

平面上における 2次元乱流の数値計算

北海道大学理学部

地球科学科4年 地球流体力学研究室

土屋 貴志

1. はじめに

- 2次元乱流は水平方向の運動スケールに比べ鉛直方向の運動スケールが極めて小さいという特徴を持つ, 惑星大気の大規模な運動を理解するために有用であると考えられ, 研究されてきた. 傾圧性, 回転, 地形性などの効果を無視した2次元乱流は, 渦がより大きな渦へと遷移していくことなどが知られていた.
- 回転球面上, つまり 効果を考慮した2次元乱流は Rhines(1975)によって初めて議論され, 数値計算が行われた. そこでRhines(1975)が行った数値計算を参考に再計算を行い, 効果が2次元乱流に与える影響を調べた. またRhinesスケールを紹介し, その性質を確認する.

2. 支配方程式

- 平面上の順圧渦度方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + J(\psi, \zeta) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nu \nabla^2 \zeta \quad (1)$$

$$\zeta = \nabla^2 \psi, \quad J(\psi, \zeta) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

ψ : 流線関数, ζ : 渦度,

ν : 動粘性係数, f : コリオリパラメータ

$\beta: \frac{df}{dy}$

3. 数値計算設定

- 以下の設定で数値計算を行った。
 - 数値スキーム: スペクトル法
 - 境界条件: 周期境界
 - 時間積分法: ホイン法(改良オイラー法)
 - 流線関数の初期条件: 全波数7~9をランダムに与える
 - 解像度
 - 格子点数: x,y方向ともに64個
 - 切断波数: x,y方向ともに21
 - 実験1を $\nu = 0$, 実験2を $\nu = 3.25$, 実験3を $\nu = 52$,
実験4を $\nu = 150$ とする. 各実験 $\Delta t = 0.004$.

4. エネルギーの逆カスケード

- 図1より時間が経つと擾乱のスケールが大きくなる, つまり小さな波数が卓越することがわかる. このことを定量的に示すために, ある時間における卓越した波数, つまりエネルギーで重みをつけた平均波数

$$\langle K \rangle = \frac{\int_0^{\infty} K E(K) dK}{\int_0^{\infty} E(K) dK} \quad (2)$$

を求め, 時間発展を図2に示す. ここでKは波数, E(K)はエネルギーである. 図3にエネルギースペクトルの時間発展を示す. 図2, 図3はエネルギーが波数の小さな方へ移っていることを示している. これを2次元乱流の特徴であるエネルギーの逆カスケードという.

5. 実験1($\beta = 0$)における流線関数

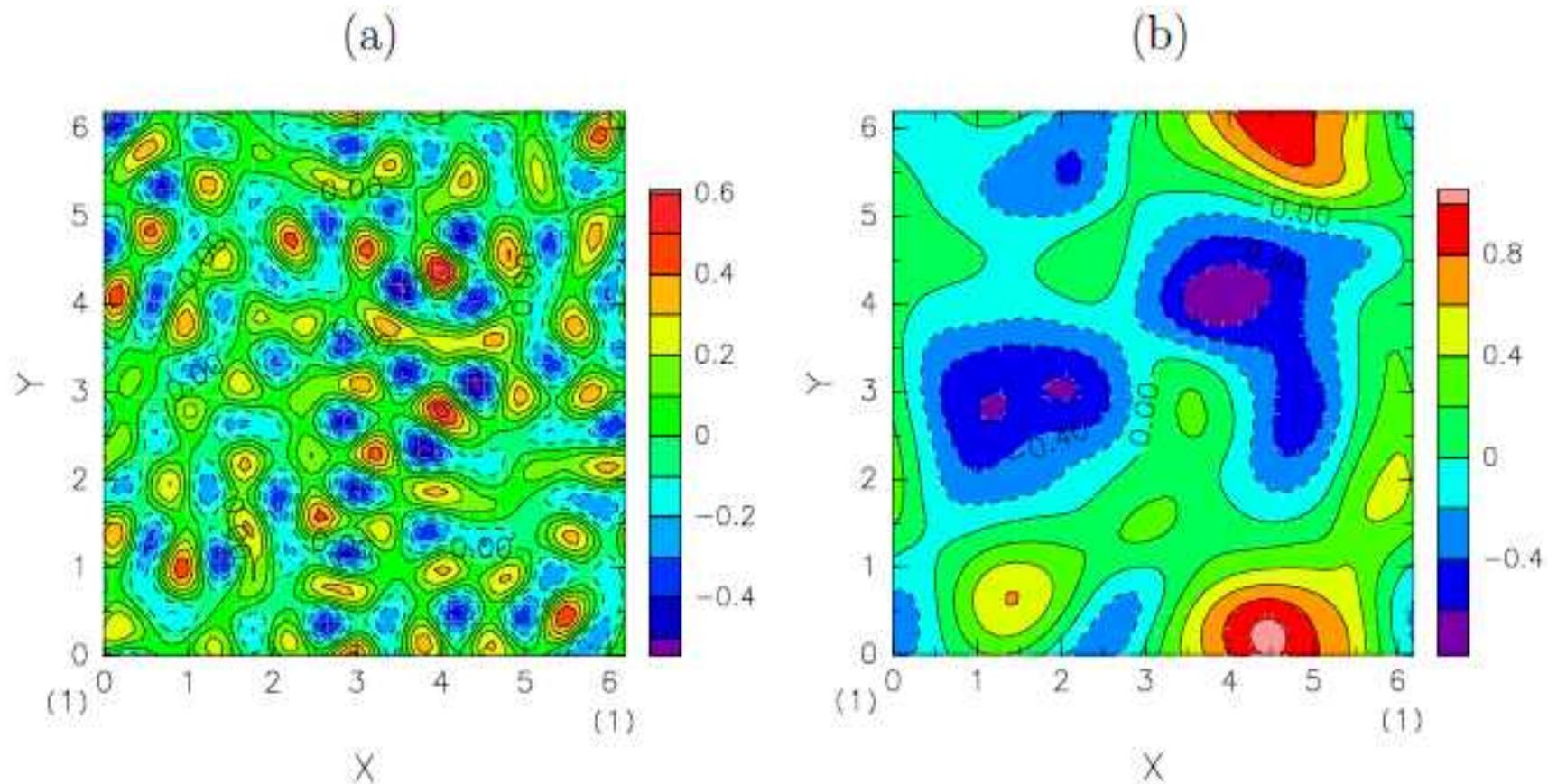


図1:実験1($\beta = 0$)における流線関数. (a) $t = 0$,
(b) $t = 7$

6. 実験1 ($\beta=0$)におけるエネルギーの遷移

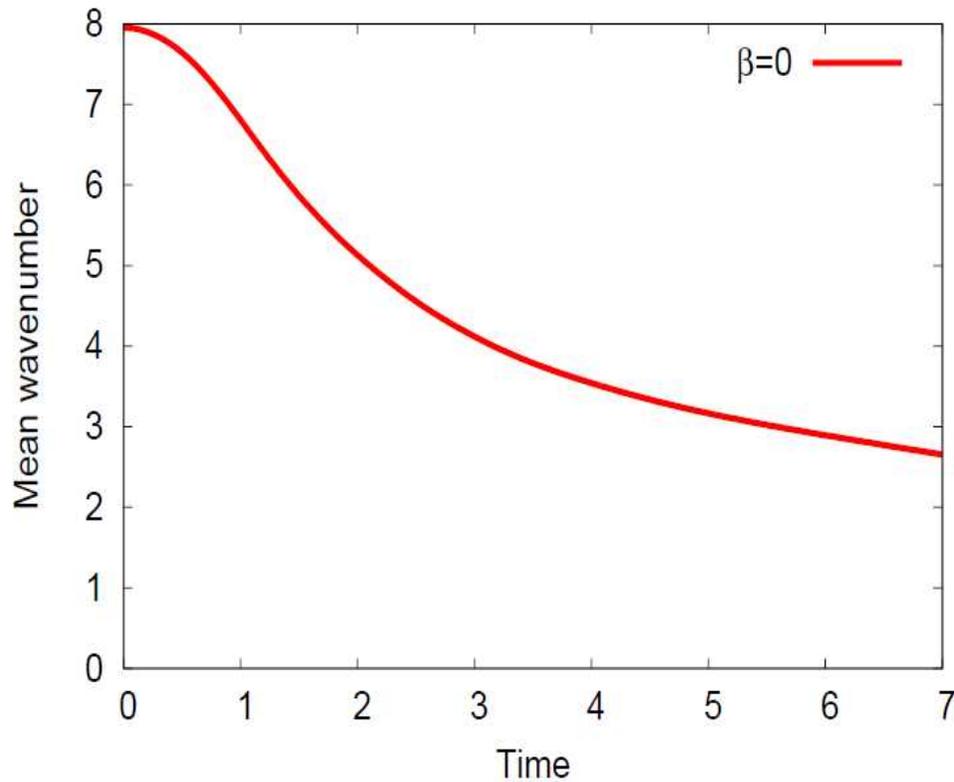


図2: 実験1 ($\beta = 0$) におけるエネルギーで重みをつけた平均波数の時間発展

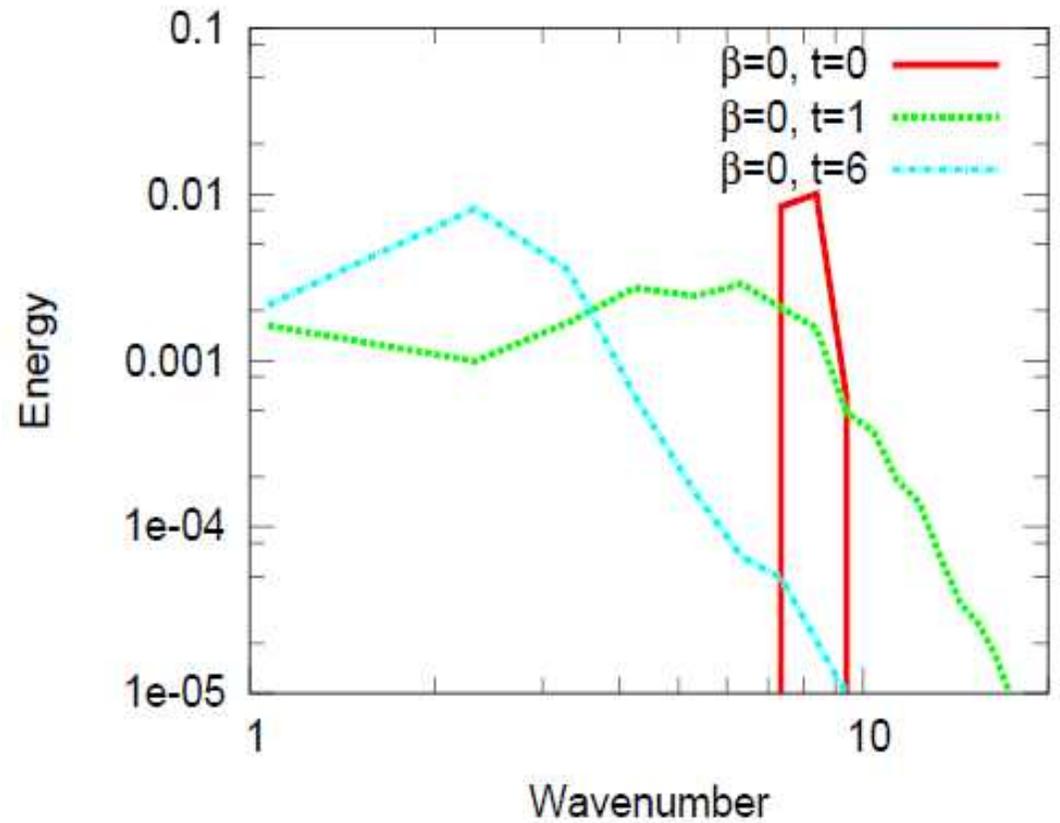


図3: 実験1 ($\beta=0$) におけるエネルギースペクトルの時間発展

7. エネルギーの逆カスケードの抑制

- 図6は β が大きいほどエネルギーの逆カスケードが抑制されていることを示している。(1)式を考える。Uを代表的速度, Lを代表的水平スケールとすると非線形項に対する β 項の比は

$$\frac{\beta v}{v \cdot \text{grad} \zeta} \sim \frac{\beta U}{U(U/L)/L} = \frac{\beta L^2}{U} \quad (3)$$

と書ける。図4に各実験における(3)式の時間発展を示す。

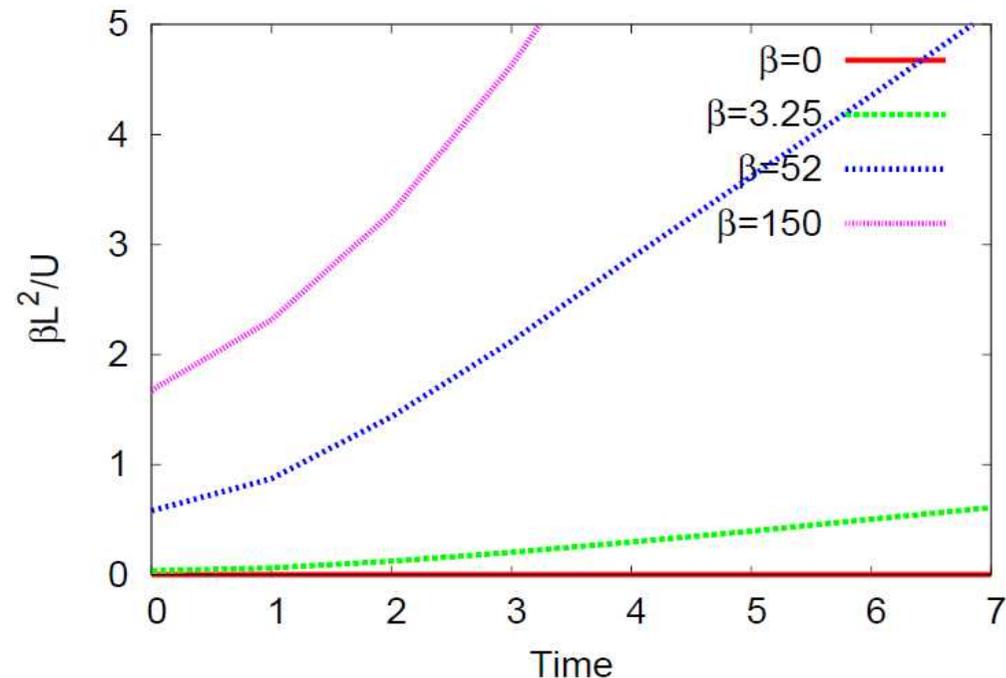


図4:各実験における(3)式の時間発展

8 . エネルギーの逆カスケードの抑制 (2)

- $L^2/U \ll 1$ の場合

- 非線形項が卓越し, 乱流として振舞う.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

- $L^2/U \gg 1$ の場合

- 項が卓越し, 非線形項が無視できるようになり, 乱流としての振る舞いはなくなる. つまりエネルギーの逆カスケードは止まる.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \beta v = 0 \quad (5)$$

この式は線形ロスビー波の式である.

9. 実験3($\beta = 52$)における流線関数

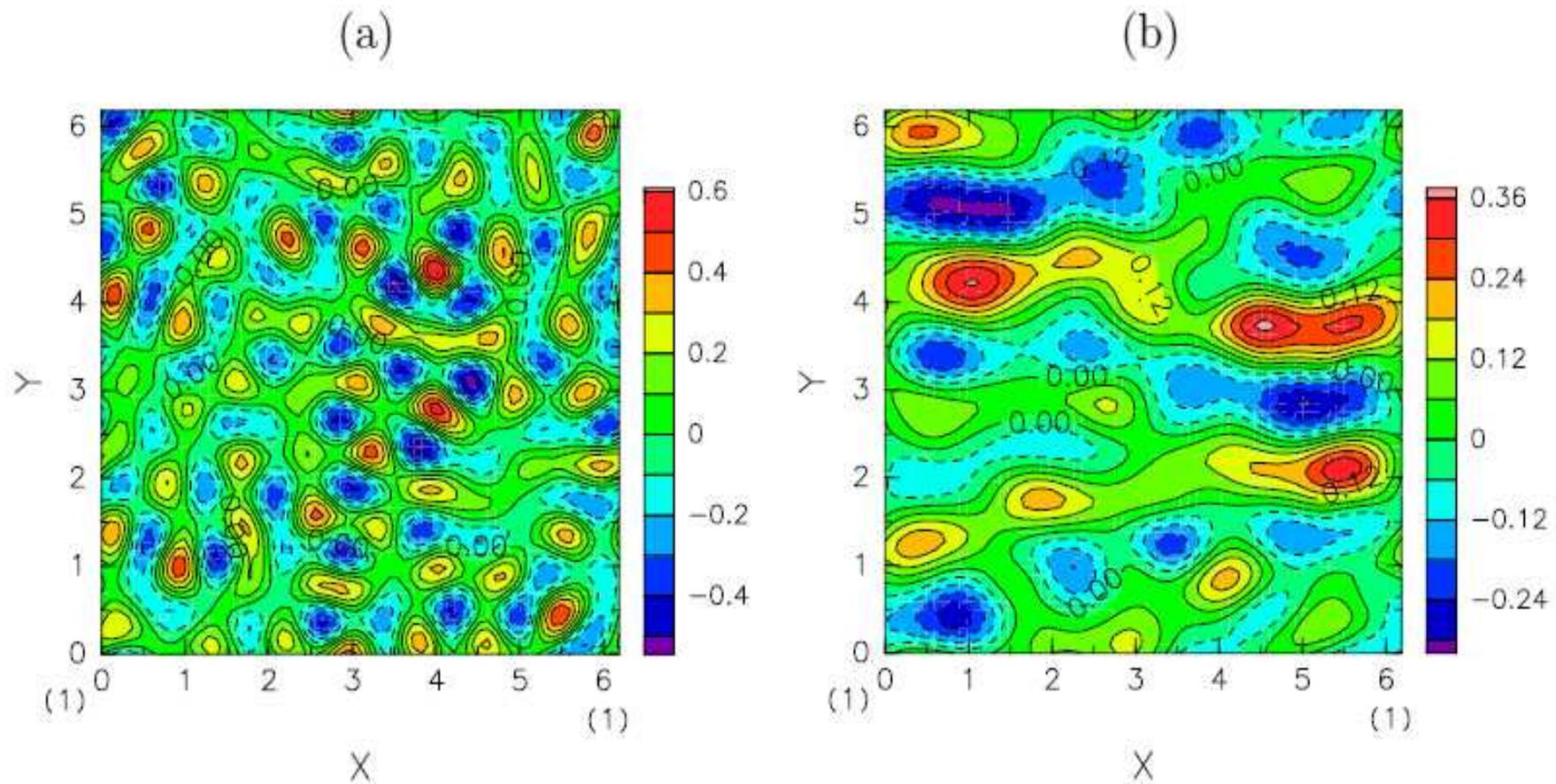


図5: $\beta = 52$ における流線関数. (a) $t = 0$, (b) $t = 7$
図5(b)は図1(b)に比べ擾乱のスケールが小さい, つまり卓越した波数が大きいことを示す.

10. 各実験におけるエネルギーの遷移

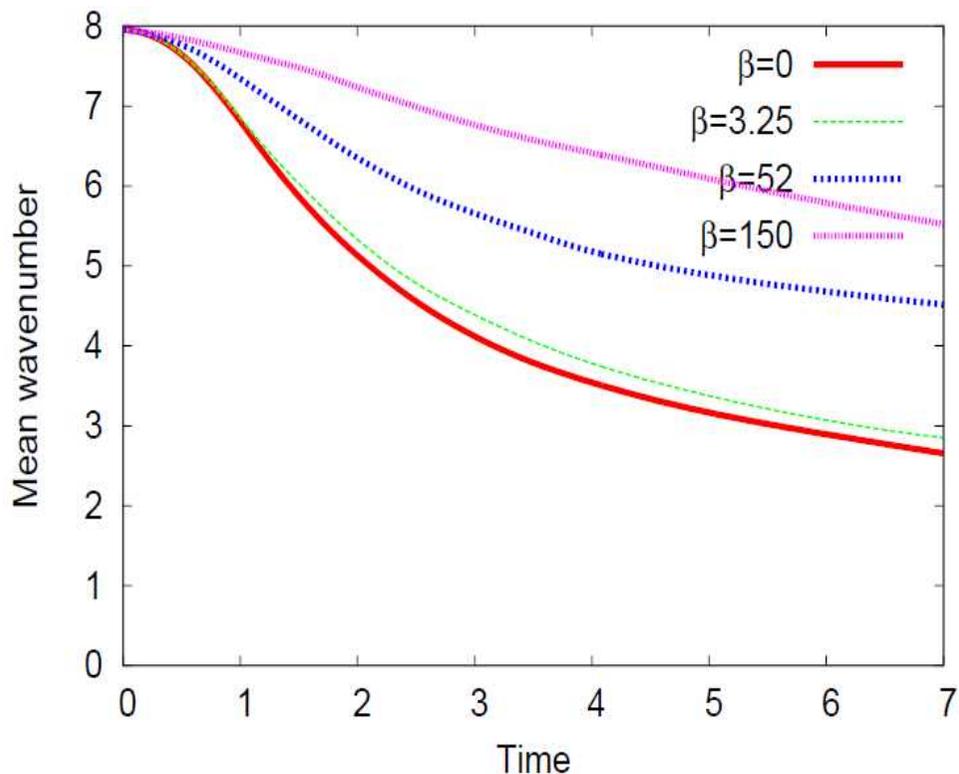


図6:各実験におけるエネルギーで重みをつけた平均波数の時間発展

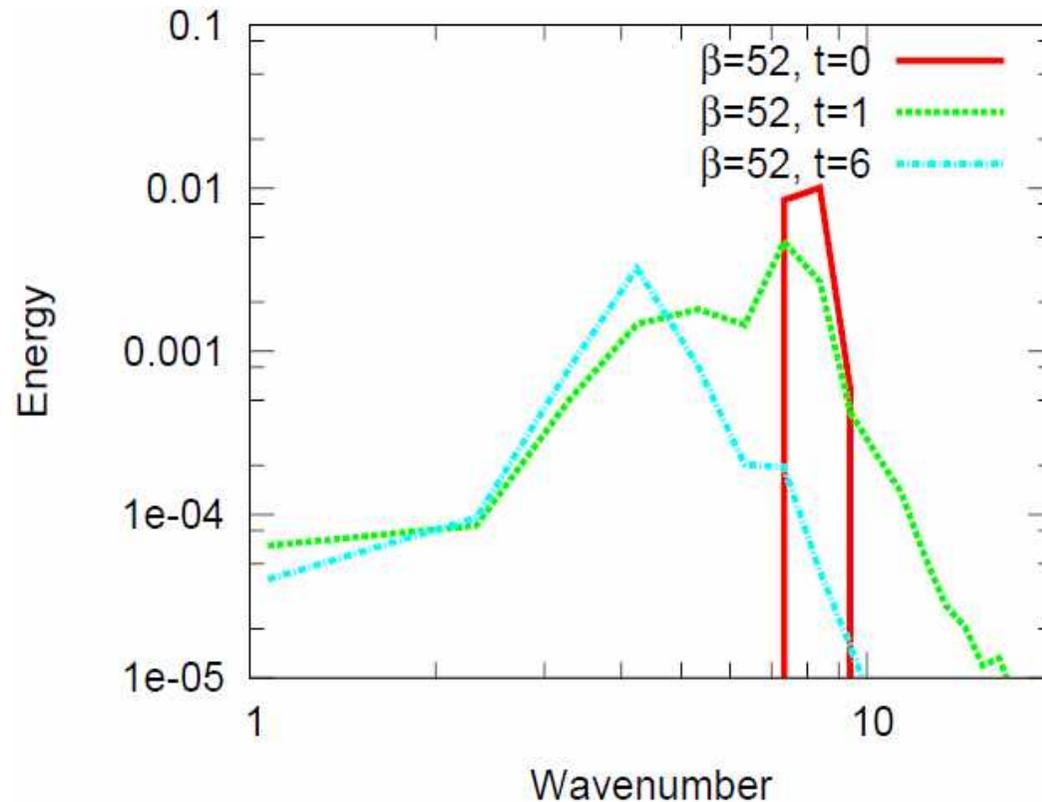


図7: 実験3($\beta=52$)におけるエネルギースペクトルの時間発展
図3に比べ波数のピークが大きい。

1.1. 各実験における流線関数のx-t断面図

- 図8より以下のことがわかる。
 - が存在すると流線関数の位相が西へ伝播している
 - が大きいほど位相の伝播が速い
 - 時間が経つほど位相の伝播が速くなってゆく

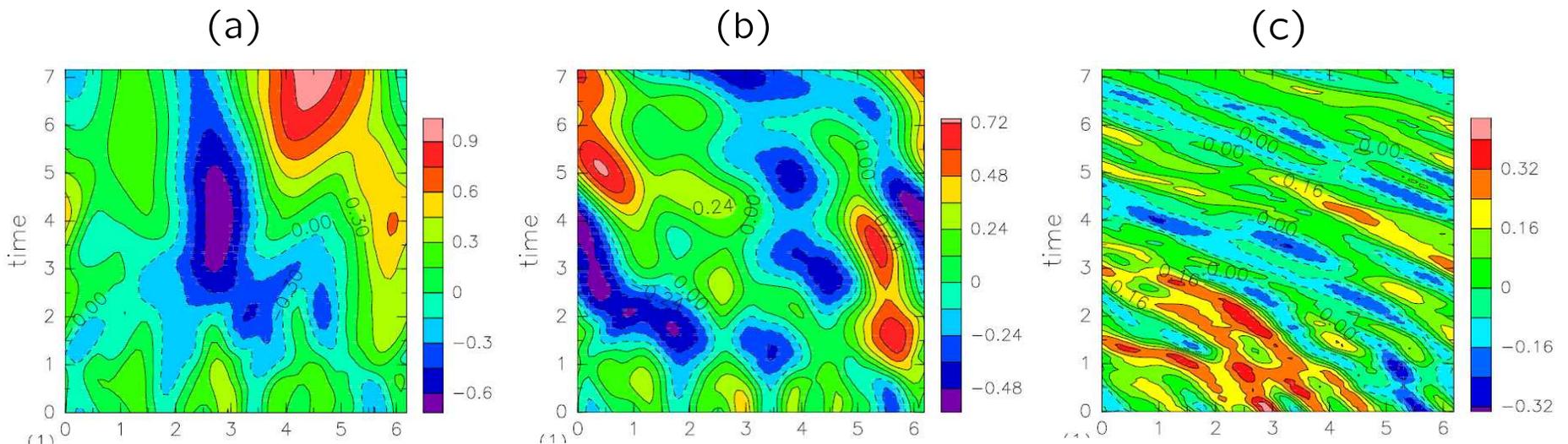


図8:各実験における流線関数の $x-t$ 断面図 ($y = 0$). (a) 実験 1($\beta = 0$), (b) 実験 2($\beta = 3.25$), (c) 実験 3($\beta = 52$)

12. 位相の伝播 (1)

- ψ , σ を考察し, 確かめる. 流線関数を

$$\psi = e^{i(kx+ly-\sigma t)} \quad (6)$$

とおき, (1)式に代入すると, 分散関係は

$$\sigma = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2} \quad (7)$$

となる. よって位相速度は

$$c_x = \frac{\sigma}{K} = -\frac{\beta}{k^2 + l^2} \quad (8)$$

となる. (8)式より以下のことが確認された.

- 分子, 分母がともに正なので位相は西向きに進む
- β が大きいほど位相速度が大きい
- 波数が小さいほど位相速度は大きい

13. 位相の伝播(2)

- 図9に各実験におけるエネルギーの重みをつけた平均波数から求めた位相速度の時間発展と、図8(c)より目測で求めた流線関数の位相速度の時間発展を示す。この図より、 $\beta=0$ 、 $\beta=3.25$ 、 $\beta=52$ 、 $\beta=150$ が確かめられた。

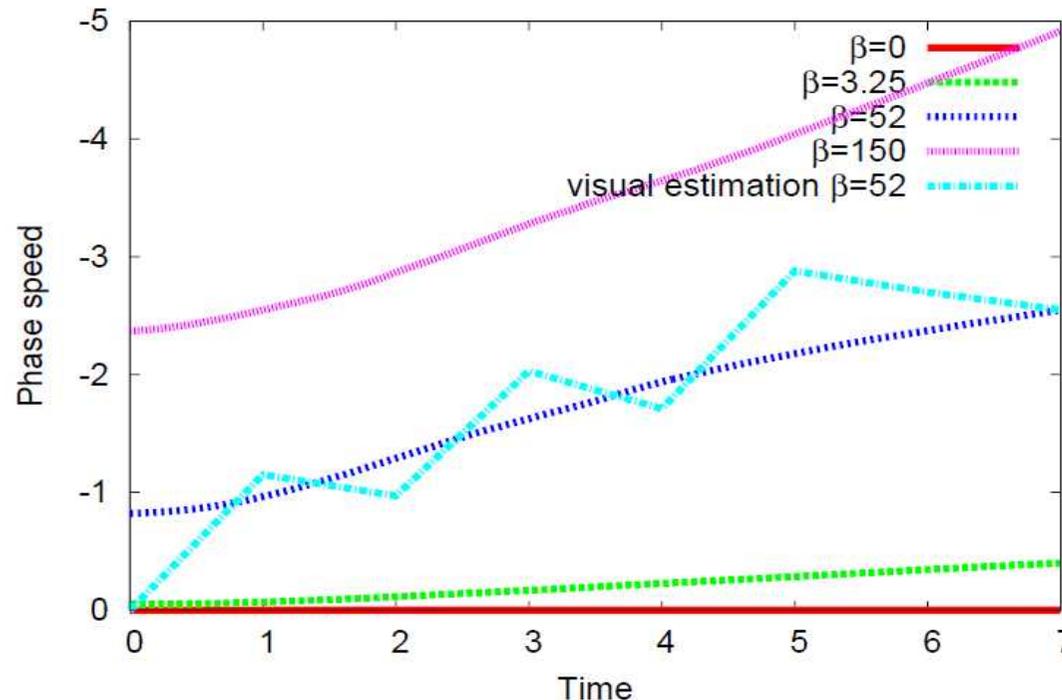


図9:各実験における位相速度の時間発展と図8(c)より目測で求めた実験3($\beta=52$)における位相速度の時間発展

14. 帯状流

- 図10は β が存在する場合, 帯状流ができること, β が大きいほど帯状流の南北スケールは小さいことを示す.

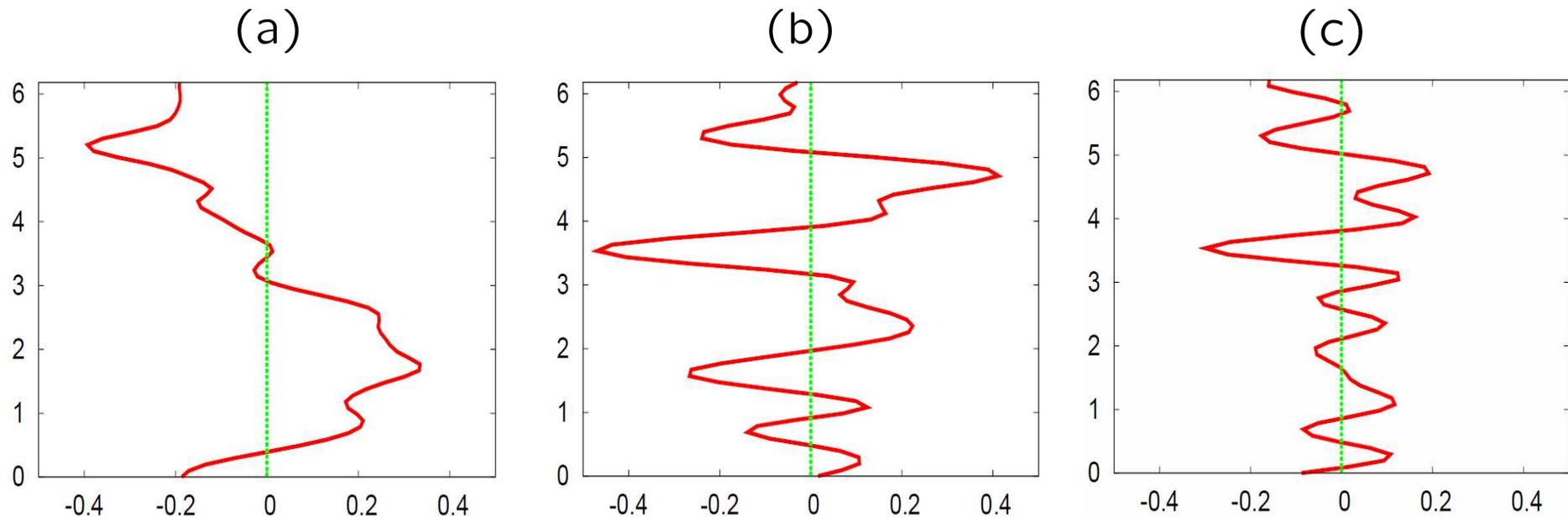


図 10:各実験の $t = 7$ における東西平均風, (a) 実験 1($\beta = 0$),
(b) 実験 3($\beta = 52$), (c) 実験 4($\beta = 150$)

帯状流の南北スケールの平均値 (a) 約 3.14, (b) 約 0.79, (c) 約 0.52

15 . Rhinesスケール

- ここで, Rhines(1975)が示した帯状流の南北スケールを求める式, 現在, Rhinesスケールと呼ばれる式を紹介する. Rhines(1975)はエネルギーの逆カスケードがほぼ止まるスケールとして

$$L_{\beta} = \sqrt{\frac{2U_{rms}}{\beta}} \quad (9)$$

とした. ここで U_{rms} は

$$U_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} (U_i^2)} = \sqrt{2E(k)} \quad (10)$$

である. U_i は各格子点における速度. この式が帯状流の南北スケールを表しているかを調べる. 数値計算の結果, Rhinesスケールは実験3 ($N=52$), $t=7$ のとき約0.87, 実験4 ($N=150$), $t=7$ のとき約0.44となった. 図10よりRhinesスケールは帯状流の南北スケールをほぼ示していることがわかる.

16. まとめ

- 効果が2次元乱流に与える影響として
 - エネルギーの逆カスケードを抑制する
 - 非線形相互作用を弱め, その結果として場の乱流的な振る舞いを弱め, ロスビー波的振る舞いを強める.
 - 帯状流が形成されるなどのことが確認された.
- Rhinesスケールが帯状流の南北スケールを示すことを確認した.

17. 参考文献

- 石岡圭一, 2004: スペクトル法による数値計算入門, 東京大学出版会
- 九州大学大学院総合理工学府大気海洋環境システム学専攻, 2001: 地球環境を学ぶための流体力学, 成山堂書店, 158--193.
- 松田佳久, 2000: 惑星気象学, 東京大学出版会, 169-192.
- Rhines, R. B., 1975: Waves and turbulence on a beta-plane. J. Fluid Mech., 69, 3, 417-- 443.
- 竹広真一, 石岡圭一, 柿並義宏, 西澤誠也, 森川靖大, 小高正嗣, 石渡正樹, 林祥介, SPMODEL 開発グループ, 2005: 階層的地球流体力学スペクトルモデル集 (SPMODEL)

<http://www.gfddennou.org/library/spmodel/>

地球流体電脳倶楽部