (\zeta + f) h \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{h} \right) = 0 \\ & \frac{1}{h} \frac{d}{dt} (\zeta + f) + (\zeta + f) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{h} \right) = 0 \\ & \frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta + f}{h} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3-6-A-6)$$

3-6-B 準地衡流方程式の導出

浅水方程式を線形化した方程式系 (3-41) から準地衡流方程式 (3-57) を導く.

$\delta = 0$ なので, (3-41) の 1 つ目の式は $fv = g\partial h/\partial x$ となる. この式と基本場の地衡流平衡の式 (3-40)²²⁾ を (3-41) の 2, 3 つ目の式に代入し, 3 つ目の式に関しては更に x で微分すると, 以下のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) + U \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{f^2}{g} u = 0, \quad (3-6-B-1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) + U \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - U \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0. \quad (3-6-B-2)$$

(3-6-B-1) から (3-6-B-2) を引くことで準地衡流方程式が得られる.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{f^2}{gH} u = \frac{U}{H} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \quad (3-6-B-3)$$

3-6-C ロスビー波の伝搬する方向

本文内には「ロスビー波は基本場の流れに相対的な方向 $\mathbf{k} \times \nabla \bar{q}$ へ伝播する」という表現があるのだが, これについて解説する.

$\bar{q} = f/H$ なので \bar{q} は y 方向にのみ依存する. よって,

$$\nabla \bar{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

である. すると,

$$\mathbf{k} \times \nabla \bar{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \partial \bar{q} / \partial y & 0 \end{pmatrix} = -\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \mathbf{i}$$

となる. つまり実際にはロスビー波は東西方向に伝搬することが分かる. (3-49) から U の逆方向に伝搬することがわかる.

²²⁾ $U = -(g/f)\partial H/\partial y$

3-7 初期条件の応答

概要

初期条件の取り扱いについて議論する。実際に観測すると、総観規模においてはロスビー波に近い性質の波は観測されるが、慣性重力波はあまり見えない。初期値を決める際にはこの実際に合うように決める必要がある。この節では前節で扱った慣性重力波とロスビー波を考慮して初期値を導く。

2-7, 2-8 節では、11 章で議論する初期値の取り扱いに関して背景を説明する。前節では 2 つのタイプの波動について紹介した。1 つ目は速い慣性重力波で約 300 m sec^{-1} の速度を持つ ($H = 10 \text{ km}$ の場合)。2 つ目は遅いロスビー波で約 10 m sec^{-1} ¹⁾ の速度を持つ。たいていの気象システム²⁾ ではロスビー波くらいの位相速度を持つ。このことは、総観規模の運動では慣性重力波は小さな振幅しか持たないことを示している。完全な (つまりは $\delta = 1$ な) 方程式系を予報に使う時には、慣性重力波が小さな振幅を持つようにそれらの初期値をとることが重要である。この問題は任意の初期条件を用いた前節の解を足し合わせることで調べることができる。前節では (3-44) より慣性重力波の 2 つのモードが、(3-50) よりロスビー波の 1 つのモードが得られた。それぞれのモードに対して位相速度があり、それらの 3 つの位相速度 $c_j, j = 1, 2, 3$ に対応して、速度成分 u_j, v_j と自由表面の高さ h_j に関する異なる解のセットが存在する。しかし、系 (3-41) は同次方程式であるため、後者の物理量³⁾ の一つはどのセットでも任意となってしまうため、解くためにはどれか一つを特定しなければならない⁴⁾。ここでは μ を固定した上で u_j を $u_j = U - c_j$ と特定して、他の振幅 v_j, h_j に関する方程式系 (3-42) ($\delta = 1$) の上 2 つの式を解く。その結果は以下のようなになる⁵⁾。

$$\begin{aligned} u_j &= U - c_j, \\ v_j &= if/\mu, \\ h_j &= g^{-1} [(f^2/\mu^2) - (U - c_j)^2]. \end{aligned} \tag{3-60}$$

¹⁾ $10 \text{ m sec}^{-1} = 864 \text{ km day}^{-1} \sim 1000 \text{ km day}^{-1}$ である。これはおよそ低気圧や高気圧の移動する速度である。

²⁾ ここでは中緯度での温帯低気圧の移動のような気象システムを考えている。当然他にも気象システムには「降雨」や「竜巻」といった様々なスケールのもがある。

³⁾ u_j, v_j, h_j のこと。

⁴⁾ (3-42) を u_0, v_0, h_0 に関して解いてみても、一意に解は得られない。ただし、 u_0, v_0, h_0 の 3 変数の互いの関係式は得られるため、この 3 つのうちどれかを決定すれば他の 2 変数は決めることができる。

⁵⁾ (3-42) の u_0, v_0, h_0 にそれぞれ u_j, v_j, h_j を代入する。まず、 $u_j = U - c_j$ を (3-42) の 2 つ目の式

$$fu_0 + i\mu(U - c)v_0 = 0$$

に代入して v_j の値を得る。それらを 1 つ目の式

$$(U - c)i\mu u_0 - fv_0 + gi\mu h_0 = 0$$

に代入することで h_j が得られる。

特定の μ に関する一般的な解は以下ようになる。

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=1}^3 a_j u_j e^{i\mu(x-c_j t)}, \\ v &= \sum_{j=1}^3 a_j v_j e^{i\mu(x-c_j t)}, \\ h &= \sum_{j=1}^3 a_j h_j e^{i\mu(x-c_j t)}. \end{aligned} \quad (3-61)$$

ここで a_j は任意の定数である。

$t = 0$ における u, v, h の初期値は調和関数の波動解 $u(x, 0) = u_0 e^{i\mu x}$, $v(x, 0) = v_0 e^{i\mu x}$, $h(x, 0) = h_0 e^{i\mu x}$ だと考える。 u_0, v_0, h_0 は複素定数である。これらの初期条件を (3-61) に代入すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{j=1}^3 a_j u_j, \\ v_0 &= \sum_{j=1}^3 a_j v_j, \\ h_0 &= \sum_{j=1}^3 a_j h_j. \end{aligned} \quad (3-62)$$

位相速度は近似的に以下ようになる⁶⁾。

$$\begin{aligned} c_1 &= U - \frac{U}{1 + (gH\mu^2/f^2)}, \\ c_2 &= U + \sqrt{gH + (f^2/\mu^2)}, \\ c_3 &= U - \sqrt{gH + (f^2/\mu^2)}. \end{aligned} \quad (3-63)$$

(3-63) を (3-60) に代入し、それらの値を (3-62) に代入して a_j に関して解くと、 a_j が得られる。

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{i\mu f^{-1} gH v_0 - g h_0}{U^2 f^4 \mu^{-4} \alpha^{-2} - \alpha}, \\ a_{2,3} &= \mp u_0 / 2\alpha^{1/2} \mp \frac{i f \mu^{-1} (1 \pm U\alpha^{-1/2}) v_0 + g h_0}{2(U f^2 \mu^{-2} \alpha^{-1/2} \pm \alpha)}. \end{aligned} \quad (3-64)$$

なお、 $\alpha \equiv gH + f^2 \mu^{-2}$ ⁷⁾ である。

初期状態が地衡流的であると考えると、

$$u = -\frac{g}{f} \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad v = \frac{g}{f} \frac{\partial h}{\partial x}$$

であり、これらは

$$u_0 = 0, \quad v_0 = i\mu f^{-1} g h_0 \quad (3-65)$$

⁶⁾1 つ目の式は (3-50) に (3-49) を代入することで得られる。2,3 つ目の式は (3-44) に基本場の平均風速を加えたものである。

⁷⁾つまり慣性重力波の位相速度の2乗である。(3-44) を参照せよ。

と対応する⁸⁾。これら初期条件を (3-64) に代入すると、振幅は以下ようになる。

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\mu^2 f^{-2} g h_0}{1 - U^2 f^4 \mu^{-4} \alpha^{-3}}, \\ a_{2,3} &= \frac{U \alpha^{-3/2} g h_0}{2(1 \pm U f^2 \mu^{-2} \alpha^{-3/2})}. \end{aligned} \quad (3-66)$$

総観規模における擾乱では以下のような不等式が成り立つ⁹⁾。

$$\alpha^{1/2} > f \mu^{-1} \gg U. \quad (3-67)$$

v の初期値へのロスビー波の寄与 [すなわち, (3-61) の 2 つ目の式に対する $if\mu^{-1}a_1$ のことである] は v_0 の位相と一致し、その大きさは v_0 に比べてわずかに大きいだけである¹⁰⁾。これは初期の回転成分¹¹⁾ がほぼ地衡流的であることを示唆している。慣性重力波は初期条件 (3-65) にも現れているのだが、慣性重力波の振幅とロスビー波の振幅の比は

$$\frac{a_{2,3}}{a_1} \simeq \frac{U}{(gH)^{1/2}} \frac{f^2}{\mu^2 g H} \quad (3-68)$$

であり、(3-67) よりこの数値は非常に小さい。

u_0 に適切な値をとると、慣性重力波は完全に消去することができる。(3-64) において $a_{2,3}$ はゼロであるとし、 v_0 に関する地衡流の関係を用いると、 u_0 の式が得られる¹²⁾。

$$u_0 = \frac{U g h_0}{g H + f^2 \mu^{-2}}. \quad (3-69)$$

ここでは分母において α に比べて小さい項は落としてある。初期状態の u の振幅 (3-69) と (3-61) における指数部分より、(3-58) で与えられたような準地衡流発散が正確に得られる¹³⁾。

⁸⁾初期状態を考えているのだから、 $u(x, 0) = u_0 e^{i\mu x}$, $v(x, 0) = v_0 e^{i\mu x}$, $h(x, 0) = h_0 e^{i\mu x}$ を地衡流平衡の式に代入するとこれらの式が得られる。

⁹⁾総観規模での平均的な物理量からこの不等式について考えてみる。 $f \sim 10^{-4}$, $\mu \sim 1/10^3$ [km⁻¹] とすると、 $f\mu^{-1} \sim 10^{-4} \times 10^6 = 100$ [m/s]、 $g \sim 10$ [m/s²]、 $H \sim 10^4$ [m] とすると、 $\alpha^{1/2} = \sqrt{gH + f^2 \mu^{-2}} \sim \sqrt{10^5 + 10^4} \sim 10^2 \sqrt{10} \sim 300$ [m/s]。そして $U \sim 10$ [m/s] である。こう考えると、(3-67) が総観規模における不等式であることが分かる。

¹⁰⁾ $if\mu^{-1}a_1$ は (3-66) より、

$$\begin{aligned} if\mu^{-1}a_1 &= if\mu^{-1} \frac{\mu^2 f^{-2} g h_0}{1 - U^2 f^4 \mu^{-4} \alpha^{-3}} \\ &= i\mu f^{-1} g h_0 \frac{1}{1 - \left(\frac{U}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 \left(\frac{f\mu^{-1}}{\sqrt{\alpha}}\right)^4} \\ &\sim i\mu f^{-1} g h_0 \left\{ 1 + \left(\frac{U}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 \left(\frac{f\mu^{-1}}{\sqrt{\alpha}}\right)^4 \right\} \end{aligned}$$

となる。なお、計算の途中で (3-67) を用いて近似を行った。この結果より、 i がついているため $v_0 = i\mu^{-1}gh_0$ と位相が一致することが分かる。また、 v_0 と異なるのは $(U/\sqrt{\alpha})^2 (f\mu^{-1}/\sqrt{\alpha})^4$ の分であり、これは (3-67) より微小であることがわかっていて、これより、ロスビー波の寄与と v_0 が非常に似ていることがわかる。

¹¹⁾ここで言う「回転成分」とはロスビー波の成分のことである。2-6 節で慣性重力波は発散が支配し、ロスビー波は回転が支配することは既に述べられた。つまりここでは、 $j = 1$ はロスビー波の成分なので「回転成分」であり、 $j = 2, 3$ は慣性重力波の成分なので「発散成分」である。

結局、わざわざ地衡流平衡の定義を用いずとも、総観規模における各物理量の大きさを考える (具体的には (3-67) を用いる) と、 v ではロスビー波 (回転成分) が支配的であり、始めからその回転成分がほぼ地衡風平衡な状態を作っているということである。

¹²⁾(3-64) にて $a_{2,3} = 0$ として、さらにそこに (3-65) の $v_0 = i\mu f^{-1}gh_0$ を代入して近似することでこの u_0 に関する式が得られる。

¹³⁾(3-69) を (3-61) に代入すると、

$$u = u_0 e^{i\mu(x-ct)} = \frac{U g h_0}{g H + f^2 \mu^{-2}} e^{i\mu(x-ct)}$$

となる。(正確には指数部は $e^{i\mu(x-c_j t)}$ なのでこの式は正しくないが、簡単のためこう記述する。) これを x で微分して $h = h_0 e^{i\mu(x-cl)}$ を使うことで (3-58) が得られる。

3-8 地衡風調節

概要

大きな規模で見た場合、大気はほぼ地衡流バランスを保っている。局所的に不均衡が生じた場合も重力波がそのエネルギーを外へ伝搬して地衡流バランスが保たれるようになっている。これを地衡風調節 (*geostrophic adjustment*) という。この現象をプリミティブ方程式系の初期値の設定に利用する。

まず、線形浅水方程式をフーリエ変換した方程式系を解き、その解を時間依存の項とそうでない項に分ける。これらの解はそれぞれ不均衡の状態と地衡流調節後の静止状態のものである。これらの解を今度は逆フーリエ変換し、風速、高さの初期値を求める。

2-7 節ではそれぞれが同じ波長を持つ 2 つの重力波とロスビー波の比較を取り扱った。重力波は、摩擦が無い限り維持され続ける地衡流バランスに関して周期振動を生み出す。しかし、もし初期状態において無限領域内のある限られた部分で不均衡が発生したとしても、結果的に重力波はその不均衡をその領域外に伝搬する。この一定期間の調節後には地衡流バランスの状態に戻る。このプロセスは、不完全な初期状態が与えられた時のプリミティブ方程式系の応答を決定する。実際に、この調節プロセスが機能し続けるおかげで、大気はほぼ地衡流バランスの状態を保っている。

静止状態を基本場とした線形浅水方程式系は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - fv + g\frac{\partial h}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu &= 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + H\frac{\partial u}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{3-70}$$

これらは (3-41) にて $U = 0$ として得ることができる。以前にも示したようにこの系は 3 つの波動解を持つ。2 つの慣性重力波 (3-44) とロスビー波 (3-50) である。 H が一定の時、 $\partial\bar{q}/\partial y = 0$ なので¹⁾ ロスビー波は静止する²⁾。

ここから、空間フーリエ変換を用いて (3-70) を解く。フーリエ変換は以下のように定義される。

$$\tilde{u}(\mu, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{-i\mu x} dx. \tag{3-71}$$

逆変換は以下のように記述できる。

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\mu, t)e^{i\mu x} d\mu. \tag{3-72}$$

(3-70) に $e^{-i\mu x}$ をかけ、 $-\infty$ から ∞ まで積分する。 x 微分の項を部分積分すると、無限における項

¹⁾(3-49) から得られるものである。

²⁾(3-50) より、 $\partial\bar{q}/\partial y = 0$ および $U = 0$ の場合、ロスビー波の位相速度はゼロになることが分かる。

は落ち、方程式系は以下のような普通の微分方程式になる³⁾。

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{u}}{dt} &= f\tilde{v} - i\mu g\tilde{h}, \\ \frac{d\tilde{v}}{dt} &= -f\tilde{u}, \\ \frac{d\tilde{h}}{dt} &= -i\mu H\tilde{u}.\end{aligned}\quad (3-73)$$

\tilde{v} と \tilde{h} は (3-71) と同様に定義される。 u の初期値のフーリエ変換は以下のように与えられる。

$$\tilde{u}_0 = \tilde{u}(\mu, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0)e^{-i\mu x} dx. \quad (3-74)$$

\tilde{v}_0 と \tilde{h}_0 も同様に定義される。系 (3-73) は、以前に浅水方程式系の解として得られたものと同じ、 $e^{-i\mu c_j t}$ の形の解を持つ。つまり $U = 0$ である場合には、位相速度は $c_1 = 0, c_2 = \mu^{-1}\nu, c_3 = -\mu^{-1}\nu$ となる。なお、ここでの振動数 ν は

$$\nu = (f^2 + \mu^2 gH)^{1/2} \quad (3-75)$$

である。任意の $\tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \tilde{h}_0$ に関する一般解は (3-61) で u を \tilde{u} に置き換えるなどした式と、 $U = 0$ とした (3-64) から得ることができる。これらの組み合わせることで以下の解が得られる⁴⁾。

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\mu, t) &= \tilde{u}_0 \cos \nu t + \left(\frac{f\tilde{v}_0 - i\mu g\tilde{h}_0}{\nu} \right) \sin \nu t, \\ \tilde{v}(\mu, t) &= \frac{\mu^2 gH\tilde{v}_0 + i\mu g f\tilde{h}_0}{\nu^2} - \frac{f\tilde{u}_0 \sin \nu t}{\nu} + \left(\frac{f^2\tilde{v}_0 - i\mu g f\tilde{h}_0}{\nu^2} \right) \cos \nu t, \\ \tilde{h}(\mu, t) &= \left(\frac{f^2\tilde{h}_0 - i\mu H f\tilde{v}_0}{\nu^2} \right) - \frac{i\mu H\tilde{u}_0 \sin \nu t}{\nu} + \left(\frac{\mu^2 gH\tilde{h}_0 + i\mu H f\tilde{v}_0}{\nu^2} \right) \cos \nu t.\end{aligned}\quad (3-76)$$

どの式も定常状態の部分 ()_S と時間変化する部分 ()_T の足し合わせによって書くことができる。それぞれを記述すると、

$$\begin{aligned}\tilde{u}_S(\mu) &= 0, \\ \tilde{v}_S(\mu) &= \frac{i\mu g}{f} \left(\frac{f^2\tilde{h}_0 - i\mu f H\tilde{v}_0}{\nu^2} \right), \\ \tilde{h}_S(\mu) &= \left(\frac{f^2\tilde{h}_0 - i\mu f H\tilde{v}_0}{\nu^2} \right)\end{aligned}\quad (3-77)$$

および、

$$\begin{aligned}\tilde{u}_T(\mu) &= \tilde{u}_0 \cos \nu t + \frac{f}{\nu} (\tilde{v}_0 - if^{-1}\mu g\tilde{h}_0) \sin \nu t, \\ \tilde{v}_T(\mu) &= -\frac{f}{\nu}\tilde{u}_0 \sin \nu t + \frac{f^2}{\nu^2} (\tilde{v}_0 - if^{-1}\mu g\tilde{h}_0) \cos \nu t, \\ \tilde{h}_T(\mu) &= -\frac{i\mu H}{\nu}\tilde{u}_0 \sin \nu t + \frac{i\mu H f}{\nu^2} (\tilde{v}_0 - if^{-1}\mu g\tilde{h}_0) \cos \nu t\end{aligned}\quad (3-78)$$

³⁾この計算に関しては 3-8-A 参照。

⁴⁾これらの解の導出に関しては 3-8-B 参照。

である。静止状態の解 (3-77) は $\tilde{v}_S = i\mu g f^{-1} \tilde{h}_S$, $\tilde{u}_S = 0$ なので地衡風バランスの状態を表す。これは (3-73) において $d/dt = 0$ とした場合と同じである。時間変化する解 (3-78) は初期状態における地衡風バランスからのずれに直接比例している。地衡風バランスからのずれとは、 $\tilde{v}_0 - i\mu g f^{-1} \tilde{h}_0$ と \tilde{u}_0 のことである。

静止状態の解は後でより詳細に調べることにして、ここではまず時間変化する解が時間の増加するにつれて消えることを示す。逆変換 (3-72) を使うと時間変化する解は以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned} u_T(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_0 \cos \nu t e^{i\mu x} d\mu + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f}{\nu} \tilde{d}(\mu, 0) \sin \nu t e^{i\mu x} d\mu, \\ v_T(x, t) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f \tilde{u}_0}{\nu} \sin \nu t e^{i\mu x} d\mu + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2}{\nu^2} \tilde{d}(\mu, 0) \cos \nu t e^{i\mu x} d\mu, \\ h_T(x, t) &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu H}{\nu} \tilde{u}_0 \sin \nu t e^{i\mu x} d\mu + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu H f}{\nu^2} \tilde{d}(\mu, 0) \cos \nu t e^{i\mu x} d\mu. \end{aligned} \tag{3-79}$$

なお、

$$d(x, t) = v(x, t) - g f^{-1} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$$

であり、これは地衡風バランスからのずれを意味する⁵⁾。Schoenstadt(1977) は鞍点法 (*saddle point method*)、または停留点法 (*stationary phase method*) と呼ばれる方法をこの方程式系 (3-79) に用いた。 x を固定し、 $|x| \ll L_R f t = (gH)^{1/2} t$ である時、方程式は以下のようなになる⁶⁾。

$$\begin{aligned} u_T &\sim \frac{1}{(2\pi\alpha)^{1/2}} \left[|\tilde{u}(x/\alpha, 0)| \cos(ft + \phi) + |\tilde{d}(x/\alpha, 0)| \sin(ft + \psi) \right], \\ v_T &\sim \frac{1}{(2\pi\alpha)^{1/2}} \left[-|\tilde{u}(x/\alpha, 0)| \sin(ft + \phi) + |\tilde{d}(x/\alpha, 0)| \cos(ft + \psi) \right], \\ h_T &\sim \frac{1}{(2\pi\alpha)^{1/2}} \frac{(-Hx)}{f\alpha} \left[|\tilde{u}(x/\alpha, 0)| \sin(ft + \phi) - |\tilde{d}(x/\alpha, 0)| \cos(ft + \psi) \right]. \end{aligned} \tag{3-80}$$

ここで ψ と ϕ はゆっくりと変化する位相角度である。 $L_R = (gH)^{1/2}/f$ はロスビーの変形半径 (*Rossby radius of deformation*)⁷⁾ と呼ばれる量である。なお、 $\alpha = L_R^2 f t$ である。

極限での解 (3-80) は、 x を固定した場合、時間変化する速度 u_T, v_T は $t^{-1/2}$ に比例して消え、 h_T は $t^{-3/2}$ に比例して消えていくことを示している⁸⁾。初期の不均衡は慣性重力波を生じさせ、その慣性

⁵⁾この式に $e^{-i\mu x}$ をかけ、 $-\infty$ から ∞ まで積分すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d(x, t) e^{-i\mu x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} v(x, t) e^{-i\mu x} dx + (g/f) \int_{-\infty}^{\infty} (\partial h / \partial x) e^{-i\mu x} dx \\ \tilde{d}(\mu, t) &= \tilde{v}(\mu, t) + (g/f) \left\{ [h e^{-i\mu x}]_{-\infty}^{\infty} + i\mu \int_{-\infty}^{\infty} h e^{-i\mu x} dx \right\} \\ &= \tilde{v}(\mu, t) + (i\mu g / f) \tilde{h}(\mu, t) \end{aligned}$$

となる。初期状態 $t = 0$ を考えると、

$$\tilde{d}(\mu, 0) = \tilde{v}_0 + (i\mu g / f) \tilde{h}_0$$

である。

⁶⁾停留点法に関しては有馬 他 (1991)、江沢 (1995)、後藤 他 (1979)、林 (1990) などを参照のこと。

⁷⁾ \sqrt{gH} は水面波 (浅水波) の伝播速度であり L_R は回転周期程度の時間 f の間で水面波の到達できる距離に対応している。

⁸⁾ $\alpha = L_R^2 f t$ であることに注意。

重力波はエネルギーをその初期の不均衡な領域から遠くに運ぶことからこの振舞は生じる。実際には、エネルギーは群速度 (*group velocity*) で伝搬する。群速度は以下の式で与えられる。

$$G = \frac{\partial \nu}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} (f^2 + \mu^2 gH)^{1/2} = \mu gH (f^2 + \mu^2 gH)^{-1/2}. \quad (3-81)$$

この式は、短波エネルギー⁹⁾ が浅水波の速度で移動していくことを示している¹⁰⁾。一方、より大きなスケールではエネルギーはよりゆっくり移動することも分かる¹¹⁾。時間変化する波が初期の不均衡領域から伝搬していった後には安定した状態だけが残る。これは (3-80) において数学的に示されている。この式では、 x を固定した状態では解は段々小さくなっていく。(すなわち、時間変化する波は x とは関係なく動く)。

最終的な解は比 L_R^2/L^2 に依存する。波長のスケールは $L = 1/\mu$ である。(3-77) を書き換えると、

$$\begin{aligned} \tilde{v}_S &= \frac{1}{1 + (L_R^2/L^2)} \left(\frac{L_R^2}{L^2} \tilde{v}_0 + i\mu f^{-1} g \tilde{h}_0 \right), \\ \tilde{h}_S &= \frac{1}{1 + (L_R^2/L^2)} \left(\frac{L_R^2}{L^2} f \tilde{v}_0 + \tilde{h}_0 \right) \end{aligned} \quad (3-82)$$

となる。初期状態ではコリオリ力と圧力勾配が同じオーダーだと仮定する。このことは \tilde{v}_0 と $i\mu f^{-1} g \tilde{h}_0$ が同じオーダーを持つということである¹²⁾。まず最初に $L^2 \ll L_R^2$ である場合を考える。この場合に (3-82) は以下のように近似される。

$$\tilde{v}_S = \tilde{v}_0, \quad \tilde{h}_S = \frac{f \tilde{v}_0}{i\nu g}. \quad (3-83)$$

最終的な風速は初期状態の風速と等しく、最終的な高度は初期状態の風速場と地衡流的な関係にあることが分かる。

$L^2 \gg L_R^2$ という条件を (3-82) に用いると以下のように近似される。

$$\tilde{v}_S = i\mu f^{-1} g \tilde{h}_0, \quad \tilde{h}_S = \tilde{h}_0. \quad (3-84)$$

この場合、最終的な状態は全て初期状態の高さによって決定される。この振る舞いは次のように要約することができる。スケールが L_R より小さい場合、最終的な状態は初期状態の風速によって決定され、スケールが L_R より大きい場合、最終的な状態は初期状態の質量場によって決定される。ここで得られた単純なシステムでの結果は、より複雑なシステムでも成り立つ。この結果は2次元順圧大気¹³⁾ にも用いられる。 $L_R = c_g/f$ の場合は連続成層の大気¹⁴⁾ にこの結果を応用することができる。 c_g は慣性重力波の位相速度である¹⁵⁾。この結果は、鉛直構造を水平構造と分離して考え、固有関数に代入して求めることができる。

⁹⁾ロスビーの変形半径 L_R に比べて“短い”波のことである。

¹⁰⁾本当はちゃんとエネルギーの式を求めてからでないと、 $G = \partial\mu/\partial\mu$ とは言えないがここではその式の導出は行わない。

¹¹⁾ f はコリオリパラメータなので規模が小さい場合には効果が弱く $\mu gH (f^2 + \mu^2 gH)^{-1/2} \simeq \sqrt{gH}$ と近似できる。逆に大規模になった場合はコリオリパラメータが効いてくるので f は残り、群速度 G は小さくなる。

¹²⁾ \tilde{v}_0 がコリオリ力を、 $i\mu f^{-1} g \tilde{h}_0$ が圧力勾配を表す。これらの項は遡れば (3-73) の1つ目の式の右辺の第1項 $f\tilde{v}$ 、第2項 $i\mu g\tilde{h}$ であり、更に遡れば (3-70) の1つ目の式の左辺の第2項 $f\tilde{v}$ 、第3項 $g\partial\tilde{h}/\partial x$ である。この $g\partial\tilde{h}/\partial x$ は2-5節にて $g\partial\tilde{h}/\partial x = (1/\bar{\rho})\partial p/\partial x$ という関係式によって圧力勾配を書き換えた項である。このことから \tilde{v}_0 がコリオリ力を、 $i\mu f^{-1} g \tilde{h}_0$ が圧力勾配を表すことが分かる。

¹³⁾順圧大気 (*barotropic atmosphere*) とは水平方向に温度が一樣であり、密度が圧力のみ関数であるような大気のことである。このような大気中での風は高さ方向に一樣である。

¹⁴⁾基本場の密度が高さによって変化するような多層構造をもつ大気のこと。この節でのここまでの議論は、すべて一層の大気の話であった。

¹⁵⁾2-6節の (3-44) より $c_g = \pm\sqrt{gH + f^2/\mu^2}$ であり、 $L_R = (gH)^{1/2}/f$ であるから、つまりコリオリ力が効かない場合にこの応用は可能になる。

中緯度における順圧大気で $H \approx 10\text{km}$ の場合, $L_R = 3000\text{km}$ であり, $2\pi L_R = 18,000\text{km}$ である¹⁶⁾. この場合, おおよそ 5000km の波長を持つ総観規模での波動は明らかに「短」波である¹⁷⁾. しかし, 成層大気の場合は慣性波の速度が $c_g \sim 100 \text{ m sec}^{-1}$ となるため $L_R \sim 1000 \text{ km}$ となり, 総観規模での波動のスケールに匹敵する. このように, 初期状態での質量, 風速場がこれらの波の初期値の設定には重要である. なお, 熱帯では f が小さいため L_R が大きくなり, ほとんどの波は「短い」. つまり熱帯では初期状態の風速場が最終的な状態を決定する.

初期状態での地衡風平衡からのずれの積分によって最終的な高度場を記述することは有用である. (3-77) の 3 つ目の式を用いた h_S の逆変換は (3-72) を用いて以下のように記述することができる¹⁸⁾.

$$h_S(x) = h(x, 0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Hf i\mu}{\nu^2} \tilde{d}_0 e^{i\mu x} d\mu. \quad (3-85)$$

d_0 は初期状態での地衡風平衡からのずれである. ここではたたみ込みの定理 (*convolution theorem*) を用いると便利である. これは以下のように表すことができる.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\mu) \tilde{G}(\mu) e^{i\mu x} d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} F(x') G(x-x') dx'. \quad (3-86)$$

\tilde{F} と \tilde{G} は F と G を変換したものである. フーリエ変換で以下のように記述できる式を考える.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/L_R} e^{-i\mu x} dx = \frac{2L_R}{1 + \mu^2 L_R^2} = \frac{2L_R f^2}{\nu^2}.$$

$G(x) = e^{-|x|/L_R}$, $F(x) = \partial d(x, 0)/\partial x$ とした (3-86) を使うと (3-85) は以下ようになる¹⁹⁾.

$$h_S(x) = h(x, 0) - \frac{H}{2L_R f} \int_{-\infty}^{\infty} e^{|x-x'|/L_R} \frac{\partial d(x', 0)}{\partial x'} dx'.$$

この解を部分積分すると以下ようになる.

$$h_S(x) = h(x, 0) + \frac{H}{2L_R^2 f} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-x'}{|x-x'|} e^{|x-x'|/L_R} d(x', 0) dx'. \quad (3-87)$$

この結果は, ある特定の点における初期状態の地衡風平衡からのずれの影響は距離 L_R が大きくなるにつれて無くなっていくことを示している. 静止状態での速度場は (3-87) と以下の地衡風の関係

¹⁶⁾ $H \approx 10^4$ [m], $g \approx 10$ [m/s²] であり, $\varphi = 60^\circ$ とすると, $f = 2\Omega \sin \varphi = 7.27 \times 10^{-5}$ [1/s] である. なお, $\Omega = 2\pi/86400 = 7.27 \times 10^{-5}$ [1/s] を使った. すると $L_R = (gH)^{1/2}/f \approx (316/7.27) \times 10^5 \approx 4.35 \times 10^6$ [m] = 4350 [km] となる. 本文とは少々異なるが, だいたい同じくらいの値となる.

¹⁷⁾ $L = 1/\mu$ であるから, 波長は $2\pi L$ である.

¹⁸⁾ (3-77) より,

$$\begin{aligned} \tilde{h}_S(\mu) &= \frac{f^2}{\nu^2} - \frac{i\mu f H}{\nu^2} \tilde{v}_0 \\ &= \tilde{h}_0 + \frac{f^2 - \nu^2}{\nu^2} \tilde{h}_0 - \frac{i\mu f H}{\nu^2} \tilde{v}_0 \\ &= \tilde{h}_0 + \frac{\mu^2 g H}{\nu^2} \tilde{h}_0 - \frac{i\mu f H}{\nu^2} \tilde{v}_0 \\ &= \tilde{h}_0 - \frac{Hf i\mu}{\nu^2} \left(\tilde{v}_0 + \frac{i\mu g}{f} \tilde{h}_0 \right) \\ &= \tilde{h}_0 - \frac{Hf i\mu}{\nu^2} \tilde{d}_0 \end{aligned}$$

である. なお, (3-79) が登場した際においても述べたが, $\tilde{d}(\mu, 0) = \tilde{v}_0 + (i\mu g/f) \tilde{h}_0$ である. この式に $2\pi e^{i\mu x}$ をかけて $-\infty$ から ∞ まで積分すると (3-72) より (3-85) が得られる.

¹⁹⁾ この式の導出に関しては 3-8-C を参照のこと.

式から得ることができる。

$$v_S(x) = fg^{-1}\partial h_S/\partial x, \quad u_S = 0. \quad (3-88)$$

2章の7,8節では非地衡風の初期状態からの2つの異なった応答を取り扱った。2-6節では初期状態は一つのサイン曲線を描く波の形状をしており、解は地衡風の状態において(時間的にも空間的にも)際限なく振動する。この節では初期状態の不均衡は限定された領域に局在し、重力波が不均衡を領域の外へ伝搬するにつれ解は静止状態に近づく。このプロセスは2次元領域ではさらに速く作用する。それは、同じ時間内に重力波がエネルギーをさらに広い領域に広げるからである。一般的に、初期状態の不均衡のスケールが領域のスケールに比べて小さい場合、調節作用は非常に効率的におこなわれる。一方お互いのスケールが同じぐらいの場合、その場は同じ時間が経過していてもまだ安定せずに振動している。最終的な状態、つまりは調節がおこなわれた後の状態、は完全に $(L_R/L)^2$ に依存している。 $L_R = c_g/f$ であり、 c_g はその系における適当な重力波の位相速度である。初期状態の L のスケールが L_R に比べて小さい場合、最終的な状態は初期状態の風速の回転の部分で決定される。一方、 L が L_R に比べて大きい場合、最終的な状態は初期状態の質量場によって決定される。プリミティブ方程式系において初期値の設定をおこなう際にこの調節プロセスを考慮するのは非常に重要である。

3-8-A 線形浅水方程式のフーリエ変換

線形浅水方程式系(3-70)をフーリエ変換して(つまりは(3-71)を利用して)、(3-73)を導く。

(3-70)の1つ目の式に $e^{-i\mu x}$ をかけ、 $-\infty$ から ∞ まで積分すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-i\mu x} dx - \int_{-\infty}^{\infty} f v e^{-i\mu x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} g \frac{\partial h}{\partial x} e^{-i\mu x} dx = 0 \quad (3-8-A-1)$$

となる。(3-8-A-1)の第1項を考える。この項では被積分関数で t に依存するのは u のみなので²⁰⁾、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-i\mu x} dx = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-i\mu x} dx \quad (3-8-A-2)$$

である。次に第2項を考える。 f は x の関数ではないので簡単に被積分関数から外すことができる。最後に第3項を考える。 g は定数であるから被積分関数からはずすことができるが、 h および $e^{-i\mu x}$ は x の関数である。この項は逆フーリエ変換(3-72)を用いる。すると、

$$\begin{aligned} g \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial x} e^{-i\mu x} dx &= g \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\mu') e^{i\mu' x} d\mu' \right\} e^{-i\mu x} dx \\ &= \frac{i\mu g}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\mu') e^{i(\mu' - \mu)x} d\mu' dx \\ &= \frac{i\mu g}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\mu') \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\mu' - \mu)x} dx d\mu' \\ &= i\mu g \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\mu') \delta(\mu' - \mu) d\mu' \end{aligned}$$

²⁰⁾積分 $\int u e^{-i\mu x} dx$ は t のみの関数になるので、右辺における d/dt は $\partial/\partial t$ と等しい。

となる²¹⁾. さらに, デルタ関数の性質²²⁾ より,

$$g \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial x} e^{-i\mu x} dx = i\mu g \tilde{h}(\mu) \quad (3-8-A-3)$$

となる. (3-8-A-1) に (3-8-A-2) と (3-8-A-3) を代入し, フーリエ変換の式 (3-71) を用いることで以下の式が得られる.

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = f \tilde{v} - i\mu g \tilde{h}.$$

$U = 0$, (3-73) の以下の1つ目の式が得られる. 2つ目の式と3つ目の式も同様にして得られる.

3-8-B フーリエ変換された風速の解

ここではフーリエ変換された風速の解 (3-76) を求める. この導出には (3-60), (3-61), (3-63), (3-64) の式を用いる. また, ここでは \tilde{u} の導出のみおこなう. \tilde{v}, \tilde{h} の導出も同様の計算方法でおこなうことができる.

(3-61) の u 成分の式を展開して書くと,

$$u = a_1 u_1 e^{i\mu(x-c_1 t)} + a_2 u_2 e^{i\mu(x-c_2 t)} + a_3 u_3 e^{i\mu(x-c_3 t)} \quad (3-8-B-1)$$

となる. ここでは $U = 0$ としているため, $\nu = (f^2 + \mu^2 gH)^{1/2}$ とすると, (3-63) より

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \nu/\mu, \quad c_3 = -\nu/\mu \quad (3-8-B-2)$$

となる. (このことは本文でも述べられているが). また, (3-8-B-2) より (3-60) における u_j は

$$u_1 = 0, \quad u_2 = -\nu/\mu, \quad u_3 = \nu/\mu \quad (3-8-B-3)$$

となる. また $U = 0$ より, (3-64) は

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{i\mu f^{-1} h H v_0 - h_0}{\alpha}, \\ a_2 &= -u_0/2\alpha^{1/2} - \frac{if\mu^{-1}v_0 + gh_0}{2\alpha}, \\ a_3 &= u_0/2\alpha^{1/2} - \frac{if\mu^{-1}v_0 + gh_0}{2\alpha}. \end{aligned} \quad (3-8-B-4)$$

となる. $\alpha \equiv gH + f^2\mu^{-2}$ であり, $\nu = (f^2 + \mu^2 gH)^{1/2}$ なので $\alpha = \nu^2/\mu^2$ である. これを (3-8-B-4)

²¹⁾ここでは以下のデルタ関数の定義を用いた.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-x')} d\omega = \delta(x-x').$$

²²⁾デルタ関数は以下の関係式を満たす.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x-x') dx' = f(x).$$

に代入すると,

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{i\mu f^{-1}hHv_0 - h_0}{\nu^2/\mu^2}, \\ a_2 &= -\frac{u_0}{2\nu/\mu} - \frac{if\mu^{-1}v_0 + gh_0}{2\nu^2/\mu^2}, \\ a_3 &= \frac{u_0}{2\nu/\mu} - \frac{if\mu^{-1}v_0 + gh_0}{2\nu^2/\mu^2}. \end{aligned} \quad (3-8-B-5)$$

となる. (3-8-B-2), (3-8-B-3), (3-8-B-5) を (3-8-B-1) に代入すると,

$$\begin{aligned} u &= \left[\left(-\frac{u_0}{2\nu/\mu} - \frac{if\mu^{-1}v_0 + gh_0}{2\nu^2/\mu^2} \right) (-\nu/\mu) e^{-i\nu t} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{u_0}{2\nu/\mu} - \frac{if\mu^{-1}v_0 + gh_0}{2\nu^2/\mu^2} \right) (\nu/\mu) e^{i\nu t} \right] e^{i\mu x} \\ &= \left[\left(\frac{u_0}{2} + \frac{if\mu^{-1}v_0 + gh_0}{2\nu/\mu} \right) \cos \nu t \right. \\ &\quad \left(\frac{u_0}{2} + \frac{if\mu^{-1}v_0 + gh_0}{2\nu/\mu} \right) (-i \sin \mu t) \\ &\quad \left. + \left(\frac{u_0}{2} - \frac{if\mu^{-1}v_0 + gh_0}{2\nu/\mu} \right) \cos \nu t \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{u_0}{2} - \frac{if\mu^{-1}v_0 + gh_0}{2\nu/\mu} \right) (-i \sin \mu t) \right] e^{i\mu x} \\ &= \left[u_0 \cos \nu t + \left(\frac{fv_0 - i\mu gh_0}{\nu} \right) \sin \nu t \right] e^{i\mu x} \end{aligned} \quad (3-8-B-6)$$

となる. (3-8-B-6) の両辺に $e^{-i\mu x}$ をかけ, x で $-\infty$ から ∞ まで積分すると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\mu x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[u_0 \cos \nu t + \left(\frac{fv_0 - i\mu gh_0}{\nu} \right) \sin \nu t \right] dx \quad (3-8-B-7)$$

となる. $u(x, 0) = u_0 e^{i\mu x}$ なので²³⁾, (3-74) より

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-i\mu x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_0 dx = \tilde{u}_0 \quad (3-8-B-8)$$

である. ν と h に関しても同様である. (3-8-B-8) を (3-8-B-7) に代入すると,

$$\tilde{u}(\mu, t) = \tilde{u}_0 \cos \nu t + \left(\frac{f\tilde{v}_0 - i\mu g\tilde{h}_0}{\nu} \right) \sin \nu t \quad (3-8-B-9)$$

となる.

ν と h に関しても同様な方法で求めることができる.

²³⁾ 2-7 節にてそう定義されている.

3-8-C 最終的な高さ $h_S(x)$ の式の導出

最終的な高さ $h_S(x)$ に関する式 (3-87) を (3-85) から導出する。本文で使用しているたたみ込みの定理なども導出に利用する。

(3-85) は以下の式である。

$$h_S(x) = h(x, 0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Hf i\mu}{\nu^2} \tilde{d}_0 e^{i\mu x} d\mu. \quad (3-8-C-1)$$

たたみ込みの定理 (3-86) は以下の式である。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\mu) \tilde{G}(\mu) e^{i\mu x} d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} F(x') G(x-x') dx'. \quad (3-8-C-2)$$

本文通り, $G(x) = e^{-|x|/L_R}$, $F(x) = \partial d(x, 0)/\partial x$ とする。フーリエ変換を用いると \tilde{G} は

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/L_R} e^{-i\mu x} dx \\ &= \frac{2L_R f^2}{\nu^2} \end{aligned} \quad (3-8-C-3)$$

となる。これは本文の記述をそのまま引用したものである。次に \tilde{F} は、

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial d_0(x)}{\partial x} e^{-i\mu x} dx \\ &= [d_0(x) e^{-i\mu x}]_{-\infty}^{\infty} - (-i\mu) \int_{-\infty}^{\infty} d_0(x) e^{-i\mu x} dx \\ &= i\mu \tilde{d}_0 \end{aligned} \quad (3-8-C-4)$$

(3-8-C-3) と (3-8-C-4) より

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\mu) \tilde{G}(\mu) e^{i\mu x} d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2iL_R f^2 \mu}{\nu^2} \tilde{d}_0 e^{i\mu x} d\mu$$

であり, $L_R = (gH)^{1/2}/f$ より,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\mu) \tilde{G}(\mu) e^{i\mu x} d\mu = \frac{2L_R f}{H} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Hf i\mu}{\nu^2} \tilde{d}_0 e^{i\mu x} d\mu \quad (3-8-C-5)$$

である。(3-8-C-2) と (3-8-C-5) より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Hf i\mu}{\nu^2} \tilde{d}_0 e^{i\mu x} d\mu &= \frac{H}{2L_R f} \int_{-\infty}^{\infty} F(x') G(x-x') dx' \\ &= \frac{H}{2L_R f} \int_{-\infty}^{\infty} e^{|x-x'|/L_R} \frac{\partial d(x', 0)}{\partial x'} dx' \end{aligned} \quad (3-8-C-6)$$

となる。(3-8-C-1) と (3-8-C-6) より,

$$h_S(x) = h(x, 0) - \frac{H}{2L_R f} \int_{-\infty}^{\infty} e^{|x-x'|/L_R} \frac{\partial d(x', 0)}{\partial x'} dx' \quad (3-8-C-7)$$

となる。この式の右辺第 2 項を部分積分すると,

$$\begin{aligned} h_S(x) &= h(x, 0) - \frac{H}{2L_R f} \left\{ [e^{|x-x'|/L_R} d(x', 0)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-x'}{|x-x'|} \frac{1}{L_R} e^{|x-x'|/L_R} d(x', 0) dx' \right\} \\ &= h(x, 0) + \frac{H}{2L_R^2 f} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-x'}{|x-x'|} e^{|x-x'|/L_R} d(x', 0) dx' \end{aligned} \quad (3-8-C-8)$$

となる。これは本文の (3-87) である。

第4章 スケール解析

4-1 スケール解析とは

概要

この章ではスケール解析 (*scale analysis*) を取り扱う。この節ではこのスケール解析の概要を述べる。

この章ではスケール解析 (*scale analysis*) を取り扱う。スケール解析は、大気の運動の流体力学的支配方程式系を構成する様々な項のオーダーを比較する体系的な手法である。この理論により、エネルギーの考慮も含め、力学的解析や数値予報の力学的・数学的モデルの作成が可能になった。

物理量は各々、特徴的な値と特徴的な空間と時間のスケールを持つと仮定される。特徴的な空間、時間のスケールとは以下のものである¹⁾。

$$\begin{aligned} L &= \text{特徴的水平スケール (およそ擾乱の波長の 4 分の 1)}, \\ T &= \text{局所時間スケール (およそ周期の 4 分の 1)}, \\ V &= \text{特徴的な水平速度}. \end{aligned}$$

図 4-1 に見られるように、微分のオーダーは以下のように仮定される。

$$\frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{V}{L}, \quad \text{など}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \sim \frac{V}{T}.$$

以後は、各々の方程式の全ての項は同じ次元の組み合わせと無次元の係数との積で表される²⁾。係数のオーダーの相対的な大きさによってその項が無視されるかどうか決定される。この解析によって、解析を始めた際には特定できなかった鉛直方向の運動のようないくつかの量のスケールが得られる。次節ではまず浅水方程式系のスケール解析をおこなう。その後、この解析の結果を使って図 2-1 で見られた様々な現象のスケール解析をおこなう。

2 節では前述したように浅水方程式系のスケール解析をおこない、順圧大気下の準地衡流の方程式系を導く。3 節では順圧大気よりも複雑な傾圧大気のスケール解析をおこなう。このスケール解析はその後の節に利用される。4 節では具体的に、傾圧大気である中緯度総観規模のスケール解析を

¹⁾ 「4 分の 1」に関して 4-1-A 参照。

²⁾ 次節の (4-5) を例にとると、「同じ次元」とは fV のことで、「無次元の係数」とは R_0 のことである。こうすることで、無次元の係数の違いからスケールの違いを知ることが出来る。

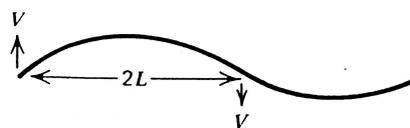


Figure 3-1 Illustrating characteristic length.

図 4-1: 特徴的長さスケール (Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1979: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology. John Wiley & Sons, 477pp)

おこなう。これを行うことで、中緯度総観規模の運動を記述するのに便利な方程式系を得ることが出来る。5 節では熱帯総観規模の、6 節では惑星規模のスケール解析を行う。7 節では総観規模、惑星規模の両者を考慮したようなスケール解析を行う。これらのスケール解析により、各々の規模や場所に適した方程式系が得られる。例えば、2 節や 4 節で得られる準地衡流の方程式は、計算機がまだ今ほどには発達していない時代に中緯度の対して数値予報モデルとして利用された。現在では、これらにより作成されるモデルは直接数値予報モデルとして利用される訳ではなく、数値予報モデルの結果を物理的に解釈するためのモデルとして利用されている。

4-1-A 水平スケールと波長の関係

特徴的水平スケールと擾乱の波長との関係を以下の図 4-1-A-1 に示した。O と B, C を比べると変化が無いので、スケールを 1 波長や 1/2 波長にしても意味が無い。よって、O に比べて最も変化がある A をスケールにするのが最も有用であるため、1/4 をスケールとする。時間スケールも同様の理由から周期の 1/4 をスケールとする。

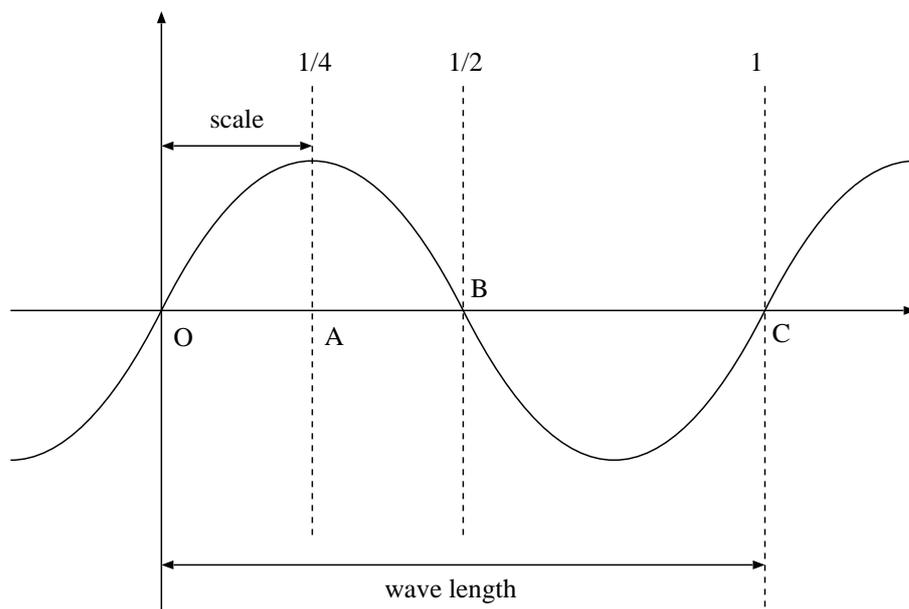


図 4-1-A-1: 波長と特徴的水平スケールとの関係

4-2 浅水方程式系

概要

浅水方程式系のスケール解析をおこなう。まずは浅水方程式系の3つの式の総観規模でのスケールリングをおこなう。スケールリングの結果、総観規模の大気はほぼ地衡流的であることがわかる。これは実際の大規模大気の状態とほぼ一致する。次に、浅水方程式系から導出される渦度の式と発散の式のスケールリングをおこなう。この結果、準地衡流方程式 (*quasi-geostrophic equation*) が得られる。なお、これらのスケールリングにはロスビー数 $R_O = V/fL$ が重要な役割を果たす。このスケールリングの結果、方程式系内の全ての項のスケールが揃う。そのおかげで、計算の際に、初期状態での誤差がほぼ取り除かれることになる。

非圧縮で上部境界が自由表面である流体の静水圧的運動を記述する浅水方程式をスケール解析しておくことはいろいろと都合である。2章で見たことだが、傾圧方程式系が複雑な運動を記述できるように、この浅水方程式系は慣性重力波とロスビー波を記述できる。一般的な浅水方程式はおおよそ対流圏を全層に渡って平均したような運動を表す。

運動方程式 (3-35a), ¹⁾ (3-35b) ²⁾ を組み合わせると以下の式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla \phi + f \mathbf{k} \times \mathbf{V} = 0. \quad (4-1)$$

$\phi = gh$ である。ここではコリオリパラメータ f は一定であると仮定する。正確に地球の幾何学を考慮するのは後々の節でおこなう。連続の式 (3-38) ³⁾ は以下のように記述される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (4-2)$$

時間スケールは以下のようにした。

$$T = L/C. \quad (4-3)$$

C は当該の運動の平均位相速度である。総観規模の特徴として $C \sim V$ がある。これによって

$$T = L/V \quad (4-4)$$

が成り立つ。これは移流時間スケール (*advective time scale*) と呼ばれる。 $L \sim 10^6$ m, $V \sim 10$ m sec⁻¹ とすると、(4-4) から $T \sim 10^5$ sec (~ 1 日) となる。これは総観規模での擾乱の周期の1/4としては適当な値である。

1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (3-35a)$$

2)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + g \frac{\partial h}{\partial y} = 0. \quad (3-35b)$$

3)

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (3-38)$$

運動方程式 (4-1) において圧力傾度力の項を除いたそれぞれの項のスケールを考えると以下のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla \phi + f \mathbf{k} \times \mathbf{V} = 0.$$

$$\frac{V^2}{L} \quad \frac{V^2}{L} \quad fV \quad (4-5)$$

$$R_O fV \quad R_O fV \quad fV$$

$R_O = V/fL$ [1] はロスビー数 (*Rossby number*) と呼ばれる量である。ロスビー数は加速度のコリオリ力に対する比である⁴⁾。典型的な総観規模での値は $f \sim 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$, $L \sim 10^6 \text{ m}$, $V \sim 10 \text{ m sec}^{-1}$ である。この場合ロスビー数は $R_O \sim 0.1$ となる。実際に、幅広い運動が起こる大気や海洋においてはロスビー数は小さくなる。

R_O が小さい場合, (4-5) からわかるように加速度はコリオリ力に比べて小さい。結果としてコリオリ力のみが圧力傾度力とバランスする。式にすると以下のようになる。

$$\nabla \phi \sim fV. \quad (4-6)$$

連続の式 (4-2) を解析するために, ϕ を以下のように分ける。

$$\phi = \bar{\phi} + \phi'. \quad (4-7)$$

$\bar{\phi}$ は定数である。 ϕ' のスケールは (4-7) を (4-6) に代入して得られる。その結果,

$$\phi' \sim fVL \quad (4-8)$$

となる⁵⁾。これは「地衡風の」スケーリングとして知られている。

(4-7) を (4-2) へ代入し, (4-4) と (4-8) を使ってスケール解析をおこなうと以下のようになる。

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi' + \phi' \nabla \cdot \mathbf{V} + \bar{\phi} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0,$$

$$\frac{fV^2}{R_O F \bar{\phi} \frac{V}{L}} \quad \frac{fV^2}{R_O F \bar{\phi} \frac{V}{L}} \quad \frac{fV^2}{R_O F \bar{\phi} \frac{V}{L}} \quad \frac{\bar{\phi} V/L}{\bar{\phi} V/L} \quad (4-9)$$

$F = f^2 L^2 / \bar{\phi}$ [1] は回転フルード数 (*rotational Froude number*) と呼ばれる。この数は以下のようにも記述できる。

$$F = f^2 L^2 / \bar{\phi} = L^2 / L_R^2. \quad (4-10)$$

$L_R = \bar{\phi}^{-1/2} / f$ [m] はロスビーの変形半径 (*Rossby radius of deformation*) である。以前に 2-8 節でも見たように, L_R は地衡風調節プロセスに重要な役割を果たす。

運動方程式において R_O の項が無視される場合, (4-5) は

$$\nabla \phi + f \mathbf{k} \times \mathbf{V} = 0, \quad \text{もしくは} \quad \mathbf{V} = f^{-1} \mathbf{k} \times \nabla \phi \quad (4-11)$$

⁴⁾(4-5) における $R_O fV$ (加速度のスケール) と fV (コリオリ力のスケール) の比較において, ちょうど R_O が両者の比になるということである。

⁵⁾(4-7) を (4-6) に代入すると, 定数である $\bar{\phi}$ は微分によって消えて, $\nabla \phi' \sim fV$ となる。 ∇ のスケールは $1/L$ なのでスケーリングすると $\phi'/L \sim fV$ となり, (4-8) 式が得られる。

となる⁶⁾. このように, 風はほぼ地衡風であるが, R_O の項を無視した分の誤差を含んでいる. $F \lesssim 1$ である場合, 連続の式 (4-9) への第 1 近似の結果

$$\overline{\phi} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (4-12)$$

となる. f が定数の時, 地衡風の発散はゼロになることから (4-12) と (4-11) は一致する⁷⁾. (4-11) と (4-12) の関係は全く診断的⁸⁾ であり, 時間微分を含まない. これは, 大規模大気の流れがほぼ地衡風のであるという観測事実と一致する. もしも完全な方程式である (4-5) と (4-9) を予報に使うと, 初期状態の風および高さの小さな誤差が時間の経過と共に非常に大きな誤差となる (3-7 節参照). Richardson(1922) はは実際に (4-9) と似たような地表面圧力勾配の式を観測データに応用してみた. 実際に観測されたところではほとんど変化は無いのだが, 計算の結果非常に大きい圧力勾配が得られた. (4-1) と (4-2) は遅いロスビー波だけでなく, 速い慣性重力波まで含んでしまっているところに問題を難しくしている原因がある (3-5 節参照)⁹⁾.

風はほぼ地衡風の振る舞うような方程式系を用いる方が望ましい. 2-6 節で, 線形化したロスビー波では渦度に比べて発散は小さいことが示された. これは近似された式 (4-11) と (4-12) によっても示されたことである¹⁰⁾. したがって, 風は回転 (*rotational*) と発散 (*divergent*) の部分に分けた方が良い. それぞれを分けると,

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\Psi + \mathbf{V}_\chi, \quad \mathbf{V}_\Psi = \mathbf{k} \times \nabla \Psi, \quad \mathbf{V}_\chi = \nabla \chi \quad (4-13)$$

となる. Ψ [m^2/s] は風の回転部分を表す流線関数 (*stream function*) であり, χ [m^2/s] は風の発散の部分を表す速度ポテンシャル (*velocity potential*) である. Ψ, χ を使って考えると, 渦度 ζ と発散 D は以下ようになる.

$$\zeta = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{V} = \nabla^2 \Psi, \quad D = \nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla^2 \chi. \quad (4-14)$$

境界条件さえ決まればこれらの式は Ψ と χ について解くことが出来る. 渦度の式は (4-1) に $\mathbf{k} \cdot \nabla \times$ することで得られる. 結果, 以下の式が得られる.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \zeta + (f + \zeta) \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (4-15)$$

発散の式は (4-1) に $\nabla \cdot$ することで得られ, 以下のような式になる.

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}) + \nabla^2 \phi - f \zeta = 0. \quad (4-16)$$

速度成分のスケールは以下のようにになっている.

$$\mathbf{V}_\Psi \sim V, \quad \mathbf{V}_\chi \sim R_1 V. \quad (4-17)$$

⁶⁾ 本論文の最後に掲載されている数学公式 (A-2) より $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ であるため, $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{V}) = -\mathbf{V}$ である.

⁷⁾ $\mathbf{k} \times \nabla \phi = -\partial \phi / \partial y \mathbf{i} + \partial \phi / \partial x \mathbf{j}$ なので $\nabla \cdot (\mathbf{k} \times \nabla \phi) = 0$ となる.

⁸⁾ 時間微分の項がないこと.

⁹⁾ 2-7 節では, 慣性重力波はロスビー波に比べて振幅が小さいことから初期値の設定において慣性重力波を消去するように操作した.

¹⁰⁾ 渦である地衡流の流れは (4-11) から存在することが分かるのに対し, (4-12) から発散はほぼ近似的にゼロになってしまう程小さいことが分かる.

R_1 は小さい無次元の数と決まっている¹¹⁾. (4-13) を (4-9) に代入し, (4-17) を利用すると以下のよう
にスケール解析できる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \phi' + \mathbf{V}_\chi \cdot \nabla \phi' + \phi' \nabla \cdot \mathbf{V}_\chi + \bar{\phi} \nabla \cdot \mathbf{V}_\chi = 0, \\ R_0 F \bar{\phi} \frac{V}{L} \quad R_0 F \bar{\phi} \frac{V}{L} \quad R_1 R_0 F \bar{\phi} \frac{V}{L} \quad R_1 R_0 F \bar{\phi} \frac{V}{L} \quad R_1 \bar{\phi} \frac{V}{L} \end{aligned} \quad (4-18)$$

最後の項がバランスするためには

$$R_1 \lesssim R_0 F \quad (4-19)$$

でなければならない¹²⁾. 渦度の式 (4-15) を (4-13) を用いて書き直し, スケール解析をおこなうと
以下の式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \zeta + \mathbf{V}_\chi \cdot \nabla \zeta + fD + \zeta D = 0, \\ \frac{V^2}{L^2} \quad \frac{V^2}{L^2} \quad R_1 \frac{V^2}{L^2} \quad \frac{R_1 V^2}{R_0 L^2} \quad R_1 \frac{V^2}{L^2} \end{aligned} \quad (4-20)$$

このスケール解析では $\zeta \sim V/L$, $D \sim R_1 V/L$, $f \sim (1/R_0)(V/L)$ ¹³⁾ を使った. 発散の式 (4-16) を
書き換えてスケール解析すると以下の式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \mathbf{V}_\Psi) + \nabla \cdot (\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \mathbf{V}_\chi) + \nabla \cdot (\mathbf{V}_\chi \cdot \nabla \mathbf{V}_\Psi) \\ R_1 \frac{V^2}{L^2} \quad \frac{V^2}{L^2} \quad R_1 \frac{V^2}{L^2} \quad R_1 \frac{V^2}{L^2} \quad (4-21) \\ + \nabla \cdot (\mathbf{V}_\chi \cdot \nabla \mathbf{V}_\chi) + \nabla^2 \phi' - f\zeta = 0. \\ R_1^2 \frac{V^2}{L^2} \quad \frac{1}{R_0} \frac{V^2}{L^2} \quad \frac{1}{R_0} \frac{V^2}{L^2} \end{aligned}$$

渦度の式 (4-20) において発散の項がバランスするためには以下の関係が成り立つ必要がある.

$$R_1 \lesssim R_0. \quad (4-22)$$

発散の渦度に対する比は以下のように書ける.

$$\left| \frac{D}{\zeta} \right| = R_1. \quad (4-23)$$

R_1 は (4-19) と (4-22) を満たさねばならない. $L = \mu^{-1}$, $\bar{\phi} = gH$ の場合, これはロスビー波の場合の
結果 (3-59)¹⁴⁾ と一致する¹⁵⁾. 系が回転する結果, 発散は渦度に比べ小さい.

¹¹⁾ R_1 は渦度に対する発散の比として設定した値であり, これ自体に物理的な意味があるわけではない. ここから先には
は, R_1 を適当な値にとってスケールリングを行っていく. なお, これは 2-6 節の最後に登場したロスビー数のことである.

¹²⁾ もしも $R_1 > R_0 F$ である場合には最後の項を除く全ての項が小さいため落ち, $\bar{\phi} \nabla \cdot \mathbf{V}_\chi = 0$ という式になってしまい,
複数の項がバランス (均衡) する式にならないので意味が無くなってしまう.

¹³⁾ ロスビー数 R_0 は $R_0 = V/fL$ である.

¹⁴⁾

$$\left| \frac{D}{\zeta} \right|_R = \frac{(U\mu/f)}{(\mu^2 gH/f^2) + 1} \quad (3-59)$$

¹⁵⁾ これに関しては 4-2-C 参照.

$F \sim 1, R_O \ll 1$ を満たす運動を考える。この場合, (4-19) と (4-22) は $R_1 = R_O$ によって満たされる。(4-18), (4-20), (4-21) において他の項に比べて小さい項は全て落ちる。結果, 方程式系は以下のように簡単になる¹⁶⁾。

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \phi' + \bar{\phi} D = 0, \quad (4-24)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \zeta + f D = 0, \quad (4-25)$$

$$\nabla^2 \phi' - f \zeta = 0. \quad (4-26)$$

(4-26) から渦度は地衡風のであることが分かる。 $\zeta = \nabla^2 \Psi$ を導入すると, 流線関数の解は $\Psi = \phi'/f$ となる。このことから風回成分は以下ようになる。

$$\mathbf{V}_\Psi = \mathbf{k} \times \nabla \Psi = f^{-1} \mathbf{k} \times \nabla \phi'. \quad (4-27)$$

これは地衡風 (4-11) と等しい。方程式 (4-24), (4-25), (4-26) または (4-27) は準地衡流方程式 (*quasi-geostrophic equations*) と呼ばれる。渦度と移流風は地衡風のであるが, 発散はそうではない (このモデルでは地衡風の発散はゼロとなる)。(4-23) では発散は渦度に比べて小さかったが, (4-25), (4-26) では発散の項のオーダーは他の項と同じ大きさを持っていた。

(4-25) から $(f/\bar{\phi})$ をかけた (4-24) を引くことで発散を除外した式を得ることが出来る。その結果, 以下の式が得られる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \right) (\zeta - (f/\bar{\phi})\phi') = 0. \quad (4-28)$$

これは準地衡流ポテンシャル渦度方程式 (*quasi-geostrophic potential vorticity equation*) と呼ばれる。この式は $g^{-1}\bar{\phi}q = (\zeta + f)/(1 + \phi'/\bar{\phi})$ を展開して微分することでも得られる^{17) 18)}。これは, このモデルにおけるポテンシャル渦度方程式 (3-39b)¹⁹⁾ の近似としては妥当である。(4-26) と (4-27) を使うと, (4-28) は ϕ' の項だけで表すことが出来る²⁰⁾。

発散に関する診断方程式は (4-26) を使って (4-24) と (4-25) で時間微分を消すことで得ることが出来る。その方程式は以下になる²¹⁾。

$$\nabla^2 D - (f^2/\bar{\phi})D = (1/f\bar{\phi})\mathbf{k} \times \nabla \phi' \cdot \nabla (\nabla^2 \phi'). \quad (4-29)$$

この式は準地衡流発散方程式 (*quasi-geostrophic divergence equation*) と呼ばれる。この方程式を前

¹⁶⁾主に $R_1 \ll 1, R_O \ll 1$ であることを利用して項を落とす。

¹⁷⁾ q はポテンシャル渦度 $q = (\zeta + f)/h$ なので,

$$\begin{aligned} g^{-1}\bar{\phi}q &= \bar{h}(\zeta + f)/h \\ &= \bar{h}(\zeta + f)/(\bar{h} + h') \\ &= (\zeta + f)/(1 + h'/\bar{h}) \\ &= (\zeta + f)/(1 + \phi'/\bar{\phi}) \end{aligned}$$

である。

¹⁸⁾ここでは結局, 準地衡流ポテンシャル渦度方程式を 2 通りの方法で求めたことになる。詳細は 4-2-D 参照のこと。

¹⁹⁾

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta + f}{h} \right) = 0. \quad (3-39b)$$

²⁰⁾ \mathbf{V}_Ψ に (4-27) を, f, ζ に (4-26) を代入することで ϕ' だけの式を書くことが出来る。

²¹⁾この式の導出に関しては 4-2-A 参照。

章の方法で線形化すると, (3-57)²²⁾ を x 微分したものになる. 特に重要なのは, 発散は直接 ϕ' 場と関係があるということである. 同様に, (4-26) を通して渦度と関係があることも重要である. これは流体力学的には珍しい²³⁾. それは系の強い回転の結果である.

温帯性の低気圧のスケールでの運動 ($L \sim 10^6$ m, $f \sim 10^{-4}$ sec $^{-1}$, $\bar{\phi}^{1/2} = 300$ m sec $^{-1}$) においては $F \sim 0.1$ である. 前の $F \sim 1$ での解析は, 次節で行う傾圧スケーリングとの比較のためにおこなわれた. これは次の節で使われる. $F \sim R_O \ll 1$ とすると, (4-19) より $R_1 = R_O^2$ である. 渦度の式 (4-20) はこの条件化では

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \zeta = 0 \quad (4-30)$$

となる. これは発散の無い傾圧渦度方程式である²⁴⁾. この場合は連続の式は必要ない. また, 発散の式は再び地衡流的关系式 (4-27) を与える.

重要なことは, 今節で得た予報方程式²⁵⁾ (4-28), (4-30) は初期状態の小さな誤差に敏感でないところである. これは方程式内の全ての項が同じオーダーだからである. この特徴はオリジナルの式 (4-1), (4-2) には無いものである.

4-2-A 準地衡流発散方程式の導出

準地衡流発散方程式 (4-29) を準地衡流方程式 (4-24) ~ (4-27) から導出する. (4-24) と (4-25) から時間微分を消去するように計算をおこなうことで (4-29) を得ることが出来る. ただしこの2式だけでは時間微分を消去できないため, (4-26), (4-27) を用いる.

(4-26) より $\zeta = f^{-1} \nabla^2 \phi'$ なので, これを用いることで (4-25) は以下のように記述できる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} \nabla^2 \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \frac{1}{f} (\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla) (\nabla^2 \phi') + fD &= 0 \\ \nabla^2 \frac{\partial \phi'}{\partial t} + (\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla) (\nabla^2 \phi') + f^2 D &= 0. \end{aligned} \quad (4-2-A-1)$$

(4-24) に ∇^2 をかけると,

$$\nabla^2 \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \nabla^2 (\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \phi') + \bar{\phi} \nabla^2 D = 0 \quad (4-2-A-2)$$

となる. (4-2-A-2) から (4-2-A-1) を引くと,

$$\bar{\phi} \nabla^2 D - f^2 D = (\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla) (\nabla^2 \phi') - \nabla^2 (\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \phi') \quad (4-2-A-3)$$

²²⁾

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (f^2/gH)u = \frac{U}{H} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \quad (3-57)$$

²³⁾ 気象学的には, 低気圧のような収束 (発散) が渦を生むことから分かる通り, 渦度と発散には関係がある場合が多い. しかし, 流体力学的には渦度と発散は全く別物であり, これは珍しいケースと言える.

²⁴⁾ 傾圧 (*barotropic*) と傾圧 (*baroclinic*) に関しては 4-2-B 参照のこと.

²⁵⁾ この表現は診断方程式と対応している. 予報方程式は時間微分の項を含むような方程式系であり, 診断方程式は時間微分の項を含まない方程式である.

となり、時間微分の項を消去できた。さらに (4-27) $V_{\Psi} = f^{-1} \mathbf{k} \times \nabla \phi'$ を (4-2-A-3) に代入すると、

$$\bar{\phi} \nabla^2 D - f^2 D = \frac{1}{f} \{ (\mathbf{k} \times \nabla \phi') \cdot \nabla \} (\nabla^2 \phi') - \nabla^2 \{ (\mathbf{k} \times \nabla \phi') \cdot \nabla \phi' \} \quad (4-2-A-4)$$

となる。(4-2-A-4) の右辺第 2 項は

$$\begin{aligned} \nabla^2 \{ (\mathbf{k} \times \nabla \phi') \cdot \nabla \phi' \} &= \nabla^2 \left\{ \left(-\frac{\partial \phi'}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi'}{\partial x} \mathbf{j} \right) \cdot \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi'}{\partial y} \mathbf{j} \right) \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるため、(4-2-A-4) は以下の準地衡流発散方程式 (4-29) となる。

$$\nabla^2 D - \frac{f^2}{\bar{\phi}} D = \frac{1}{f\bar{\phi}} (\mathbf{k} \times \nabla \phi') \cdot \nabla (\nabla^2 \phi'). \quad (4-2-A-5)$$

4-2-B 順圧と傾圧

ここでは簡単に順圧 (*barotropic*) と傾圧 (*baroclinic*) について考える。

傾圧 傾圧とは等圧面と等密度面が交わる状態のことを言う。状態方程式より圧力、密度、温度の 3 つは関係付けられているので、傾圧は等圧面と等温面が交わっている状態とも言える。つまり、等圧面上に等密度線や等温線がひけたら、それは傾圧であるということになる。

傾圧大気では等圧面上で温度の変化があるため、温度風の関係により風速は高度と共に増大する。大気に限らず、「傾圧」な状態では高度と共に流速場は変化する。

順圧 順圧とは等圧面と等密度面が平行 (つまり交わらない) 状態のことを言う。

この状態では流速場は高度と共に変化しない。

等圧面上で密度が変化しないため、圧力一定での発散はゼロになる。

4-2-C ロスビー波における渦度と発散の比

$L = \mu^{-1}$, $\bar{\phi} = gH$ である場合に、ロスビー波における渦度と発散の比 (3-59)

$$\left| \frac{D}{\zeta} \right|_R = \frac{(U\mu/f)}{(\mu^2 gH/f^2) + 1} \quad (4-2-C-1)$$

が (4-19), (4-22)

$$R_1 \lesssim R_0 F, \quad R_1 \lesssim R_0 \quad (4-2-C-2)$$

と一致することを示す。なお、 R_1 は渦度と発散に比なので $R_1 = |D/\zeta|$ であることに気をつけること。ロスビー波における R_1 は (4-2-C-1) と $L = \mu^{-1}$, $\bar{\phi} = gH$ より、

$$R_1 = \left| \frac{D}{\zeta} \right|_R = \frac{(U/fL)}{(\bar{\phi}/f^2 L^2) + 1}$$

となる。ここで、ロスビー数 $R_O = V/FL$, 回転フルード数 $F = f^2 L^2 / \bar{\phi}$ より,

$$R_1 = \frac{R_O}{1/F + 1} = \frac{R_O F}{1 + F}$$

となる。結果,

$$R_1 \sim \begin{cases} R_O & (F > 1) \\ R_O F & (F \lesssim 1) \end{cases} \quad (4-2-C-3)$$

となる。この式から, (4-2-C-3) が (4-2-C-2) と一致することがわかった。

4-2-D 準地衡流方程式の2通りの求め方

本文では, 浅水方程式系 [(4-1), (4-2) または (3-35a), (3-35b), (3-38)] から, 2つの操作を行って準地衡流ポテンシャル渦度方程式 (4-28) を導いた。1つ目の操作は浅水方程式系に地衡流スケーリングを行っての準地衡流方程式系 (4-24), (4-25), (4-26) の導出である。そして2つ目の操作は, その方程式系を組み合わせることでのポテンシャル渦度の式 (4-28) の導出である。

準地衡流ポテンシャル渦度方程式系は, ポテンシャル渦度の式の導出の後に地衡流スケーリングを行っても導出することが出来る。本文内の「この式は $g^{-1} \bar{\phi} q = (\zeta + f)/(1 + \phi'/\bar{\phi})$ を展開して微分することでも得られる。」という記述はそういったことを示唆している。以下では実際にその導出を行ってみる。

浅水方程式系 [(3-35a), (3-35b), (3-38)] からポテンシャル渦度の式を導出する方法は2-6節を参照して欲しい。結果, 以下のポテンシャル渦度の式 (3-39b) が得られる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta + f}{h} \right) = 0. \quad (4-2-D-1)$$

また, ポテンシャル渦度 $(\zeta + f)/h$ は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} \frac{\zeta + f}{h} &= \frac{\zeta + f}{\bar{h} + h'} \\ &= \frac{1}{\bar{h}} \left(\frac{\zeta + f}{1 + h'/\bar{h}} \right) \\ &= \frac{1}{\bar{h}} \left(\frac{\zeta + f}{1 + \phi'/\bar{\phi}} \right) \\ &= \frac{1}{\bar{h}} (\zeta + f) \left\{ 1 - \left(\frac{\phi'}{\bar{\phi}} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\phi'}{\bar{\phi}} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\phi'}{\bar{\phi}} \right)^3 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

ここでは, $1/(1 + \phi'/\bar{\phi})$ を $\phi'/\bar{\phi} = 0$ の周りでテイラー展開した。2乗以上の項は微小であるとして無視すると,

$$\begin{aligned} \frac{\zeta + f}{h} &\simeq \frac{1}{\bar{h}} (\zeta + f) \left(1 - \frac{\phi'}{\bar{\phi}} \right) \\ &= \frac{1}{\bar{h}} \left(\zeta + \zeta \frac{\phi'}{\bar{\phi}} + f + f \frac{\phi'}{\bar{\phi}} \right). \\ &\quad \frac{V}{L} \quad R_O F \frac{V}{L} \quad \frac{1}{R_O} \frac{V}{L} \quad F \frac{V}{L} \end{aligned}$$

となる. 式の下についているのはスケールである. 本文で準地衡流方程式を導いた際と同じように $F \sim 1$, $R_O \ll 1$ を満たす運動を考えると, $\zeta(\phi'/\bar{\phi})$ の項はスケールが小さいために落ち,

$$\frac{\zeta + f}{h} \simeq \frac{1}{h} \left(\zeta + f + f \frac{\phi'}{\bar{\phi}} \right) \quad (4-2-D-2)$$

となる²⁶⁾. (4-2-D-2) を (4-2-D-1) に利用してスケール解析すると以下ようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\zeta + f + f \frac{\phi'}{\bar{\phi}} \right) + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \left(\zeta + f + f \frac{\phi'}{\bar{\phi}} \right) + \mathbf{V}_\chi \cdot \nabla \left(\zeta + f + f \frac{\phi'}{\bar{\phi}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\zeta + f \frac{\phi'}{\bar{\phi}} \right) + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \left(\zeta + f \frac{\phi'}{\bar{\phi}} \right) + \mathbf{V}_\chi \cdot \nabla \left(\zeta + f \frac{\phi'}{\bar{\phi}} \right) &= 0. \\ \frac{V^2}{L^2} & \qquad \qquad \frac{V^2}{L^2} & \qquad \qquad R_1 \frac{V^2}{L^2} \end{aligned} \quad (4-2-D-3)$$

このスケール解析では, 簡単のため, $F = 1$ としている. 本文での準地衡流方程式系導出の際のスケールと同様に $R_1 = R_O$ とすると, $R_O \ll 1$ より $R_1 \ll 1$ なので, (4-2-D-3) の第3項は落ちる. 結果として本文で得られた (4-28) と同じ準地衡流ポテンシャル渦度方程式が得られた.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \right) (\zeta - (f/\bar{\phi})\phi') = 0. \quad (4-2-D-4)$$

²⁶⁾残った3つの項の内, f のスケールは他の2つよりも大きい. しかし, この後でポテンシャル渦度は空間, 時間微分されるので f は消滅する.

4-3 傾圧方程式

概要

傾圧大気のスケーリングをおこなう。この節以降は鉛直座標として $Z \equiv -\ln(p/p_0)$ を用いる。 p -系と Z -系は密接な関係にあることから、第2章で導いた p -系の方程式系を利用して Z -系の方程式系を導出し、これらのスケーリングをおこなう。なお、運動方程式は渦度と発散の式に変形する。スケーリングの結果を利用した項の選別はこの後の節でおこなう。

この節では球体である地球上での傾圧方程式にスケール解析を用いる。以降は以下の鉛直座標を用いる¹⁾。

$$Z \equiv -\ln(p/p_0). \quad (4-31)$$

p_0 は標準海面の圧力である。状態方程式と静水圧の式によって鉛直座標 Z は実際の高度 z 、及びジオポテンシャル $\phi = gz$ と以下のような関係を持つ²⁾。

$$RT = p\alpha = -pg \frac{\partial z}{\partial p} = \frac{\partial \phi}{\partial Z}. \quad (4-32)$$

Z の利点の一つは、 Z が実際の高さをスケールハイト $H = RT/g$ で割ったものとほぼ等しいことである³⁾。これはおよそ 8km である。

この系は第2章の圧力座標系と密接な関係にある。鉛直微分は以下の関係にある。

$$\frac{\partial}{\partial p} = -\frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial Z}. \quad (4-33)$$

他の変数による偏微分も同様である。 Z 速度 \dot{Z} は $\omega = \partial p / \partial t$ と以下の関係にある。

$$\dot{Z} = -\dot{p}/p = -\omega/p. \quad (4-34)$$

Z -系での運動方程式は以下のようになる⁴⁾。

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} + \dot{Z} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial Z} + \nabla \phi + f \mathbf{k} \times \mathbf{V} = 0. \quad (4-35)$$

¹⁾ この座標系はログ p 座標系と呼ばれ、準地衡流系で使われる。ちなみに、 $Z = -H \ln(p/p_0)$ とする場合もある。

²⁾ 簡単に検算してみる。 $\partial \phi / \partial Z = -g \{ \partial z / \partial (\ln p/p_0) \}$ であり、 $z(p)$ は狭い意味での単調関数なので、

$$g \frac{\partial z}{\partial (-\ln p/p_0)} = g \left/ \frac{\partial}{\partial z} \left(-\ln \frac{p}{p_0} \right) \right. = g \left/ \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial}{\partial p} \left(-\ln \frac{p}{p_0} \right) \right. = g \left/ \left(-\frac{1}{p} \right) \frac{\partial p}{\partial z} \right.$$

となる。 $p(z)$ もまた狭い意味での単調関数なので、

$$g \left/ \left(-\frac{1}{p} \right) \frac{\partial p}{\partial z} \right. = -pg \frac{\partial z}{\partial p}$$

となる。

³⁾ つまり、単位 Z はちょうどスケールハイト H 分の高さということになる。(4-32) をスケールハイトで書き換えると以下のようになる。

$$H = \frac{\partial z}{\partial Z}.$$

⁴⁾ p -系での運動方程式 (外力は除外)。

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \nabla \phi + f \mathbf{k} \times \mathbf{V} = 0 \quad (2-58)$$

に (4-33) と (4-34) の関係式を用いることで (4-35) が得られる。

(4-32) を使うと熱力学第 1 法則は以下のように記述できる⁵⁾。

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial Z} + \mathbf{V} \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial Z} + \dot{Z} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial Z} + \kappa \phi \right) = \kappa Q. \quad (4-36)$$

$\kappa = R c_p^{-1}$ であり, Q は単位時間あたりに加えられた熱量である。連続の式は

$$\nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} - \dot{Z} = 0 \quad (4-37)$$

となる⁶⁾。

ここでのスケール解析では, 無次元変数は $R_0, \varepsilon, L/a$ になる。 a は地球の半径である。 ε は回転フルード数 (*rotational Froude number*) である。 この物理量は大気の静的安定度に反比例する量であり⁷⁾, 前節で用いた F と似たようなものである。 こういった理由から, 前節で用いたスケールはここでの様々な物理量にも利用される。 微分は以下のように見積もられる⁸⁾。

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{V}{L}, \quad \nabla \sim \frac{1}{L}, \quad \frac{\partial}{\partial Z} \sim 1. \quad (4-38)$$

ただし $\nabla f \sim \beta = 2\Omega \cos \varphi/a$ は例外である。 β に関するこの式は次節の (4-56) で得られる。 Z は無次元量であり, $\partial/\partial Z \sim 1$ は鉛直スケールである 8km オーダー⁹⁾ に対応する。 これは対流圏の擾乱としては適切である。 速度は前節と同様に回転と発散に分かれる (式 (4-13), (4-14) 参照)。 ジオポテンシャルは以下のように分かれる。

$$\phi = \bar{\phi}(Z) + \phi'(x, y, Z, t). \quad (4-39)$$

$\bar{\phi}$ は標準大気でのジオポテンシャルである。 従属変数のスケールは以下のようになる。

$$\mathbf{V}_\Psi \sim V, \quad \mathbf{V}_\chi \sim R_1 V, \quad (4-40)$$

$$\dot{Z} \sim R_1 V/L, \quad (4-41)$$

$$\phi' \sim fV/L. \quad (4-42)$$

⁵⁾(4-36) は p -系での熱力学の式。

$$c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \omega = Q. \quad (2-57b)$$

を (4-32) と (4-34) を用いて変形したものである ($\omega = dp/dt$)。 (2-57b) に (4-32) と (4-34) を代入すると,

$$\frac{c_p}{R} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) + \dot{Z} p \alpha = Q$$

$$\frac{1}{\kappa} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) + \dot{Z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) = Q$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) + \kappa \dot{Z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) = \kappa Q$$

となる。最後に d/dt の項を展開すると (4-36) になる。

⁶⁾これは p -系における連続の式。

$$\nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (2-60)$$

を (4-33), (4-34) で変形したものである。第 1 項は変化しないので第 2 項を変形してみると,

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = -\frac{\partial}{\partial p} (p \dot{Z}) = -p \frac{\partial \dot{Z}}{\partial p} - \dot{Z} = -p \left(-\frac{1}{p} \right) \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} - \dot{Z} = \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} - \dot{Z}$$

となる。結果, (4-37) が得られる。

⁷⁾このことに関してはこの節の後半にて紹介される。

⁸⁾ Z のスケールは (4-31) である $Z \equiv -\ln(p/p_0)$ から得られる。

⁹⁾これは z のオーダーであり, おおよそスケールハイト H である。 (4-32) から得られる関係式 $H = \partial z / \partial Z$ を考慮すると, ちょうど $\partial/\partial Z \sim 1$ であることがわかる。

R_1 はまだ決定していないが、スケーリング自体は前節と同様である。 \dot{Z} のスケールは、連続の式 (4-37) において第 1 項が第 2, 3 項とバランスすると仮定し、 V_x のスケールを用いることで得られた。 ϕ' のスケーリングは地衡流スケーリング (4-8) から直接もってきた。

渦度に比べて発散は小さいと予想されるので、運動方程式は渦度の式と発散の式に置き換えるのが便利である。この系における渦度の式は以下ようになる。それぞれの項の下にあるのはスケールである。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \zeta + \mathbf{V}_x \cdot \nabla \zeta + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla f + \mathbf{V}_x \cdot \nabla f + \dot{Z} \frac{\partial \zeta}{\partial Z} \\ \frac{V^2}{L^2} \quad \frac{V^2}{L^2} \quad \frac{R_1 V^2}{L^2} \quad \frac{(\beta a/f)L/a V^2}{R_O L^2} \quad \frac{(\beta a/f)L/a R_1 V^2}{R_O L^2} \quad \frac{R_1 V^2}{L^2} \\ + fD + \zeta D + \mathbf{k} \cdot \nabla \dot{Z} \times \frac{\partial \mathbf{V}_\Psi}{\partial Z} + \mathbf{k} \cdot \nabla \dot{Z} \times \frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial Z} = 0. \\ \frac{R_1 V^2}{R_O L^2} \quad \frac{R_1 V^2}{L^2} \quad \frac{R_1 V^2}{L^2} \quad \frac{R_1^2 V^2}{L^2} \end{aligned} \quad (4-43)$$

ここでは新たにスケール $\zeta \sim V/L$, $D \sim R_1 V/L$ を用いた。また $R_O = V/fL$ を用いて全てのスケールが V^2/L^2 を共通のファクターとするように操作した。(第 4, 5 項のスケールにこの操作をおこなった)。発散方程式とその各々の項のスケールは以下ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \mathbf{V}_\Psi) + \nabla \cdot (\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \mathbf{V}_x + \mathbf{V}_x \cdot \nabla \mathbf{V}_\Psi) \\ + \nabla \cdot (\mathbf{V}_x \cdot \nabla \mathbf{V}_x) + \nabla \dot{Z} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}_\Psi}{\partial Z} + \dot{Z} \frac{\partial D}{\partial Z} \\ \frac{R_1 V^2}{L^2} \quad \frac{V^2}{L^2} \quad \frac{R_1 V^2}{L^2} \quad \frac{R_1^2 V^2}{L^2} \quad \frac{R_1 V^2}{L^2} \quad \frac{R_1^2 V^2}{L^2} \\ + \nabla \dot{Z} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}_x}{\partial Z} + \nabla^2 \phi' - f\zeta - \mathbf{k} \times \nabla f \cdot \mathbf{V}_\Psi - \mathbf{k} \times \nabla f \cdot \mathbf{V}_x = 0. \\ \frac{R_1^2 V^2}{L^2} \quad \frac{1 V^2}{R_O L^2} \quad \frac{1 V^2}{R_O L^2} \quad \frac{(\beta a/f)L/a V^2}{R_O L^2} \quad \frac{(\beta a/f)L/a R_1 V^2}{R_O L^2} \end{aligned} \quad (4-44)$$

連続の式 (4-37) をスケーリングすると、以下のように全ての項のスケールは同じオーダーである。これは \dot{Z} のスケーリング (4-41) を連続の式の 3 項が全てバランスするようにして決めたものなのだから、当然である。

$$\begin{aligned} D + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} - \dot{Z} = 0. \\ \frac{R_1 V}{L} \quad \frac{R_1 V}{L} \quad \frac{R_1 V}{L} \end{aligned} \quad (4-45)$$

熱力学第 1 法則 (4-36) は以下のようにスケーリングされる¹⁰⁾.

$$fV^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi'}{\partial Z} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial Z} + \mathbf{V}_\chi \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial Z} + \dot{Z}\Gamma(Z) + \dot{Z} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial Z} + \kappa \phi' \right) = \kappa Q. \quad (4-46)$$

なお,

$$\Gamma(Z) = \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial Z} + \kappa \bar{\phi} \right) = \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} + \kappa \bar{T} \right) \simeq \frac{H^2 g}{\bar{T}} \left(\frac{g}{c_p} + \frac{1}{H} \frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} \right) \quad (4-47)$$

である. (4-47) における変形には静水圧の式 (4-32) を用い, $H \simeq R\bar{T}/g$ と仮定した. (本来 \bar{T} は Z の関数である). Γ は静的安定度 (*static stability*) と呼ばれる. それは Γ が乾燥温度減率と標準大気の温度減率の差に比例しているからである¹¹⁾. 変数 ε (回転フルード数) は以下のように定義される¹²⁾.

$$\varepsilon \equiv f^2 L^2 \Gamma^{-1}. \quad (4-48)$$

この量はリチャードソン数 (*Richardson's number*) で書き直すと以下ようになる.

$$\varepsilon = \frac{1}{R_O^2 R_i}. \quad (4-49)$$

リチャードソン数とは以下のように定義される数である.

$$R_i = \Gamma/V^2. \quad (4-50)$$

これは鉛直風速シアの 2 乗に対する静的安定度の比である. 以降の解析では, (4-46) における加熱の項は落とす. なぜなら, 以降の解析では加熱率¹³⁾はスケール解析に影響を及ぼすほど大きくはないからである. なお, 本来は当然, スケール解析に影響を及ぼすかどうかは他の項との比較をおこなって調べることになる.

まず (4-50) からリチャードソン数を見積もり, それを用いて (4-48) から ε を計算するのは便利である. 以降の値を用いてリチャードソン数を計算する. $g \sim 10 \text{ m sec}^{-1}$, $\bar{T} \sim 300^\circ$, $g/c_p + H^{-1} \partial T/\partial Z \sim 3.5 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$, $H \sim 10^4 \text{ m}$, $V \sim 10 \text{ m sec}^{-1}$ ¹⁴⁾.

$$R_i \sim 100. \quad (4-51)$$

¹⁰⁾後述されるが, $\Gamma(Z)$ のスケールは $\bar{\phi}$ である. よって $\dot{Z}\Gamma(Z)$ のスケールは $\bar{\phi}R_1V/L$ となる. 回転フルード数の定義は前節より $F = f^2L^2/\bar{\phi}$ なので, $\varepsilon = f^2L^2/\bar{\phi}$ となる. この回転フルード数とロスビー数 $R_O = V/fL$ でこのスケールを記述する.

$$\bar{\phi}R_1 \frac{V}{L} = \frac{f^2L^2}{\varepsilon} R_1 \frac{V}{L} = R_1 f V^2 \frac{fL}{V} \frac{1}{\varepsilon} = \frac{R_1 f V^2}{R_O \varepsilon}.$$

¹¹⁾ g/c_p は乾燥温度減率を表す. 標準大気の温度減率は $-\partial \bar{T}/\partial z$ だが, (4-32) をスケールハイトで変形した関係式 $H = \partial z/\partial Z$ より $-(1/H)(\partial \bar{T}/\partial Z)$ となる. この 2 つの差は $g/c_p + (1/H)(\partial \bar{T}/\partial Z)$ となる.

¹²⁾回転 ではないフルード数 (*Froude number*) も存在する. 例えば $F = U/\sqrt{gH}$ などである.

¹³⁾ Q のことである.

¹⁴⁾(4-47) より,

$$\begin{aligned} R_i &= \frac{H^2 g}{\bar{T} V^2} \left(\frac{g}{c_p} + \frac{1}{H} \frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} \right) \\ &= \frac{(10^4)^2 \times 10}{300 \times 10^2} \times 3.5 \times 10^{-3} \\ &\simeq 100 \end{aligned}$$

4-4 中緯度解析

概要

総観規模, 中緯度でのスケール解析を行う.

この解析には 面近似 (*beta plane approximation*) を用いるのが便利である. 面近似とはコリオリ力の緯度方向変化率を一定と近似してしまう (つまりは $df/dy \simeq \beta_0$ (定数) とする) 手法である. これによって渦度方程式や発散方程式でのコリオリ力の扱いが簡単になる. この面近似を用いて渦度方程式, 発散方程式, 熱力学の式を変形していくことで準地衡流方程式を導く.

さらにこの渦度, 発散, 熱力学の式から準地衡流ポテンシャル渦度方程式 (*quasi-geostrophic potential vorticity equation*) と準地衡流鉛直運動方程式 (*quasi-geostrophic vertical motion equation*) を導く. この2式を解くためには大気の上境界, 下境界の境界条件を決める必要がある.

最後にこれら求めた方程式 (渦度方程式, 熱力学方程式, 準地衡流ポテンシャル渦度方程式, 準地衡流鉛直運動方程式) を圧力座標系で表記する.

総観規模での中緯度の擾乱を考える. この場合, $L \sim 10^6 \text{m}$ となるので各変数は以下ようになる.

$$R_O \sim 0.1, \quad L/a \sim 0.1, \quad \varepsilon \sim 1, \quad \beta a/f \sim 1.$$

なお, $a \sim 6.4 \times 10^6 \text{m}$, $f \sim 10^{-4} \text{sec}^{-1}$ である. $\varepsilon \sim 1$ である場合, 渦度方程式 (4-43) と熱力学第1法則 (4-46) から以下の関係が得られる¹⁾.

$$R_1 \lesssim R_O.$$

従って, $R_1 = R_O$ とするのは適切である. (4-43), (4-44), (4-46) における R_O がそれよりも小さいオーダーを持つ項を落とすと, 以下の方程式系が得られる.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla (\zeta + f) + fD = 0, \quad (4-52)$$

$$\nabla^2 \phi' - f\zeta = 0, \quad (4-53)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi'}{\partial Z} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial Z} + \Gamma(Z) \dot{Z} = 0. \quad (4-54)$$

渦度の式 (4-52) においては以下の項が無視される. 無視されるのは, 絶対渦度の発散成分による移流²⁾, 渦度の鉛直移流³⁾, ζ を含む発散の項⁴⁾, そして立ち上がり項⁵⁾である. 熱力学第1法則 (4-54) において温度の発散成分による移流⁶⁾ と安定度の摂動⁷⁾ は無視される.

¹⁾この関係式は, (4-46) において重要な時間微分の項と基本場の温度移流の項 $\dot{Z} \Gamma(Z) = \dot{Z} \partial/\partial Z (\partial \bar{\phi}/\partial Z + \kappa \bar{\phi})$ をバランスさせようとした場合に得られるものである.

²⁾(4-43) の第3, 5項.

³⁾(4-43) の第6項.

⁴⁾(4-43) の第8項.

⁵⁾(4-43) の第9, 10項.

⁶⁾前節の (4-32) より $RT = \partial \phi/\partial Z$ なので (4-46) の第3項がこれにあたる.

⁷⁾(4-46) の第5項がこれにあたる. なお安定度 $\Gamma(Z) = \partial/\partial Z (\partial \bar{\phi}/\partial Z + \kappa \bar{\phi})$ であることから, $\partial/\partial Z (\partial \phi'/\partial Z + \kappa \phi')$ が安定度の摂動であることがわかるだろう.

球面幾何学を考慮する代わりに 面近似 (*beta plane approximation*) を導入すると便利である. デカルト座標は以下のように定義される.

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}.$$

x は東方向へ大きくなり, y は北方向へ大きくなる. (4-52), (4-53) において f の空間変化は移流項でのみ重要である. 移流項での f の空間変化は

$$\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla f = v_\Psi \frac{df}{dy} = v_\Psi \beta \tag{4-55}$$

となる. なお $\beta = df/dy$ ⁸⁾ であるので,

$$\beta = \frac{d}{dy} (2\Omega \sin \varphi) = 2\Omega \cos \varphi \frac{d\varphi}{dy} = \frac{2\Omega \cos \varphi}{a} \tag{4-56}$$

である. 総観規模の中緯度では f の変化は重要ではないため f は単なる係数となる. これを示すため, f を $y = y_0$ のまわりでテイラー展開する.

$$f = f_0 + \beta_0(y - y_0) + \dots = f_0 \left[1 + \frac{\beta_0}{f_0}(y - y_0) + \dots \right]. \tag{4-57}$$

$f_0 = f(y_0)$, $\beta_0 = \beta(y_0) = df_0/dt$ である. 解析では擾乱のスケールを L と扱っているので, y の変化を $|y - y_0| \lesssim L$ と制限するのは適切である. 中緯度の β のスケールは $\beta \sim f/a$ であるため, (4-57) の第 2 項は以下のように制約を受ける.

$$\left| \frac{\beta_0}{f_0}(y - y_0) \right| \lesssim L/a. \tag{4-58}$$

$L/a \sim 0.1$ であるため, (4-58) より $|(\beta_0/f_0)(y - y_0)| \lesssim 0.1$ であり, このため (4-57) の第 2 項以降は小さいとして無視される. その結果, 総観規模の中緯度では $f = f_0$ と考えることができる. ただし, df/dy に関しては f は定数と扱わず, $df/dy = \beta_0 = \text{一定}$, と扱う. 結果 (4-55) は $\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla f = v_\Psi \beta_0$ となる. 面近似は, 方程式系をまず正角座標系に変形して, マップファクター⁹⁾ の空間変化が無視されて始めて正当化される. マップファクターは普通緯度の三角関数である. L/a が小さい時にはこの三角関数は定数に置き換えられる¹⁰⁾ のでマップファクターの空間変化は無視できる. Phillips(1963) は方程式系をメルカトル座標系で記述することと, 展開された全ての物理量をロスビー数で記述することで Z -方程式系の包括的なスケール解析をおこなった. 彼の解析によって, デカルト座標系の使用はここで考えている変数域に適切であることが示された.

渦度方程式 (4-52) は以下のように記述できる.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla(\zeta + \beta_0 y) - f_0 e^Z \frac{\partial}{\partial Z}(e^{-Z} \dot{Z}) = 0. \tag{4-59}$$

第 2 項目では $\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla f = \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla(\beta_0 y)$ という変形をおこなったが, これは (4-55) より関係式 $\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla(\beta_0 y) = \beta_0 \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla y = \beta_0 v_\Psi = \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla f$ が成り立つからである. 連続の式 (4-45) をすこし

⁸⁾2-6 節参照.

⁹⁾マップファクターに関しては 1-8 節参照. マップファクターは簡単に言うと, 投影図の縮尺である. 簡単に例を挙げると, 極射影図法におけるマップファクターは $m(\varphi) = 2/(1 + \sin \varphi)$ である. 他の投影図にするとマップファクターの定義自体は変わるが, 緯度 φ の三角関数に依存することに関しては共通している.

¹⁰⁾コリオリ力 $f = 2\Omega \sin \varphi$ も緯度の三角関数である. これを定数と近似したことと同様に, マップファクターも定数に置き換えることが出来る.

変形して利用することで第3項目の D は削除することが出来る。発散の式 (4-53) は (4-14) より以下ようになる。

$$\nabla^2 \phi' = f_0 \zeta = f_0 \nabla^2 \Psi. \quad (4-60)$$

この式の適切な解は

$$\Psi = f_0^{-1} \phi' \quad (4-61)$$

である。(4-13), (4-14) より風の回転部分と渦度はそれぞれ

$$\mathbf{V}_\Psi = f_0^{-1} \mathbf{k} \times \nabla \phi', \quad \zeta = f_0^{-1} \nabla^2 \phi' \quad (4-62)$$

となる。(4-54), (4-59), (4-62) をセットで準地衡流方程式 (*quasi-geostrophic equation*) と呼ぶ。

(4-54) と (4-59) で \dot{Z} を削除することである式が得られる。まず, (4-54) に e^{-Z}/Γ をかけ, Z で偏微分すると, $e^{-Z}\dot{Z}$ に関する以下の式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial Z} (e^{-Z} \dot{Z}) = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{e^{-Z}}{\Gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial Z} \right) - \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{e^{-Z}}{\Gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial Z} \right). \quad (4-63)$$

なお, (4-62) より $\partial \mathbf{V}_\Psi / \partial Z$ を含む項は消滅する¹¹⁾。(4-63) を (4-59) に代入し, 一般的な項をまとめると以下の式になる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \right) \left[\zeta + \beta_0 y + e^Z \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{f_0 e^{-Z}}{\Gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial Z} \right) \right] = 0. \quad (4-64)$$

これは準地衡流ポテンシャル渦度方程式 (*quasi-geostrophic potential vorticity equation*) と呼ばれる式で, 浅水方程式系における準地衡流方程式系 (4-28) と対比される¹²⁾。(4-62) を使うとこの方程式は ϕ' の項だけで記述することができる。それが以下の式である。

$$\begin{aligned} & \left[\nabla^2 + f_0^2 e^Z \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{e^{-Z}}{\Gamma} \frac{\partial}{\partial Z} \right) \right] \frac{\partial \phi'}{\partial t} \\ & = -\mathbf{k} \times \nabla \phi' \cdot \nabla \left[f_0^{-1} \nabla^2 \phi' + \beta_0 y + e^Z \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{f_0 e^{-Z}}{\Gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial Z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4-65)$$

ϕ' の初期状態における分布が既に分かっているとすると, 右辺は計算できる。左辺の演算子は楕円型なので正しい境界条件が与えられていれば (4-65) は $\partial \phi' / \partial t$ に関して解くことが出来る。

準地衡流方程式はあらゆる時間で Z を決定できる。以下の書き直された渦度方程式 (4-59) と熱力学第1法則の式 (4-54) を見て欲しい。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \frac{\partial \phi'}{\partial t} = -\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla (\zeta + \beta_0 y) + f_0 e^Z \frac{\partial}{\partial Z} (e^{-Z} \dot{Z}), \quad (4-66)$$

$$R \frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial \phi'}{\partial t} = -\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial Z} - \Gamma(Z) \dot{Z}. \quad (4-67)$$

¹¹⁾(4-54) の移流の項に e^{-Z}/Γ をかけ, Z で偏微分してみると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{e^{-Z}}{\Gamma} \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial Z} \right) & = \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \left(\frac{e^{-Z}}{\Gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial Z} \right) \right\} \\ & = \frac{\partial \mathbf{V}_\Psi}{\partial Z} \cdot \nabla \left(\frac{e^{-Z}}{\Gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial Z} \right) + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{e^{-Z}}{\Gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial Z} \right) \end{aligned}$$

である。(4-62) より $\mathbf{V}_\Psi = f_0^{-1} (-\partial \phi' / \partial y \mathbf{i} + \partial \phi' / \partial x \mathbf{j})$ であることから, $\partial \mathbf{V}_\Psi / \partial Z$ を含む項は消滅することがわかる。

¹²⁾(4-28) と (4-64) との対比に関しては 4-4-A 参照。

この2式を組み合わせることで、渦度移流 $-\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla(\zeta + \beta_0 y)$ と温度移流 $-\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla(\partial\phi'/\partial Z)$ を与えると \dot{Z} 場を一意に決定できるような式 [(4-68)] を得ることが出来る。これは地衡流的、静水圧的な場合に $\partial\phi'/\partial t$ によって $\partial\zeta/\partial t$, および $\partial T'/\partial t$ が与えられることと似ている。 \dot{Z} に関する診断方程式は (4-66) の $\partial/\partial Z$ から (4-67) の $f_0^{-1}\nabla^2$ を引くことで得られる。以下がその診断方程式である。

$$\begin{aligned} \Gamma(Z)\nabla^2\dot{Z} + f_0^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left(e^Z \frac{\partial}{\partial Z} (e^{-Z}\dot{Z}) \right) \\ = f_0 \frac{\partial}{\partial Z} [\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla(\zeta + \beta_0 y)] - \nabla^2 [\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla(\partial\phi'/\partial Z)]. \end{aligned} \quad (4-68)$$

これは準地衡流鉛直運動方程式 (*quasi-geostrophic vertical motion equation*) と呼ばれる。これは前節の準地衡流発散方程式 (4-29) と似た式である。右辺は (4-62) を使うことで全て ϕ' の項で書くことが出来る。ある時間の ϕ' の分布が与えられている場合、左辺の演算子は楕円演算子なのでこの方程式は \dot{Z} に関して解くことが出来る。(4-68) から \dot{Z} が得られる場合、(4-45) から発散を得ることが出来る。このように考えると、(4-62) を使うことで発散は渦度の関数であることがわかる¹³⁾。このように、ロスビー数が小さい場合は回転による強制力が強く働くことがわかる。

式 (4-68) はしばしば総観規模の研究において診断用の道具として用いられる。研究もしくは準地衡流での予報をする場合、 ϕ' 場が既に分かっているならば (4-68) を解くことで鉛直方向の運動を知ることが出来る。この鉛直運動の場は降水量や雲パターンと関係する。

(4-65) や (4-68) を解こうとするならば、大気の上部と下部の境界条件を決める必要がある。 \dot{Z} が分かっている場合、(4-65) を解くのに必要な $(\partial/\partial Z)(\partial\phi'/\partial t)$ が (4-54) から得られる。大気上端 ($Z \rightarrow \infty$) での境界条件は \dot{Z} が有限であることである¹⁴⁾。下部境界における \dot{Z} を決定するためには \dot{Z} と w を関係付ける必要がある。 $gw = d\phi/dt$ を展開するとそれぞれの項のスケールは以下のようになる。

$$\begin{aligned} gw = \frac{\partial\phi'}{\partial t} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla\phi' + \mathbf{V}_\chi \cdot \nabla\phi' + \dot{Z} \frac{\partial\phi'}{\partial Z} + \dot{Z} R\bar{T}. \end{aligned} \quad (4-69)$$

$$\begin{matrix} fV^2 & fV^2 & R_1 fV^2 & R_1 fV^2 & \frac{R_1}{R_0} M fV^2 \end{matrix}$$

ここでは $\partial\bar{\phi}/\partial Z = R\bar{T}$ の関係を使用した。またここでの M は以下のように定義される。

$$M \equiv R\bar{T}/f^2 L^2. \quad (4-70)$$

これは回転フルード数の逆数である。ここで考えているスケールでは $R_1 = R_0$ であり、また、 $R\bar{T} \sim 10^5 \text{ m}^2 \text{ sec}^{-2}$ である時は

$$M \sim 10 \quad (4-71)$$

である。ちなみに 3-2 節で回転フルード数 $F = f^2 L^2 / \bar{\phi}$ を紹介したが、 $\bar{\phi} = R\bar{T}$ である場合¹⁵⁾、 $M = F^{-1}$ となる。これらの条件下では (4-69) の右辺の最後の項が支配的となり、式は以下のような簡単な形になる。

$$gw = R\bar{T}\dot{Z}. \quad (4-72)$$

¹³⁾(4-68) の右辺は書き直すと渦度 ζ で書くことが出来る。 $(\nabla^2[\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla(\partial\phi'/\partial Z)] = f_0^{-1}[\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla(\partial/\partial Z)\zeta])$ 。このことから \dot{Z} は渦度の関数と見ることが出来る。(4-45) から発散は \dot{Z} の関数なので、発散は渦度の関数と見ることが出来る。

¹⁴⁾(4-34) を参照せよ。

¹⁵⁾本来の定義は (4-32) より $\partial\bar{\phi}/\partial Z = R\bar{T}$ である。

なお、この仮定は対流圏では概ね正しい。

この式から鉛直速度の典型的な値は $w \sim g^{-1} f V^2 M \sim 1 \text{ cm sec}^{-1}$ だと分かる。(4-72) を下部境界 $Z = Z_s$ に適用すると,

$$\dot{Z}_s = (g/R\bar{T})w_s = (g/R\bar{T})\mathbf{V} \cdot \nabla h_s \quad (4-73)$$

となる。 $h_s(x, y)$ は下部境界の高さである¹⁶⁾。エクマン層の上端における鉛直運動も加え得るが、Phillips(1963) によってそれは小さ過ぎてこの解析においては重要ではないことが示された。もし地表面に山(つまりは起伏)が無い場合は(4-73)は $\dot{Z}_s = 0$ となる。

(4-73) を定数 Z , 例えば $Z = 0$ としてみることは有用である。なお、 $Z = 0$ は $p = p_0$ と対応する。 Z と定数としてみた場合の、本来の(4-73)との(あらゆる変数の)誤差は、(4-73)を Z のまわりでテイラー展開することで知ることが出来る。その誤差の大きさを評価した結果は Z_s となる。滑らかな山々が $H/10$ またはおよそ 1km よりも高くない限りは、この近似は $1/10$ 以下のオーダーの項を無視することと等しい。

準地衡流方程式を圧力座標系で表記することは後々便利である。(4-33) と (4-34) を使うと渦度方程式(4-59) と熱力学第1法則(4-54) は以下ようになる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \right) (\zeta + \beta_0 y) - f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0, \quad (4-74)$$

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial t \partial p} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla (\partial \phi' / \partial p) + \sigma(p) \omega = 0. \quad (4-75)$$

$\sigma = \Gamma/p^2 = (1/p)(d/dp)[p(d\bar{\phi}/dp) - \bar{\phi}]$ である。ポテンシャル渦度方程式(4-64) は以下のように記述できる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + f_0^{-1} \mathbf{k} \times \nabla \phi' \cdot \nabla \right) \left[f_0^{-1} \nabla^2 \phi' + \beta_0 y + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0}{\sigma(p)} \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right) \right] = 0. \quad (4-76)$$

鉛直方向運動方程式(4-68) は以下のような形になる。

$$\sigma \nabla^2 \omega + f_0^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = f_0 \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla (\zeta + \beta_0 y)) - \nabla^2 \left(\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right). \quad (4-77)$$

この方程式は準地衡流方程式 (*quasi-geostrophic omega equation*) と呼ばれる。

4-4-A 順圧と傾圧での準地衡流ポテンシャル渦度方程式

順圧(浅水方程式系)での準地衡流ポテンシャル渦度方程式(4-28) と傾圧での準地衡流ポテンシャル渦度方程式(4-64) を比較してみる。それぞれ、順圧、傾圧下の準地衡流ポテンシャル渦度方程式は以下の通りである。

順圧、準地衡流ポテンシャル渦度方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \right) \left(\zeta + f - f \frac{\bar{\phi} + \phi'}{\bar{\phi}} \right) = 0. \quad (4-4-A-1)$$

¹⁶⁾ 下部境界は自由表面ではないので局所における時間変化はしない。よって、 $dh_s/dt = \mathbf{V} \cdot \nabla h_s$ となる。

傾圧, 準地衡流ポテンシャル渦度方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla\right) \left[\zeta + \beta_0 y + e^Z \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{f_0 e^{-Z}}{\Gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial Z} \right) \right] = 0. \quad (4-4-A-2)$$

(4-4-A-2) における $\beta_0 y$ は本来は f なので, ここでは簡単のため $\beta_0 y \simeq f$ と考える. するとそれぞれの式は以下ようになる.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla\right) \left(\zeta + f - f \frac{\bar{\phi} + \phi'}{\bar{\phi}} \right) = 0 \quad (4-4-A-3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla\right) \left[\zeta + f + e^Z \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{f_0 e^{-Z}}{\Gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial Z} \right) \right] = 0. \quad (4-4-A-4)$$

このように見ると, 左辺の最後の項が順圧と傾圧による違いだと分かる. 簡単に理解するため, (4-4-A-4) の左辺最後の項を (4-32)¹⁷⁾ を用いて温度で表記する.

$$\begin{aligned} e^Z \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{f_0 e^{-Z}}{\Gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial Z} \right) &= e^Z \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{f_0 e^{-Z}}{R\Gamma} T' \right) \\ &= \frac{f_0}{R\Gamma} \frac{\partial T'}{\partial Z} - \frac{f_0}{R\Gamma} T' \frac{\partial T'}{\partial Z} \\ &\simeq \frac{f_0}{R} \frac{\frac{\partial T'}{\partial Z}}{\frac{H^2 g}{\bar{T}} \left(\frac{g}{c_p} + \frac{1}{H} \frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} \right)} \end{aligned} \quad (4-4-A-5)$$

途中で, $T' \ll \partial T' / \partial Z$ という近似と, (4-47)¹⁸⁾ を用いた. (4-4-A-5) を用いて, (4-4-A-3) と (4-4-A-4) を書き直すと,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla\right) \left(\eta - f \frac{\bar{\phi} + \phi'}{\bar{\phi}} \right) = 0 \quad (4-4-A-6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla\right) \left[\eta + \frac{f_0}{R} \frac{\frac{\partial T'}{\partial Z}}{\frac{H^2 g}{\bar{T}} \left(\frac{g}{c_p} + \frac{1}{H} \frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} \right)} \right] = 0 \quad (4-4-A-7)$$

となる. なお η は絶対渦度である. これらを図示する. 図 4-4-A-1 より, 層が厚くなる場所では渦が強くなり, 薄くなる場所では渦が弱くなることわかる. これらのことは以前にポテンシャル渦度保存の式 (3-39b)¹⁹⁾ で考えたことと同じである. 図 4-4-A-2 でも T_2, T_3 間を層と考えると, この層が厚くなることで渦が強くなることわかる. 傾圧の構造は, 順圧で考えた一つの層を重ね合わせた多層構造と考えることができる.

¹⁷⁾

$$RT = \partial \phi / \partial Z \quad (4-32)$$

¹⁸⁾

$$\Gamma(Z) \simeq \frac{H^2 g}{\bar{T}} \left(\frac{g}{c_p} + \frac{1}{H} \frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} \right) \quad (4-47)$$

¹⁹⁾

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\zeta + f}{h} \right) = 0 \quad (3-39b)$$

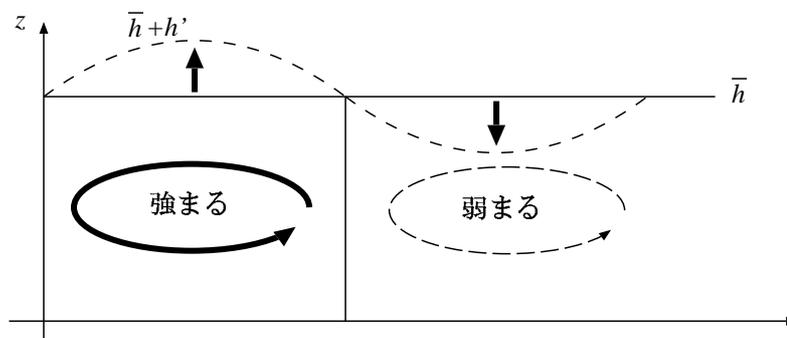


図 4-4-A-1: 順圧での渦度と高さ $h(= \phi/g)$ の関係

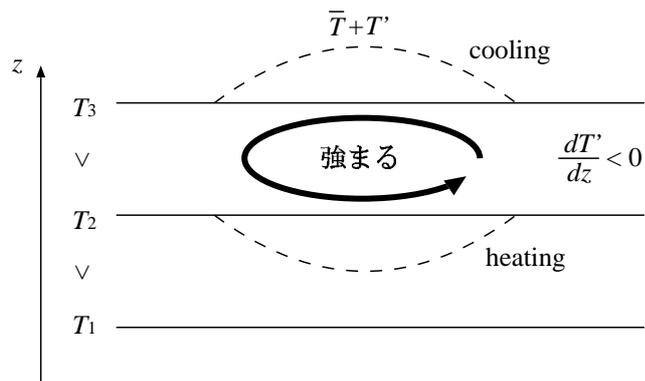


図 4-4-A-2: 傾圧での渦度と温度 $T(= \partial\phi/\partial Z = g\partial z/\partial Z)$ の関係

4-5 熱帯

概要

総観規模の熱帯のスケーリングを行う。

熱帯では中緯度に比べ、ロスビー数 R_O が 10 倍の大きさのスケールを持つ。(逆に言えばこれ以外のスケールは同じである)。この結果、スケーリングを行うと中緯度とはまた異なった渦度、発散の方程式が得られる。

ただし、ここでは熱帯で起こる運動の全ては扱わない。

中緯度における総観規模の擾乱のスケールではそれぞれパラメータは $R_O \sim 0.1, L/a \sim 0.1, \varepsilon \sim 1$ が適当な値である。これに対し、熱帯の擾乱では

$$R_O \sim 1, \quad L/a \sim 0.1, \quad \varepsilon \sim 10^{-2} \quad \beta L/f \sim 1 \quad (4-78)$$

となる¹⁾。 ε は $R_i = 100$ ²⁾ なので (4-49) から得られる。今回は f は赤道 ($f = 0$) から距離 L における値 f まで変化するので $\beta \sim f/L$ である。スケール解析する際に複数の項がバランスするためには、渦度方程式 (4-43) では $R_1 \leq R_O \sim 1$ でなくばならず、一方熱力学第 1 法則 (4-46) では $R_1 \leq R_O \varepsilon \sim \varepsilon$ でなければならない。これらを満たすためには

$$R_1 = \varepsilon \quad (4-79)$$

である必要がある。(4-43) においてオーダーが $V^2/10L^2$ 以下の項は落ち、以下のように簡単になる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla(\zeta + f) = 0. \quad (4-80)$$

発散の式は以下のようにになる。

$$\nabla \cdot (\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \mathbf{V}_\Psi) + \nabla^2 \phi' - f \zeta - \mathbf{k} \times \nabla f \cdot \mathbf{V}_\Psi = 0. \quad (4-81)$$

この方程式 (4-81) はバランス方程式 (*balance equation*) と呼ばれる。この式はしばしばプリミティブモデルの初期値の設定に使われる。発散 D は (4-80) には現れないので熱力学第 1 法則はこの方程式のセットには必要ない³⁾。しかし、熱帯で強い加熱が生じた場合、(4-46) の加熱の項のスケールは fV^2 より大きくなる。この場合には鉛直運動スケーリング (4-79)⁴⁾ が修正され⁵⁾、渦度の式に発散が現れるようになる。また、(4-46) では加熱の項と鉛直運動の項がバランスするようになる。

ここで行ったスケール解析は、加熱に関することを含んだとはいえ、熱帯における重要な運動の全てをカバーしてはいない。赤道ケルビン波 (*Equatorial Kelvin wave*) やロスビー波と重力波がいく

¹⁾ロスビー数は $R_O = V/fL$ である。中緯度に比べ熱帯の方がコリオリパラメータが小さいため R_O が中緯度の 10 倍になる。

²⁾(4-51) 参照。

³⁾前節の中緯度スケール解析では渦度の式に発散 D が現れたため、なんらかの方法でこれを消去する必要があった。消去するために (4-45) を用いて D を $e^{-z} \dot{z}$ の項に変換し、これを熱力学第 1 法則を用いて消去した。今回は発散 D が現れないために熱力学第 1 法則を用いずとも方程式が解けるので必要無い。

⁴⁾この R_1 は渦度に対する発散の大きさの比なので、(4-79) は「発散スケーリング」というようなものである。ただ、ここでは発散 = 鉛直運動という考え方をしているので、このスケーリングを「鉛直運動スケーリング」と呼んでいる。

⁵⁾具体的には $R_1 \gg 1$ というスケーリングをすることになる。こうすることで渦度の式では発散 D が残り、熱力学第 1 法則が必要となる。

らか混ざった波は移流時間スケール⁶⁾ではうまく扱うことは出来ない⁷⁾。またそれらの波はここで仮定したものよりも小さい鉛直スケールを持つ。

⁶⁾3-2 節の (4-4) 参照。

⁷⁾熱帯の、普通のロスビー波に関しては扱うことは出来る。

4-6 惑星規模解析

概要

ここまでは概して総観規模の運動を扱ってきたが、この節ではさらに大きい惑星規模のスケール解析を行う。

惑星規模でのスケールリングを行うと渦度方程式、発散方程式は物理量に依存することなく満足してしまうので予測に用いる事が出来ない。惑星規模では連続の式、熱力学第1法則、そして地衡流平衡の式が予測方程式系として用いられる。

大気の最大規模の運動は以下のように表される¹⁾。

$$L/a \sim 1, \quad R_O \lesssim 0.01, \quad \varepsilon \sim 100, \quad \beta a/f \sim 1.$$

これらの条件下で、渦度方程式 (4-43) を

$$R_1 \sim 1 \tag{4-82}$$

としてバランスさせる²⁾。このスケールリングは熱力学第1法則 (4-46) でも成り立つ。スケールリングの結果、(4-43)、(4-44) における支配的な項は以下ようになる。

$$(\mathbf{V}_\Psi + \mathbf{V}_\chi) \cdot \nabla f + fD = 0, \tag{4-83}$$

$$\nabla^2 \phi' - f\zeta - \mathbf{k} \times \nabla f \cdot (\mathbf{V}_\Psi + \mathbf{V}_\chi) = 0. \tag{4-84}$$

風は以下のように地衡流的だとすると、この2つの式はちょうど満足されてしまう³⁾。

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\Psi + \mathbf{V}_\chi = f^{-1} \mathbf{k} \times \nabla \phi'. \tag{4-85}$$

熱力学第1法則では全ての項は同じオーダーになる。惑星規模の運動の予測システムは (4-45)、(4-46)、(4-85) である。今節での解析は、 V よりもはるかに大きい位相速度を持つような、惑星規模のロスビー波(自由波)は含んでいない⁴⁾。しかし、惑星規模の波でそんなに大きい位相速度をもつものはほとんど観測されない。このことは、惑星規模の運動は主に加熱、地形(山岳)効果、そしておそらくは小さなスケールとの非線形の相互作用によって駆動されている事を示唆している。これらの運動は予測が難しく、また下部境界条件が非常に重要になってくる。

¹⁾ 惑星規模の擾乱のスケール L は総観規模の10倍なので、それに応じて L/a , $R_O = V/fL$, $\varepsilon = f^2 L^2 \Gamma^{-1}$ の大きさは総観規模とは違った値になる。なお、その他のスケールは3-4節で行った中緯度総観規模解析の場合と同じである。

²⁾ 惑星規模においては、 $R_1 \sim 1$ または $R_1 \sim 10$ ならば (4-43) は複数の項によってバランスする。ちなみに $R_1 \sim 1$ の場合と $R_1 \sim 10$ の場合とはまた異なる式が得られる。ここでは $R_1 \sim 1$ でバランスさせ、(4-83) と (4-84) の式を導いた。

³⁾ (4-85) を (4-83)、(4-84) に代入すると、ちょうど左辺はゼロになる。なお、(4-14) より $\zeta = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{V}$, $D = \nabla \cdot \mathbf{V}$ である。

⁴⁾ 4-10節参照。

4-7 バランスシステム

概要

総観規模の中緯度、熱帯、及び惑星規模の全てを含むスケール解析をおこなったバランスシステム (*balance system*) について議論する。

バランスシステムはそれぞれの規模でのスケール解析で落とされていた多くの項をそのまま残したものである。ただし、そのために解くことが難しく、今は数値予報にはほとんど使われていない。

様々な特別な場合を考慮した全ての項を含み、総観規模の運動に関してはさらに正確に記述できるような、より広い用途を持った方程式系を作る事が望ましい。総観規模解析においてオーダー R_O 以上の全ての項を残したままの方程式系として、バランスシステム (*balance system*) がある。バランスシステムは以下のように記述される。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\mathbf{V}_\Psi + \mathbf{V}_\chi) \cdot \nabla(\zeta + f) + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} + (f + \zeta)D + \mathbf{k} \cdot \nabla \omega \times \frac{\partial \mathbf{V}_\Psi}{\partial p} = 0, \quad (4-86)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \mathbf{V}_\Psi) + \nabla^2 \phi - f\zeta - \mathbf{k} \times \nabla f \cdot \mathbf{V}_\Psi = 0, \quad (4-87)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial p} + (\mathbf{V}_\Psi + \mathbf{V}_\chi) \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{\omega}{p} \frac{\partial}{\partial p} \left[p \frac{\partial \phi}{\partial p} - \kappa \phi \right] = 0, \quad (4-88)$$

$$D + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (4-89)$$

他の関係式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_\Psi &= \mathbf{k} \times \nabla \Psi, & \mathbf{V}_\chi &= \nabla \chi, \\ \zeta &= \nabla^2 \Psi, & D &= \nabla^2 \chi. \end{aligned} \quad (4-90)$$

これらの方程式は利用に便利のため、圧力座標系で記述されている。渦度方程式で唯一落とされた項は、風の発散成分を含む立ち上がり項の一部¹⁾である。発散方程式では風の発散成分に依存する全ての項を落とした。この結果、発散方程式は Ψ と ϕ の項のみで記述できるようになった。この式はバランス方程式 (*balance equation*) と呼ばれる²⁾。熱力学第1法則は全ての項が残ったままである。なお、加熱や摩擦力の項が他の項のオーダーと同じかそれより大きい場合、それらの項もこの式に加えられる。

バランスシステムはスケール解析されているので初期状態の小さな誤差に敏感ではない。また、バランスシステムは発散方程式において発散の勾配を無視しているために重力波の存在を許さない。総観規模の運動において、無視される中で最も大きい項のオーダーは R_O^2 である³⁾。これにより、バランス方程式は熱帯、及び惑星規模でのスケール解析で得られた全ての項を含む。唯一の例外が $-\mathbf{k} \times \nabla f \cdot \mathbf{V}_\chi$ の項である。この項は惑星規模の運動の発散方程式で必要になる⁴⁾。この項を (4-87)

¹⁾ 具体的には (4-43) の最後の項である $\mathbf{k} \cdot \nabla \dot{Z} \times (\partial \mathbf{V}_\chi / \partial Z)$ である。

²⁾ 3-5 節の (4-81) で以前に登場した式である。

³⁾ 3-4 節の「中緯度解析」では R_O 以下のオーダーの項を落としていた ($R_O \sim 0.1$)。今回はこれより一つ小さいオーダーも拾うようにした。

⁴⁾ (4-84) 式参照。

に加えてもエネルギー保存則には影響を及ぼさない。しかし、この項の存在は方程式系の解を求めるのを困難にする。準地衡流方程式系では f は微分されていない限りは定数に置き換えられていたが、バランス方程式は f の変化を全て含んでいる。 f の変化は、大規模の領域の予測を行う場合に特に重要になる。

不幸な事に、バランスシステムは解くのが非常に難しい。これはバランスシステムが陰解的な形⁵⁾をしているからである。準地衡流方程式系とは違い、この式からは簡単なポテンシャル渦度方程式や 方程式を導く事は出来ない。それに加え、バランスシステムはケルビン波 (*Kelvin wave*) のような重要な熱帯循環運動を記述できない。結果、バランスシステムは数値予報にはあまり使われる事は無い。普通、準地衡流方程式系で得られた結果よりも正確なものが欲しい場合にはプリミティブ方程式系が使われる。ただし、バランス方程式もまだ、プリミティブ方程式系の初期値の設定やいくつかの力学プロセスを理解することの助けにはなっている。

⁵⁾ 具体的にはバランス方程式である (4-87) のことを言っている。

第5章 大気の波動 第2部

5-1 より複雑な大気現象

概要

第5章では第3章で扱ったよりももう少し複雑な大気の波動を取り扱う。この節ではこの章で取り扱う波動に関して概説する。取り扱うことを大雑把に言えば、1) 順圧不安定、2) 傾圧不安定、の2つである。

この章は第3章で扱ったよりも複雑な波動について取り扱う。大気での波の擾乱は、直接外力を受けているかもしくは非線形の相互作用を受けている流れ場の不安定から生まれる。順圧不安定は風の基本場の水平シアから生まれる。これは流体の力学において研究される“流体力学不安定”の一形態である。傾圧不安定は風の基本場の鉛直シアと関係するか、温度風という関係を通して水平面温度勾配と関係する。傾圧不安定は地球の回転と関係する。しかしこの現象は気象学と海洋学以外では広く研究されてはいない。順圧と傾圧の影響は同時に大気に現れるが、それらは分けて研究する方が容易である。

2~6節では順圧不安定を、7~11節では傾圧不安定を扱う。これらは数値モデルに直接組み込まれるようなものではないが、モデルの作成や利用の上での背景的な知識として必要なものである。

5-2 ロスビー波

概要

2-6 節で扱ったロスビー波について再度議論する。ただし、今回は 面近似を使い、自由表面の無い流体層でのロスビー波を考えている。

まず、3-4 節で得た準地衡流ポテンシャル渦度方程式から順圧渦度方程式を導く。その式を線形化した後に、流線関数 ψ を導入して順圧渦度方程式を ψ で記述する。その後 ψ を波動解と考え、その波動（つまりはロスビー波）の位相速度を求める。結果、2-6 節で得た位相速度とほとんど同じ位相速度を得ることが出来る。この位相速度は総観規模の擾乱については良く表すが、さらに長い波長の波に関してはうまく表すことが出来ない。

面近似を行った順圧渦度方程式は以下のように記述される。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla(\zeta + \beta y) = 0. \quad (5-1)$$

なお、

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (5-2)$$

である。式 (5-1) は準地衡流ポテンシャル渦度方程式 (4-64) にて温度の擾乱を $R^{-1} \partial \phi' / \partial Z = 0$ ¹⁾ とするか、静的安定度 Γ が非常に大きいとすることで得られる。この順圧渦度方程式は 2 つの堅い水平面プレートによって挟まれた様な流体や、 $F \ll 1$ (4-2 節参照)²⁾ の場合の自由表面をもった流体のモデルに適切な方程式である。

順圧不安定の問題を調べるため、緯度によってのみ変化するような東西風（つまり、 $U = U(y)$ ）を考える。(5-1) を $\zeta = \bar{\zeta} + \zeta'$, $u = U + u'$, $v = v'$ とし線形化すると以下の式が得られる。

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + v' \left(\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} + \beta \right) = 0. \quad (5-3)$$

$\bar{\zeta} = -dU/dy$ ³⁾ である。ここで流線関数 ψ を導入する。 $u' = -\partial \psi / \partial y$, $v' = \partial \psi / \partial x$ と記述することで (5-2) は満足される。これらの関係を用いて流線関数で (5-3) を記述すると以下のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + U \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi + \left(\beta - \frac{d^2 U}{dy^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (5-4)$$

ここでは擾乱の形を $\psi = \Psi(y) e^{i\mu(x-ct)}$ （「ノーマルモードの解」と呼ぶ）と考え、これを (5-4) に代入すると、

$$(U - c) \left(\frac{d^2 \Psi}{dy^2} - \mu^2 \Psi \right) - \left(\frac{d^2 U}{dy^2} - \beta \right) \Psi = 0 \quad (5-5)$$

¹⁾ $R^{-1} = f_0 e^{-Z} / \Gamma$ である。なお本文ではこの項を「温度」と呼んでいるが、これは (4-32) の関係式を見るとわかるだろう。

²⁾ $F = f^2 L^2 / \bar{\phi}$ である。 $F \ll 1$ であるということは、コリオリパラメータや擾乱のスケールに比べ、流体層の厚さが非常に大きいことを表している。

³⁾ 風の基本場を $\bar{\mathbf{V}} = (U, 0)$ とすると、 $\bar{\zeta} = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \bar{\mathbf{V}} = -dU/dy$ となる。

となる。流れには有限の幅があり、 $y = 0$ を中心とし、堅い境界を $y = \pm d$ とする。境界では法線方向の速度はゼロにならなければならないので、

$$v(\pm d) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(\pm d) = -i\mu\Psi(\pm d) e^{i\mu(x-ct)} = 0$$

である。よって、以下の関係式が成り立つ事で境界条件は満たされる。

$$\Psi(d) = \Psi(-d) = 0. \quad (5-6)$$

(5-6) を境界条件とする (5-5) は c に関する固有値問題をとなる。

一般的なケースである $U = U(y)$ を扱う前に、 $U = \text{一定}$ の場合を考えると便利である。この場合には (5-5) は以下のように簡単になる。

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} - \left(\mu^2 - \frac{\beta}{U-c} \right) \Psi = 0. \quad (5-7)$$

この方程式は以下のような形の解を持つ。

$$\Psi_n = A \cos \left[\frac{(2n-1)\pi y}{2d} \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (5-8)$$

ここでは $[(2n-1)\pi/2d]^2 = -\mu^2 + \beta/(U-c)$ としている。(5-8) は明らかに境界条件 (5-6) を満たす。この場合、位相速度は以下ようになる。

$$c = U - \beta / \{ \mu^2 + [(2n-1)\pi/2d]^2 \}. \quad (5-9)$$

これは横方向に有限な幅を持つ非発散ロスビー波であり、2-6 節にて得られた解⁴⁾ と対応するものである。(5-8) から得られた解 Ψ_n は完全系であるので⁵⁾、それらを足し合わせて任意の初期状態を記述する事ができ、結果としてあらゆる状態での水平構造を記述することが出来る。 $n = 1, d \rightarrow \infty$ の場合、この式は以下のように簡単になる。

$$c = U - \beta/\mu^2. \quad (5-10)$$

この式を (3-50) と比較してみる ($\partial\bar{q}/\partial y$ は (3-51) で見積もられる)。(3-50) と (3-51) の組合せは (5-10) とは異なる。この原因は浅水方程式系の自由表面の存在にある。この余分な項は、そのスケールが (3-50) の分母において非常に大きくない限りは重要ではない。以前にも示したが、ロスビー波は平均流れ場 U に対して $\mathbf{k} \times \nabla\bar{q}$ の方向に伝搬する⁶⁾。この節でのロスビー波では $\bar{q} = f/H_0$ (H_0 は定数である) なので $\nabla\bar{q}$ は北向きであり、ロスビー波は平均流れに対して西に伝播する⁷⁾。波長が $\mathcal{L} = \mathcal{L}_s = 2\pi(U/\beta^{1/2})$ である場合には、(5-10) から $U > 0$ に関する静止状態の解が得られる⁸⁾。静止状態の波長を \mathcal{L}_s とすると、波長 \mathcal{L} が $\mathcal{L} < \mathcal{L}_s$ の場合には伝搬は東へ向かう⁹⁾。逆に $\mathcal{L} > \mathcal{L}_s$ の場

⁴⁾ 具体的には (3-50) に (3-51) を代入した以下の式である。

$$c = U - \frac{\beta - (f/H)(\partial H/\partial y)}{\mu^2 + (f^2/gH)}.$$

⁵⁾ つまり、この式で全ての状態を記述でき、他の方程式を利用する必要が無いわけである。連続モードの解ではこのようにはならない。

⁶⁾ (3-50) 参照。

⁷⁾ $\mathbf{k} \times \nabla\bar{q} = -(\partial\bar{q}/\partial y)\mathbf{i}$ 。

⁸⁾ $\mathcal{L} = 2\pi(U/\beta^{1/2})$ より波数は $\mu = (\beta/U)^{1/2}$ となる。これを (5-10) に代入すると $c = 0$ 、つまり静止状態となる。

⁹⁾ $\mathcal{L} < \mathcal{L}_s$ ということは波数は $\mu > (\beta/U)^{1/2}$ となる。すると結果的に $U - \beta/\mu^2 > 0$ 、つまり $c > 0$ となることから波が東に伝搬する事が分かる。

合には伝搬は西へ向かう。500 mb における総観規模の擾乱は (5-10) から得られたのとほぼ似た速度で移動する。しかし、非常に長い波長を持つ波は (5-10) で示されるように速い西向きの伝搬をするわけではない¹⁰⁾。

¹⁰⁾ 実際には、西向きに速度の速い伝播をする長波は存在する。ただ、ここで問題にしているのは、(5-10) の c が大きくなり過ぎるということである。

(3-50) では、波長がどんなに長くなっても (波数がどんなに小さくなっても)、分母に f^2/gH が存在するため、位相速度はある程度のところで頭打ちになる。これに対して (5-10) は分母が μ だけのため、波長が非常に小さくなると c がとんでもなく大きくなってしまふ。このことから、(5-10) は非常に波長の長い波を表現できないのである。

5-3 順圧不安定の条件

概要

この節では、順圧不安定について議論する。具体的には順圧不安定が起こるのに必要な条件を導き、また、その擾乱が発達するか減衰するかを知るためのエネルギーの式を求める。

順圧不安定が起こるのに必要な条件は前説で求めた流線関数のノーマルモードの解に関する式 (5-5) から求める。得られた式から順圧不安定の条件は、考える空間内で絶対渦度が極値を持つことである。

エネルギーの式は前説で求めた流線関数に関する式 (5-4) から求める。結果、擾乱の発達減衰は位相の南北方向の傾きと風の南北シアによって決まることがわかる。

今節では、順圧不安定が起こるのに必要な条件を導き、エネルギー方程式を求める。 $\psi = \Psi(y)e^{i\mu(x-ct)}$ のタイプの擾乱が不安定になるには、位相速度が複素数でなければならない。すなわち $c = c_r + ic_i$ でなければならない。そして、たいていは振幅関数 Ψ も複素数である。 Ψ の複素共役である Ψ^* を (5-5) にかけて、

$$(U - c) \left(\Psi^* \frac{d^2\Psi}{dy^2} - \mu^2 \Psi^* \Psi \right) - \left(\frac{d^2U}{dy^2} - \beta \right) \Psi^* \Psi = 0 \quad (5-11)$$

となる。最初の項は以下のように書ける。

$$\Psi^* \frac{d^2\Psi}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\Psi^* \frac{d\Psi}{dy} \right) - \frac{d\Psi^*}{dy} \frac{d\Psi}{dy}.$$

複素数とその共役の積はその値の絶対値の2乗なので、

$$\Psi \Psi^* = |\Psi|^2, \quad \frac{d\Psi^*}{dy} \frac{d\Psi}{dy} = \left| \frac{d\Psi}{dy} \right|^2$$

である。この結果を利用して (5-11) を変形し、さらに $(U - c)$ でこの式を割り、その上 $\pm d$ 間で積分をすると以下の式が得られる。

$$\int_{-d}^d \left[\frac{d}{dy} \left(\Psi^* \frac{d\Psi}{dy} \right) - \mu^2 |\Psi|^2 - \left| \frac{d\Psi}{dy} \right|^2 \right] dy = \int_{-d}^d \frac{(d^2U/dy^2 - \beta) |\Psi|^2}{(U - c)} dy. \quad (5-12)$$

境界条件より Ψ は $\pm d$ では消えなければならない¹⁾。このため、 Ψ はその実部と虚部で別々に消えなければならない。このように考えると、 Ψ^* も Ψ と同様に境界ではゼロになる。すると、(5-12) の左辺の最初の項は積分されてゼロになる。結果、

$$\int_{-d}^d \left(\mu^2 |\Psi|^2 + \left| \frac{d\Psi}{dy} \right|^2 \right) dy = - \int_{-d}^d \frac{(d^2U/dy^2 - \beta)(U - c)^* |\Psi|^2}{|U - c|^2} dy$$

となる。なお、右辺の被積分関数には、その分子と分母に $(U - c)^*$ をかけた。次に、 c を $c_r + ic_i$ と

¹⁾4-2 節, (5-6) 参照.

置き換える。共役もそのように表すと、

$$\int_{-d}^d \left(\mu^2 |\Psi|^2 + \left| \frac{d\Psi}{dy} \right|^2 \right) dy = - \int_{-d}^d \frac{(d^2U/dy^2 - \beta)(U - c_r) |\Psi|^2}{|U - c|^2} dy - i c_i \int_{-d}^d \frac{(d^2U/dy^2 - \beta) |\Psi|^2}{|U - c|^2} dy$$

となる。この式の実部と虚部を見た時、3つの内2つの積分が実部であるため、残った i が係数である虚部の積分の項は消えなければならない。結果的に、

$$c_i \int_{-d}^d \frac{(d^2U/dy^2 - \beta) |\Psi|^2}{|U - c|^2} dy = 0 \tag{5-13}$$

でなければならないということになる。増幅する波が存在する場合、 $c_i \neq 0$ である。そのため、(5-13)の積分は消える必要がある。そのためには、 $d^2U/dy^2 - \beta$ は $-d < y < d$ 内において少なくとも一回は符号が変わらなくてはならない。従って、順圧不安定の必要条件は y のいくつかの値 (y_k とする) が以下の関係を満たすことである。

$$\left(\frac{d^2U}{dy^2} - \beta \right)_{y_k} = 0, \quad -d < y_k < d. \tag{5-14}$$

条件 (5-14) は以下のような形で書くことができる。

$$\frac{d}{dy} \left(-\frac{dU}{dy} + f \right) = 0 \quad \text{または} \quad \frac{d\zeta_a}{dy} = 0, \quad y = y_k.$$

この式は、基本場内のいくつかの点 ($y = y_k$) では絶対渦度 $\zeta_a = \zeta + f$ ($\zeta = -dU/dy$) は極大、または極小にならなければならないことを示している。

線形擾乱に関するエネルギーの式を求めることで、順圧不安定に関するより多くの情報を得ることが出来る。(5-4) に $-\psi$ をかけ、 x と y に関して積分すると、

$$\int_{-d}^d \left[-\psi \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla \psi - U \psi \frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi^2}{2} \right) \left(\beta - \frac{d^2U}{dy^2} \right) \right] dy = 0 \tag{5-15}$$

となる。なお、 $() = L^{-1} \int_0^L () dx$ である。周期性による条件と南北の境界条件は、

$$\begin{aligned} \psi(x + L, y, t) &= \psi(x, y, t), \\ \psi(x, d, t) &= \psi(x, -d, t) = 0 \end{aligned} \tag{5-16}$$

である。(5-15)のそれぞれの項を部分積分し、条件(5-16)を使うと、以下のエネルギーの式が導かれる²⁾。

$$\frac{d}{dt} \int_{-d}^d \frac{u'^2 + v'^2}{2} dy = - \int_{-d}^d \overline{u'v'} \frac{dU}{dy} dy. \tag{5-17}$$

なお、 $u' = -\partial\psi/\partial y$, $v' = \partial\psi/\partial x$ である。式の右辺の符号は ψ を以下のように考えることで決めることが出来る。

$$\psi(x, y, t) = \Psi(y, t) \cos[\mu x - \theta(y, t)]. \tag{5-18}$$

²⁾エネルギーの導出に関しては 5-3-A 参照。

Ψ は振幅で, θ は位相である³⁾. すると運動量フラックス (*momentum flux*)⁴⁾ は以下のように記述できる.

$$\begin{aligned} \overline{u'v'} = & \overline{-\partial\psi/\partial y \partial\psi/\partial x} = \Psi^2 \partial\theta/\partial y \overline{\mu \sin^2(\mu x - \theta)} \\ & + \mu \partial\Psi/\partial y \overline{\Psi \sin(\mu x - \theta) \cos(\mu x - \theta)}. \end{aligned}$$

三角法を導入し, L が $2\pi\mu^{-1}$ の倍数であるという条件を用いると, 運動量フラックスは以下のようになる⁵⁾.

$$\overline{u'v'} = (\mu/2)\Psi^2\partial\theta/\partial y. \quad (5-19)$$

この式は, $\overline{u'v'}$ の符号が波の位相の緯度方向の傾き ($\partial\theta/\partial y$) によって決定されることを示している. (5-19) より, エネルギーの式 (5-17) は以下のように記述できる.

$$\frac{d}{dt} \int_{-d}^d \frac{u'^2 + v'^2}{2} dy = -\frac{\mu}{2} \int_{-d}^d \Psi^2 \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{dU}{dy} dy. \quad (5-20)$$

この式は, 傾きが風のシアと反対の場合 [$(\partial\theta/\partial y)(dU/dy) < 0$] には擾乱が発達し, 逆に傾きが風のシアと同じ向きの場合 [$(\partial\theta/\partial y)(dU/dy) > 0$] には擾乱は弱まることを示している.

5-3-A エネルギーの式の導出

エネルギーの式 (5-17) を流線関数の式 (5-15) と境界条件 (5-16) から導く. (5-15), (5-16), (5-17) を以下にまとめて記述する.

$$\frac{1}{L} \int_{-d}^d \int_0^L \left[-\psi \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla \psi - U \psi \frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi^2}{2} \right) \left(\beta - \frac{d^2 U}{dy^2} \right) \right] dx dy = 0, \quad (5-3-A-1)$$

$$\psi(x+L, y, t) = \psi(x, y, t), \quad (5-3-A-2)$$

$$\psi(x, d, t) = \psi(x, -d, t) = 0,$$

³⁾ 正確には x 方向の変化分を取り除いた位相である.

⁴⁾ 運動量フラックス (または運動量流速) とは文字どおり運動量の流れである. 詳しくはランダウ=リフシッツ (1970) 参照のこと.

⁵⁾ 三角法より $\sin^2 \alpha = (1/2)(1 - \cos 2\alpha)$ なので,

$$\begin{aligned} \overline{\sin^2(\mu x - \theta)} &= \frac{1}{L} \int_0^L \{1/2 - (1/2) \cos(2\mu x - 2\theta)\} dx \\ &= 1/2 - (1/4\mu) [\sin(2\mu x - 2\theta)]_0^L \\ &= 1/2 - (1/4\mu) \{ \sin(2\mu L - 2\theta) - \sin(-2\theta) \} \end{aligned}$$

となる. $L = 2\pi\mu^{-1}n$ (n :整数) なので $\sin(2\mu L - 2\theta) = \sin(-2\theta)$ となり, 2項目は消滅する. 結果, $\overline{\sin^2(\mu x - \theta)} = 1/2$ となる.

次に, 三角法より $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ なので,

$$\begin{aligned} \overline{\sin(\mu x - \theta) \cos(\mu x - \theta)} &= \frac{1}{L} \int_0^L (1/2) \sin(2\mu x - 2\theta) dx \\ &= (1/2L) [(-1/2\mu) \cos(2\mu x - 2\theta)]_0^L \\ &= (-1/4\mu L) \{ \cos(2\mu L - 2\theta) - \cos 2\theta \} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. ここでも $L = 2\pi\mu^{-1}n$ (n :整数) を用いた. 結果, 運動量フラックスは (5-19) となる.

$$\frac{d}{dt} \int_{-d}^d \frac{u'^2 + v'^2}{2} dy = - \int_{-d}^d \frac{u'v'}{dy} dU dy. \quad (5-3-A-3)$$

5-3-A-a (5-3-A-1) の第 1 項

(5-3-A-1) の第 1 項目を計算する.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{L} \int_{-d}^d \int_0^L \left[-\psi \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla \psi \right] dx dy \\ &= \frac{1}{L} \int_{-d}^d \int_0^L \left[-\psi \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi \right] dx dy \\ &= \frac{1}{L} \int_{-d}^d \int_0^L \left[-\psi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right] dx dy + \frac{1}{L} \int_{-d}^d \int_0^L \left[-\psi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right] dx dy. \end{aligned}$$

ここで左の項は x で、右の項は y で部分積分を行うと、

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{L} \int_{-d}^d \left\{ \left[-\psi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right]_0^L - \int_0^L -\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx \right\} dy \\ &\quad + \frac{1}{L} \int_0^L \left\{ \left[-\psi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right]_{-d}^d - \int_{-d}^d -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy \right\} dx \end{aligned}$$

となる. 境界条件 (5-3-A-2) より, $\psi_{x=L} = \psi_{x=0}$, $(\partial\psi/\partial x)_{x=L} = (\partial\psi/\partial x)_{x=0}$, $\psi_{y=-d} = \psi_{y=d} = 0$ である. また $u' = -\partial\psi/\partial y$, $v' = \partial\psi/\partial x$ なので,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{L} \int_{-d}^d \int_0^L \left\{ v' \frac{\partial v'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial t} \right\} dx dy \\ &= \frac{1}{L} \int_{-d}^d \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial u'^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v'^2}{\partial t} \right\} dx dy \\ &= \frac{1}{L} \int_{-d}^d \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{u'^2 + v'^2}{2} \right\} dx dy \\ &= \frac{d}{dt} \int_{-d}^d \frac{u'^2 + v'^2}{2} dy. \quad (5-3-A-4) \end{aligned}$$

5-3-A-b (5-3-A-1) の第 2 項

(5-3-A-1) の第 2 項目を計算する.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{L} \int_{-d}^d \int_0^L \left[-U \psi \frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial x} \right] dx dy \\ &= \frac{1}{L} \int_{-d}^d \int_0^L \left\{ -U \psi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - U \psi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right\} dx dy. \quad (5-3-A-5) \end{aligned}$$

まずはこの (5-3-A-5) の第 1 項を考える.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{L} \int_{-d}^d \int_0^L \left\{ -U\psi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right\} dx dy \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-d}^d \left\{ \left[-U\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right]_0^L - \int_0^L \left\{ -U \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right\} dx \right\} dy \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-d}^d U \left\{ \left[-\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right]_0^L - \int_0^L \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \right\} dy \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-d}^d U \left\{ \left[-\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right]_0^L - \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right]_0^L \right\} dy \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5-3-A-6}$$

ここでは最後に境界条件 (5-3-A-2) を用いた. 次に, (5-3-A-5) の第 2 項を考える.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{L} \int_{-d}^d \int_0^L \left\{ -U\psi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right\} dx dy \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-d}^d \int_0^L \left\{ -U \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \psi \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right\} + U \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right\} dx dy \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-d}^d \int_0^L \left\{ -U \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \psi \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ U \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} \right. \\
 &\quad \left. - U \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} dx dy \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-d}^d \int_0^L \left\{ -U \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \psi \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ U \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{U}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} dx dy.
 \end{aligned}$$

第 1, 3 項を x で積分し, 第 2 項を y で積分すると, 境界条件よりそれらの項はゼロになる. よって,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{L} \int_{-d}^d \int_0^L \left\{ -U\psi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right\} dx dy \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-d}^d \int_0^L \left\{ -\frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} dx dy \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-d}^d \int_0^L \left\{ u'v' \frac{\partial U}{\partial y} \right\} dx dy \\
 &= \int_{-d}^d \overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} dy.
 \end{aligned} \tag{5-3-A-7}$$

(5-3-A-6), (5-3-A-7) を (5-3-A-5) に代入することで

$$\frac{1}{L} \int_{-d}^d \int_0^L \left[-U\psi \frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial x} \right] dx dy = \int_{-d}^d \overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} dy \tag{5-3-A-8}$$

となる.

5-3-A-c (5-3-A-1) の第 3 項

(5-3-A-1) の第 3 項目を計算する. β と U は x には依存しないので,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{L} \int_{-d}^d \int_0^L \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi^2}{2} \right) \left(\beta - \frac{d^2 U}{dy^2} \right) \right] dx dy \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-d}^d \left(\beta - \frac{d^2 U}{dy^2} \right) \left\{ \int_0^L \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi^2}{2} \right) \right] dx \right\} dy \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-d}^d \left(\beta - \frac{d^2 U}{dy^2} \right) \left[-\frac{\psi^2}{2} \right]_0^L dy \\
 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5-3-A-9}$$

となる.

(5-3-A-4), (5-3-A-8), (5-3-A-9) を (5-3-A-1) に代入することで, 本文のエネルギーの式である (5-3-A-3) が得られた.

5-4 2つの不安定プロファイル

概要

ジェット風と東西風シアの2種類の風のプロファイルについて、その不安定性を考察する。

まず、両方の風のプロファイルを双曲線関数で与え、前節の不安定性の必要条件(5-14)を用いて具体的な不安定性条件を導く。

次に、数値計算によって得られた、無次元化された位相速度、波数、および不安定の成長率の関係を示したグラフから、この3つの値の関係を考え、不安定性について考察する。これは2種類の風の両方についておこなう。

その後、順圧不安定波の構造を調べる。2種類の風の y に対する振幅、位相と(5-20)から、この2種類の風のプロファイルは擾乱を増幅することがわかる。

この節では、ある大気風の基本場を近似的に表しているような2種類の風速プロファイルの安定性について考える。ジェットのプロファイルは以下のように与えられる¹⁾。

$$U = U_0 \operatorname{sech}^2(y/y_0). \quad (5-21)$$

東西風のシアのプロファイルは以下の式で与えられる²⁾。

$$U = U_0 \tanh(y/y_0). \quad (5-22)$$

ジェットのプロファイル(5-21)はビクレージェット(*Bickley jet*)として知られている。これらの風は図5-1, 4-2に示されている。(5-21)のような西から吹くジェット($U_0 > 0$)はほとんどいつも中緯度上空に存在している。東から吹くジェット($U_0 < 0$)は1年のうちのある特定の時期に熱帯で見られる。(5-22)のような東西風のシアは熱帯収束帯で見られる。

$\beta = 0$ である場合、図5-1, 4-2の曲率の符号は変化する(つまり、曲率 d^2U/dy^2 は変曲点 $d^2U/dy^2 = 0$ を持つ)ので、この両方の風速プロファイルは明らかに不安定の必要条件(5-14)を満たす³⁾。一般的には、不安定の必要条件は以下のように記述できる。

$$\left(\frac{d^2U}{dy^2} \right)_{\max} > \beta. \quad (5-23)$$

¹⁾ sech は双曲線正割関数 (*hyperbolic second function*) と呼ばれる関数で以下のように定義される。

$$\operatorname{sech} x = 2/(e^x + e^{-x}).$$

²⁾ \tanh は双曲線正接関数 (*hyperbolic tangent*) と呼ばれる関数で以下のように定義される。

$$\tanh x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x}).$$

余談ながら \sinh 双曲線正弦関数 (*hyperbolic sine*) と \cosh 双曲線余弦関数 (*hyperbolic cosine*) の定義も記述しておく。

$$\sinh x = (e^x - e^{-x})/2,$$

$$\cosh x = (e^x + e^{-x})/2.$$

³⁾ ちなみにジェットのプロファイル $U = U_0 \operatorname{sech}^2(y/y_0)$ は $\tanh(y/y_0) = \pm\sqrt{1/3}$ を満たす y に変曲点を持ち、東西風シアのプロファイル $U = U_0 \tanh^2(y/y_0)$ は $y = 0$ に変曲点を持つ。詳しくは 5-4-A 参照のこと。

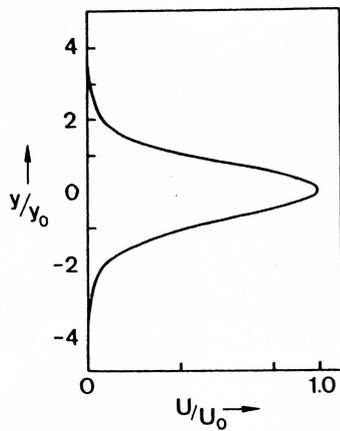


Figure 4.1 $U = U_0 \operatorname{sech}^2 y/y_0$.

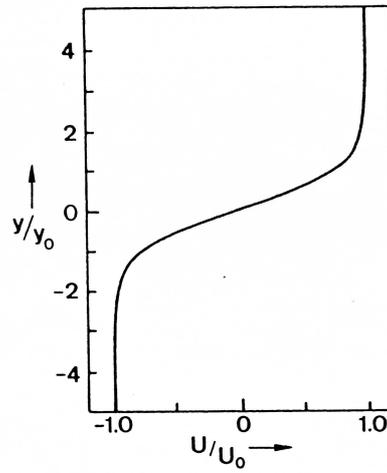


Figure 4.2 $U = U_0 \tanh y/y_0$.

図 5-1: $U = U_0 \operatorname{sech}^2 y/y_0$.

図 5-2: $U = U_0 \tanh y/y_0$.

この条件は、プロファイル (5-21), (5-22) の 3 階微分をゼロとして ($d^3U/dy^3 = 0$), (d^2U/dy^2)_{max} に関して解くことで得ることが出来る⁴⁾。ピクレージェットにおいて、不安定に必要な条件は

$$-2 < b < 2/3 \tag{5-24}$$

である。b は

$$b = \beta y_0^2 / U_0 \tag{5-25}$$

である。東西風シアーのプロファイルにおける条件は

$$|b| < 4/(3\sqrt{3}) \tag{5-26}$$

である。b および μy_0 のある値に関する中立解が見ついている場合を除いては、固有値問題 (5-5) は (5-21) と (5-22) に関して解析的には解けない。Kuo(1973) は、(5-5) を数値的に積分することで、この固有値問題を (5-21), (5-22) に関して解いた。そして、境界条件 (5-6) を満たす c を求めた。

図 5-3 は、境界が無次元に移動する ($d \rightarrow \infty$) ようなピクレージェット (5-21) に関して Kuo(1973) が求めた無次元の固有値 c_r/U_0 と $\delta = \mu y_0 c_i / U_0$ ⁵⁾ を示している。ちなみに $b > 0$ は西風であり、一方 $b < 0$ は東風である⁶⁾。図 5-3a は、西風のジェット ($b > 0$) に関しては、不安定波の位相速度はジェット風の最大速度の 50 パーセント以下の速度を持ち、東向きであることを示している⁷⁾。東

⁴⁾ 詳細は 5-4-B 参照。

⁵⁾ 4-2 節にて擾乱を波動解 $e^{i\mu(x-ct)}$ と置き、4-3 節にて不安定を考えるために $c = c_r + ic_i$ とした。これにより波動解は $e^{i\mu(x-ct)} = \exp\{i\mu(x - c_r t)\} \exp\{-\mu c_i t\}$ となる。よって不安定波の位相速度は c_r に、不安定の成長率は μc_i になる。これらを無次元化すると、それぞれ c_r/U_0 , $\mu y_0 c_i / U_0$ となる。

⁶⁾ $\beta > 0$, $y_0^2 > 0$ なので、b と U_0 の正負は一致する。

⁷⁾ 図 5-3a の $b > 0$ の線を見ると、 $c_r/U_0 < 0.5$ である。ジェット風の最大速度は (5-21), (5-22) より U_0 なので、このことが「位相速度はジェット風の最大速度の 50 パーセント以下」であることを示している。また、 $b > 0$ より $U_0 > 0$ であるため、 $c_r/U_0 > 0$ から $c_r > 0$ であることがわかる。このことが「位相速度は東向きである」ことを示している。

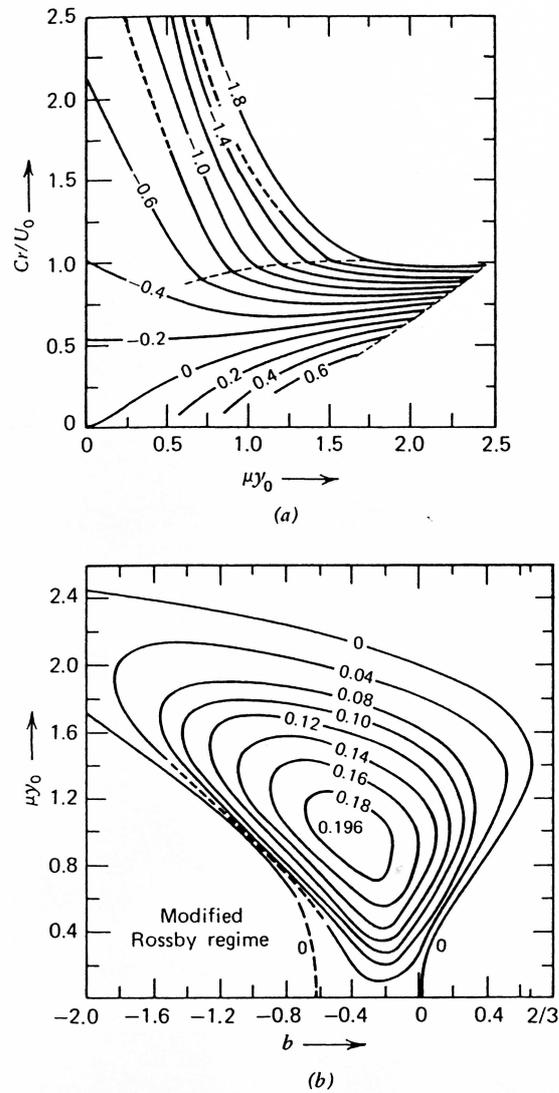


Figure 4.3 Eigenvalues for $U = U_0 \operatorname{sech}^2(y/y_0)$ from Kuo (1973). (a) b as a function of μy_0 and c_r/U_0 ; (b) the growth rate δ as a function of b and the dimensionless wavenumber μy_0 . (From H.L. Kuo, *Dynamics of Quasi-geostrophic Flows*. Academic Press, 1973.)

図 5-3: $U = U_0 \operatorname{sech}^2(y/y_0)$ の固有値. (a) μy_0 と c_r/U_0 の関数 b . (b) b および無次元波数 μy_0 の関数である成長率 δ . (From H.L. Kuo, *Dynamics of Quasi-geostrophic Flows*. Academic Press, 1973). なお, この図は Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1979: *Numerical Prediction and Dynamic Meteorology*. John Wiley & Sons, 477pp より転載.

風のジェットの場合には、位相速度がジェット風の最大速度の 2.5 倍もの西向き速度をもつものもある。これはロスビー波効果であり [(5-9) 参照], b , を固定して波長を大きくしていく (波数で考えれば $\mu \rightarrow 0$) と, c_r は東向きに強まっていく⁸⁾。図 5-3b は、予想通り不安定領域は $-2 < b < 2/3$ 内に制限されていることを示している。実際に、東風のジェット風は β の存在によってより不安定になる。しかし、 β 効果が (b を通して) 十分に大きい時、運動は安定する⁹⁾。この図は、西風であれ東風であれ、最も不安定な波長は $|b|$ が増加するにつれ減少することを示している¹⁰⁾。

図 5-4 は、シアの層 (5-22) における無次元固有値によってもとめられたものを図示したものである。このプロファイルでは、(5-26) から示唆されるように、位相速度と成長率は基本場の方向に依存しない。図 5-4a は、不安定波が、 $b = 0$ つまりは $c_r = 0$ である場合を除いては、全て西向きに伝搬することを示している。図を見ると、 $|c_r|$ の最大値はおよそ最大風速の 90 パーセントであることがわかる。また、原点近くを除き、 b を固定すると $|c_r|$ は波長と共に増加することがわかる。図 5-4b は、最も不安定な波は $b = 0$ ($\mu y_0 \simeq 0.45$) にて成長率の最大値を持ち、 b が増加するにつれ成長率は減少し、 $b = 4/(3\sqrt{3})$ にて 0 となることを示している。最も不安定な波長は、 b が増加するにつれ減少していく。これはピクレージェットにおいても言えたことである¹¹⁾。原点近くの不安定領域は明らかに β によるものである。

順圧不安定波の構造を調べることは以後役に立つ。その結果は、1971 年に Williams らが $U_0 > 0$, $b = 0$, $d = 5y_0$ に関して計算して明らかにした。図 5-5 は、ピクレージェットにおける最も不安定な波 ($\mu y_0 = 0.9$) に関する振幅と位相である。この解は $\psi = P(y) \cos[\mu(x - c_r t) - \theta(y)]$ と記述される。なお $P(y)$ は振幅の構造、 θ は位相角度である。この図では、 $y = 0$ において振幅が最大となり、境界では振幅は滑らかに減衰してゼロになる。位相に関しては、波はシアと逆方向に傾く。(5-20) は、擾乱が成長するにはこの位相の関係が必要であることを表している。この一般的な位相は、全ての順圧的な不安定ジェット風に関して期待どおりの振舞をする。

図 5-6 は、 $U_0 > 0, b = 0$ において最も不安定な波 ($\mu y_0 = 0.45$) に関する振幅と位相を示している。この図では、 $y = \pm y_0$ において振幅が最大になり、 $y = 0$ において極小になることが示されている。位相の傾きはシアと反対である。繰り返しになるが、これは擾乱が成長するために必要な条件である。

⁸⁾ 図 5-3a を見ると、 $\mu \rightarrow 0$ としていくと c_r/U_0 は大きくなっていく ($U_0 < 0$ の場合)。ちなみに逆に $\mu \rightarrow \infty$ としていくと c_r/U_0 は 1 に近づく。

これは (5-9) において $\mu \rightarrow \infty$ とすると $c \rightarrow U$ となり、 $\mu \rightarrow 0$ とすると $c \rightarrow -\infty$ となることと対応する。

⁹⁾ (5-10) を使って δ に関する式を作ると、 $\delta = \mu y_0 - b/(\mu y_0)$ である。ここで b が十分に大きい (つまりは β が十分に大きい) と δ は負の方向に大きくなる。この結果、不安定は成長せずに減衰し、運動は安定になる。

¹⁰⁾ 各 δ を追うと、 $|b|$ が増加するにつれ波長は増加する (逆に波数 μ は減少する) ことがわかる。

¹¹⁾ 図 5-3b の $b > 0$ の部分は図 5-4b に似ている。

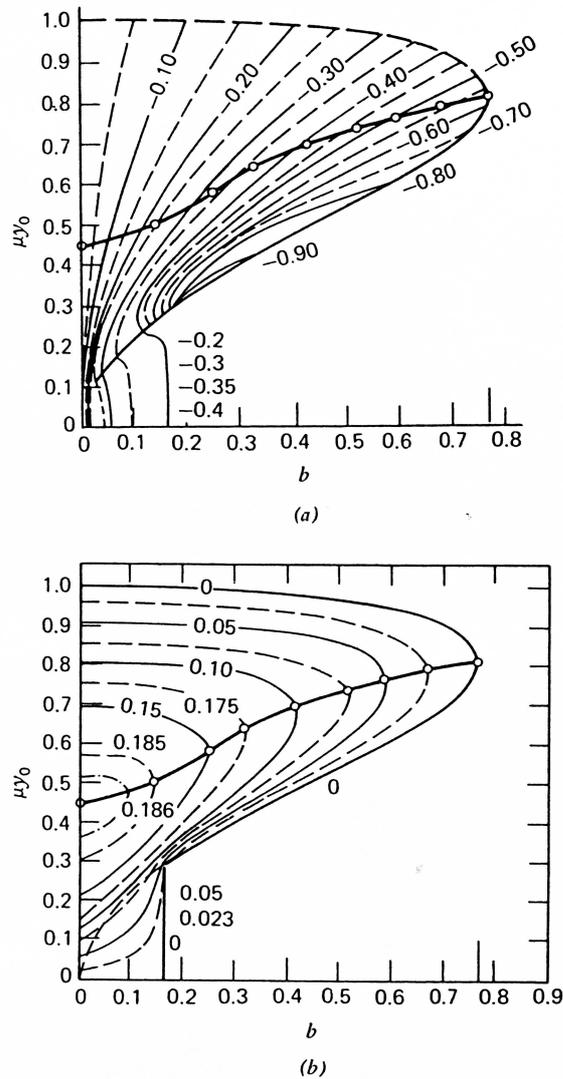


Figure 4.4 Eigenvalues for $U = U_0 \tanh(y/y_0)$ from Kuo (1973). (a) $c_r/|U_0|$ as a function of b and μy_0 ; (b) the growth rate δ as a function of b and μy_0 . (From H.L. Kuo, *Dynamics of Quasi-geostrophic Flows*. Academic Press, 1973.)

図 5-4: $U = U_0 \tanh(y/y_0)$ の固有値. (a) b と μy_0 の関数 c_r/U_0 . (b) b および μy_0 の関数である成長率 δ . (From H.L. Kuo, *Dynamics of Quasi-geostrophic Flows*. Academic Press, 1973) なお、この図は Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1979: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology. John Wiley & Sons, 477pp より転載.

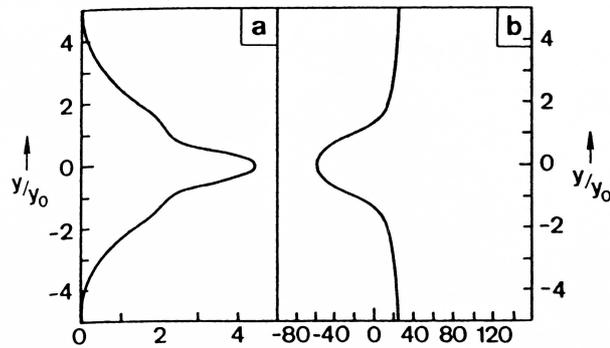


Figure 4.5 Structure of most unstable solution to Bickley jet. (a) amplitude P ; (b) phase θ in degrees.

図 5-5: ビクレージェットに関する最も不安定な解の構造. (a) 振幅 P ; (b) 位相 θ [度 ($^{\circ}$) 表示] (Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1979: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology. *John Wiley & Sons*, 477pp)

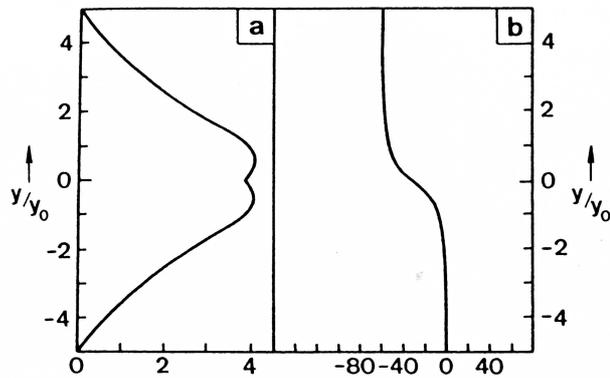


Figure 4.6 Same as Figure 4.5 except that the shear layer profile (4.22) is used.

図 5-6: シア層のプロファイル (5-22) を用いたこと以外は図 5-5 と同じ. (Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1979: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology. *John Wiley & Sons*, 477pp)

5-4-A 不安定条件 (5-14) が $\beta = 0$ の場合に満たされることの確認

本文では「 $\beta = 0$ ならばジェット風 (5-21), 東西風 (5-22) は不安定条件 (5-14) を満たす」といった内容のことが記述されているが, これが本当なのか確認する.

5-4-A-a 東西風シアについて

東西風シアのプロファイルは以下の (5-22) で表される.

$$U = U_0 \tanh(y/y_0) = U_0 \frac{e^{y/y_0} - e^{-y/y_0}}{e^{y/y_0} + e^{-y/y_0}}. \quad (5-4-A-1)$$

これを 1, 2 階微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dy} &= \frac{U_0}{y_0} \left\{ 1 - \left(\frac{e^{y/y_0} - e^{-y/y_0}}{e^{y/y_0} + e^{-y/y_0}} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{U_0}{y_0} \left(\frac{2}{e^{y/y_0} + e^{-y/y_0}} \right)^2 \quad (= \operatorname{sech}^2(y/y_0)). \end{aligned} \quad (5-4-A-2)$$

$$\frac{d^2U}{dy^2} = -\frac{2U_0}{y_0^2} \left(\frac{e^{y/y_0} - e^{-y/y_0}}{2} \right) \left(\frac{e^{y/y_0} + e^{-y/y_0}}{2} \right)^{-3}. \quad (5-4-A-3)$$

となる. $U_0 > 0$ と仮定し, 簡単に表にすると,

y	-	0	+
$\frac{dU}{dy}$	+	+	+
$\frac{d^2U}{dy^2}$	+	0	-

となる. 表からも分かる通り, d^2U/dy^2 は 0 となる y を持つ. つまり, 東西風シアのプロファイルは $\beta = 0$ である場合, 前節の不安定条件 (5-14) を常に満たす. これは $U_0 < 0$ の場合も同様である.

5-4-A-b ジェット風について

ジェット風のプロファイルは以下の (5-21) で表される.

$$U = U_0 \sinh^2(y/y_0) = U_0 \left(\frac{2}{e^{y/y_0} + e^{-y/y_0}} \right)^2. \quad (5-4-A-4)$$

これを 1, 2 階微分すると,

$$\frac{dU}{dy} = -\frac{2U_0}{y_0} \left(\frac{e^{y/y_0} - e^{-y/y_0}}{2} \right) \left(\frac{e^{y/y_0} + e^{-y/y_0}}{2} \right)^{-3} \quad (5-4-A-5)$$

$$\frac{d^2U}{dy^2} = \frac{U_0}{y_0^2} \left(\frac{e^{y/y_0} + e^{-y/y_0}}{2} \right)^{-2} \left\{ -2 + 6 \left(\frac{e^{y/y_0} - e^{-y/y_0}}{e^{y/y_0} + e^{-y/y_0}} \right)^2 \right\} \quad (5-4-A-6)$$

となる. $U_0 > 0$ と仮定し, 簡単に表にすると,

y		$-\alpha$		0		α	
$\frac{dU}{dy}$	+	+	+		-	-	-
$\frac{d^2U}{dy^2}$	+	0	-	-	-	0	+

となる。αは $\tanh(\pm\alpha) = \pm 1/\sqrt{3}$ となる値である。表からも分かる通り、 d^2U/dy^2 は0となる y を持つ。つまり、ジェット風のプロファイルは $\beta = 0$ である場合、前節の不安定条件 (5-14) を常に満たす。これは $U_0 < 0$ の場合も同様である。

5-4-B 東西風シアとジェット風の不安定条件の導出

東西風シア (5-22) とジェット風 (5-21) の一般的な不安定条件 (5-23) とそれぞれの不安定条件 (5-26), (5-24) を導出する。

5-4-B-a 東西風シアが一般的な不安定条件 (4-23) において不安定になるかどうかの確認

東西風シア (5-22) とジェット風 (5-21) が一般的な不安定条件 (5-23) において不安定になるかどうかの確認と、それぞれの風速プロファイルでの不安定条件 (5-26), (5-24) を導出する。

$$\frac{d^3U}{dy^3} = \frac{U_0}{y_0^3} \left(\frac{e^{y/y_0} + e^{-y/y_0}}{2} \right)^{-2} \left\{ -2 + 6 \left(\frac{e^{y/y_0} - e^{-y/y_0}}{e^{y/y_0} + e^{-y/y_0}} \right)^2 \right\} \quad (5-4-B-1)$$

となる。 $\tanh(y/y_0) = \pm 1/\sqrt{3}$ となる時の y を $y = \pm\alpha$ とすると、 $(d^3U/dy^3)_{y=\pm\alpha} = 0$ である。以下の双曲線関数の関係式

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} \end{aligned} \quad (5-4-B-2)$$

より、 $\sinh(\pm\alpha/y_0) = \pm\sqrt{1/2}$, $\cosh(\pm\alpha/y_0) = \sqrt{3/2}$ となる。これらの値を用い、 $y = \pm\alpha$ として (5-4-A-3) を解くと、

$$\frac{d^2U}{dy^2} = \begin{cases} -\frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{U_0}{y_0^2} & (y = \alpha) \\ \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{U_0}{y_0^2} & (y = -\alpha) \end{cases} \quad (5-4-B-3)$$

となる。 $U_0 > 0$ と仮定して簡単な表を書くと、

y	$-\infty$		$-\alpha$		0		α		∞
$\frac{d^2U}{dy^2}$	$+0$	$+$	$\frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{U_0}{y_0^2}$	$+$	0	$-$	$-\frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{U_0}{y_0^2}$	$-$	-0
$\frac{d^3U}{dy^3}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	

となる。簡単な図を図 5-4-B-1 に示す。この図から見て分かるように、 $d^2U/dy^2 - \beta$ がゼロとなる点を持つためには β が d^2U/dy^2 の最大値よりも小さくしなければならない¹²⁾。つまり、この結果が (5-23) である。

¹²⁾ $\beta = df/dy$ であり、 $f = 2\Omega \sin \varphi$ なので $\beta > 0$ であることに注意。

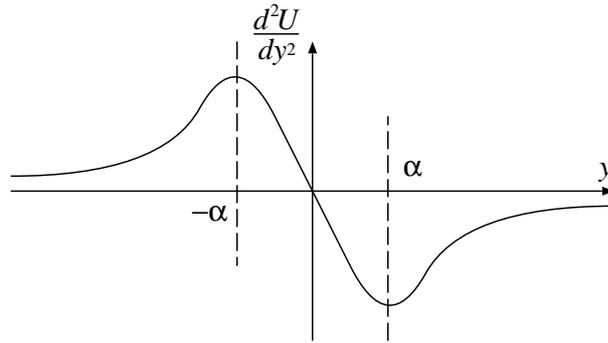


図 5-4-B-1: 東西シアの d^2U/dy^2 ($U_0 > 0$)

5-4-B-b 東西風シアの不安定条件 (5-26) の導出

東西風シアの不安定条件 (5-26) を導出する。一般的な不安定条件 (5-23) 及び (5-4-B-3) から、東西風シアの不安定条件は

$$\frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{U_0}{y_0^2} > \beta \quad (U_0 > 0) \quad (5-4-B-4)$$

$$-\frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{U_0}{y_0^2} > \beta \quad (U_0 < 0) \quad (5-4-B-5)$$

となる。(5-25) より $b = \beta y_0^2 / U_0$ を利用し、(5-4-B-4) と (5-4-B-5) をまとめると、以下の (5-26) が導出できる。

$$|b| < 4/(3\sqrt{3}). \quad (5-4-B-6)$$

5-4-B-c ジェット風が一般的な不安定条件 (4-23) において不安定になるかどうかの確認

ジェット風のプロファイル (5-4-A-4) の3階微分は (5-4-A-6) より,

$$\begin{aligned}
 \frac{d^3U}{dy^3} &= \frac{U_0}{y_0^3} \left[-2 \left(\frac{e^{y/y_0} - e^{-y/y_0}}{2} \right) \left(\frac{e^{y/y_0} + e^{-y/y_0}}{2} \right)^{-3} \left\{ -2 + 6 \left(\frac{e^{y/y_0} - e^{-y/y_0}}{e^{y/y_0} + e^{-y/y_0}} \right)^2 \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{e^{y/y_0} + e^{-y/y_0}}{2} \right)^{-2} \left\{ 12 \left(\frac{e^{y/y_0} - e^{-y/y_0}}{e^{y/y_0} + e^{-y/y_0}} \right) \left(\frac{2}{e^{y/y_0} + e^{-y/y_0}} \right)^2 \right\} \right] \\
 &= \frac{U_0}{y_0^3} \left[-2 \sinh(y/y_0) \cosh^{-3}(y/y_0) \{-2 + 6 \tanh^2(y/y_0)\} \right. \\
 &\quad \left. + \cosh^{-2}(y/y_0) \{12 \tanh(y/y_0) \cosh^{-2}(y/y_0)\} \right] \\
 &= \frac{U_0}{y_0^3} \left[4 \tanh(y/y_0) \cosh^{-2}(y/y_0) - 12 \tanh^3(y/y_0) \cosh^{-2}(y/y_0) \right. \\
 &\quad \left. + 12 \tanh(y/y_0) \cosh^{-4}(y/y_0) \right] \\
 &= \frac{4U_0}{y_0^3} \cosh^{-2}(y/y_0) [\tanh(y/y_0) - 3 \tanh^3(y/y_0) + 3 \tanh(y/y_0) \cosh^{-2}(y/y_0)] \\
 &= \frac{4U_0}{y_0^3} \cosh^{-2}(y/y_0) [4 \tanh(y/y_0) - 6 \tanh^3(y/y_0)] \\
 &= \frac{8U_0}{y_0^3} \cosh^{-2}(y/y_0) \tanh(y/y_0) [2 - 3 \tanh^2(y/y_0)] \tag{5-4-B-7}
 \end{aligned}$$

となる。なお、(5-4-B-2) から得られる関係式 $\cosh^{-2} x = 1 - \tanh^2 x$ を計算の途中で利用した。(5-4-B-7) より、 $\tanh(\pm\alpha/y_0) = \pm\sqrt{2/3}$ を満たす α をおくと、 $d^3U/dy^3 = 0$ となるのは $y = 0, \pm\alpha$ の時である。(5-4-B-2) より、 $\sinh(\pm\alpha/y_0) = \pm\sqrt{2}$ 、 $\cosh(\pm\alpha/y_0) = \sqrt{3}$ となる。これらの値を用い、 $y = 0, \pm\alpha$ として (5-4-A-6) を解くと、

$$\frac{d^2U}{dy^2} = \begin{cases} -\frac{2U_0}{y_0^2} & (y = 0) \\ \frac{2}{3} \frac{U_0}{y_0^2} & (y = \pm\alpha) \end{cases} \tag{5-4-B-8}$$

となる。 $U_0 > 0$ の場合の簡単な表を書くと、

y	$-\infty$		$-\alpha$		0		α		∞
$\frac{d^2U}{dy^2}$	$+0$		$\frac{2}{3} \frac{U_0}{y_0^2}$		$-\frac{2U_0}{y_0^2}$		$\frac{2}{3} \frac{U_0}{y_0^2}$		$+0$
$\frac{d^3U}{dy^3}$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

となる。簡単な図を図 5-4-B-2 に示す。この図から見て分かるように、 $d^2U/dy^2 - \beta$ がゼロとなる点を持つためには β が d^2U/dy^2 の最大値よりも小さくなければならない。つまり、この結果が (5-23) である。

次に $U_0 < 0$ の場合の簡単な表を書くと、

y	$-\infty$		$-\alpha$		0		α		∞
$\frac{d^2U}{dy^2}$	-0		$\frac{2}{3} \frac{U_0}{y_0^2}$		$-\frac{2U_0}{y_0^2}$		$\frac{2}{3} \frac{U_0}{y_0^2}$		-0
$\frac{d^3U}{dy^3}$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

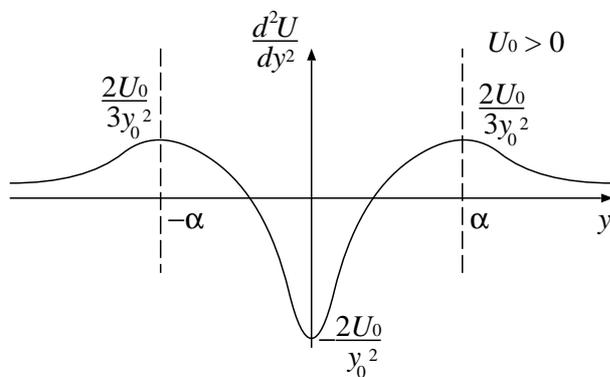


図 5-4-B-2: ジェット風の d^2U/dy^2 ($U_0 > 0$)

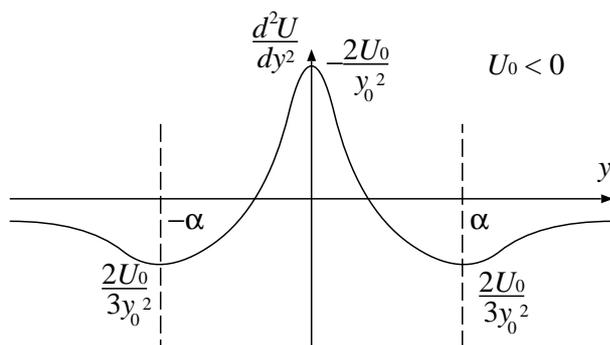


図 5-4-B-3: ジェット風の d^2U/dy^2 ($U_0 < 0$)

となる。簡単な図を図 5-4-B-3 に示す。この図から見て分かるように、 $d^2U/dy^2 - \beta$ がゼロとなる点を持つためには β が d^2U/dy^2 の最大値よりも小さくなければならない。この結果もまた (5-23) となる。

5-4-B-d ジェット風の不安定条件 (5-24) の導出

ジェット風の不安定条件 (5-24) を導出する。一般的な不安定条件 (5-23) 及び (5-4-B-8), 図 5-4-B-2, 図 5-4-B-3 から, ジェット風の不安定条件は

$$\frac{2}{3} \frac{U_0}{y_0^2} > \beta \quad (U_0 > 0) \quad (5-4-B-9)$$

$$-\frac{2U_0}{y_0^2} > \beta \quad (U_0 < 0) \quad (5-4-B-10)$$

となる。(5-25) より $b = \beta y_0^2 / U_0$ を利用し, (5-4-B-9) と (5-4-B-10) をまとめると, 以下の (5-24) が導出できる。

$$-2 < b < 2/3. \quad (5-4-B-11)$$

5-5 線形シア

概要

線形のシアを持つ流れの不安定性について議論する。

線形シアを持つ流れには 4-2 節で考えたようなノーマルモードの解を持たないため、問題を初期値問題として扱う。 $\beta = 0$, $U = U_0 + Sy$ と仮定して、4-2 節の (5-4) を ψ に関して解く。得られた結果から擾乱は弱まっていくことがわかる。

線形の水平面シアを持つ流れでは不安定は起こり得るのかという問は当然のものである。この線形シアを考える場合には $\beta = 0$ であり、境界条件 (5-6) を満たしたような、(5-5) のノーマルモードの解¹⁾は無い。そのため、解を得るための手法は前の手法とは当然異なってくる。

もう一つの手法とは、問題を初期値問題として扱う方法である。議論を簡単にするため、(5-4) において地球の回転の効果 (β の項) を無視し、 $U = U_0 + Sy$ と仮定する。すると、(5-4) は以下のような簡単な式となる²⁾。

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} = 0. \quad (5-27)$$

この式の解は以下のような形の解となる。

$$\nabla^2 \psi = F(x - Ut).$$

F は任意の関数であり、 $F(x)$ は $t = 0$ における渦度の擾乱である。

次に、初期状態の速度場の擾乱は以下のような簡単な形で表せると考える。

$$v = -v_0 \sin \mu x.$$

すると、

$$\nabla^2 \psi = \zeta = -\mu v_0 \cos \mu x, \quad (t = 0)$$

となり³⁾, t においては

$$\nabla^2 \psi = -\mu v_0 \cos \mu(x - Ut) \quad (5-28)$$

となる。流線関数を知るため、流線関数も渦度と同じ関数形をしていると仮定する。すなわち、流線関数を以下のように仮定する。

$$\psi = A \cos \mu(x - Ut).$$

すると、

$$\nabla^2 \psi = -A\mu^2 \cos \mu(x - Ut) - AS^2 t^2 \mu^2 \cos \mu(x - Ut)$$

¹⁾ $\psi = \Psi(y) e^{i\mu(x-ct)}$ のこと。4-2 節参照。

²⁾ $U = U_0 + Sy$ より、 $\partial \zeta / \partial y = -d^2 U / dy^2 = 0$ となる。

³⁾ $\zeta = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$ なので、 u を考えていないこの場合は $\zeta = \partial v / \partial x$ である。

となる⁴⁾.

この式の右辺と (5-28) から A の値を決定することが出来る. 結果, ψ は以下ようになる.

$$\psi = \frac{v_0 \cos \mu(x - Ut)}{\mu(1 + S^2 t^2)}. \quad (5-29)$$

全速度成分は以下ようになる.

$$u = U - \frac{\partial \psi}{\partial y} = U - \frac{v_0 \mu S t \sin \mu(x - Ut)}{\mu(1 + S^2 t^2)},$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{v_0 \sin \mu(x - Ut)}{1 + S^2 t^2}.$$

上式から明らかなように, ψ と v は t の 2 乗に反比例し, u は $t/(1 + t^2)$ に変化する. 擾乱は速度 $U = U_0 + Sy$ とともに移動するので, 波は (時間とともに弱まっていくと同様に) シアの方向に傾いていく. いったん波が風のシアの方向に傾きはじめると擾乱が弱まっていくことはエネルギーの式 (5-20) によって示されており, ここではそれと同じことが起こっているのは 4-3 節の式 (5-18), (5-20), この節の (5-29) からわかる⁵⁾. この解はノーマルモードの連続スペクトル $c(y') = U(y')$ の項で書くことが出来る. これは $y = y'$ において唯一渦度を持ち, その他では渦度はゼロである. その解はこれらの関数と初期状態の渦度の積分で表される.

不安定な風の基本場のノーマルモードの解はしばしば完全系の解を形成できない. そのため, ノーマルモードの解は全ての妥当な初期状態に対する一般解を構成するのに利用することが出来なかった. なお, ロスピー波の解 (5-8) はこれに利用することが出来た. Case(1960) は, 初期値の手法を用いて, (5-5) と (5-6) から得られた離散ノーマルモードと, 上記にて記述されたものと似た, 一般解に必要とされる連続モードを発見した. この連続モードはある点での平均風速と同じ位相速度を持ち, 滑らかな初期条件が使用された場合には上記で得たものと同じように減衰していく. このように, 一定時間の経過後には連続スペクトルモードは, 弱められない離散モードを除き消滅していくと予想される.

⁴⁾ $U = U_0 + Sy$ と仮定していることに注意.

⁵⁾ 4-3 節の (5-18)

$$\psi(x, y, t) = \Psi(y, t) \cos [\mu x - \theta(y, t)]$$

とこの節の (5-29) を比較すると,

$$\Psi(y, t) = v_0 / \mu(1 + S^2 t^2), \quad \theta(y, t) = \mu t(U_0 + Sy)$$

である. このことから, $(\partial \theta / \partial y)(dU/dy) > 0$ であるといえる.

5-6 大気の順圧効果

概要

この節では、この章でここまでおこなった順圧不安定に関する説明と、実際での話をまとめている。

この章での解析では、絶対渦度の勾配の符号が変化する場合には順圧不安定が起こることが示された¹⁾。βの存在は中緯度での西風のジェット風を安定にするが、東風のジェットはβの存在によって特定の条件下では不安定になる。不安定な波が存在しないならば、連続スペクトル効果によって擾乱は弱まる。擾乱は風の基本場と同じ方向に傾く場合には弱まり、風の基本場と反対方向に傾く場合は増幅されることはエネルギーの式によって示された²⁾。中緯度ジェットの南部では、ほとんどの擾乱は南西-北東に傾く。そのため擾乱は順圧的にそのエネルギーを減らし、風速の基本場にそのエネルギーを渡す。これはモーメントのフラックス $\overline{u'v'}$ の観測からも示されている。このことから、中緯度での擾乱は順圧的に弱まり、そして擾乱のエネルギーは失われて基本場の流れになることによって、摩擦に逆らって基本場の流れを維持していることがわかる。しかし、ジェットが非常に鋭くなると、順圧不安定は短期間に必ず起こる。熱帯では順圧不安定はより一般である。それは、東風のジェットがより不安定であることや、加熱(風の基本場を生み出すもの)が小さい水平スケールを持つ傾向にあることなどから言えることである。

¹⁾これは4-3節の(5-14)で示されたことである。絶対渦度は $\eta = \bar{\zeta} + f$ である。 $\bar{\zeta} = -dU/dy$ (5-2節参照)、 $df/dy = \beta$ より、絶対渦度の勾配は $d\eta/dy = -d^2U/dy^2 + \beta$ である。

²⁾(5-20)により示されたことである。

5-7 傾圧不安定

概要

前節までは順圧大気での不安定について扱ったが、この節では傾圧大気での不安定について扱う。

順圧不安定では、 β 効果を考慮した渦度方程式から話が始まったが、この節では、3-4 節で得られたポテンシャル渦度方程式から話を始める。この節で取り扱うことから分かるように、ポテンシャル渦度方程式は傾圧大気を記述する。

この節ではこのポテンシャル渦度方程式の 1) 線形化、と 2) ノーマルモードの解の導入、をおこなう。

一般的な不安定条件に関しては取り扱わない。線形シアにおける不安定に関しては次の節で取り扱う。

回転大気における鉛直方向の風速シアから生じる傾圧不安定は Charney(1947) が、その後 Eady(1949) によって始めて研究された。準地衡流方程式はこの不安定を議論するのに使われている。ポテンシャル渦度方程式 (4-64) ¹⁾ は以下のように記述される。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{k} \times \nabla \psi^* \cdot \nabla \right) q = 0. \quad (5-30)$$

なお、ポテンシャル渦度 (*potential vorticity*) q は

$$q = \nabla^2 \psi^* + e^Z \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{f_0^2 e^{-Z}}{\Gamma} \frac{\partial \psi^*}{\partial Z} \right) + \beta y \quad (5-31)$$

である。また、 $\psi^* = f_0^{-1} \phi'$ は地衡流流線関数 [(4-61) ²⁾ 参照] であり、 Γ は静的安定度 (4-47) ³⁾ である。境界条件で必要とされる熱力学第 1 法則 (4-54) ⁴⁾ は以下のように記述する ⁵⁾。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{k} \times \nabla \psi^* \cdot \nabla \right) \frac{\partial \psi^*}{\partial Z} + f_0^{-1} \Gamma \dot{Z} = 0. \quad (5-32)$$

Z 座標系は線形不安定の研究に便利である。なぜなら、 Z 座標系は高度座標系と密接な関係にあ

1)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla \right) \left[\zeta + \beta_0 y + e^Z \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{f_0 e^{-Z}}{\Gamma} \frac{\partial \phi'}{\partial Z} \right) \right] = 0. \quad (4-64)$$

2)

$$\psi = f_0^{-1} \phi'. \quad (4-61)$$

3)

$$\Gamma(Z) = \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial Z} + \kappa \bar{\phi} \right) = \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} + \kappa \bar{T} \right) = \frac{H^2 g}{T} \left(\frac{g}{c_p} + \frac{1}{H} \frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} \right). \quad (4-47)$$

4)

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi'}{\partial Z} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial Z} + \Gamma(Z) \dot{Z} = 0. \quad (4-54)$$

5) 具体的にこの熱力学第 1 法則を境界条件として扱うのは、次節でおこなう。

り⁶⁾, それ故に温度減率 $-\partial T/\partial z$ が一定の場合には Γ が定数になるからである. 圧力座標系において静的安定度が一定であることは, かなり非現実的である.

ポテンシャル渦度方程式は, 流線関数を以下のようにすることで線形化する.

$$\psi^*(x, y, Z, t) = \bar{\psi}(y, Z) + \psi(x, y, Z, t). \quad (5-33)$$

$|\psi|/|\bar{\psi}|$ は小さいと仮定する. 風の基本場は $U = -\partial\bar{\psi}/\partial y$ で与えられる. (5-33) を用いると, (5-30) は以下のような簡単な形になる⁷⁾.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)q' + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\bar{q}}{\partial y} = 0. \quad (5-34)$$

なお,

$$q' = \nabla^2\psi + e^Z\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{f_0^2 e^{-Z}}{\Gamma}\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right) \quad (5-35)$$

$$\frac{\partial\bar{q}}{\partial y} = \beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - e^Z\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{f_0^2 e^{-Z}}{\Gamma}\frac{\partial U}{\partial Z}\right) \quad (5-36)$$

である. (5-36) は順圧の効果 (第 2 項) と傾圧の効果 (第 3 項) の両方を含む. 線形化した熱力学第 1 法則は,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi}{\partial Z} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial Z} + f_0^{-1}\Gamma\dot{Z} = 0 \quad (5-37)$$

である. \dot{Z} は鉛直方向運動の擾乱である. この式は鉛直の境界条件を必要とする.

ここで $\psi = \Psi(y, Z)e^{i\mu(x-ct)}$ を (5-34) に導入すると, 以下の式が得られる.

$$(U - c)\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + e^Z\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{f_0^2 e^{-Z}}{\Gamma}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\right) - \mu^2\Psi\right] + \frac{\partial\bar{q}}{\partial y}\Psi = 0. \quad (5-38)$$

熱力学第 1 法則からは以下の式が得られる.

$$(U - c)\frac{\partial\Psi}{\partial Z} - \frac{\partial U}{\partial Z}\Psi + f_0^{-1}\Gamma W = 0. \quad (5-39)$$

なお, $\dot{Z} = W(y, z)e^{i\mu(x-ct)}$ である.

5-7-A ポテンシャル渦度方程式の線形化

ポテンシャル渦度の線形化をおこなう. 具体的には, ポテンシャル渦度方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{k} \times \nabla\psi^* \cdot \nabla\right)q = 0 \quad (5-7-A-1)$$

$$q = \nabla^2\psi^* + e^Z\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{f_0^2 e^{-Z}}{\Gamma}\frac{\partial\psi^*}{\partial Z}\right) + \beta y$$

⁶⁾ Z 座標と p (圧力) 座標が密接な関係にあることは (4-33)

$$\frac{\partial}{\partial p} = -\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial Z}$$

からわかる. 圧力座標系と高度座標系とが密接な関係にあることは既に 1-9 節で述べられていることである.

⁷⁾ ポテンシャル渦度の線形化に関しては 5-7-A 参照.

を

$$\begin{aligned} \psi^*(x, y, Z, t) &= \bar{\psi}(y, Z) + \psi(x, y, Z, t), \\ |\psi|/|\bar{\psi}| &\ll 1, \quad U = -\partial\bar{\psi}/\partial y \end{aligned} \quad (5-7-A-2)$$

によって線形化し,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)q' + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\bar{q}}{\partial y} &= 0 \\ q'(x, y, Z, t) &= \nabla^2\psi + e^Z\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{f_0^2e^{-Z}}{\Gamma}\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right) \\ \frac{\partial\bar{q}(y, Z)}{\partial y} &= \beta - \frac{\partial^2U}{\partial y^2} - e^Z\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{f_0^2e^{-Z}}{\Gamma}\frac{\partial U}{\partial Z}\right) \end{aligned} \quad (5-7-A-3)$$

を導く.

(5-7-A-1) の微分演算子は, (5-7-A-2) より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{k} \times \nabla\psi^* \cdot \nabla &= \frac{\partial}{\partial t} + \left(-\frac{\partial\psi^*}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\mathbf{j}\right) \cdot \nabla \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \left(-\frac{\partial\psi^*}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot \nabla \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \left(-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left(-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right) \end{aligned} \quad (5-7-A-4)$$

となる. 後ろの 2 項は擾乱を含むことがわかる. また, (5-7-A-1) の q は, (5-7-A-2) より,

$$\begin{aligned} q &= \nabla^2(\bar{\psi} + \psi) + e^Z\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{f_0^2e^{-Z}}{\Gamma}\frac{\partial}{\partial Z}(\bar{\psi} + \psi)\right) + \beta y \\ &= \nabla^2\psi + e^Z\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{f_0^2e^{-Z}}{\Gamma}\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right) \\ &\quad + \nabla^2\bar{\psi} + e^Z\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{f_0^2e^{-Z}}{\Gamma}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial Z}\right) + \beta y \\ &= q'(x, y, Z, t) + \left\{\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial y^2} + e^Z\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{f_0^2e^{-Z}}{\Gamma}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial Z}\right) + \beta y\right\} \end{aligned} \quad (5-7-A-5)$$

となる. 1 つ目の項は擾乱であり, 残りの項は基本場の項である. (5-7-A-4) と (5-7-A-5) より, 基本場は x に依存しないことに注意すると, (5-7-A-3) が得られる.

余談だが, 線形化された熱力学第 1 法則 (5-37) も同様な方法から得られる.

5-8 線形シアにおける傾圧不安定

概要

前節では、傾圧不安定の一般的な条件の導出の途中までおこなった。(一般的な条件の導出は複雑で非常に難しい)。この節では、線形シアを持ち、非常に簡単な状態を仮定した大気を扱う。そのような条件下で前節を引き継ぎ、実際に不安定条件を導く。

まず、線形シアを持つ、簡単な大気を仮定する。すると前節で求めたいいくつかの式が非常に簡単になり、解析的に不安定条件を求めることが出来るようになる。求める際には、今までと同様に固有値問題を解く。実際に不安定条件を求めてみると、ちょうど総観規模の状態が不安定条件と一致することが分かり、総観規模の擾乱が傾圧不安定によって引き起こされることが分かる。

後半では、 β 効果などもう少し複雑な大気不安定条件を扱う。ただしこちらは解析的に解くのが非常に難しいため、式の導出は途中までで、最後の部分は実際の数値計算によって作成された図を紹介するに留まる。

連続的な風プロファイルを持つ傾圧大気における、最も簡単な不安定の解は Eady(1949) によって求められた。彼は以下のような簡単な状態を仮定した。

1. $\beta = 0$.
2. ブシネスク ($e^{-Z} \approx \text{一定}$).
3. 静的安定度一定 ($\Gamma = \text{一定}$) (5-40)
4. 解は y に対して独立 ($\partial/\partial y = 0$)
5. 上部境界は $Z = 1$ によってふたをされている。 ($W_{Z=1} = 0$)

風のプロファイルは Z の線形の関数

$$U = SZ \tag{5-41}$$

である。 S は定数である。 (5-40) を用いると、ポテンシャル渦度の基本場の勾配 (5-36) は以下のようになる。

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0. \tag{5-42}$$

ポテンシャル渦度方程式は以下のように簡単になる。

$$(U - c) \left(\frac{f_0^2}{\Gamma} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} - \mu^2 \Psi \right) = 0. \tag{5-43}$$

この式の解は以下のように書ける。

$$\Psi = A \sinh \left(\frac{Z}{\varepsilon^{1/2}} \right) + B \cosh \left(\frac{Z}{\varepsilon^{1/2}} \right) \tag{5-44}$$

$\varepsilon = f_0^2/\mu^2\Gamma$ である. ((4-48) ¹⁾参照). 境界条件 $W = 0$ ($Z = 0, 1$) は, (5-39) から以下のように記述できる.

$$(U - c)\frac{d\Psi}{dZ} - S\Psi = 0, \quad \text{at } Z = 0, 1. \quad (5-45)$$

(5-44) を微分し, (5-45) に代入すると,

$$-c\varepsilon^{-1/2}A - SB = 0, \quad (5-46)$$

$$(S - c)\varepsilon^{-1/2} \left[A \cosh(\varepsilon^{-1/2}) + B \sinh(\varepsilon^{-1/2}) \right] - S \left[A \sinh(\varepsilon^{-1/2}) + B \cosh(\varepsilon^{-1/2}) \right] = 0$$

という式が得られる. 係数の行列式が消えるならば, A と B は同じようにゼロになることは無い. このことから, 位相速度に関する以下の式が導かれる²⁾.

$$c^2 - Sc + S^2 (\varepsilon^{1/2} \coth \varepsilon^{-1/2} - \varepsilon) = 0. \quad (5-47)$$

c に関して (5-47) を解いて整理したものが以下である³⁾.

$$\begin{aligned} c &= \frac{S}{2} \pm S \left\{ \frac{1}{4} - (\varepsilon^{1/2} \coth \varepsilon^{-1/2} - \varepsilon) \right\}^{1/2} \\ &= \frac{S}{2} \pm S\varepsilon^{1/2} \left\{ \left[\frac{\varepsilon^{-1/2}}{2} - \tanh\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{2}\right) \right] \left[\frac{\varepsilon^{-1/2}}{2} - \coth\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{2}\right) \right] \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (5-48)$$

平方根内の量が負になるのは以下の場合である.

$$\frac{\varepsilon^{-1/2}}{2} < 1.20. \quad (5-49)$$

この場合に c は複素数になり, 解は不安定になる. (4-48) より $\varepsilon = L^2/L_R^2$ ($L_R = \Gamma^{1/2}/f_0$) なので, 不安定の必要条件 (5-49) は以下のように書ける⁴⁾.

$$\frac{\mathcal{L}}{2\pi} = L > \frac{L_R}{2.40}. \quad (5-50)$$

この条件下では, 成長率は以下ようになる⁵⁾.

$$\mu c_i = \pm \frac{S}{L_R} \varepsilon^{1/2} \left\{ \left[\frac{\varepsilon^{-1/2}}{2} - \tanh\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{2}\right) \right] \left[\frac{\varepsilon^{-1/2}}{2} - \coth\left(\frac{\varepsilon^{-1/2}}{2}\right) \right] \right\}^{1/2}. \quad (5-51)$$

1)

$$\varepsilon \equiv f^2 L^2 \Gamma^{-1}. \quad (4-48)$$

2) (5-46) から得られる

$$\begin{pmatrix} -c\varepsilon^{-1/2} & -S \\ (S - c)\varepsilon^{-1/2} \cosh \varepsilon^{-1/2} - S \sinh \varepsilon^{-1/2} & (S - c)\varepsilon^{-1/2} \sinh \varepsilon^{-1/2} - S \cosh \varepsilon^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

の行列式がゼロになるように計算すると (5-47) が得られる. なお, $\coth x = \cosh x / \sinh x$ である.

3) 1 行目は, 単に 2 次方程式 $y = ax^2 + bx + c$ の解の公式

$$x = -\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

を用いただけである.

4) \mathcal{L} は波長である.

5) $L = \mu$ としている.

このように、成長率は直接的に鉛直の風速シア S に比例する。また、 L が (5-50) を満たす場合には、 $S \neq 0$ である限り、全ての波は不安定になる。成長率が最大になるのは以下の場合である。

$$L = \frac{L_R}{1.92}. \quad (5-52)$$

この解析が示すのは、傾圧不安定が起こり得るスケールは $L \sim L_R$ 、または $\varepsilon \sim 1$ であるということである。総観規模での擾乱は $\varepsilon \sim 1$ であることは観測されているので、総観規模の擾乱の主要なエネルギー源は傾圧不安定であると考えerことは妥当である。

不安定な波の位相速度は

$$c_r = \frac{S}{2} \quad (5-53)$$

である。このモデルでの鉛直の対称性から、この位相速度は妥当なものであると言える。不安定な固有解は $Z = 1/2$ に関して対称性を持つ。またこの鉛直構造は、観測された総観規模の擾乱と定性的には似ている。

この不安定の形態は上部下部境界条件 (5-45) と密接に関係している。もしこれらの条件を $\Psi = 0$ (at 上部下部境界) に置き換えたならば、これらの不安定な波は存在し得ない。

この問題は、以前に順圧不安定で述べたある状態の一つの例である。その状態とは、離散ノーマルモードは完全系を形成できないという状態のことを指している。今回の場合、各々の μ に関してちょうどペアの解が存在した。この問題を初期値問題として扱うことによって、初期擾乱が滑らかに弱まるような連続スペクトルの解を見付けることができる。

Charney(1947) は Eady が使ったのと同じ風プロファイルを用いたが、Eady が除外したいいくつかの効果を含めた。Charney は β 効果を含み、無限遠における上部境界を設定し、ブシネスク近似をおこなわなかった。この場合、ポテンシャル渦度の基本場の勾配 (5-36) は以下ようになる。

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \beta + f_0^2 S / \Gamma. \quad (5-54)$$

Γ は一定である。基本場が西風 ($S > 0$) の場合、ポテンシャル渦度の勾配は正の定数となる。一方、Eady のモデルではこの勾配はゼロになっていた。固有値問題 (5-38) はこの場合、以下ようになる。

$$(SZ - c) \left[\left(\frac{f_0^2}{\Gamma} \right) \left(\frac{d^2 \Psi}{dZ^2} - \frac{d\Psi}{dZ} \right) - \mu^2 \Psi \right] + (\beta + f_0^2 S / \Gamma) \Psi = 0. \quad (5-55)$$

この式は (5-43) に比べ、解くのが非常に難しい。なぜなら、 $\partial \bar{q} / \partial y$ はゼロではないからである。この方程式は合流型超幾何関数方程式に変形できる。変形した方程式において重要な変数は

$$r = \frac{\Gamma (\beta + S f_0^2 / \Gamma)}{f_0^2 S (1 + 4\Gamma f_0^{-2} \mu^2)^{1/2}} \quad (5-56)$$

である。合流型超幾何関数に変形した境界条件に代入された場合、 c に関して解くのは非常に難しい。図 5-7 は、 $Z = 1$ でふたがされている状態の安定性を Green が数値積分によって求めた図である。横座標は波長 $1/\mu$ 、縦座標は風の鉛直シア S であり、線は成長率 μc_i の等値曲線である。上部の太い実線⁶⁾ は $r = 1$ の中立曲線である。破線は、成長率の最大値を示している。 r が中立曲線である正の整数以外ならば、不安定は起こり得る。横座標に近い太線は $r = 2, r = 3$ に対応する。

⁶⁾0, 0.1, 0.2 という添字が付いた線およびそれよりも上の部分の線のことである。

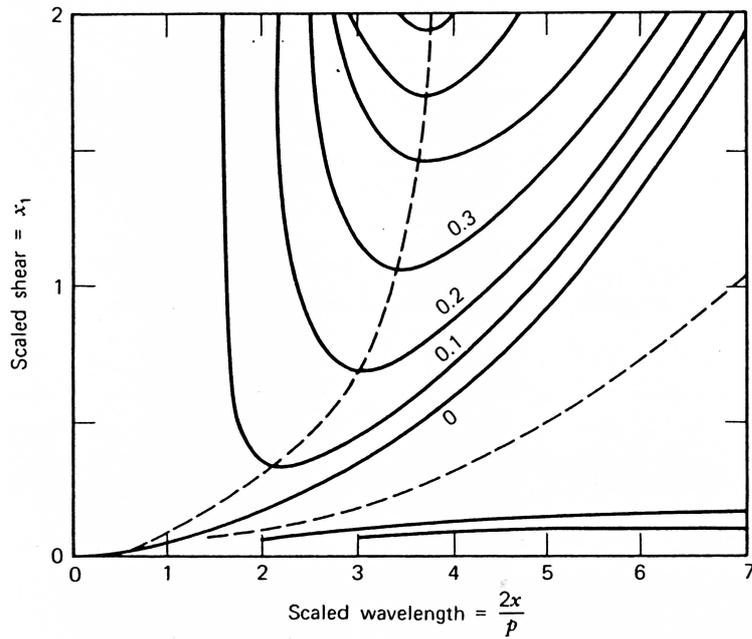


Figure 4.7 Stability diagram for the Charney model with a lid at $Z = 1$ as computed by Green (1960). (From J.S.A. Green, "A Problem in Baroclinic Stability." *Royal Meteorological Society*, 1960.)

図 5-7: Green(1960) によって計算された, $Z = 1$ でふたがされた状態での Charey モデルの安定性の図 (From J.S.A Green, "A problem in Baroclinic Stability" *Royal Meteorological Society*, 1960.) なお, この図は Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1979: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology. *John Wiley & Sons*, 477pp より転載.

これは非常に珍しい安定問題と言える。なぜなら, 中立曲線が不安定な領域と安定, または中立な領域を分けていないからである。ただし, 0.1 と印の付いた線よりも外の成長率は, 非常に小さいため, 摩擦のある所では波は存在しない。S が非常に大きい値をとった場合, 図の最も不安定な部分は Eady の結果に近くなる。

5-9 2層モデル

概要

前節の最後におこなった Charney(1947) モデルは複雑だったために、その不安定性を解析的に解くことはしなかった。今節では、そのモデルよりは簡単化された鉛直構造を持ち、且つ Charney モデルと同じような結果を得ることが出来る 2 層モデルと呼ばれるモデルの不安定性について取り扱う。

2 層モデルとは、1) 大気を 4 層に分け、2) 中間の層では風を与え、3) 真中の層では鉛直運動を与える、モデルである。(図 5-8 に示してある)。

利用する方程式は p 鉛直座標系の渦度方程式、および熱力学第 1 法則である。(これらの式は 3-4 節の最後で導出された)。これらの式を線形化した後に 2 層モデルに適用する。さらにこれらの式に波動解を適用して位相速度を求める。後はこれまでの節でおこなったのと同じように、位相速度が虚数を持つかどうかを調べることで不安定性の条件を導く。

ここで得た不安定性の条件から、不安定性は主に地衡風の鉛直シアと波の波長によって支配されることがわかる。

2 層モデルの不安定性の条件と Charney モデルの不安定性の条件は一見まったく違うように見えるが、ちゃんと調べてみるとその 2 つは良く似ていることがわかってくる。これらのことから 2 層モデルは総観規模における傾圧不安定波の振る舞いをだいたい表していると言える。また、観測からもこのことは裏付けされていることがわかっている。

なお、今節の途中でエネルギーの式を導いている。この式が 2 層モデルにおける有効位置エネルギーと運動エネルギーの変換について理解するのに便利なためである。

Charney(1947) モデルの安定性の性質は解析的に解くのが非常に難しいため、非常に簡単化した鉛直構造を持つようなモデルを考えた方が有用である。2 層モデルは、大気を 4 層に分け、1,3 層では風を、真中の層では鉛直運動を与える。こうすると、数学的には非常に簡単であり、そしてその結果は Charney モデルと一致する。対流圏に簡単に应用するため、この解析は圧力座標系でおこなう。渦度方程式 (4-74)¹⁾ と熱力学第 1 法則 (4-75)²⁾ は以下のように記述できる³⁾。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{k} \times \nabla \psi^* \cdot \nabla\right) (\nabla^2 \psi^* + \beta y) - f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0, \quad (5-57)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{k} \times \nabla \psi^* \cdot \nabla\right) \frac{\partial \psi^*}{\partial p} + \frac{\sigma}{f_0} \omega = 0. \quad (5-58)$$

1)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla\right) (\zeta + \beta_0 y) - f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (4-74)$$

2)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial p} + \mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla (\partial \phi / \partial p) + \sigma(p) \omega = 0. \quad (4-75)$$

³⁾ この変形は 4-7 節の (5-30), (5-32) を求めた方法と同じである。変形方法の詳細はそちらを参照のこと。

2層モデルでは、(5-57) と (5-58) の有限差分をとると便利である。すると、それらを組み合わせることによってポテンシャル渦度方程式の有限差分を直接求めることが出来る。始めの操作によって、上部下部境界条件は自動的に含まれることになる。

最初に (5-57) と (5-58) の線形化をおこなう。線形化のため、以下のように設定する⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} \psi^* &= -U(p)y + \psi(x, p, t) \\ \omega &= \omega'(x, p, t) \end{aligned} \right\} \quad (5-59)$$

これらの式では、東西風の基本場として $U(p)$ が存在し、それに加え y に独立な擾乱場が存在することを示している。(5-59) を (5-57), (5-58) に代入することで以下の式が得られる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} - f_0 \frac{\partial \omega'}{\partial p} = 0 \quad (5-60)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{dU}{dp} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\sigma}{f_0} \omega' = 0 \quad (5-61)$$

これらの方程式は、 ψ と ω' が小さくない場合であっても線形である。

2層モデルの鉛直構造が図 5-8 に示されている。境界条件は、地表面 $p = p_s$ と対流圏界面 $p = p_T$ に

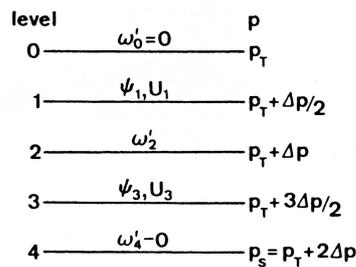


Figure 4.8 The vertical structure of the two-level mode.

図 5-8: 2層モードの鉛直構造 (Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1979: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology. John Wiley & Sons, 477pp)

において $\omega' = 0$ であることである。後者の条件は妥当な近似と言える。なぜなら、成層圏においては静的安定度は大きく、このことから鉛直の運動は小さくなるからである。

⁴⁾これは、4-7 節の (5-33)

$$\psi^*(x, y, Z, t) = \bar{\psi}(y, Z) + \psi(x, y, Z, t)$$

の線形化と実質的にはほぼ同じことをしている。4-7 節では $U = -\partial \bar{\psi} / \partial y$ と仮定しており、これを書き換えれば $\bar{\psi} = -Uy + c$ となるだろう。積分関数を $c = 0$ とすれば、(5-33) と (5-59) は同じことだと分かる。

1層, 3層に渦度方程式 (5-60) を用い, 最後の項に集中有限差分を用いると以下の式が得られる.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - f_0 \frac{\omega'_2}{\Delta p} = 0, \quad (5-62)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_3 \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + f_0 \frac{\omega'_2}{\Delta p} = 0. \quad (5-63)$$

残っている式は, 熱力学第1法則を2層に利用することであることが出来る:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{U_1 + U_3}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x}\right] (\psi_1 - \psi_3) - \left(\frac{U_1 - U_3}{2}\right) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x}\right) - \left(\frac{\Delta p \sigma_2}{f_0}\right) \omega'_2 = 0. \quad (5-64)$$

この式は $-\Delta p$ を掛けたものである. いくつかの量は, 1層と3層の値を平均して得た⁵⁾. (5-62), (5-63), そして (5-64) は未知の関数 $\psi_1, \psi_3, \omega'_2$ に関する方程式である.

これらの式を解く前に, エネルギーの式を導く. エネルギーの式は解の意味を解釈するのに使うことができ, 便利なためである. (5-62) に $-\psi_1$ を掛け, (5-63) に $-\psi_3$ を掛け, 足し合わせてから x に関して平均をとると, 以下の式が得られる.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{(\partial \psi_1 / \partial x)^2 + (\partial \psi_3 / \partial x)^2}{2} \right] = - (f_0 / \Delta p) \overline{\omega'_2 (\psi_1 - \psi_3)}. \quad (5-65)$$

左辺は擾乱の運動エネルギーの時間変化率である⁶⁾. 位置エネルギーの式は (5-64) に $\lambda(\psi_1 - \psi_3)$ を掛け, x に関して平均をとることであることが出来る:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\lambda(\psi_1 - \psi_3)^2}{4} \right] = \frac{\lambda}{4} (U_1 - U_3) (\psi_1 - \psi_3) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \right) + (f_0 / \Delta p) \overline{\omega'_2 (\psi_1 - \psi_3)}. \quad (5-66)$$

なお,

$$\lambda = 2f_0^2 / (\Delta p^2 \sigma_2) \quad (5-67)$$

である. $\psi_1 - \psi_3$ は温度の擾乱の鉛直方向の平均値に比例することに注意して欲しい⁷⁾. (5-66) の左辺は擾乱の有効ポテンシャルエネルギーの時間変化率である. 1-11節において, 有効位置エネルギーは, 等圧面上での温度の変化を静的安定度の平均値で割ったものに近似できることは示した⁸⁾. (5-65) の最後の項は, 擾乱の有効位置エネルギーから擾乱の運動エネルギーへの変換の項である. なぜなら, (5-66) の中にその逆の符号のものが存在するからである. この項は, 暖かい大気 ($\psi_1 - \psi_3 > 0$) が上昇する ($\omega_2 < 0$ ⁹⁾) 場合や冷たい空気 ($\psi_1 - \psi_3 < 0$) が下降する ($\omega_2 > 0$) 場合に正になる¹⁰⁾. その場合, 大気の重心が下方に下がるので, 位置エネルギーは運動エネルギーに変

⁵⁾ $(U_1 + U_3)/2$ と $\partial/\partial x\{(\psi_1 + \psi_3)/2\}$ のことである.

⁶⁾ 2層モデルでは, $u' = 0, v' = \partial\psi/\partial x$ である.

⁷⁾ $\psi^* = f_0^{-1}\phi$ より $\psi = f_0^{-1}\phi'$ である. さらに, (4-32) より, $RT' = -p \partial\phi'/\partial p$ である. このことから, $\psi_1 - \psi_3$ は温度の擾乱の鉛直方向の平均値に比例すると言える.

⁸⁾ $\lambda(\psi_1 - \psi_3)^2$ が有効位置エネルギーに関しては 5-9-A を参照.

⁹⁾ $\omega = dp/dt$ であり, p 座標系での鉛直速度である. 圧力 p は地表面では大きく, 上空にゆくにつれ小さくなるので, 大気の上昇は $\omega < 0$ で表される.

¹⁰⁾ このことに関する直感的な概念図を 5-9-B に載せた.

換される。地衝風の鉛直シア $U_1 - U_3$ の存在は、温度の基本場の y または南北方向の勾配を意味する¹¹⁾。(5-66)の右辺の第1項の項は ($U_1 - U_3$ に関係した) 基本場の有効位置エネルギーから擾乱の有効位置エネルギーへの変換を表している。この項は、北向きに動く ($(\partial\psi_1/\partial x + \partial\psi_3/\partial x)/2 > 0$)¹²⁾ 大気が暖かい ($\psi_1 - \psi_3 > 0$) 場合や南向きに動く ($(\partial\psi_1/\partial x + \partial\psi_3/\partial x)/2 < 0$) 大気が冷たい ($\psi_1 - \psi_3 > 0$) 場合に正になる。もしも y の境界が存在する場合、このプロセスは $U_1 - U_3$ となる。

では、改めて (5-62) ~ (5-64) を解く。以下の波動解を方程式の系に用いる。

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \Psi_1 e^{i\mu(x-ct)}, \\ \psi_3 &= \Psi_3 e^{i\mu(x-ct)}, \\ \omega'_2 &= (\Delta p f_0^{-1}) W e^{i\mu(x-ct)}. \end{aligned} \tag{5-68}$$

(5-68) を (5-62), (5-63), (5-64) に代入すると、以下の式が得られる。

$$\mu [\beta - \mu^2(U_1 - c)] \Psi_1 + iW = 0, \tag{5-69a}$$

$$\mu [\beta - \mu^2(U_3 - c)] \Psi_1 - iW = 0, \tag{5-69b}$$

$$\mu[U_3 - c]\Psi_1 - \mu[U_1 - c]\Psi_3 + i2W/\lambda = 0. \tag{5-69c}$$

振幅 Ψ_1, Ψ_2, W がゼロでないならば、(5-69) の係数の行列式は消えなければならない。この条件により、以下の c に関する2次方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} 2\mu^2 (\mu^2 + \lambda) c^2 + [2\beta (2\mu^2 + \lambda) - 2\mu^2 (\mu^2 + \lambda) (U_1 + U_3)] c \\ + 2\beta^2 - \beta (2\mu^2 + \lambda) (U_1 + U_3) + 2\mu^4 U_1 U_3 + \mu^2 \lambda (U_1^2 + U_3^2) = 0. \end{aligned}$$

2次方程式の解の公式を使うことで、以下の c に関する式が得られる¹³⁾。

$$c = (U_1 + U_3)/2 - \frac{\beta (2\mu^2 + \lambda)}{2\mu^2 (\mu^2 + \lambda)} \pm \frac{[\lambda^2 \beta^2 - \mu^4 (\lambda^2 - \mu^4) (U_1 - U_3)^2]^{1/2}}{2\mu^2 (\mu^2 + \lambda)}. \tag{5-70}$$

(5-70) の平方根内が負になる時、 c は複素数となり、この解は不安定になる。実際に、 μ^4 が λ^2 より小さく、 $(U_1 - U_3)^2$ が十分に大きい時、不安定は起こる。根号が実数ならば、中立解が得られる。波長 (μ^{-1}) と鉛直シア ($U_1 - U_3$) の座標系における安定性のダイアグラムでは、ちょうど根号が消える曲線が不安定の領域の境界となっている。この「根号が消える」状態は以下のように記述できる。

$$(U_1 - U_3)^2 = \frac{\lambda^2 \beta^2}{\mu^4 (\lambda^2 - \mu^4)}. \tag{5-71}$$

この曲線は図 5-9 で示されている。(この図では λ, β は固定されている)。以下の漸近線が不安定な領域の短波側 ($\mu^{-1} \rightarrow 0$) の境界となっている。

$$\mu^{-1} = \lambda^{-1/2} = \Delta p \sigma_2^{1/2} / (f_0 \sqrt{2}). \tag{5-72}$$

¹¹⁾要するに、温度風のことを言っている。

¹²⁾ $\partial\psi/\partial x = v$ である。

¹³⁾2次方程式 $y = ax^2 + 2bx + c$ の解の公式は以下である。

$$x = -\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

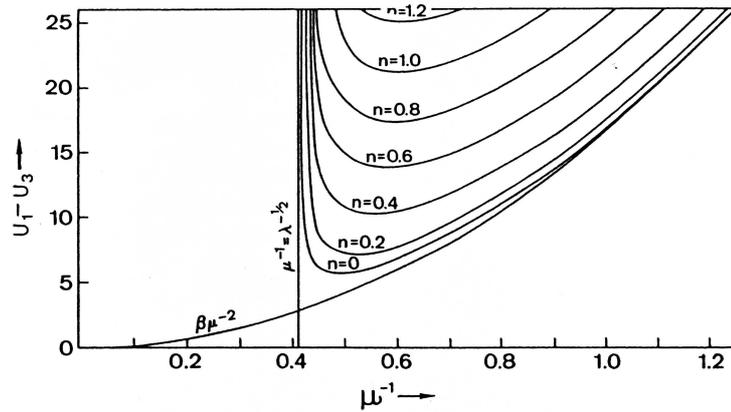


Figure 4.9 The growth rate $n = \mu|c_i|$ from the two-level model as a function of $U_1 - U_3$ and μ^{-1} for $\lambda = 5.88 \times 10^{-12} \text{ m}^{-2}$ and $\beta = 1.67 \times 10^{11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. The units for μ^{-1} , $U_1 - U_3$ and n are 10^6 m , m s^{-1} and 10^{-5} s^{-1} , respectively.

図 5-9: 2層モデルにおける, $U_1 - U_3$ と μ^{-1} の関数としての成長率 $n = \mu|c_i|$ のグラフ. $\lambda = 5.88 \times 10^{-12} \text{ m}^{-2}$, $\beta = 1.67 \times 10^{11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. μ^{-1} , $U_1 - U_3$, n の単位はそれぞれ, 10^6 m , m s^{-1} , 10^{-5} s^{-1} . (Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1979: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology. John Wiley & Sons, 477pp)

長波側 ($\mu^{-1} \rightarrow \infty$) では, $\mu^2 \ll \lambda$ なので, (5-71) は以下ようになる.

$$|U_1 - U_3| = \beta/\mu^2. \quad (5-73)$$

(5-71) の μ に関しての微分がゼロになるようにすることで, (5-71) の最小値と, 最小値をとる波長 μ^{-1} を知ることが出来る. $\mu^{-1} = 2^{1/4} \lambda^{-1/2}$ の時に (5-71) は以下の最小値をとる.

$$(U_1 - U_3)_{\min} = 2\beta/\lambda = \beta \frac{\Delta p^2 \sigma_2}{2f_0^2}. \quad (5-74)$$

2層の準地衡流モデルの安定性の性質もこれらと同じになる. なぜなら, 変数を適切に同一視すれば, 準地衡流モデルもまた非圧縮で等質な2つの層を持つからである.

短波の切断 (5-72) は静的安定度と関係する¹⁴⁾. また, 長波の安定性 (5-73) は β の効果と関係する. なぜなら (5-73) はロスビー波の式の β の項に似ているからである. ((5-10)¹⁵⁾ 参照). 不安定鉛直シアの最小値は β と静的安定度の積に比例する. 面白いのは, 地球の回転をゼロとするとこの不安定性が消えてしまうことである. $\beta = 0$ という特殊な場合には, 不安定性の必要条件は以下のように書ける.

$$\mu^{-1} > \Delta p \sigma_2^{1/2} / (f_0 \sqrt{2}), \quad U_1 \neq U_3. \quad (5-75a)$$

¹⁴⁾ $\sigma = \Gamma/p^2$ である.

¹⁵⁾

$$c = U - \beta/\mu^2. \quad (5-10)$$

これは、以下の Eady(1949) の解での対応する条件 (5-50) と比較することが出来る。

$$\mu^{-1} > \Gamma^{1/2} / (f_0 \cdot 2.4), \quad S = dU/dZ \neq 0. \quad (5-75b)$$

これらの条件は明らかに同じような形をしている。β ≠ 0 である一般的な場合には、2層モデルにおける安定性のダイアグラム (図 5-9) は、Charney の連続モデル (図 5-7) のダイアグラムとは表面的には全く異なって見える。後者では、解が中立である特定の曲線以外は、全てのダイアグラムは不安定である。しかしながら、連続モデルのダイアグラムのほとんどの成長率は非常に小さい。もしも摩擦があった場合には、これらの波の大半は弱められて消えてしまう。ある成長率で見てみた時、事実上の不安定領域は図 5-7 における成長率の等値線の一つによって囲まれる。これらは、2層モデルのダイアグラムである図 5-9 における安定性の境界 (5-71) と同じような形をしている。このことから、2層モデルは総観規模における傾圧不安定波の振る舞いを大雑把には表していると言える。最も不安定な波長はおよそ 4000 ~ 5000km であり、その波長は観測される総観規模の波のものと一致する。

5-9-A 有効位置エネルギー

(5-66) における $\overline{\lambda(\psi_1 - \psi_3)^2}$ が 1-11 節の有効位置エネルギーの式 (2-98) と対応することを示す。なお、以下に (2-98) を再掲する。

$$\begin{aligned} \bar{A} &\doteq \frac{1}{2} \int_0^{p_s} \frac{\bar{T}}{\gamma_d - \bar{\gamma}} \overline{\left(\frac{T'}{\bar{T}}\right)^2} dp. \\ (\bar{\gamma} &= -\partial\bar{T}/\partial z, \quad \gamma_d = g/c_p) \end{aligned} \quad (5-9-A-1)$$

$\overline{\lambda(\psi_1 - \psi_3)^2}$ は (5-67) を用いると以下のように書き直すことができる。

$$2f_0^2 (\psi_1 - \psi_3)^2 \frac{p^2}{\Gamma \Delta p^2} = 2f_0^2 \frac{p^2}{\Delta p^2} \frac{(\psi_1 - \psi_3)^2}{\Gamma}. \quad (5-9-A-2)$$

なお、σ = Γ/p² である。(4-4 節参照)。(5-9-A-1) における乾燥断熱減率と温度減率の差 γ_d - γ̄ と (5-9-A-2) の静的安定度 Γ が対応することは、静的安定度の定義からわかる。(4-47 参照)。また、(5-9-A-1) における等圧面上での温度変化の二乗の平均 $\overline{T'^2}$ と (5-9-A-2) の (ψ₁ - ψ₃)² も対応する。これらから、 $\overline{\lambda(\psi_1 - \psi_3)^2}$ を有効位置エネルギーと呼ぶことが出来ることが示された。

5-9-B 大気の移動による位置エネルギーと運動エネルギーの変換

暖かい空気が上昇し、冷たい空気が下降と (有効) 位置エネルギーは減り、運動エネルギーは増えることを本文で述べた。このことを図 5-9-B-1 に図示した。

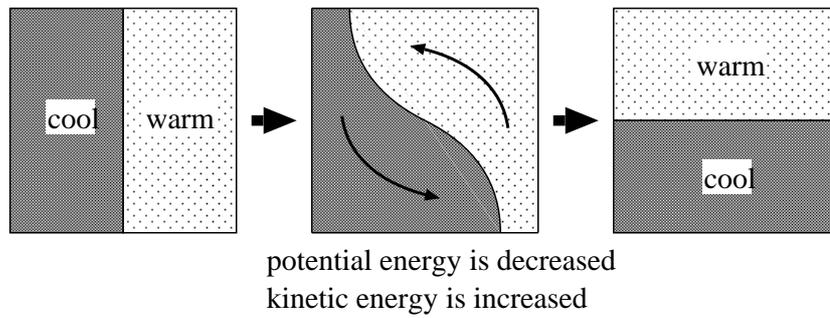


図 5-9-B-1: 暖かい空気, 冷たい空気がそれぞれ上下に移動することで, 位置エネルギーは減少し, 運動エネルギーは増加する.

5-10 波の構造

概要

この節では、前節で扱った2層モデルの波の構造を考える。そして、その波の構造がエネルギー変換に及ぼす効果を議論する。なお、はじめに安定な波を、次に不安定な波を扱い、最後にそこから派生して、大気全体でのエネルギー変換について議論する。

まず、1, 3層の流線関数の擾乱の振幅と、2層の鉛直運動の擾乱の振幅との関係式を考える(これを考えないとエネルギー変換に関する議論が出来ない)。

はじめは、上記の関係式を用い、中立的な(安定な)波の構造を考察する。当然ながらエネルギーの変換はおこらないが、このことを前節のエネルギー変換の式(5-65), (5-66)を用い、証明する。

次に、不安定な波を考える。この2層モデルにおける不安定波の図を描き、気圧の谷・尾根、上昇下降流、大気の寒暖といった大気現象と波の構造との関係を説明する。そして、不安定な波によるエネルギーの変換を解説する。

最後は、Oort(1964)による大気のエネルギーダイアグラムを用い、大気全体でのエネルギー変換について解説し、2層モデルに関する話のまとめとする。

この節では2層モデルにおける波の構造を求める。これによりエネルギーの式(5-65), (5-66)における各項を見積もることが出来る。(5-70)は2つの解を持っており、それぞれ c^+ , c^- とする。これらは(5-70)において+, -の符号を持ったものと対応する。2-6節において、浅水方程式系の一般解は3つの位相速度と固有解で記述した。2層モデルでは一般解は以下のように記述できる。

$$\psi_1 = \text{Re} \left[a^+ \Psi_1^+ e^{i\mu(x-c^+t)} + a^- \Psi_1^- e^{i\mu(x-c^-t)} \right] \quad (5-76a)$$

$$\psi_3 = \text{Re} \left[a^+ \Psi_3^+ e^{i\mu(x-c^+t)} + a^- \Psi_3^- e^{i\mu(x-c^-t)} \right] \quad (5-76b)$$

$$\omega'_2 = \Delta p f_0^{-1} \text{Re} \left[a^+ W^+ e^{i\mu(x-c^+t)} + a^- W^- e^{i\mu(x-c^-t)} \right] \quad (5-76c)$$

Re は複素数の実数部分を示す。オイラーの式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (5-77)$$

は(5-76)を求めるのに便利である。なぜなら、いかなる複素数も $\Psi = |\Psi|e^{i\theta}$ のように書き表すことが出来るからである。式(5-76c)は実は必要ない。なぜなら、 ω'_2 は ω 方程式によって診断的に ψ_1, ψ_3 と関係しているからである¹⁾。 c^+ や c^- に関する振幅同士の関係は(5-69)の方程式系から知ることが出来る。特に、(5-69a)と(5-69b)を加えることで以下の式が得られる。

$$\Psi_1^\pm = -\frac{c^\pm - (U_3 - \beta/\mu^2)}{c^\pm - (U_1 - \beta/\mu^2)} \Psi_3^\pm. \quad (5-78)$$

¹⁾ ω 方程式は3-4節で求めた以下の式である。

$$\sigma \nabla^2 \omega + f_0^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = f_0 \frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla (\zeta + \beta y)) - \nabla^2 \left(\mathbf{V}_\Psi \cdot \nabla \frac{\partial \phi'}{\partial p} \right). \quad (4-75)$$

$\zeta = \nabla^2 \psi^* = \nabla^2 (Uy + \psi)$, $\phi' = f_0 \psi^* = f_0 (Uy + \psi)$ なので、 ω は ψ によって決めることが出来る。

鉛直運動は (5-69b) を以下の形にすることで知ることが出来る。

$$W^{\pm} = -i\mu^3 [c^{\pm} - (U_3 - \beta/\mu^2)] \Psi_3^{\pm}. \quad (5-79)$$

もしも ψ_1 と ψ_3 の振幅と位相の初期条件が与えられているのであれば、それらの初期条件を (5-76a) と (5-76b) に使うことによって a^+ と a^- を知ることが出来る。

図 5-9 において不安定領域よりも外にある中立的な波は、 c を (複素数ではなく) 実数として持ち、 $c^+ > c^-$ を満たす²⁾。この場合、(5-78) の右辺の係数は完全に実数であることから、 Ψ_1^{\pm} と Ψ_3^{\pm} は同じ位相であるか、または 180° 位相がずれていることがわかる。また (5-79) から、鉛直運動 W は流線関数 Ψ_3^{\pm} とは位相が 90° ずれていることがわかる。これらの位相の関係から、どの中立的な波においても、(5-65)、(5-66) の右辺のエネルギー変換の項はゼロになる。もしも解 (5-76a,b,c) を足し合わせたものを使ったならば、変換はゼロについて周期的に変化する。

波長の短い中立的な波の場合、(5-70) における β/μ^2 のオーダーの項は落すことができる³⁾。このようにした結果 (5-70) は以下ようになる。

$$c^{\pm} = (U_1 + U_3)/2 \pm \frac{1}{2} \left[\frac{\mu^2 - \lambda}{\mu^2 + \lambda} (U_1 - U_3)^2 \right]^{1/2}. \quad (5-80)$$

この場合、(5-78) から以下のことが分かる⁴⁾。

$$\Psi_1^+/\Psi_3^+ > 1, \quad \Psi_1^-/\Psi_3^- < 1.$$

このように、位相速度が基本場の風速に最も近いような高度において、大きな振幅が発生する⁵⁾。 $W = |W|e^{-i\theta}$ (θ は $t = 0$ における位相) と記述し、 $\Psi_3 > 0$ を選ぶと、(5-79) と (5-80) から $\theta = 90^\circ$ となる。これは、気圧の谷の前面では上昇流 ($\omega < 0$) が、気圧の谷の背面では下降流 ($\omega > 0$) が発生することを意味している。この波の構造は、4-8 節で扱った Eady モデルの中立的な波として知られている。ここで考えたような一般的な鉛直構造は、等価順圧モデルのものと似ている。

鉛直シアが無い場合、(5-70) における $U_1 - U_3$ はゼロとなる。すると、(5-70) は以下ようになる。

$$\begin{aligned} c^+ &= (U_1 + U_3)/2 - \beta/(\mu^2 + \lambda), \\ c^- &= (U_1 + U_3)/2 - \beta/\mu^2. \end{aligned} \quad (5-81)$$

c^- は純粋はロスビー波 ((5-10)⁶⁾ 参照) である。なぜなら、(5-79) と (5-69c) より $W^- = 0$ 、 $\Psi_1^- = \Psi_3^-$ であるからである。 c^+ は慣性重力波である。なぜなら、(5-78) と (5-79) より $\Psi_1^+ = -\Psi_3^+$ 、

²⁾ c が実数であれば当然 $c^+ > c^-$ となる。

³⁾ 波長が短くなることは波数 μ が大きくなることと等しいため、波長の短い波を考える場合には β/μ^2 は微小だとして無視する。

⁴⁾ 詳細は 5-10-A 参照。

⁵⁾ (5-80) において、 $\lambda/\mu^2 \sim 0$ と近似すると、

$$\begin{aligned} c^+ &\simeq U_1 \\ c^- &\simeq U_3 \end{aligned}$$

であることがわかる。

⁶⁾

$$c = U - \beta/\mu^2. \quad (5-10)$$

$W^+ \neq 0$ であるからである. $(U_1 - U_3)^2$ が非常に小さい時, 長波がこのような振る舞いをするのは予想されていたことである.

図 5-9 における不安定領域での位相速度は以下のように記述できる.

$$c^\pm = c_r \pm i n/\mu.$$

なお,

$$\begin{aligned} c_r &= (U_1 + U_3)/2 - \beta(2\mu^2 + \lambda) / [2\mu^2(\mu^2 + \lambda)], \\ n &= [\mu^4(\lambda^2 - \mu^4)(U_1 - U_3)^2 - \lambda^2\beta^2]^{1/2} / [2\mu(\mu^2 + \lambda)] \end{aligned} \tag{5-82}$$

である. すると, 解は以下のように書くことが出来る.

$$\psi_{1,3} = \text{Re} \left[a^+ \Psi_{1,3}^+ e^{i\mu(x-c_r t)} e^{nt} + a^- \Psi_{1,3}^- e^{i\mu(x-c_r t)} e^{nt} \right]. \tag{5-83}$$

$a^+ = 0$ という特別な場合を除き, 成長する解 (e^{nt} を含む項) は減衰する解 (e^{-nt} を含む項) を急速に支配していく⁷⁾. このことから, 成長する解の構造を詳細に調べることが望ましい.

c が複素数の場合, (5-78) と (5-79) の右辺の係数も複素数となる. そのため, 不安定な波の位相構造は, 以前に議論した中立的な波の構造とは異なってくる. (5-78) と (5-79) は (5-82) を用いることで以下のように書き直される⁸⁾.

$$\Psi_1^\pm = - \frac{\{c_r - [(U_1 + U_3)/2 - \beta/\mu^2]\}^2 - (U_1 - U_3)^2/4 + n^2/\mu^2 \mp i n(U_1 - U_3)/\mu}{[c_r - (U_1 - \beta/\mu^2)]^2 + n^2/\mu^2} \Psi_3^\pm, \tag{5-84}$$

$$W^\pm = \mu^3 \{ \pm n/\mu - i [c_r - (U_3 - \beta/\mu^2)] \} \Psi_3^\pm. \tag{5-85}$$

ここでは波の位相構造が, 成長する解と弱まる解との間で逆転していることに注意して欲しい⁹⁾. これらの方程式は増幅または減衰する波の構造を計算するのに用いることが出来る. 2層における温度の擾乱は, 以下のように静水圧の式の積分から計算することが出来る¹⁰⁾.

$$T_2' = f_0(\psi_1 - \psi_3) / [R \ln(p_3/p_1)]. \tag{5-86}$$

例として, 増幅する解の構造を以下の典型的な値で計算してみる. $f_0 = 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$, $\beta = 1.67 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ sec}^{-1}$, $\mathcal{L} = 2\pi/\mu = 4000 \text{ km}$, $\lambda = 5.88 \times 10^{-12} \text{ m}^{-2}$, $p_s = 1000 \text{ mb}$, $\Delta p = 400 \text{ mb}$, $U_1 - U_3 = 20 \text{ m sec}^{-1}$, $a^- = 0$, $a^+ \Psi_3^+ = 10 \text{ m sec}^{-1}/\mu$. 最後の関係式により, 3層の成長する解

⁷⁾ $n > 0$ であることに注意.

⁸⁾ (5-84) は, (5-78) に (5-82) を代入した後, 分母と分子の両方に $c_r \pm i n/\mu$ を掛けて得ることが出来る.

⁹⁾ (5-84) において成長減衰に関わる $i n/\mu$ の項の符号が \pm ではなく \mp になっていることがここで言っていることである.

¹⁰⁾ まず, 静水圧の式と状態方程式を組み合わせさせた式

$$RT' = -p \partial\phi'/\partial p. \tag{4-32}$$

を考える. これを, 地衡流線関数の関係式 $\phi' = f_0\psi^* = f_0(Uy + \psi)$ により得られる式 $\partial\phi'/\partial p = \partial\psi/\partial p$ を用いて変形すると以下の式が得られる.

$$RT' = f_0 p \partial\psi/\partial p.$$

この式を1層から3層まで積分することで (5-86) が得られる. なお, T_2' は T' の1層~3層間の平均値として扱う.

の振幅と位相が決まる。(5-83)に(5-84)と(5-77)を用いることで、以下の ψ_1 と ψ_3 に関する解を得ることが出来る。

$$\begin{aligned}\psi_1 &= (14.2 \text{ m sec}^{-1}) \mu^{-1} \cos [\mu(x - c_r t) + 64^\circ] e^{nt}, \\ \psi_3 &= (10 \text{ m sec}^{-1}) \mu^{-1} \cos [\mu(x - c_r t)] e^{nt}.\end{aligned}\quad (5-87)$$

一方、鉛直運動は(5-76c)に(5-77)、(5-85)を利用することで得ることが出来る。

$$\omega'_2 = -1.36 \times 10^{-3} \text{ mb sec}^{-1} \cos [\mu(x - c_r t) + 116^\circ] e^{nt}.\quad (5-88)$$

これらを(5-86)に代入することで、以下の温度が得られる。

$$T'_2 = (4.35C) \cos [\mu(x - c_r t) + 108^\circ] e^{nt}.\quad (5-89)$$

ちなみに、流線関数の振幅は v 成分の振幅を波数で割ったもので得られる。

(5-87)、(5-88)、(5-89)から得られる場の断面図を図5-10に示す。上と下の曲線はそれぞれ ψ_1 と ψ_3

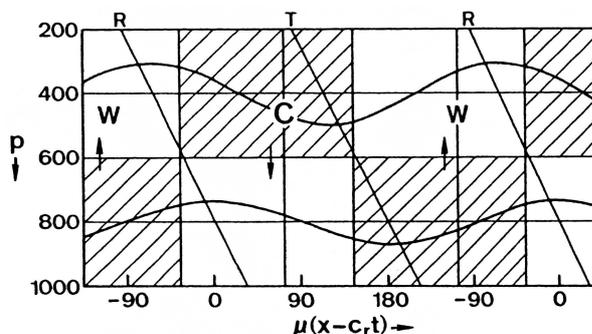


Figure 4-10 Cross section of the unstable wave as given by (4.87), (4.88), and (4.89).

図5-10: (5-87)、(5-88)、(5-89)から得られる不安定波の断面図。(Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1979: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology. John Wiley & Sons, 477pp)

を表している。また、気圧の谷(T)と気圧の尾根(R)によって示されているように、擾乱は高度と共に西に傾く。(5-87)から、上の層の擾乱の振幅の方が大きいことが分かる。この原因は β の存在にある。温度の擾乱の最大と最小はそれぞれ W と C で示されている¹¹⁾。矢印は中央の層における鉛直運動の両極端を表している¹²⁾。斜線部は水平収束の部分、そうでない部分は水平発散の部分を表す。これらの部分では質量の連続性があると考えている。

実際に観測される総観規模の擾乱も、2層モデルにおける不安定波と共通する特徴を多く持つ。観測される擾乱も高さと共に西に傾き、上層の気圧の谷の前面で上昇運動をおこなう。また観測では、

¹¹⁾(5-89)から $\mu(x - c_r t) = 72^\circ + 180^\circ \times n$ において最小値を、 $\mu(x - c_r t) = -108^\circ + 180^\circ \times n$ において最大値を取ることが分かる。

¹²⁾(5-88)から $\mu(x - c_r t) = 64^\circ + 180^\circ \times n$ において最大値を、 $\mu(x - c_r t) = -116^\circ + 180^\circ \times n$ において最小値を取ることが分かる。((5-88)の右辺にはマイナスがついていることに注意)。なお、 $\omega < 0$ の時は上昇流、 $\omega > 0$ の時は下降流であることに注意。

地表面の低い位置の東で最大の降雨が起こる傾向にある。図 5-10 においては、鉛直運動の最大は地表の気圧の谷の位置のちょうど東である。これは観測した降雨の振る舞いと一致する。

(5-65) と (5-66) におけるエネルギー変換は、図 5-10 または (5-87), (5-88), (5-89) から簡単に見積もることが出来る。図において、暖かい空気は上昇し、冷たい空気は下降していることは明らかである。このことから擾乱の有効位置エネルギーは擾乱の運動エネルギーに変換されている。暖かい空気は主に気圧の尾根と気圧の谷の間にあるため、北向きに動く¹³⁾。逆に、冷たい空気は南向きに動く。このことは東西風の基本場の有効位置エネルギーを擾乱の有効位置エネルギーに変換する。運動エネルギーも温度の変動も成長している不安定波では、これらの正の変換が必要となる。

Oort(1964) は大気エネルギーダイアグラムのデータをまとめた。それは図 5-11 に示されている。このダイアグラムでは、 \bar{K} は東西平均風の運動エネルギーであり、 \bar{P} は東西平均温度場の有効位置エネルギーである。一方、 K' は東西平均場からの風速のずれの運動エネルギーであり、 P' は東西平均場からの温度のずれの有効位置エネルギーである。このデータは北半球の年平均のものである。エネルギー変換 $\{\bar{P} \cdot P'\}$ と $\{P' \cdot K'\}$ の簡単な形はそれぞれ、(5-66) と (5-65) の右辺の最初の項から得られる。一方、 $\{K' \cdot \bar{K}\}$ は (5-17)¹⁴⁾ の右辺と似たようなものである。変換 $\{\bar{P} \cdot \bar{K}\}$ は $-\bar{\omega T}$ を含む。これは南北循環の平均場から決めることができる。図 5-11 において、 \bar{P} に流れ込む東西平均加熱 \bar{Q} は、まずは P' に変換され、その後 K' に変換される。傾圧不安定波がこれらのエネルギー変換を引き起こすことはここまでで示された。スペクトルの研究により、変換はまず第一に総観規模の波によって引き起こされることが示されたが、同時に惑星規模の波もまた寄与することが分かった。順圧における K' から \bar{K} への変換は 4-6 節で議論されたようになると予想される。この図では $\{\bar{P} \cdot \bar{K}\}$ は非常に小さい。このことは、総観規模における傾圧不安定波が大循環のバランスの維持を助けていることを強く示唆している。これらの波によって生み出された運動エネルギーは、大気の摩擦により失われた運動エネルギーのバランスをとることを助けている。北向きの熱フラックスによって、過剰に加熱されている低緯度から過剰に冷えている高緯度へ熱が輸送され、熱バランスは維持されている。総観規模の擾乱もまた、順圧的な減衰を通して、東西風の基本場の運動エネルギーを維持するのを助けている。

気圧の尾根と気圧の谷はそれぞれ、水平発散している領域と水平収束している領域にある。式 (5-57) は、(気圧の尾根の線上にある) 渦度の最大値が、水平収束の場合 ($\partial\omega/\partial p > 0$) にのみ増加することを示している。(移流がゼロだからである)。同じ論法が、渦度が最小である気圧の谷にも適用できる。渦度の最大値と最小値の差が増大しない限り、明らかに波は成長し得ない。Eady(1949) や Charney(1947) のような連続モデルでは、不安定解を持つ全ての高度において、気圧の尾根の線沿いに収束が発生する。

Gall(1976) や Simmons and Hoskins(1977) が、北半球の平均の状態を表すような、東西風プロファイルの安定性の性質を数値的に求めた。この章で考えた単純なプロファイルにおける最も不安定な波の波長はおよそ 4000km だったが、彼らが求めた最も不安定な波の波長は 2000km 近くであった。これらの短い不安定波は対流圏の下層でのみ大きな振幅を持つ。Staley and Gall(1977) は、そ

¹³⁾ $v = \partial\psi/\partial x$ であることに注意すること。この関係式と図 5-10 から、暖かい空気は北向きに、冷たい空気は南向きに動くことが分かる。

¹⁴⁾

$$\frac{d}{dt} \int_{-d}^d \frac{u'^2 + v'^2}{2} dy = - \int_{-d}^d u'v' \frac{dU}{dy} dy. \quad (5-17)$$

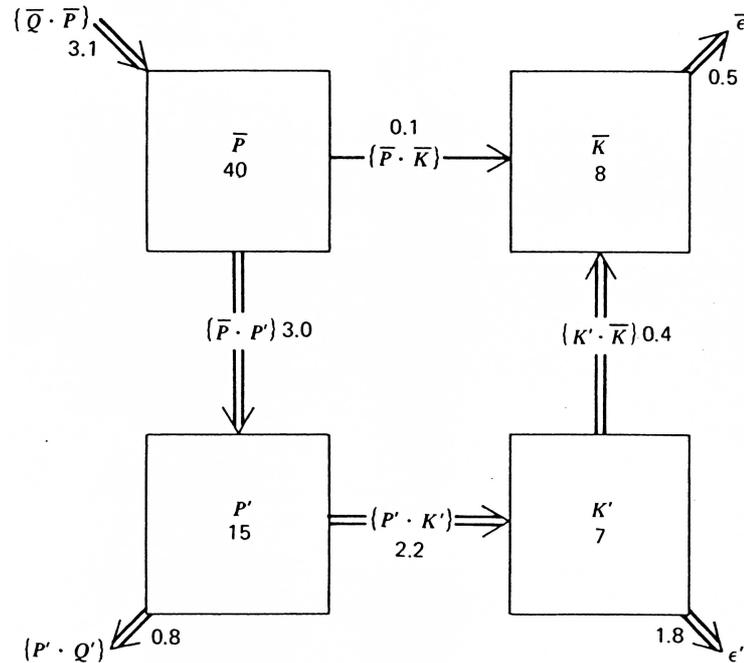


Figure 4.11 The atmospheric energy cycle from the data of Oort (1964). The numbers in the squares give observed annual mean Northern Hemisphere energy values in units of 10^5 joules m^{-2} and the energy exchange arrows are in units of watts m^{-2} . (From A.H. Oort, "On Estimates of the Atmospheric Energy Cycle." *American Meteorological Society*, 1964.)

図 5-11: Oort のデータによる大気のエネルギー循環。四角の中の数値は、観測された北半球のエネルギーの年平均値であり、単位は 10^5 joules m^{-2} である。また、エネルギー変換の矢印の単位は watts m^{-2} である。(From Oort, A.H., "On Estimates of the Atmospheric Energy Cycle." *American Meteorological Society*, 1964.) なお、この図は Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1979: *Numerical Prediction and Dynamic Meteorology*. John Wiley & Sons, 477pp から転載。

これらの不安定波が、対流圏の下層の静的安定度と風速シアに非常に敏感であることを示した。Gall, Blakeslee, et al(1979) は摩擦と有限振幅の効果から、長波が支配的になることを示した。しかしながら、短波ははまだ、地表での小規模な擾乱の成長に重要な役割を果たしている。

5-10-A 振幅同士の大小比較

(5-80) を (5-78) に用いて振幅 Ψ_1^\pm と Ψ_3^\pm の比較をおこなう。

まず、 Ψ_1^+ と Ψ_3^- の比較をおこなう。(5-78) に (5-80) を代入すると、

$$\frac{\Psi_1^+}{\Psi_3^+} = -\frac{\frac{1}{2}(U_1 + U_3) + \frac{1}{2}\left[\frac{\mu^2 - \lambda}{\mu^2 + \lambda}(U_1 - U_3)^2\right]^{1/2} - U_3}{\frac{1}{2}(U_1 + U_3) + \frac{1}{2}\left[\frac{\mu^2 - \lambda}{\mu^2 + \lambda}(U_1 - U_3)^2\right]^{1/2} - U_1}$$

となる。なお、波長が短い波を考えているので β/μ^2 は微小であるとして無視した。この式を整理していくと、

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_1^+}{\Psi_3^+} &= -\frac{(U_1 - U_3) + \sqrt{\frac{\mu^2 - \lambda}{\mu^2 + \lambda}}(U_1 - U_3)}{-(U_1 - U_3) + \sqrt{\frac{\mu^2 - \lambda}{\mu^2 + \lambda}}(U_1 - U_3)} \\ &= -\frac{(U_1 - U_3) \left\{ \frac{\sqrt{\mu^2 - \lambda} + \sqrt{\mu^2 + \lambda}}{\sqrt{\mu^2 + \lambda}} \right\}}{(U_1 - U_3) \left\{ \frac{\sqrt{\mu^2 - \lambda} - \sqrt{\mu^2 + \lambda}}{\sqrt{\mu^2 + \lambda}} \right\}} \\ &= -\frac{\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\mu^2}} + \sqrt{1 + \frac{\lambda}{\mu^2}}}{\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\mu^2}} - \sqrt{1 + \frac{\lambda}{\mu^2}}} \end{aligned}$$

となる。前述したが、波長が短い波を考えているので $\lambda/\mu^2 \rightarrow 0$ とする。すると、 $\Psi_1^+/\Psi_3^+ \rightarrow -\infty$ となることがわかる。このことから、 Ψ_1^+ は Ψ_3^+ に比べて非常に大きいことがわかった。 Ψ_1^- と Ψ_3^- についても同様に計算することでその大小関係を得ることが出来る。

謝辞

本論文の作成にあたり、多くの方々から御協力と御声援を頂いたことに深く感謝いたします。

指導教官である地球流体力学研究室の林祥介 教授には、論文作成や流体力学に関する御指導だけでなく、今後の勉強の指針を頂きました。北海道大学地球環境科学研究科の石渡正樹 助手、地球流体力学研究室の小高正嗣 助手には、気象力学や AGCM の知識など、不勉強な私に快く御指導下さり、貴重なお時間を割いて頂きました。また、お二人には、本論文の内容に関しても多くの御意見を頂きました。地球流体力学研究室 修士課程の高橋こう子さん、山田由貴子さんには本論文の内容や構成、体裁に関して広く助言を頂きました。地球流体力学研究室、惑星物理学研究室の先輩のみなさま、4年生の方々からは多くの助言や励ましを頂きました。

なお、本論文を作成するにあたって文書整形には p $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ を、スタイルファイルとして地球流体電脳倶楽部で開発されたマクロ定義スタイルファイル集 **Dennou Style 6** (<http://www.gfd-dennou.org/arch/cc-env/TeXmacro/dennou/SIGEN.htm>) を利用させて頂きました。開発者の皆様に深くお礼申し上げます。

数学公式

A-1 ベクトル演算子

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \tag{A-0}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \tag{A-1}$$

$$\nabla \times \nabla a = 0, \quad \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \tag{A-2}$$

$$\nabla \cdot (a\mathbf{A}) = a\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla a \tag{A-3}$$

$$\nabla \times (a\mathbf{A}) = a\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla a \tag{A-4}$$

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} \\ &\quad + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \end{aligned} \tag{A-5}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \tag{A-6}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \tag{A-7}$$

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = \nabla(\mathbf{V}^2/2) + (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V} \quad (3 \text{次元}) \tag{A-8}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_H \cdot \nabla)\mathbf{V}_H &= \nabla(\mathbf{V}_H^2/2) + \zeta \mathbf{k} \times \mathbf{V}_H \\ (\zeta &= \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{V}_H) \quad (2 \text{次元}) \end{aligned} \tag{A-9}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \tag{A-10}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\chi + \mathbf{V}_\psi \tag{A-11}$$

$$\left(\begin{array}{ll} \mathbf{V}_\chi : \text{速度の発散成分} & \mathbf{V}_\psi : \text{速度の渦度成分} \\ \chi : \text{速度ポテンシャル} & \psi : \text{流線関数} \\ \\ \nabla \times \mathbf{V}_\chi = 0, & \nabla \cdot \mathbf{V}_\psi = 0 \\ \mathbf{V}_\chi = \nabla \chi, & \mathbf{V}_\psi = -\nabla \times \psi \\ \nabla^2 \chi = \nabla \cdot \mathbf{V}_\chi = \nabla \cdot \mathbf{V}, & \nabla^2 \psi = \nabla \times \mathbf{V}_\psi = \nabla \times \mathbf{V} \end{array} \right)$$

A-2 積分公式

定義

- dv : 体積要素
 V : 体積
 $d\sigma$: 表面要素
 Σ : V を囲む曲面
 S : 平面の表面
 C : S を囲む曲線
 ds : C に沿った距離の要素
 \mathbf{n} : Σ や C から垂直外向き
 への単位ベクトル
 \mathbf{t} : C や S の単位接線ベクトル

ガウスの発散定理

3次元

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv = \int_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (\text{A-12})$$

2次元

$$\int_S \nabla \cdot \mathbf{A} \, d\sigma = \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (\text{A-13})$$

ストークスの定理

$$\int_V \nabla \times \mathbf{A} \, dv = \int_{\Sigma} \mathbf{n} \times \mathbf{A} \, d\sigma \quad (\text{A-14})$$

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{A} \, d\sigma = \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \, ds \quad (\text{A-15})$$

$$\int_V \nabla a \, dv = \int_{\Sigma} a \mathbf{n} \, d\sigma \quad (\text{A-16})$$

A-3 一般的直交座標系での関係式

以下の式では、 s_1, s_2, s_3 をスカラーの曲線距離、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を座標系におけるそれぞれの方向の単位ベクトル、 x_1, x_2, x_3 と規格化因子 (スケール因子) h_j が $ds_j = h_j dx_j$ という関係を持つとする。

$$\text{grad } A = \nabla A = \frac{\mathbf{a}_1}{h_1} \frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{\mathbf{a}_2}{h_2} \frac{\partial A}{\partial x_2} + \frac{\mathbf{a}_3}{h_3} \frac{\partial A}{\partial x_3} \quad (\text{A-17})$$

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 F_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 F_3) \right] \end{aligned} \quad (\text{A-18})$$

$$\nabla^2 A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial A}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial A}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial A}{\partial x_3} \right) \right] \quad (\text{A-19})$$

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{F} &= \frac{\mathbf{a}_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 F_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} (h_2 F_2) \right] + \frac{\mathbf{a}_2}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 F_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} (h_3 F_3) \right] \\ &\quad + \frac{\mathbf{a}_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 F_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 F_1) \right] \end{aligned} \quad (\text{A-20})$$

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{dx_1}{dt} \frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dt} \frac{\partial A}{\partial x_2} + \frac{dx_3}{dt} \frac{\partial A}{\partial x_3} \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{v_1}{h_1} \frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{v_2}{h_2} \frac{\partial A}{\partial x_2} + \frac{v_3}{h_3} \frac{\partial A}{\partial x_3} = \frac{\partial A}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) A; \\ v_1 &= ds_1/dt = h_1 dx_1/dt, \text{ など}, \quad \mathbf{V} = v_1 \mathbf{a}_1 + v_2 \mathbf{a}_2 + v_3 \mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (\text{A-21})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{F}}{dt} &= \frac{dF_1}{dt} \mathbf{a}_1 + \frac{dF_2}{dt} \mathbf{a}_2 + \frac{dF_3}{dt} \mathbf{a}_3 + F_1 \frac{d\mathbf{a}_1}{dt} + F_2 \frac{d\mathbf{a}_2}{dt} + F_3 \frac{d\mathbf{a}_3}{dt} \\ &= \sum_{j=1}^3 \left[\left(\frac{\partial F_j}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla F_j \right) \mathbf{a}_j + F_j \sum_{i=1}^3 \left(\frac{v_i}{h_i} \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A-22})$$

(例えば $\mathbf{F} = \mathbf{V}$ である場合)

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \sum_{j=1}^3 \left[\left(\frac{\partial v_j}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla v_j \right) + \sum_{i=1, i \neq j}^3 \left(\frac{v_j}{h_j} \frac{v_i}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial x_i} - \frac{v_i}{h_i} \frac{v_j}{h_j} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right) \right] \mathbf{a}_j \quad (\text{A-23})$$

例:

デカルト座標系: $x, y, z; h_1 = h_2 = h_3 = 1; \mathbf{a}_1 = \mathbf{i}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{j}, \mathbf{a}_3 = \mathbf{k}$.

球面座標系: 経度 λ , 緯度 φ , 動径距離 r ; 規格化因子: $h_\lambda = r \cos \varphi, h_\varphi = r, h_r = 1$.

円筒座標系: $\lambda, r, z; h_\lambda = r, h_r = h_z = 1$.

参考文献

- 有馬 朗人, 神部勉, 1991: 物理のための数学入門 複素関数論. 共立出版, 220pp.
- Case, K.M., 1960: Stability of plane couette flow. *Phys. Fluids*, **3**, 143-148.
- Charney, J. G., 1947: The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. *J. Meteor.*, **4**, 135-162.
- Drazin, P. G., and Reid, W. H. 1981: *Hydrodynamics Stability*. Cambridge University Press, 527pp.
- 江沢 洋, 1995: 岩波講座 応用講座 14 [方法 5] 漸近解析. 岩波書店, 132pp.
- Eady, E. T., 1949: Long waves and cyclone waves. *Tellus*, **1**, no. 3, 33-52.
- 岸保 勲三郎, 田中 正之, 時岡 達志, 1982: 大気科学講座 4 大気の大循環. 東京大学出版会, 256pp.
- 後藤 憲一, 山本邦夫, 神吉 健, 1979: 詳細 物理応用 数学演習. 共立出版, .
- Gall, R. L., 1976: A comparison of linear baroclinic theory with the eddy statistics of a general circulation model. *J. Atmos. Sci.*, **33**, 349-373.
- Gall, R. L., Blakeslee, R., and Somerville, R. C. J., 1979: Baroclinic instability and the selection of the zonal scale of the transient eddies of middle latitudes. *J. Atmos. Sci.*, **37**, 767-784.
- 林祥介, 1990: GFD ノート /基礎/波動/線形波動の基礎.
- 林祥介, 1990: GFD ノート /基礎/流体力学.
- 林祥介, 1990: GFD ノート /基礎/大気熱力学/湿潤大気の熱力学.
- 林祥介, 1991: GFD ノート /基礎/大気熱力学/湿潤空気の熱力学.
- Haltiner, G. J., and Martin, F. L., 1957: *Dynamical and Physical Meteorology*. McGraw-Hill Book Co, 470pp.
- Haltiner, G. J., and Williams, R. T., 1979: *Numerical Prediction and Dynamic Meteorology*. John Wiley & Sons, 477pp.
- 木村竜治, 1983: 気象学のプロムナード 13 地球流体力学入門. 東京堂出版, 247pp.
- 九大 大気海洋環境システム専攻, 2001: 地球環境を学ぶための流体力学. 成山堂出版, 323pp.

- 倉本圭, 1999: 北大理学部地球科学科 1999 年度前期講義 物理数学 I 演習, 第 4 回講義 (1999/05/10) ベクトル解析 1 (12. 回転の意味).
<http://www.ep.sci.hokudai.ac.jp/pmath1ex/1999/0510/pub/No04.pdf>
- Kasahara, A., 1974: Various vertical coordinate systems used for numerical weather prediction *Mon. Wea. Rev.*, **102** 504-522.
- Kuo, H. L., 1973: Dynamics of quasi-geostrophic flows and instability theory. *Advances in Applied Mechanics*, vol. 13, Academic Press, 247-330.
- Lorenz, E. N., 1955: Available potential energy and the maintenance of the general circulation. *Tellus*, **7** 157-167.
- 増田 善信, 1981: 気象学のプロムナード 3 数値予報 —その理論と実際—. 東京堂出版, 278pp.
- 松井 孝典, 松浦 充宏, 林 祥介, 寺沢 敏夫, 谷本 俊郎, 唐戸 俊一郎, 1996: 岩波講座 地球惑星科学 6 地球連続体力学, 岩波書店, 319pp.
- 日本気象学会, 1998: 気象科学事典. 東京書籍, 637pp.
- 小倉義光, 1978: 気象力学通論. 東京大学出版会, 249pp.
- 小倉義光, 1984: 一般気象学. 東京大学出版会, 308pp.
- 小倉義光, 2000: 総観気象学入門. 東京大学出版, 289pp.
- Oort, A. H., 1964: On estimates of the atmospheric energy cycle. *Mon. Wea. Rev.*, **92**, 483-493.
- Pedlosky, j., 1987: *Geophysical Fluid Dynamics – Second Edition –*. Springer-Verlag New York, 710pp.
- Peixoto, J. P. and A. H. Oort, 1992: *Physics of Climate*. Springer-Verlag, 520pp.
- Phillips, N. A., 1957: A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting. *J. Meteor.*, **14** 184-185.
- Phillips, N. A., 1960: On the problem of initial data for the primitive equations. *Tellus*, **12**, 121-126.
- Phillips, N. A., 1963: Geostrophic motion. *Rev. Geophys.*, **1**, 123-176.
- ランダウ = リフシッツ 著, 竹内 均 訳, 1970: 流体力学 1. 東京図書株式会社, 280pp.
- Richardson, L. F., 1922: *Weather Prediction by Numerical Precess*. Cambridge University Press, reprinted Dover, 1965, 236pp.
- Schoenstadt, A. L., 1977: The effect of spatial discretization on the steady state and transient behavior of a dispersive wave equation. *J. Comp. Phys.*, **23**, 364-379.
- Simmons, A. J., and Hoskins, B. J., 1977: A note on the wavelength of maximum growth rate for baroclinic instability. *J. Atmos. Sci.*, **34**, 1477-1478.

- Staley, D. O., and Gall, R. L., 1977: On the wavelength of maximum baroclinic instability. *J. Atmos. Sci.*, **34**, 1679-1688.
- 住 明正, 寺沢 俊夫, 岩崎 俊樹, 遠藤 昌宏, 小河 正基, 戒崎 俊一, 1997: 岩波講座 地球惑星科学 7 数値地球科学. 岩波書店, 228pp.
- 田中浩, 1975: 内部重力波の理論. 気象研究ノート, **126** 1-46.
- 時岡 達志, 山岬 正紀, 佐藤 信夫, 1993: 気象の数値シミュレーション 気象の教室 5. 東京大学出版会, 247pp.