

回轉球殻内の
ブシネスク対流モデルの定式化
**Formulation of boussinesq convection in
rotating spherical shells**

加藤 真也

KATO Masaya

北海道大学理学部地球科学科

地球流体力学研究室

2006 年 1 月 27 日

要旨

本論文では、回転球殻内のブシネスク対流モデルを数値計算するために必要となるブシネスク方程式系と境界条件の定式化と離散化を行った。定式化は Zhang and Busse (1987) の方法に従った。具体的には、方程式系、および境界条件を無次元化したのちに、ポロイダル・トロイダルポテンシャルで表現した。離散化は Glatzmaier (1984) に従った。水平方向には球面調和関数展開を行い、鉛直方向にはチェビシェフ展開を行った。境界条件は運動学的境界条件、力学的境界条件、熱的境界条件の3つを適用した。力学的境界条件としては応力なし条件と粘着条件を、熱的境界条件としては温度固定条件と熱フラックス固定条件をそれぞれ考察した。

目次

1	はじめに	3
2	回転球殻内のブシネスク対流	4
2.1	支配方程式	4
2.1.1	基本場	5
2.1.2	境界条件	6
2.2	無次元化	7
2.2.1	方程式系の無次元化	8
2.2.2	境界条件の無次元化	9
2.3	トロイダル・ポロイダルポテンシャルによる表現	10
2.3.1	支配方程式のポテンシャル表現	10
2.3.2	境界条件のポテンシャル表現	11
3	水平離散化	12
3.1	水平格子	12
3.2	水平方向のスペクトル展開	12
3.3	微分を含む項の評価	13
3.4	水平スペクトル空間での方程式系の記述	14
4	鉛直離散化	16
4.1	鉛直レベル	16
4.2	チェビシェフ関数展開	16
4.3	境界条件の鉛直離散化	17
5	まとめ	20
	謝辞	23
	付録 A 公式	24
A.1	緯度経度座標計算公式	24
A.2	ベクトル計算公式	25
A.3	トロイダル・ポロイダルポテンシャル計算公式	26
A.4	Legendre 陪関数	27

A.5 Gauss の台形公式	27
A.6 Gauss-Legendre の公式	27
A.7 球面調和関数の離散的直交関係	28
付録 B 導出	29
B.1 方程式系のポテンシャル表現の導出	29
B.2 境界条件のポテンシャル表現の導出	31
B.3 格子点上での空間微分と展開係数の関係の導出	34
B.4 非線形項のベクトル演算の導出	37
参考文献	38

1 はじめに

地球には赤道付近で上昇し南北緯度約 30° で下降するような子午面循環が存在する．この循環はハドレー循環と呼ばれる．

ハドレー循環モデルの歴史は古い．世に出た一番初めのモデルは，Hadley (1735) によるものである．このモデルではハドレー循環は赤道で上昇したあと極まで到達することになっている．しかし，その後観測からこのモデルは誤りであることがわかった．ハドレー循環の現実的な幅をモデルから解析的に導いたものでは Schneider and Lindzen (1977)，Schneider (1977) がある．彼らは圧縮性のある湿潤大気について軸対称な場合を考えた．このモデルを原型にして，よりシンプルなモデルを考えたのが Held and Hou (1980) である．このモデルでは圧縮性の無い軸対称ブシネスク対流モデルを用いたため，方程式が見やすくなっていることが特徴である．

本論文では Held and Hou (1980) で用いられた数値計算を再現し，彼らによって示されたハドレー循環の性質をより深く理解するための第一歩として，回転球殻内部でのブシネスク対流モデルの定式化と離散化についてまとめる．

モデルは，回転球殻内のブシネスク対流モデル (Zhang and Busse, 1987) を扱う．このモデルの基礎方程式系はブシネスク近似方程式系である．Glatzmaier (1984) に従って，水平方向の離散化は球面調和関数展開を，鉛直方向の離散化はチェビシェフ関数展開を用いる．

本論文の構成は以下のようになっている．2 節では，ブシネスク近似方程式系および境界条件を無次元化し，トロイダル，ポロイダルポテンシャルを用いて表す．3 節では，球面調和関数を用いて方程式系を水平方向に離散化する．4 節では，チェビシェフ関数を用いて水平離散化した方程式系を鉛直方向に離散化する．5 節はまとめである．

2 回転球殻内のブシネスク対流

この節では、ブシネスク方程式系と境界条件の無次元化、およびトロイダル・ポロイダルポテンシャルによる記述を行う。

2.1 支配方程式

図1のような角速度 Ω で回転する半径 r_i, r_o の球にはさまれたブシネスク流体の運動を考える。座標系は球殻の中心を原点とするような緯度経度座標系 (φ, θ, r) である。

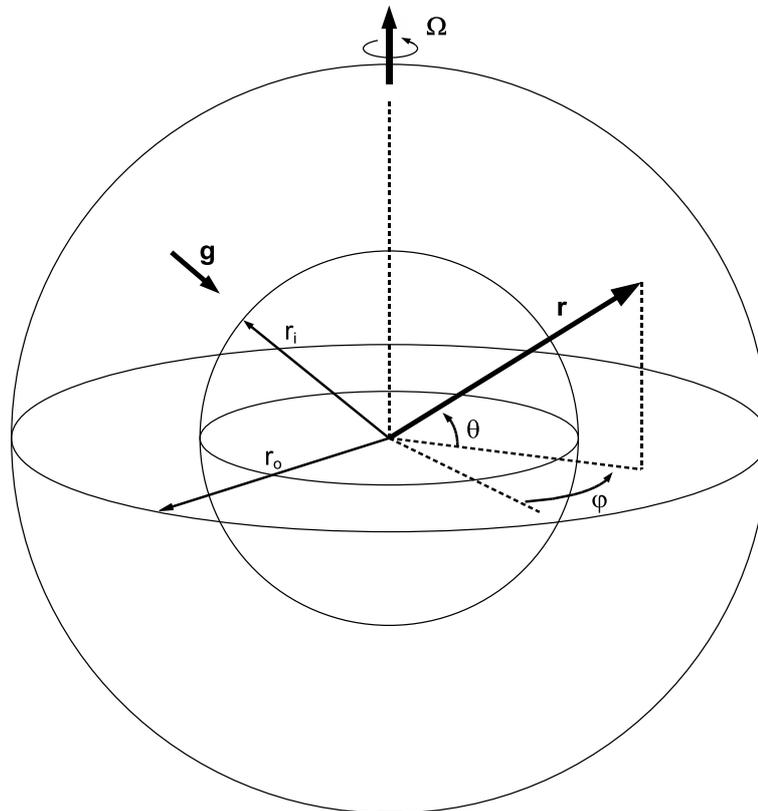


図 1: 考える系の模式図。

熱源 H を考慮したブシネスク近似方程式系は,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + 2\Omega \mathbf{k} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + [1 - \alpha (\Theta - \Theta_0)] \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta = \kappa \nabla^2 \Theta + H, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.3)$$

である。式 (2.1) は運動方程式, 式 (2.2) は熱力学の式, 式 (2.3) は連続の式である。ここで下付き文字 “ $_0$ ” は基本場を意味する。式中の各記号は次の通りである。

- \mathbf{u} 速度ベクトル $\mathbf{u} = (u, v, w)$
- \mathbf{k} 回転軸方向の単位ベクトル $\mathbf{k} = (0, \cos \theta, \sin \theta)$
- ρ 流体の密度
- p 流体の圧力
- α 体積膨張率
- \mathbf{g} 重力加速度ベクトル
- Θ 流体の温度
- ν 動粘性係数
- κ 熱拡散係数

密度が一様な物質の自己重力を考える。重力の回転による非球対象成分は無視する。

$$\mathbf{g} = \gamma \mathbf{r}. \quad (2.4)$$

ここで, \mathbf{r} は位置ベクトルであり, γ は定数である。

2.1.1 基本場

静止状態 ($\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial t} = 0$) において,

$$H = H_0, \quad (2.5)$$

$$\Theta = \Theta_0(r), \quad (2.6)$$

とすると式 (2.2) より基本場の温度分布は

$$\begin{aligned} \Theta_0(r) &= -\frac{H_0}{6\kappa} r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2 \\ &= -\frac{1}{2} \beta r^2 + C_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

となる．ここで， $\beta \equiv H_0/3\kappa$ ， C_1 ， C_2 は定数である．ただし，数学的簡便さのため $C_1 = 0$ とした．

2.1.2 境界条件

外側境界，内側境界における境界条件は以下の場合を考える．力学的境界条件，熱的境界条件に関しては，考える系に応じて外側境界，内側境界の境界条件をそれぞれ選択する．

- 運動学的境界条件

境界を横切る流れが存在しないとする．すなわち，

$$w = 0, \quad \text{at } r = r_o, r_i \quad (2.8)$$

とする．

- 力学的境界条件

- (i) 応力なし条件 (free boundary)

境界で水平応力 $\sigma^{r\theta}$ ， $\sigma^{r\varphi}$ (付録 A.1 参照) が 0 であるとする．運動学的境界条件 (2.8) を使うと，

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) = 0, \quad \text{at } r = r_o, r_i \quad (2.9)$$

となる．

- (ii) 粘着条件 (rigid boundary)

境界では水平速度 u ， v が 0 であるとする．連続の式 (2.3) を使うと，

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad \text{at } r = r_o, r_i \quad (2.10)$$

となる．

- 熱的境界条件

(i) 温度固定条件

境界における温度は基本場の温度分布に等しいとする．すなわち，

$$\Theta = \Theta_0, \quad \text{at } r = r_o, r_i \quad (2.11)$$

とする．

(ii) 熱フラックス固定条件

境界における熱フラックスが一定であるとする．すなわち，

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} = C_3, \quad \text{at } r = r_o, r_i \quad (2.12)$$

とする．ここで C_3 は定数である．

2.2 無次元化

表 2 のように各物理量のスケールを定め，方程式を無次元化する．

変数	記号	スケール
長さ	r	d
時間	t	d^2/κ
速度	u	κ/d
温度	Θ	βd^2
圧力	p	$\kappa \nu \rho_0 / d^2$

表 1: 各変数のスケール．

ここで， $d \equiv r_o - r_i$ である．

2.2.1 方程式系の無次元化

無次元化された擾乱場の方程式系は，

$$\frac{1}{P} \left[\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u}^* \right] + \tau \mathbf{k} \times \mathbf{u}^* = -\nabla p'^* + R\Theta'^* \mathbf{r}^* + \nabla^2 \mathbf{u}^* , \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \Theta'^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \Theta'^* = \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{r}^* + \nabla^2 \Theta'^* , \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0 \quad (2.15)$$

となる．ここで“*”（アスタリスク）は無次元量を表し，“'」（プライム）は基本場からのずれを表す．以後はこれらの表記は省略する．また， $H' = 0$ とし，次の無次元量を導入する．

$$P \equiv \frac{\nu}{\kappa} \quad : \text{プラントル数} \quad (2.16)$$

$$\tau \equiv \sqrt{T_a} = \frac{2\Omega d^2}{\nu} \quad : \text{テイラー数 } T_a \text{ の平方根} \quad (2.17)$$

$$R \equiv \frac{\alpha\beta\gamma d^6}{\kappa\nu} \quad : \text{レイリー数} \quad (2.18)$$

方程式を成分で表すと，

$$P^{-1} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u + \frac{uw}{r} - \frac{uv \tan \theta}{r} \right] - \tau v \sin \theta + \tau w \cos \theta = -\frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + F_\varphi , \quad (2.19)$$

$$P^{-1} \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v + \frac{vw}{r} + \frac{u^2 \tan \theta}{r} \right] + \tau u \sin \theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + F_\theta , \quad (2.20)$$

$$P^{-1} \left[\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w - \frac{u^2 + v^2}{r} \right] - \tau u \cos \theta = -\frac{\partial p}{\partial r} + Rr\Theta + F_r , \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta = rw + \nabla^2 \Theta , \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w) = 0 \quad (2.23)$$

となる．

F_φ, F_θ, F_r は粘性項であり, 具体的な表記は次の通りである.

$$F_\varphi \equiv \nabla^2 u + \frac{2}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{2 \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r^2 \cos^2 \theta}, \quad (2.24)$$

$$F_\theta \equiv \nabla^2 v + \frac{2 \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2 \cos^2 \theta}, \quad (2.25)$$

$$F_r \equiv \nabla^2 w - \frac{2}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta) - \frac{2w}{r^2}. \quad (2.26)$$

2.2.2 境界条件の無次元化

無次元化された境界条件を以下に示す. ここで, $\eta \equiv r_i/r_o$ とする.

- 運動学的境界条件

$$w = 0, \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{1}{1-\eta}. \quad (2.27)$$

- 力学的境界条件

- (i) 応力なし条件 (free boundary)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) = 0, \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{1}{1-\eta}. \quad (2.28)$$

- (ii) 粘着条件 (rigid boundary)

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{1}{1-\eta}. \quad (2.29)$$

- 熱的境界条件

- (i) 温度固定条件

$$\Theta = 0, \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{1}{1-\eta}. \quad (2.30)$$

(ii) 熱フラックス固定条件

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0, \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{1}{1-\eta}. \quad (2.31)$$

2.3 トロイダル・ポロイダルポテンシャルによる表現

速度場をトロイダルポテンシャル ψ , ポロイダルポテンシャル ϕ を用いて表し, 運動方程式の圧力項を消去する. 連続の式 (2.15) より, 速度場は

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \nabla \times (\psi \mathbf{r}) + \nabla \times \nabla \times (\phi \mathbf{r}) \\ &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right), -\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right), \frac{L_2 \phi}{r} \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

のように分解することができる. 式 (2.32) 一行目右辺第一項がトロイダル成分, 第二項がポロイダル成分である. 実際両辺に $\nabla \cdot$ を作用させると式 (2.15) が得られる. ここで, 演算子 L_2 は単位球面上の 2 次元ラプラシアン ∇_H^2 の逆符号である.

$$\begin{aligned} L_2 &\equiv -r^2 \nabla^2 + \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \\ &= - \left[\frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right] = -\nabla_H^2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

2.3.1 支配方程式のポテンシャル表現

(2.13) に $r \cdot \nabla \times$, $r \cdot \nabla \times \nabla \times$ を作用させ, 運動方程式のポロイダル成分, トロイダル成分をそれぞれ導出する.

$$\left[\left(\nabla^2 - P^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right) L_2 + \tau \mathbf{k} \times \mathbf{r} \cdot \nabla \right] \psi - \tau Q \phi = P^{-1} \mathbf{r} \cdot \nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}), \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \left[\left(\nabla^2 - P^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right) L_2 + \tau \mathbf{k} \times \mathbf{r} \cdot \nabla \right] \nabla^2 \phi + \tau Q \psi - R L_2 \Theta \\ = -P^{-1} \mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (2.35)$$

ここで, Q は以下のように表される演算子である.

$$Q \equiv \mathbf{k} \cdot \nabla - \frac{1}{2} (L_2 \mathbf{k} \cdot \nabla + \mathbf{k} \cdot \nabla L_2). \quad (2.36)$$

熱力学の式 (2.14) もポテンシャルで表現する .

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \Theta + L_2 \phi = \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta . \quad (2.37)$$

2.3.2 境界条件のポテンシャル表現

- 運動学的境界条件

$$\phi = 0 , \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{1}{1-\eta} . \quad (2.38)$$

- 力学的境界条件

- (i) 応力なし条件 (free boundary)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi}{r} \right) = 0 , \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{1}{1-\eta} . \quad (2.39)$$

- (ii) 粘着条件 (rigid boundary)

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \psi = 0 , \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{1}{1-\eta} . \quad (2.40)$$

- 熱的境界条件

- (i) 温度固定条件

$$\Theta = 0 \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{1}{1-\eta} . \quad (2.41)$$

- (ii) 熱フラックス固定条件

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0 , \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{1}{1-\eta} . \quad (2.42)$$

各条件の導出については付録 B.2 を参照せよ .

3 水平離散化

本節では Glatzmaier (1984) に従い, 球面調和関数展開を用いて方程式系を水平方向に離散化する.

3.1 水平格子

水平方向の格子点は以下のように置く.

- 緯度方向

緯度方向の格子点は J 次の Legendre 関数 P_j の零点で定義された Gauss 緯度 $\mu_j (j = 1, 2, \dots, J)$ を用いる. ここで $\mu_j = \sin \theta_j$ である.

- 経度方向

経度方向の格子点 $\varphi_i (i = 1, 2, \dots, I)$ は以下のように等間隔にとる.

$$\varphi_i = \frac{2\pi(i-1)}{I}. \quad (3.1)$$

3.2 水平方向のスペクトル展開

球面調和関数 $Y_n^m(\varphi, \mu)$ を用いて水平方向のスペクトル展開を行う. 球面調和関数の定義は,

$$Y_n^m(\varphi, \mu) \equiv P_n^m(\mu)e^{im\varphi} \quad (3.2)$$

である. ここで, n, m は $n \geq |m|$ を満たす整数である. また, $P_n^m(\mu)$ は 2 で規格化した Legendre 陪関数である (付録 A.4 参照). 球面調和関数は以下の関係式を満たす.

$$\nabla_H^2 Y_n^m(\varphi, \mu) = -n(n+1)Y_n^m(\varphi, \mu). \quad (3.3)$$

ポテンシャル ψ の水平方向のスペクトル変換，およびその逆変換は

$$\psi_{ij} \equiv \psi(\varphi_i, \mu_j) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \tilde{\Psi}_n^m Y_n^m(\varphi_i, \mu_j), \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_n^m &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi \psi(\varphi, \mu) Y_n^{m*}(\varphi_i, \mu_j) \\ &= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \psi(\varphi_i, \mu_j) Y_n^{m*}(\varphi_i, \mu_j) w_j \end{aligned} \quad (3.5)$$

のように表される．ここで波数切断は三角形切断を用いている．“*”は複素共役を意味し，球面調和関数では

$$Y_n^{m*} = Y_n^{-m} = P_n^m e^{-im\varphi} \quad (3.6)$$

である．また， w_j は Gauss 重みと呼ばれ，

$$w_j = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_J(\mu)}{(\mu - \mu_j) P_J'(\mu_j)} d\mu = \frac{(2J-1)(1-\mu_j^2)}{(JP_{J-1}(\mu_j))^2} \quad (3.7)$$

である．式 (3.5) において積分を和に置き換えて評価する際には， φ 積分については Gauss の台形公式（付録 A.5 参照）を， μ 積分については Gauss-Legendre 積分公式（付録 A.6 参照）を用いている．

3.3 微分を含む項の評価

式 (3.4)，(3.5) より格子点上での水平微分と展開係数との関係は以下ようになる（付録 B.3 参照）．非線形項は，計算コストを減らすため格子点上で $v \cdot \nabla v$ ， $v\Theta$ を計算して，それらに $\nabla \cdot$ ， $r \cdot \nabla \times$ ， $r \cdot \nabla \times \nabla \times$ を作用させたものを水平スペクトル空間で見積もる．これを変換法と呼ぶ．

φ 方向微分は，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_{ij} = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N im \tilde{f}_n^m Y_n^m(\varphi_i, \mu_j), \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_n^m = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J im f_{ij} Y_n^{m*}(\varphi_i, \mu_j) w_j \quad (3.9)$$

となる．

μ 方向微分は,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mu}\right)_{ij} = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \tilde{f}_n^m \frac{\partial Y_n^m}{\partial \mu} \Big|_{ij}, \quad (3.10)$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mu}\right)_n^m = -\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J f_{ij} \frac{\partial Y_n^{m*}}{\partial \mu} \Big|_{ij} w_j \quad (3.11)$$

となる.

今, ベクトル場 \mathbf{s} を

$$\mathbf{s} = (s_\varphi, s_\theta, s_r) \equiv \left(\frac{rS_\varphi}{\cos\theta}, \frac{rS_\theta}{\cos\theta}, s_r \right) \quad (3.12)$$

と定義する. 各ベクトル演算は以下ようになる (付録 B.4 を参照).

$$\nabla \cdot \mathbf{s} = \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial S_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_\theta}{\partial \mu} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 s_r), \quad (3.13)$$

$$\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{s} = \frac{r}{1-\mu^2} \frac{\partial S_\theta}{\partial \varphi} - r \frac{\partial S_\varphi}{\partial \mu}, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{s} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial s_r}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{1-\mu^2} \frac{\partial s_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{L_2 s_r}{r}. \quad (3.15)$$

したがって, 水平スペクトル空間では

$$(\nabla \cdot \mathbf{s})_n^m = \left(\frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial S_\varphi}{\partial \varphi} \right)_n^m + \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \mu} \right)_n^m + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 s_r)_n^m, \quad (3.16)$$

$$(\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{s})_n^m = r \left(\frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial S_\theta}{\partial \varphi} \right)_n^m - r \left(\frac{\partial S_\varphi}{\partial \mu} \right)_n^m, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{s})_n^m &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \left(\frac{\partial s_r}{\partial \mu} \right)_n^m \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \left(\frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial s_\varphi}{\partial \varphi} \right)_n^m \right\} \\ &\quad + \frac{n(n+1)(s_r)_n^m}{r} \end{aligned} \quad (3.18)$$

となる.

3.4 水平スペクトル空間での方程式系の記述

ポテンシャルで表された方程式系 (2.34), (2.35), (2.37) は水平スペクトル空間では以下のように表される.

- トロイダルポテンシャルの式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Psi}_n^m(r, t)}{\partial t} = & P \left\{ \tau \frac{im}{n(n+1)} + D_n \right\} \tilde{\Psi}_n^m - P \tau \frac{(\widetilde{Q\phi})_n^m}{n(n+1)} \\ & - \frac{1}{n(n+1)} \{ \mathbf{r} \cdot \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \}_n^m \quad (n \neq 0). \end{aligned} \quad (3.19)$$

ここで, D_n は以下のように定義された演算子である.

$$D_n \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2}. \quad (3.20)$$

- ポロイダルポテンシャルの式

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_n \tilde{\Phi}_n^m(r, t)}{\partial t} = & P \left\{ \tau \frac{im}{n(n+1)} + D_n \right\} D_n \tilde{\Phi}_n^m - P \tau \frac{(\widetilde{Q\psi})_n^m}{n(n+1)} \\ & - \frac{1}{n(n+1)} \{ \mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \}_n^m \quad (n \neq 0). \end{aligned} \quad (3.21)$$

- 熱力学の式

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}_n^m(r, t)}{\partial t} = D_n \tilde{\Theta}_n^m - n(n+1) \tilde{\Phi}_n^m - \{ \nabla \cdot (\mathbf{v} \Theta) \}_n^m. \quad (3.22)$$

4 鉛直離散化

本節では，Glatzmaier(1984) に従い，チェビシエフ関数展開を用いて方程式系を鉛直方向に離散化する．

4.1 鉛直レベル

鉛直方向の格子点を定める．まず，鉛直区間が $[-1, 1]$ になるように r を以下のように座標変換する．

$$r = \frac{r_o + r_i}{2} + \frac{r_o - r_i}{2} \xi, \quad (4.1)$$

$$\xi = \frac{2r - (r_o + r_i)}{r_o - r_i}. \quad (4.2)$$

格子点上でチェビシエフ関数が極値をとるように，座標 ξ 上で $K + 1$ 個の格子点を次のように定義する．

$$\xi_k = \cos\left(\frac{\pi k}{K}\right), \quad k = 0, 1, \dots, K. \quad (4.3)$$

ここで， k は整数である．また， $r(\xi_k) = r_k$ とする．

各点でのチェビシエフ関数 T の値は，

$$T_j(\xi_k) = \cos\left(\frac{jk\pi}{K}\right) \quad (4.4)$$

となる．

4.2 チェビシエフ関数展開

格子点上での物理量 $\tilde{\Phi}_n^m(r, t)$ のチェビシエフ関数展開は，

$$\Phi_{jn}^m(t) = \left(\frac{2}{K}\right) \sum_{k=0}^K \tilde{\Phi}_n^m(\xi_k, t) T_j(\xi_k), \quad k = 0, 1, \dots, K \quad (4.5)$$

となる．ここで， j は整数であり， $\sum_{k=0}^K$ は初項と末項を $1/2$ 倍して和をとることを意味する．逆変換は，

$$\tilde{\Phi}_n^m(\xi_k, t) = \sum_{j=0}^K \Phi_{jn}^m(t) T_j(\xi_k). \quad (4.6)$$

である．

4.3 境界条件の鉛直離散化

境界付近を除く内部領域において，離散化した方程式を時間積分する．その後，実空間での鉛直境界条件を満たすように，境界付近での格子点値を定める．

- トロイダルポテンシャル

トロイダルポテンシャルに関しては，上下境界 r_0, r_K を除く $r_k (k = 1, \dots, K-1)$ の点で時間積分を実行する．内部領域を計算した後，境界値は実空間での境界条件に応じて以下のように定まる．

- (i) 応力なし条件 (free boundary)

実空間での応力なし条件 (2.39) より，内側境界，外側境界での境界値はそれぞれ，

$$\tilde{\Psi}_n^m(r_0, t) = \frac{r_0}{r_1} \tilde{\Psi}_n^m(r_1, t), \quad (4.7)$$

$$\tilde{\Psi}_n^m(r_K, t) = \frac{r_K}{r_{K-1}} \tilde{\Psi}_n^m(r_{K-1}, t) \quad (4.8)$$

となる．

- (ii) 粘着条件 (rigid boundary)

実空間での粘着条件 (2.40) より，内側境界，外側境界での境界値はそれぞれ，

$$\tilde{\Psi}_n^m(r_0, t) = 0, \quad (4.9)$$

$$\tilde{\Psi}_n^m(r_K, t) = 0 \quad (4.10)$$

となる．

- ポロイダルポテンシャル

ポロイダルポテンシャルに関しては, r_0, r_1, r_{K-1}, r_K を除く $r_k (k = 2, \dots, K-2)$ の点で $D_n \tilde{\Phi}_n^m$ について時間積分を実行する. $\tilde{\Phi}_n^m$ は各条件に応じた境界値問題を解いて求めなければならない.

- (i) 応力なし条件 (free boundary)

実空間での境界条件 (2.38)(2.39) より, 以下の境界値問題を解く.

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) \tilde{\Phi}_n^m = D_n \tilde{\Phi}_n^m, \quad (4.11)$$

$$\tilde{\Phi}_n^m = \frac{\partial \tilde{\Phi}_n^m}{\partial r^2} = 0, \quad \text{at } r = r_0, r_K. \quad (4.12)$$

$\tilde{\Phi}_n^m$ についてチェビシェフ関数展開を行うと,

$$\sum_{j=0}^K \left(\frac{d^2 T_j(r_k)}{dr^2} + \frac{2}{r_k} \frac{dT_j(r_k)}{dr} - \frac{n(n+1)}{r_k^2} T_j(r_k) \right) \Phi_{jn}^m = D_n \tilde{\Phi}_n^m, \quad (4.13)$$

$$\sum_{j=0}^K T_j(r_0) \Phi_{jn}^m = \sum_{j=0}^K \frac{dT_j(r_0)}{dr} \Phi_{jn}^m = 0, \quad (4.14)$$

$$\sum_{j=0}^K T_j(r_K) \Phi_{jn}^m = \sum_{j=0}^K \frac{dT_j(r_K)}{dr} \Phi_{jn}^m = 0. \quad (4.15)$$

となる. この Φ_{jn}^m に関する連立 1 次方程式を LU 分解で解き, Φ_{jn}^m を定める.

- (ii) 粘着条件 (rigid boundary)

実空間での (2.38)(2.40) より, 以下の境界値問題を解くことになる.

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) \tilde{\Phi}_n^m = D_n \tilde{\Phi}_n^m, \quad (4.16)$$

$$\tilde{\Phi}_n^m = \frac{\partial \tilde{\Phi}_n^m}{\partial r} = 0, \quad \text{at } r = r_0, r_K \quad (4.17)$$

となる. $\tilde{\Phi}_n^m$ についてチェビシェフ関数展開を行うと,

$$\sum_{j=0}^K \left(\frac{d^2 T_j(r_k)}{dr^2} + \frac{2}{r_k} \frac{dT_j(r_k)}{dr} - \frac{n(n+1)}{r_k^2} T_j(r_k) \right) \Phi_{jn}^m = D_n \tilde{\Phi}_n^m, \quad (4.18)$$

$$\sum_{j=0}^K T_j(r_0) \Phi_{jn}^m = \sum_{j=0}^K \frac{dT_j(r_0)}{dr} \Phi_{jn}^m = 0, \quad (4.19)$$

$$\sum_{j=0}^K T_j(r_K) \Phi_{jn}^m = \sum_{j=0}^K \frac{dT_j(r_K)}{dr} \Phi_{jn}^m = 0 \quad (4.20)$$

となる．この Φ_n^m に関する連立 1 次方程式を LU 分解で解き， Φ_{jn}^m を定める．

- 温度

温度に関しては，上下境界 r_0, r_K を除く $r_k (k = 1, \dots, K-1)$ の点で時間積分を実行する．

- (i) 温度固定条件

実空間での境界条件 (2.41) より，

$$\tilde{\Theta}_n^m(r_0, t) = 0, \quad (4.21)$$

$$\tilde{\Theta}_n^m(r_K, t) = 0 \quad (4.22)$$

となる．

- (ii) 熱フラックス固定条件

実空間での境界条件 (2.41) より，

$$\tilde{\Theta}_n^m(r_0, t) = \tilde{\Theta}_n^m(r_1, t), \quad (4.23)$$

$$\tilde{\Theta}_n^m(r_K, t) = \tilde{\Theta}_n^m(r_{K-1}, t) \quad (4.24)$$

となる．

5 まとめ

本論文では，回転球殻内のブシネスク対流モデルを数値計算するために必要となるブシネスク方程式系と境界条件の定式化および離散化を行った．

定式化は Zhang and Busse (1987) の方法に従った．具体的には，方程式系，および境界条件を無次元化したのちに，ポロイダル・トロイダルポテンシャルで表現した．ポテンシャルで表現された支配方程式系は，

$$\left[\left(\nabla^2 - P^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right) L_2 + \tau \mathbf{k} \times \mathbf{r} \cdot \nabla \right] \psi - \tau Q \phi = P^{-1} \mathbf{r} \cdot \nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}), \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \left[\left(\nabla^2 - P^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right) L_2 + \tau \mathbf{k} \times \mathbf{r} \cdot \nabla \right] \nabla^2 \phi + \tau Q \psi - RL_2 \Theta \\ = -P^{-1} \mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}), \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \Theta + L_2 \phi = \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta. \quad (2.37)$$

である．

次に，離散化は Glatzmaier(1984) の方法に従った．水平方向には球面調和関数展開を行った．水平方向にスペクトル展開された方程式系は以下ようになる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Psi}_n^m(r, t)}{\partial t} = P \left\{ \tau \frac{im}{n(n+1)} + D_n \right\} \tilde{\Psi}_n^m - P \tau \frac{(\tilde{Q}\phi)_n^m}{n(n+1)} \\ - \frac{1}{n(n+1)} \{ \mathbf{r} \cdot \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \}_n^m \quad (n \neq 0). \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_n \tilde{\Phi}_n^m(r, t)}{\partial t} = P \left\{ \tau \frac{im}{n(n+1)} + D_n \right\} D_n \tilde{\Phi}_n^m - P \tau \frac{(\tilde{Q}\psi)_n^m}{n(n+1)} \\ - \frac{1}{n(n+1)} \{ \mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \}_n^m \quad (n \neq 0). \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}_n^m(r, t)}{\partial t} = D_n \tilde{\Theta}_n^m - n(n+1) \tilde{\Phi}_n^m - \{ \nabla \cdot (\mathbf{v}\Theta) \}_n^m. \quad (3.22)$$

最後に鉛直方向にチェビシェフ展開を行い，境界条件を適用した．境界条件は運動学的境界条件，力学的境界条件，熱的境界条件の3つがある．力学的境界条件については応力なし条件と粘着条件，熱的境界条件については温度固定条件と熱フラックス固定条件をそれぞれ考えた．実際の数値計算では，考えている系にあわせて，外側境界，内側境界の条件をそれぞれ選択すれば良い．

• トロイダルポテンシャル

(i) 応力なし条件 (free boundary)

$$\tilde{\Psi}_n^m(r_0, t) = \frac{r_0}{r_1} \tilde{\Psi}_n^m(r_1, t), \quad (5.25)$$

$$\tilde{\Psi}_n^m(r_K, t) = \frac{r_K}{r_{K-1}} \tilde{\Psi}_n^m(r_{K-1}, t). \quad (5.26)$$

(ii) 粘着条件 (rigid boundary)

$$\tilde{\Psi}_n^m(r_0, t) = 0, \quad (5.27)$$

$$\tilde{\Psi}_n^m(r_K, t) = 0. \quad (5.28)$$

• ポロイダルポテンシャル

(i) 応力なし条件 (free boundary)

$$\sum_{j=0}^K \left(\frac{d^2 T_j(r_k)}{dr^2} + \frac{2}{r_k} \frac{dT_j(r_k)}{dr} - \frac{n(n+1)}{r_k^2} T_j(r_k) \right) \Phi_{jn}^m = D_n \tilde{\Phi}_n^m, \quad (5.29)$$

$$\sum_{j=0}^K T_j(r_0) \Phi_{jn}^m = \sum_{j=0}^K \frac{dT_j(r_0)}{dr} \Phi_{jn}^m = 0, \quad (5.30)$$

$$\sum_{j=0}^K T_j(r_K) \Phi_{jn}^m = \sum_{j=0}^K \frac{dT_j(r_K)}{dr} \Phi_{jn}^m = 0. \quad (5.31)$$

(ii) 粘着条件 (rigid boundary)

$$\sum_{j=0}^K \left(\frac{d^2 T_j(r_k)}{dr^2} + \frac{2}{r_k} \frac{dT_j(r_k)}{dr} - \frac{n(n+1)}{r_k^2} T_j(r_k) \right) \Phi_{jn}^m = D_n \tilde{\Phi}_n^m, \quad (5.32)$$

$$\sum_{j=0}^K T_j(r_0) \Phi_{jn}^m = \sum_{j=0}^K \frac{dT_j(r_0)}{dr} \Phi_{jn}^m = 0, \quad (5.33)$$

$$\sum_{j=0}^K T_j(r_K) \Phi_{jn}^m = \sum_{j=0}^K \frac{dT_j(r_K)}{dr} \Phi_{jn}^m = 0. \quad (5.34)$$

- 温度

- (i) 温度固定条件

$$\tilde{\Theta}_n^m(r_0, t) = 0, \quad (5.35)$$

$$\tilde{\Theta}_n^m(r_K, t) = 0. \quad (5.36)$$

- (ii) 熱フラックス固定条件

$$\tilde{\Theta}_n^m(r_0, t) = \tilde{\Theta}_n^m(r_1, t), \quad (5.37)$$

$$\tilde{\Theta}_n^m(r_K, t) = \tilde{\Theta}_n^m(r_{K-1}, t). \quad (5.38)$$

以上で数値計算を行うために必要な式が導出された。この導出した離散化された方程式系を用いて実際にプログラムを構築することが今後の課題である。

謝辞

本論文の作成にあたり，多くの励ましと助言を頂きました．

指導教官である林 祥介教授には研究のきっかけと方針を頂きました．地球流体力学研究室の小高 正嗣助手には論文の構成について指導を頂きました．同研究室の森川 靖大氏には何度も深夜まで付き合ってもらい，多くの助言を頂きました．京都大学数理解析研究所の竹 広 真一助教授にはモデルの定式化とプログラムの作成について博士論文を参考にさせて頂いただけでなく，研究を始めるにあたって助言も頂きました．

地球流体力学研究室メンバーをはじめ，応援して下さった全ての方にあらためて深く感謝いたします．

付録 A 公式

A.1 緯度経度座標計算公式

緯度経度座標系における勾配，発散，回転，ラプラシアン，ベクトルラプラシアン，時間微分を以下に示す．

$$\nabla f = \left(\frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial r} \right), \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta v) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w), \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = \frac{u}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial r}, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) - \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial (u \cos \theta)}{\partial \theta} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\nabla^2 f}{\nabla \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right), \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{u} = & \left(\nabla^2 u - \frac{2 \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{u}{r^2 \cos^2 \theta}, \right. \\ & \nabla^2 v - \frac{v}{r^2 \cos^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{2 \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \\ & \left. \nabla^2 w - \frac{2}{r^2} w - \frac{2}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta v) \right), \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = & \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u + \frac{uw}{r} - \frac{uv \tan \theta}{r}, \right. \\ & \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla v + \frac{vw}{r} + \frac{u^2 \tan \theta}{r}, \\ & \left. \frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla w - \frac{u^2 + v^2}{r} \right). \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

応力テンソルの各成分を以下に示す .

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -p + 2\eta \left(\frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v \tan \theta}{r} + \frac{w}{r} \right) + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \nabla \cdot \mathbf{u} , \quad (\text{A.8})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\eta \left(\frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{w}{r} \right) + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \nabla \cdot \mathbf{u} , \quad (\text{A.9})$$

$$\sigma_{rr} = -p + 2\eta \frac{\partial w}{\partial r} + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \nabla \cdot \mathbf{u} , \quad (\text{A.10})$$

$$\sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta} = \eta \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) , \quad (\text{A.11})$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = \eta \left(\frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) \right) , \quad (\text{A.12})$$

$$\sigma_{\varphi\theta} = \sigma_{\theta\varphi} = \eta \left(\frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u}{\cos \theta} \right) + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) . \quad (\text{A.13})$$

ここで, η , ζ は定数であり, それぞれ粘性係数, 第 2 粘性係数という .

A.2 ベクトル計算公式

任意のベクトル \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , およびスカラー関数 φ に対して以下の公式が成り立つ .

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} , \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{B}) = \nabla \varphi \times \mathbf{B} + \varphi \nabla \times \mathbf{B} , \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) , \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) , \quad (\text{A.17})$$

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0 , \quad (\text{A.18})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 , \quad (\text{A.19})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} . \quad (\text{A.20})$$

A.3 トロイダル・ポロイダルポテンシャル計算公式

トロイダル・ポロイダルポテンシャルの計算は複雑なので，以下の公式を用いると便利である．

$$\psi \mathbf{r} = (0, 0, r\psi), \quad (\text{A.21})$$

$$\nabla \times (\psi \mathbf{r}) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, -\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, 0 \right), \quad (\text{A.22})$$

$$\nabla \times \nabla \times (\psi \mathbf{r}) = \left(\frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right), \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right), \frac{L_2 \psi}{r} \right), \quad (\text{A.23})$$

$$\nabla \times \nabla \times \nabla \times (\psi \mathbf{r}) = \left(-\frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial \theta}, \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial \varphi}, 0 \right), \quad (\text{A.24})$$

$$\nabla \times \nabla \times \nabla \times \nabla \times (\psi \mathbf{r}) = \left(-\frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial \varphi} \right), \right. \quad (\text{A.25})$$

$$\left. -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial(\nabla^2 \psi)}{\partial \theta} \right), \frac{L_2 \nabla^2 \psi}{r} \right), \quad (\text{A.26})$$

$$\nabla \times \nabla \times \nabla \times \nabla \times \nabla \times (\psi \mathbf{r}) = \left(\frac{\partial(\nabla^2 \nabla^2 \psi)}{\partial \theta}, -\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial(\nabla^2 \nabla^2 \psi)}{\partial \varphi}, 0 \right), \quad (\text{A.27})$$

$$\nabla \times \nabla \times \nabla \times \nabla \times \nabla \times \nabla \times (\psi \mathbf{r}) = \left(\frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial(\nabla^2 \nabla^2 \psi)}{\partial \varphi} \right), \right. \quad (\text{A.28})$$

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial(\nabla^2 \nabla^2 \psi)}{\partial \theta} \right), \frac{L_2 \nabla^2 \nabla^2 \psi}{r} \right). \quad (\text{A.29})$$

さらに，これらの式と r の内積をとることで以下の公式が得られる．

$$r \cdot (\psi \mathbf{r}) = r^2 \psi, \quad (\text{A.30})$$

$$r \cdot \nabla \times (\psi \mathbf{r}) = 0, \quad (\text{A.31})$$

$$r \cdot \nabla \times \nabla \times (\psi \mathbf{r}) = L_2 \psi, \quad (\text{A.32})$$

$$r \cdot \nabla \times \nabla \times \nabla \times (\psi \mathbf{r}) = 0, \quad (\text{A.33})$$

$$r \cdot \nabla \times \nabla \times \nabla \times \nabla \times (\psi \mathbf{r}) = -L_2 \nabla^2 \psi, \quad (\text{A.34})$$

$$r \cdot \nabla \times \nabla \times \nabla \times \nabla \times \nabla \times (\psi \mathbf{r}) = 0, \quad (\text{A.35})$$

$$r \cdot \nabla \times \nabla \times \nabla \times \nabla \times \nabla \times \nabla \times (\psi \mathbf{r}) = L_2 \nabla^2 \nabla^2 \psi. \quad (\text{A.36})$$

A.4 Legendre 陪関数

2 で規格化した Legendre 陪関数は $-1 \leq \mu \leq 1$ において以下のように定義される .

$$P_n^m(\mu) \equiv \sqrt{\frac{(2n+1)(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} \frac{(1-\mu^2)^{\frac{|m|}{2}}}{2^n n!} \frac{d^{n+|m|}}{d\mu^{n+|m|}} (\mu^2-1)^n . \quad (\text{A.37})$$

ここで , m, n は $0 \leq |m| \leq n$ を満たす整数である . Legendre 陪関数は以下のような直交性をもつ .

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_n^m(\mu) P_{n'}^m(\mu) d\mu = \delta_{nn'} \quad (\text{A.38})$$

ここで , m, n, n' は $0 \leq |m| \leq n, n'$ を満たす整数である .

A.5 Gauss の台形公式

波数 M 以下の三角関数で表現される $g(\varphi)$

$$g(\varphi) = \sum_{m=-M}^M g_m \exp(im\varphi) \quad (0 \leq \varphi < 2\pi) \quad (\text{A.39})$$

について , $M < I$ を満たすように I をとると ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi = \frac{1}{I} \sum_{n=1}^I g(\varphi_n) , \quad (\text{A.40})$$

$$\varphi_n = \frac{2\pi(n-1)}{I} \quad (n = 1, 2, \dots, I) , \quad (\text{A.41})$$

が成り立つ . これを Gauss の台形公式という .

A.6 Gauss-Legendre の公式

$f(\mu)$ を $2J-1$ 以下の多項式とする . P_n を 2 で規格化した n 次の Legendre 関数とする . このとき , $\int_{-1}^1 f d\mu$ は P_j の零点である Gauss 緯度 $\mu_j (j = 1, 2, \dots, J)$ を用いて ,

$$\int_{-1}^1 f(\mu) d\mu = 2 \sum_{j=1}^J f(\mu_j) w_j \quad (\text{A.42})$$

と表すことができる . これを Gauss-Legendre の公式という .

A.7 球面調和関数の離散的直交関係

離散化した球面調和関数は以下のような選点直交性をもつ．

$$\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I P_n^m(\mu_j) P_{n'}^{m'}(\mu_j) \exp(im\varphi_i) \exp(-im'\varphi_i) w_j = I \delta_{nn'} \delta_{mm'}$$

ここで, $i, j, m, m', n, n', I, J, M, N(m)$ は整数で, $1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J, 0 \leq |m|, |m'| \leq M, |m| \leq n \leq N, |m'| \leq n' \leq N$ であり, $M \leq \left[\frac{I}{2} \right], N(m) \leq J - 1$ を満たす. また, w_j は Gauss 重み, $\varphi_i = \frac{2\pi(i-1)}{I}$, μ_j は Gauss 格子である. $[\]$ はそれを越えない最大の整数を表す. これは, 有限な直交多項式系において成り立つ選点直交性と呼ばれる性質である.

この式を証明する. Legendre 関数の定義・(連続系での)直交性, Gauss の台形公式, Legendre 関数の零点を用いた多項式の積分評価を既知とすると,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I P_n^m(\mu_j) P_{n'}^{m'}(\mu_j) \exp(im\varphi_i) \exp(-im'\varphi_i) w_j \\ &= I \sum_{j=1}^J P_n^m(\mu_j) P_{n'}^{m'}(\mu_j) w_j \delta_{mm'} \quad (\text{Gauss の台形公式より}) \\ &= I \sum_{j=1}^J P_n^m(\mu_j) P_{n'}^m(\mu_j) w_j \delta_{mm'} \\ &= \frac{I}{2} \int_{-1}^1 P_n^m(\mu) P_{n'}^m(\mu) d\mu \delta_{mm'} \quad (\text{Gauss - Legendre の公式より}) \\ &= I \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (\text{連続系の Legendre 陪関数の直交性より}) \end{aligned}$$

となる. 以上により, 離散化した球面調和関数の選点直交性が示された.

三角関数についても同様な離散的直交関係がある.

$$\sum_{i=1}^I \exp(im\varphi_i) \exp(-im'\varphi_i) = I \delta_{mm'} \quad (\text{選点直交性}) \quad (\text{A.43})$$

付録 B 導出

B.1 方程式系のポテンシャル表現の導出

$r \cdot \nabla \times (\tau \mathbf{k} \times \mathbf{u})$, $r \cdot \nabla \times \nabla \times (\tau \mathbf{k} \times \mathbf{u})$ をポテンシャルで表現する .

- $r \cdot \nabla \times (\tau \mathbf{k} \times \mathbf{u})$

(A.17) より ,

$$\begin{aligned} r \cdot \nabla \times (\tau \mathbf{k} \times \mathbf{u}) &= \tau r \cdot \{ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{k} - \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{k}) - (\mathbf{k} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{k} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \} \\ &= -\tau r \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla) \mathbf{u} \end{aligned}$$

となる . まず , $(\mathbf{k} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ を計算する . (2.32) を代入して成分で表す .

$$\begin{aligned} (\mathbf{k} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= (\mathbf{k} \cdot \nabla) \{ \nabla \times (\psi \mathbf{r}) + \nabla \times \nabla \times (\phi \mathbf{r}) \} \\ &= k_n \partial_n \varepsilon_{ijk} \partial_j \{ r_k \psi + \varepsilon_{klm} \partial_l (r_m \phi) \} \\ &= \varepsilon_{ijk} k_n \partial_n \partial_j (r_k \psi) + k_n \partial_n (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l (r_m \phi) \\ &= \varepsilon_{ijk} \{ k_n r_k \partial_n \partial_j \psi + k_n (\partial_n r_k) (\partial_j \psi) + k_n (\partial_n \psi) (\partial_j r_k) + k_n \psi \partial_n \partial_j r_k \} \\ &\quad + k_n \partial_n \partial_j \partial_i (r_j \phi) - k_n \partial_n \partial_j \partial_j (r_i \phi) \\ &= \varepsilon_{ijk} \{ k_n r_k \partial_n \partial_j \psi + k_k (\partial_j \psi) \} \\ &\quad + k_n \{ r_j \partial_n \partial_j \partial_i \phi + (\partial_n r_j) (\partial_j \partial_i \phi) + (\partial_j r_j) (\partial_n \partial_i \phi) + (\partial_i r_j) (\partial_n \partial_j \phi) \} \\ &\quad - k_n \{ r_i \partial_n \partial_j \partial_j \phi + (\partial_n r_i) (\partial_j \partial_j \phi) + 2(\partial_j r_i) (\partial_n \partial_j \phi) \} \quad (\because \varepsilon_{ijk} \partial_j r_k = 0) \\ &= \varepsilon_{ijk} (k_n \partial_n \partial_j \psi) r_k + \varepsilon_{ijk} (\partial_j \psi) k_k \\ &\quad + k_n r_j \partial_n \partial_j \partial_i \phi + k_j \partial_j \partial_i \phi + 3k_n \partial_n \partial_i \phi + k_n \partial_n \partial_i \phi \\ &\quad - k_n r_i \partial_n \partial_j \partial_j \phi - k_i \partial_j \partial_j \phi - 2k_n \partial_n \partial_i \phi \\ &\quad (\because \partial_n r_j = \partial_n r_i = \partial_i r_j = \partial_j r_i = 1, \quad \partial_j r_j = 3) \\ &= \nabla (\mathbf{k} \cdot \nabla \psi) \times \mathbf{r} + \nabla \psi \times \mathbf{k} \\ &\quad + r_j k_n \partial_n \partial_j \partial_i \phi + k_j \partial_j \partial_i \phi + 2k_n \partial_n \partial_i \phi - r_i k_n \partial_n \partial_j \partial_j \phi - k_i \partial_j \partial_j \phi \\ &= \nabla (\mathbf{k} \cdot \nabla \psi) \times \mathbf{r} + \nabla \psi \times \mathbf{k} \\ &\quad + (r_j \partial_j \partial_i + 2\partial_i - r_i \partial_j \partial_j) k_n \partial_n \phi + k_j \partial_j \partial_i \phi - k_i \partial_j \partial_j \phi . \end{aligned}$$

次に, $\mathbf{r} \cdot$ を作用させる .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \mathbf{r} \cdot \nabla \psi \times \mathbf{k} + (r_i r_j \partial_j \partial_i + 2r_i \partial_i - r_i^2 \partial_j \partial_j) k_n \partial_n \phi + r_i k_j \partial_j \partial_i \phi - r_i k_i \partial_j \partial_j \phi \\
 &= \nabla \psi \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{r} + \frac{1}{2} (r_i r_j \partial_j \partial_i + 2r_i \partial_i - r_i^2 \partial_j \partial_j) k_n \partial_n \phi + r_i k_j \partial_j \partial_i \phi - r_i k_i \partial_j \partial_j \phi \\
 &\quad + \frac{1}{2} k_n \partial_n \{ (r_i r_j \partial_j \partial_i + 2r_i \partial_i - r_i^2 \partial_j \partial_j) \phi \} - \frac{1}{2} k_n \partial_n (r_i r_j) \partial_j \partial_i \phi \\
 &\quad - k_n (\partial_n r_i) (\partial_i \phi) + \frac{1}{2} k_n (\partial_n r_i^2) \partial_j \partial_j \phi \\
 &= \nabla \psi \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{r} + \frac{1}{2} L_2 (\mathbf{k} \cdot \nabla) \phi + r_i k_j \partial_j \partial_i \phi - r_i k_i \partial_j \partial_j \phi \\
 &\quad + \frac{1}{2} (\mathbf{k} \cdot \nabla) L_2 \phi - r_i k_j \partial_j \partial_i \phi - k_i (\partial_i \phi) + r_i k_i \partial_j \partial_j \phi \\
 &= \nabla \psi \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{r} + \frac{1}{2} L_2 (\mathbf{k} \cdot \nabla) \phi + \frac{1}{2} (\mathbf{k} \cdot \nabla) L_2 \phi - \mathbf{k} \cdot \nabla \phi \\
 &= \nabla \psi \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{r} - Q \phi .
 \end{aligned}$$

したがって ,

$$\mathbf{r} \cdot \nabla \times (\tau \mathbf{k} \times \mathbf{u}) = \tau \mathbf{k} \times \mathbf{r} \cdot \nabla \psi - \tau Q \phi$$

となる .

- $\mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times (\tau \mathbf{k} \times \mathbf{u})$

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \nabla \times (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) &= \nabla \times \nabla \times [\mathbf{k} \times \nabla \times \{ \mathbf{r} \psi + \nabla \times (\mathbf{r} \phi) \}] \\
 &= \nabla \times \nabla \times \{ \mathbf{k} \times \nabla \times \mathbf{A} \} \quad (\because \mathbf{A} \equiv \mathbf{r} \psi + \nabla \times (\mathbf{r} \phi)) \\
 &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l \varepsilon_{mnp} k_n \varepsilon_{pqr} \partial_q A_r \\
 &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \varepsilon_{mnp} \varepsilon_{pqr} \partial_j \partial_l k_n \partial_q A_r \\
 &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) (\delta_{mq} \delta_{nr} - \delta_{mr} \delta_{nq}) \partial_j \partial_l k_n \partial_q A_r \\
 &= (\delta_{il} \delta_{jq} \delta_{nr} - \delta_{iq} \delta_{jl} \delta_{nr} - \delta_{il} \delta_{jr} \delta_{nq} + \delta_{ir} \delta_{jl} \delta_{nq}) \partial_j \partial_l k_n \partial_q A_r \\
 &= \partial_j \partial_i k_n \partial_j A_n - \partial_j \partial_j k_n \partial_i A_n - \partial_j \partial_i k_n \partial_n A_j + \partial_j \partial_j k_n \partial_n A_i \\
 &= -k_n \partial_n (\partial_j \partial_i A_j - \partial_j \partial_j A_i) \\
 &= -(\mathbf{k} \cdot \nabla) \{ \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \} \\
 &= -(\mathbf{k} \cdot \nabla) (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}) \\
 &= -(\mathbf{k} \cdot \nabla) \{ \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \psi) + \nabla \times \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \phi) \} \\
 &= -(\mathbf{k} \cdot \nabla) \{ \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \psi) - \nabla \times \nabla^2 (\mathbf{r} \phi) \} \\
 &= -(\mathbf{k} \cdot \nabla) \{ \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \psi) - \nabla \times (\mathbf{r} \nabla^2 \phi) \} .
 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times (\mathbf{k} \times \mathbf{u}) &= -\mathbf{r} \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla) \{ \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}\psi) \} + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla) \{ \nabla \times (\mathbf{r}\nabla^2\phi) \} \\
 &= -\left\{ \frac{1}{2}L_2(\mathbf{k} \cdot \nabla) + \frac{1}{2}(\mathbf{k} \cdot \nabla)L_2 - \mathbf{k} \cdot \nabla \right\} \psi + (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \nabla^2\phi \\
 &= (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \nabla^2\phi - Q\psi
 \end{aligned}$$

となる. したがって,

$$\mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times (\tau \mathbf{k} \times \mathbf{u}) = \tau (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \nabla^2\phi - \tau Q\psi$$

である.

B.2 境界条件のポテンシャル表現の導出

無次元での各境界条件をポテンシャルで表現する.

- 運動学的境界条件

無次元での運動学的境界条件は

$$w = 0, \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{1}{1-\eta} \quad (2.27)$$

となる. 速度場のポテンシャル表現 (2.32) より,

$$w = \frac{L_2\phi}{r}, \quad (B.1)$$

であるため

$$\phi = 0, \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{1}{1-\eta} \quad (2.38)$$

となる.

- 力学的境界条件

(i) 応力なし条件 (free boundary)

無次元での応力なし条件は

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) = 0, \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{1}{1-\eta} \quad (2.28)$$

である。

まず, ポロイダルポテンシャル ϕ についての境界条件を求める。連続の式 (2.23) に $r \frac{\partial}{\partial r}$ を作用させる。

$$\begin{aligned} & r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w) \right\} \\ &= \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) \right\} + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ r \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right\} + r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w) \right\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(2.28) を用いて, 第一項, 第二項を消去すると, 上式は

$$\begin{aligned} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 w) &= r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w) + \frac{r w}{r^2} \right\} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r w) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w) - \frac{2w}{r^2} = 0 \end{aligned}$$

となる。境界上において運動学的境界条件 (2.27) および, (B.1) を用いると,

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r w) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0. \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{1}{1-\eta} \quad (B.2)$$

となる。

次に, トロイダルポテンシャル ψ についての境界条件を求める。 $\frac{\partial}{\partial r} (\nabla \times \mathbf{u})$ の r 成分は,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\nabla \times \mathbf{u}) \right]_r &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u \cos \theta) \right\}, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{L_2 \psi}{r} \right) &= \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) - \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) \end{aligned}$$

である。(2.28) を用いると, 右辺は 0 になるから,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{L_2 \psi}{r} \right) = L_2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi}{r} \right) = 0. \quad \text{at } r = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{1}{1-\eta} \quad (B.3)$$

となる。

したがって, (B.2), (B.3) より,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi}{r} \right) = 0, \quad \text{at} \quad r = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{1}{1-\eta} \quad (2.39)$$

となる.

(ii) 粘着条件 (rigid boundary)

無次元での粘着条件は,

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad \text{at} \quad r = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{1}{1-\eta} \quad (2.29)$$

である.

まず, ポロイダルポテンシャル ϕ についての境界条件を求める. (B.1) を用いると, 上式は

$$\frac{\partial w}{\partial r} = L_2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\phi}{r} \right) = 0 \quad (B.4)$$

となる. 運動学的境界条件 (2.27) を用いると,

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0. \quad \text{at} \quad r = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{1}{1-\eta} \quad (B.5)$$

となる.

次に, トロイダルポテンシャル ψ についての境界条件を求める. 速度場の式 (2.32) に $\mathbf{r} \cdot \nabla \times$ を作用させる.

$$\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = L_2 \psi = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u \cos \theta).$$

境界上では水平風速 u, v が 0 であるから, 右辺は 0 になるから,

$$\psi = 0. \quad \text{at} \quad r = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{1}{1-\eta} \quad (B.6)$$

となる.

したがって, (B.5), (B.6) より,

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \psi = 0, \quad \text{at} \quad r = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{1}{1-\eta} \quad (2.40)$$

となる.

- 熱的境界条件

ポテンシャルで表現しても変わらない.

B.3 格子点上での空間微分と展開係数の関係の導出

水平スペクトル変換の式

$$\psi_{ij} = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \tilde{\Psi}_n^m Y_n^m(\varphi_i, \mu_j), \quad (3.4)$$

$$\tilde{\Psi}_n^m = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \psi(\varphi_i, \mu_j) Y_n^{m*}(\varphi_i, \mu_j) w_j \quad (3.5)$$

より (3.8) ~ (3.11) を導く .

- φ 方向微分

まず ,

$$g \equiv \frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad (B.7)$$

を考える . (3.4) より , 東西方向微分 (φ 微分) は次式で評価される .

$$g_{ij} \equiv \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sum_{m,n} \tilde{f}_n^m Y_n^m(\varphi_i, \mu_j) \right) \right]_{ij} . \quad (B.8)$$

すなわち ,

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_{ij} = \sum_{m,n} im \tilde{f}_n^m Y_n^m(\varphi_i, \mu_j) \quad (3.8)$$

である . ここで $\sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N$ を $\sum_{m,n}$ と略記した . また , 同様に今後 $\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J$ は $\sum_{i,j}$ と略記する .

変換公式 (3.4) で ψ を g とし , (3.8) と比べれば明らかに ,

$$\tilde{g}_n^m = im \tilde{f}_n^m \quad (B.9)$$

である . したがって , \tilde{g} に対して変換公式 (3.5) を適用させれば

$$\tilde{g}_n^m = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \right)_n^m = \frac{1}{I} \sum_{i,j} im f_{ij} Y_n^{m*}(\varphi_i, \mu_j) w_j \quad (3.9)$$

である .

- μ 方向微分

まず,

$$p \equiv \frac{\partial f}{\partial \mu}$$

を考える．(3.4) より，南北方向微分（ μ 微分）は次式で評価される．

$$p_{ij} \equiv \left[\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\sum_{m,n} \tilde{f}_n^m Y_n^m(\varphi_i, \mu_j) \right) \right]_{ij}. \quad (\text{B.10})$$

すなわち,

$$p_{ij} = \left(\frac{\partial f}{\partial \mu} \right)_{ij} = \sum_{m,n} \tilde{f}_n^m \frac{\partial Y_n^m}{\partial \mu} \Big|_{ij} \quad (3.10)$$

である．変換公式(3.5)で ψ を p とすると，

$$\begin{aligned} \tilde{p}_n^m &= \frac{1}{I} \sum_{i,j} p_{ij} Y_n^{m*} w_j \\ &= \frac{1}{I} \sum_{i,j} \left(\sum_{m',n'} \tilde{f}_{n'}^{m'} \frac{\partial P_{n'}^{m'}}{\partial \mu} \Big|_j \exp(im'\varphi_i) \right) P_n^m(\mu_j) \exp(-im\varphi_i) w_j \\ &= -\frac{1}{I} \sum_{i,j} \left(\sum_{m',n'} \tilde{f}_{n'}^{m'} P_{n'}^{m'}(\mu_j) \exp(im'\varphi_i) \right) \frac{\partial P_n^m}{\partial \mu} \Big|_j \exp(-im\varphi_i) w_j \\ &= -\frac{1}{I} \sum_{i,j} f_{ij} \frac{\partial P_n^m}{\partial \mu} \Big|_j \exp(-im\varphi_i) w_j \\ &= -\frac{1}{I} \sum_{i,j} f_{ij} \frac{\partial Y_n^{m*}}{\partial \mu} \Big|_{ij} w_j \end{aligned} \quad (3.11)$$

となる．ここで，2行目から3行目の等号では，

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j} \tilde{f}_{n'}^{m'} P_n^m(\mu_j) \exp(im\varphi_i) \frac{\partial P_{n'}^{m'}}{\partial \mu} \Big|_j \exp(-im'\varphi_i) w_j \\
 = & I \sum_j \tilde{f}_{n'}^{m'} P_n^m(\mu_j) \frac{\partial P_{n'}^{m'}}{\partial \mu} \Big|_j w_j \delta_{mm'} \quad (\because \text{三角関数の直交性}) \\
 = & \frac{I}{2} \int_{-1}^1 \tilde{f}_{n'}^{m'} P_n^m(\mu) \frac{\partial P_{n'}^{m'}}{\partial \mu} \Big|_j d\mu \delta_{mm'} \quad (\because \text{Gausse - Legendre の公式}) \\
 = & -\frac{I}{2} \int_{-1}^1 \tilde{f}_{n'}^{m'} P_{n'}^{m'}(\mu) \frac{\partial P_n^m}{\partial \mu} \Big|_j d\mu \delta_{mm'} \quad (\because \text{部分積分}) \\
 = & -I \sum_j \tilde{f}_{n'}^{m'} P_{n'}^{m'}(\mu_j) \frac{\partial P_n^m}{\partial \mu} \Big|_j w_j \delta_{mm'} \\
 = & -\sum_{i,j} \tilde{f}_{n'}^{m'} \frac{\partial P_n^m}{\partial \mu} \Big|_j \exp(-im\varphi_i) P_{n'}^{m'}(\mu_j) \exp(im'\varphi_i) w_j \tag{B.11}
 \end{aligned}$$

を用いた．

B.4 非線形項のベクトル演算の導出

(3.13), (3.14), (3.15) の導出を行う .

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{s} &= \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial s_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (s_\theta \cos \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 s_r) \\
 &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial S_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 s_r) \\
 &= \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial S_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_\theta}{\partial \mu} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 s_r) , \tag{B.12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{s})_r &= \frac{1}{r \cos \theta} \left\{ \frac{\partial s_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \theta} (s_\varphi \cos \theta) \right\} \\
 &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial S_\theta}{\partial \varphi} - \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (S_\varphi) \\
 &= \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial S_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial S_\varphi}{\partial \mu} , \tag{B.13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{s})_r &= \frac{1}{r \cos \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} (\nabla \times \mathbf{s})_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla \times \mathbf{s})_\varphi \cos \theta \right\} \\
 &= \frac{1}{r \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r s_\varphi) - \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial s_r}{\partial \varphi} \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial s_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r s_\theta) \right\} \cos \theta \right] \\
 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial s_r}{\partial \varphi} \right) \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{\cos^2 \theta} \frac{\partial s_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial s_r}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 s_r}{\partial \varphi^2} \\
 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial s_r}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{1 - \mu^2} \frac{\partial s_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{L_2 s_r}{r^2} . \tag{B.14}
 \end{aligned}$$

参考文献

- [1] Chandrasekhar, S., 1961: Hydrodynamic and Hydromagnetic stability. *Oxford Univ. Press*, 654pp.
- [2] 地球流体電脳倶楽部 dcmode1 プロジェクト, 2006: DCPAM3, <http://www.gfd-dennou.org/arch/dcpam/>, 地球流体電脳倶楽部.
- [3] SWAMP Project, 1998: AGCM5 <http://www.gfd-dennou.org/arch/agcm5/> 地球流体電脳倶楽部.
- [4] Glatzmaier, G.A., 1984: Numerical simulations of stellar convective dynamos. I. the model and method. *J. Comput. Phys.*, **55**, 461-48.
- [5] Hadley, G., 1735: Concerning the cause of the general trade winds. *Phil. Trans.* **29**, 58-62.
- [6] Held, A. Y., and Hou, A. Y., 1980: Nonlinear Axially Symmetric Circulations in a Nearly Inviscid Atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **37**, 515-533.
- [7] 石岡圭一, 2004: スペクトル法による数値計算入門. 東京大学出版会, 232pp
- [8] 沼口 敦, 1991: 熱帯における積雲活動の大規模構造に関する数値実験. 東京大学学位論文, 205pp.
- [9] Satoh, M., 2003: Atmospheric Circulation Dynamics and General Circulation Models. *Springer-PRAXIS, New-York*, 643pp
- [10] 佐藤正樹, 1991: ハドレー循環, GFD ノート
- [11] Schneider, E. K., 1977: Axially symmetric steady-state models of the basic state for instability and climate studies. Part 2: Nonlinear calculations. *J. Atmos. Sci.*, **34**, 280-297.
- [12] Schneider, E. K., and R. S. Lindzen 1977: Axially symmetric steady-state models of the basic state for instability and climate studies. Part 2: Nonlinear calculations. *J. Atmos. Sci.*, **34**, 263-279.
- [13] 竹広真一, 1993: 回転球殻対流 ~ 赤道加速に関する考察 (回転が遅い場合). <http://www.gfd-dennou.org/arch/gfdsemi/1993-08-26/takehiro/pub/>, 地球流体電脳倶楽部.
- [14] 竹広真一, 1994: 回転球殻ブシネスク対流 ~ 赤道加速に関する考察. 博士論文, 東京大学大学院理学系研究科地球惑星物理学専攻.

-
- [15] Zhang, K.-K., and Busse, F.H., 1987: On the origin of onset of convection in rotating spherical shells. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics.*, **39**, 119-147.
-