

学位論文

H_2O , NH_3 の凝結と NH_4SH の生成反応を考慮した 木星大気の雲対流ならびにその直接数値計算

Moist Convection in Jupiter's Atmosphere with H_2O , NH_3 ,
and NH_4SH Clouds, and its direct numerical simulations

杉山 耕一郎

SUGIYAMA Ko-ichiro

北海道大学大学院理学研究科 地球惑星科学専攻

Division of Earth and Planetary Sciences,
Graduate School of Science, Hokkaido University

2006 年 12 月 申請

要旨

研究の背景と目的

木星大気の雲対流は、地球大気の場合と同様、大気の構造の決定に重要な役割を担っていると考えられている。しかし木星表面の雲層の下を遠隔観測で調べることは困難であり、従来の研究では雲物質の鉛直分布が熱平衡計算によって与えられてきたにすぎない。ガリレオ探査機の大気プローブによる直接探査を経た現在においても、結局 1 地点の観測に過ぎず、木星雲層での運動構造と雲分布はよくわかっていない問題となっている。このような問題に取り組むためには、木星大気中の全ての凝結と化学反応および木星大気の放射過程を考慮した雲対流モデルを開発し、多数の雲の生成消滅が繰り返された結果として決まる木星大気の平均的な大気構造を調べることが必要である。

その第一歩として、本研究では木星大気中で生じる全ての相変化と化学反応が対流運動に及ぼす影響とその相互作用を調べることを目的とする。具体的には、熱平衡状態における木星大気の静的安定度 N^2 の見積もりと、放射を模した一様冷却の下で多数の雲の生成消滅が繰り返された結果として決まる木星大気の平均的な対流運動の鉛直構造と雲の鉛直分布を調べる。

熱平衡計算による成層構造の推定

鉛直 1 次元の熱平衡計算を行うことで、大気運動の特徴を支配する基本的な物理量である静的安定度（浮力振動数の二乗） N^2 の見積もりを行った。地球大気の類推より、木星大気の雲層での N^2 は偽湿潤断熱減率と乾燥断熱減率との差から見積もることとした。

木星大気組成は不確定性が大きいので、ギブス自由エネルギー最小化法を利用した熱平衡計算スキームを開発し、元素の存在度を幅広く変化させた計算を容易に行えるようにした。

その計算スキームを用いて偽湿潤断熱減率を計算し、木星型惑星大気において予想しうる大気組成と大気の鉛直成層構造との関係を明らかにした。木星大気において成層構造の形成に最も寄与する凝結成分は H_2O であるが、 NH_3 の凝結と NH_4SH の生成反応に伴う成層安定度への寄与は H_2O の凝結に伴う成層安定度への寄与に比べ無視できないことを示した。

木星大気の雲層において、Achterberg and Ingersoll (1989) はかつて静的安定度と H_2O モル比とは比例することを指摘した。しかし本研究によると、大気組成を太陽組成の約 5 倍以上とした場合には、その比例関係は成立しないことがわかった。さらに Ingersoll and Kanamori (1995) が SL9 衝突波速度を重力波として説明するのに必要とした N^2 の値は、 H_2O モル比をどれほど増やしても得られないことがわかった。しかし、彼らの考慮しなかった H_2O モル比の増加に伴って成層の厚さが増加する効果を考慮すれば、太陽組成の 15 倍以上程度の H_2O が存在する場合に SL9 衝突波速度を重力波として説明可能であった。

雲対流の直接数値計算

凝結成分の存在度と放射強制を模した一様冷却の大きさをパラメタとし、多数の雲の生成消滅が繰り返された結果として自然に決まる平均的な対流運動の鉛直構造と雲の鉛直分布を数値的に調べた。計算に利用する雲対流モデルは上記の熱平衡計算結果を基に設計した。

基本的に流れ場は H_2O 凝結高度で上下に 2 分され、上部に凝結を伴う湿潤対流領域、下側に凝結を伴わない乾燥対流領域が形成される。この特徴は H_2O の凝結のみ考慮した Nakajima *et al.* (2000) と同じである。湿潤対流領域では、 H_2O 凝結高度から対流圏界面まで達する上昇流が見られ、 H_2O の雲層と NH_4SH の雲層は NH_3 凝結高度を超えて大気上部まで上昇する。凝結成分の存在度を大きくするにつれ、もしくは冷却の大きさを小さくするにつれ、湿潤対流領域での対流活動は間欠的となる。静穏期には冷却が直接働く NH_4SH 生成高度と NH_3 凝結高度付近で局所的に対流が生じ、 H_2O の雲層と NH_4SH の雲層は NH_3 凝結高度の上までは上昇しづらくなる。このような雲の分布の特徴は、3 層の雲が別々の高度領域に分かれて存在するという平衡凝縮モデルの結果に基づいた描像を大きく変えるものである。

流れ場が H_2O 凝結高度を境に鉛直方向に分割される理由は、 H_2O の凝結に起因する強い安定層が形成されるからである。この成層構造の特徴のために、大気上部の乾燥気塊は H_2O 凝結高度よりも下へは下降できない。しかし、凝結成分気体の混合比が十分に少なけ

れば H_2O 凝結高度での安定層の強度は弱くなり、大気上層の乾燥気塊は下部境界付近まで下降できる。実際、凝結成分気体の混合比を太陽組成の 0.1 倍とした計算では、そのような特徴が見られた。これらの結果を基に考えると、ガリレオプローブの観測したような乾燥状態が実現するためには、木星大気中の凝結成分気体の混合比が太陽組成に比べ十分小さいか、もしくは子午面循環や惑星規模の波動に伴う鉛直運動のような本計算では考慮されていないメカニズムの影響を考慮する必要があるだろう。

目次

第 1 章	研究背景と目的	1
1.1	木星表面の雲層の概観	1
1.2	木星の雲対流に関する従来の研究	4
1.2.1	熱平衡計算の結果を基にした雲の鉛直分布	4
1.2.2	ガリレオ探査機による雲の観測	6
	分光観測	6
	直接観測	8
1.2.3	電波観測	8
1.2.4	シューメーカーレビー第 9 彗星の衝突波	9
1.2.5	1 つの雲の生成発達の直接数値計算	11
1.2.6	H_2O の凝結のみ考慮した雲対流の直接数値計算	11
1.3	本研究の目的	13
第 2 章	熱平衡計算による成層構造の推定	15
2.1	はじめに	15
2.2	静的安定度の計算方法	17
2.2.1	ギブス自由エネルギーと平衡組成	19
2.2.2	偽湿潤断熱構造	20
2.3	計算結果	22
2.4	まとめと議論	26
2.4.1	凝結成分が十分少ないという近似の適用範囲	26
2.4.2	SL9 衝突波の位相速度に関する再検討	29
第 3 章	雲対流の直接数値計算	31
3.1	はじめに	31
3.2	雲対流モデルの定式化	33
3.2.1	数値モデルの概要	33

3.2.2	運動方程式・圧力方程式・熱の式・混合比の保存式	33
3.2.3	雲微物理過程のパラメタリゼーション	35
3.2.4	放射強制項の扱い	38
3.2.5	乱流混合のパラメタリゼーション	38
3.2.6	比熱の温度依存性を無視したことの考察	40
3.3	数値実験の概要	43
3.4	標準実験の結果	46
3.4.1	実験の概要	46
3.4.2	対流運動と凝結成分分布の描像	46
3.4.3	流れ場の形成および安定度との関係	48
3.4.4	実験のまとめ	49
3.5	凝結成分の存在量に対する応答実験	55
3.5.1	実験の概要	55
3.5.2	対流運動と凝結成分分布の描像	55
3.5.3	対流活動の時間変化とその要因	68
	5 × solar 実験における対流運動の間欠性の描像	69
3.5.4	実験のまとめ	70
3.6	冷却率の大きさに対する応答実験	75
3.6.1	実験の概要	75
3.6.2	対流運動と凝結成分分布の描像	75
3.6.3	対流活動の時間変化とその要因	84
3.6.4	実験のまとめ	84
3.7	計算領域の大きさに対する応答実験	87
3.7.1	実験の概要	87
3.7.2	対流活動の間欠性の变化	87
3.7.3	実験のまとめ	88
3.8	まとめ	91
第 4 章	まとめと議論	95
4.1	現実の木星大気の大気対流構造に対する示唆	95
4.2	今後の展開に向けて	96
謝辞		99
付録 A	熱平衡計算コードの定式化と離散化	101
A.1	はじめに	101

A.2	RAND 法	102
A.2.1	気相のみの場合	102
A.2.2	多相系の場合	105
A.2.3	負のモル数の回避	107
A.2.4	初期モル数の作成方法	108
A.2.5	RAND 法の例外	109
	1 成分 2 相系の場合	110
	多成分多相系の場合	110
A.3	化学ポテンシャル, エントロピーの計算方法	111
A.3.1	比熱を用いる場合	112
	希ガス	112
	スプライン補間	112
A.3.2	飽和蒸気圧を用いる場合	114
	Antoine 式を利用する場合	114
	AMP 式	115
A.3.3	化学反応の圧平衡定数を用いる場合	116
A.4	飽和蒸気圧の経験式の適用範囲	117
付録 B	静的安定度の定式化	121
B.1	静的安定度の定義	121
B.2	惑星大気の静的安定度の定式化	123
B.2.1	2 成分系での静的安定度の定式化	124
	断熱温度減率	124
	乾燥断熱温度減率	125
	湿潤断熱温度減率	126
	静的安定度	127
付録 C	雲対流モデルの定式化	131
C.1	準圧縮方程式系の導出	131
C.1.1	基礎方程式系	131
C.1.2	基本場と擾乱場の分離	134
C.1.3	水平方向の運動方程式の導出	134
C.1.4	準圧縮系方程式系	135
	鉛直方向の運動方程式の導出	135
	圧力方程式の導出	137

	熱の式の導出	138
	凝結成分の混合比の保存式の導出	138
	まとめ	139
C.2	乱流パラメタリゼーション	140
C.2.1	サブグリッドスケールの運動エネルギー方程式	140
付録 D	雲対流モデルの離散化	145
D.1	離散化の概要	145
D.1.1	格子と変数の配置	145
D.1.2	空間, 時間方向の離散化の方法	145
D.2	空間方向の離散化	146
D.2.1	平均操作	147
D.2.2	空間微分の離散化	148
	2 次精度中心差分	148
	4 次精度中心差分	149
D.2.3	空間離散化した基礎方程式	149
D.2.4	境界条件	151
	周期境界条件の与え方	151
	すべりなし条件の与え方	151
	応力なし条件の与え方	152
D.3	時間方向の離散化	153
D.3.1	運動方程式と圧力方程式	153
	音波に関連する項の時間方向の離散化	154
	音波に関連しない項の時間方向の離散化	159
D.3.2	熱力学の式と混合比の保存式の離散化	161
	湿潤飽和調節法	163
D.3.3	乱流運動エネルギーの式	165
D.3.4	時間フィルター	167
D.3.5	スポンジ層	167
D.4	補遺	169
D.4.1	(D.65) 式の導出	169
D.4.2	湿潤飽和調節法の導出	171
D.4.3	潜熱	172
D.4.4	反応熱	173

付録 E	上昇するサーマルに対する分子量の影響	175
参考文献		177

第 1 章

研究背景と目的

1.1 木星表面の雲層の概観

木星はその質量の大部分が H_2 , He を主成分とするガスに占められ、固体表面は存在しない。「表面」として認識されるのは雲の層である。図 1.1 に示すように、木星表面の雲層にはいくつかの特徴的な模様が見られる。最も目立つ模様は東西に延びる帯状の構造であり、伝統的に白色に見える部分を「帯 (zone)」, 茶褐色にて見える部分を「縞 (belt)」と呼ぶ。帯と縞の中には様々な低気圧性の渦と高気圧性の渦が見られる。低気圧性の渦は周辺に微細かつ変動の激しい波動があり、寿命はせいぜい 2, 3 年である。高気圧性の渦は一般に綺麗な楕円形をしており寿命が長い。大赤斑は代表的な高気圧性の渦である。

帯と縞の中には、木星表面の雲層の下が垣間見られる領域がいくつか存在する。縞の中に見られる積雲の集団 (図 1.1 A) では、表面の雲層の下から湧き上がる雲が観測されている。図 1.2 は積雲の集団の拡大図とそこで観測された雷発光を示す。積雲の集団の大きさは $1000 \text{ km} \sim 4000 \text{ km}$, 平均寿命は 3.5 日である。また、赤道近くの帯の中に見られるホットスポット (図 1.1 B) は雲層が薄いために大気深部からの熱放射が直接観測可能である。

大赤斑や茶褐色の雲の色の原因物質はまだ特定されていない。光化学計算より、赤リン、多硫化物水素、 HCN のポリマー等が考えられているが、観測的に明らかにされているわけではない (Atreya and Romani, 1985)。

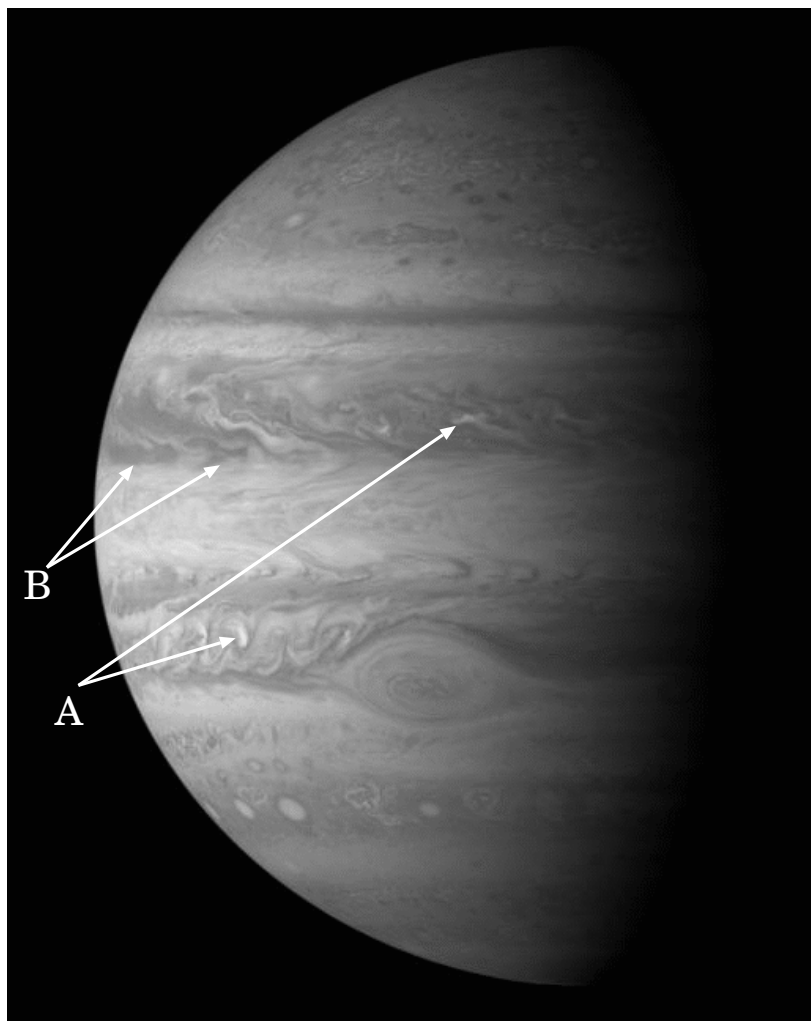


図 1.1 カッシーニ探査機によって撮影された木星。画像には木星の帯と縞、大赤斑、小規模の渦が見られる。北赤道縞と大赤斑の西側には積雲の集団 (A) が見られる。赤道帯にはホットスポット (B) が見られる。NASA photojournal PIA04866 (<http://photojournal.jpl.nasa.gov/>)

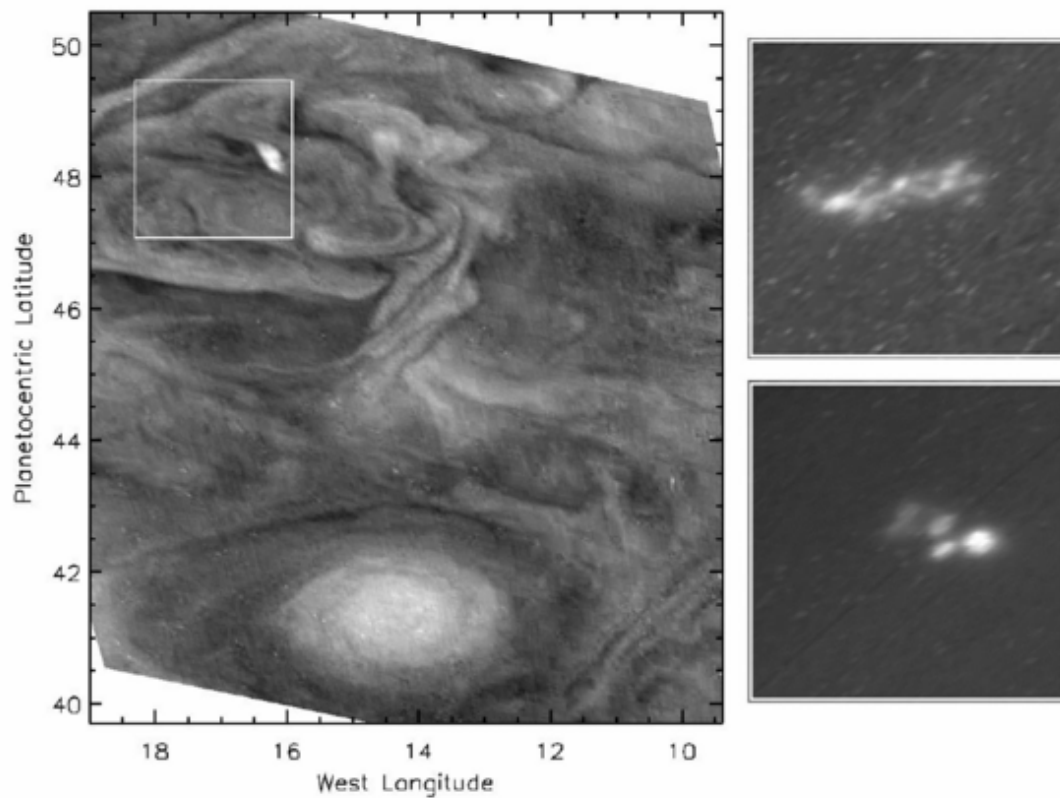


図 1.2 ガリレオ探査機によって観測された対流雲 (左側の囲まれた領域) と, その場所で見られた雷発光 (右側の 2 枚の拡大図). 左側の画像は昼間の観測, 右側は夜間の観測であり, 110 分の間隔をおいて撮影された. NASA photojournal PIA01638 (<http://photojournal.jpl.nasa.gov/>)

1.2 木星の雲対流に関する従来の研究

図 1.2 に示されたような対流雲は木星大気において活発な雲対流、すなわち相変化を伴う対流が生じている証拠であると考えられている。木星大気の雲対流は、地球大気の場合と同様に、大気構造の決定に重要な役割を担っていると考えられている (Gierasch *et al.*, 2000; Ingersoll *et al.*, 2000)。しかし、木星表面の雲層の下を観測的に調べることは困難であるため、木星大気の雲対流によって具体的にどのような対流運動と雲分布が実現しているかに関しては、あまりよくわかっていない。

1970 年代に鉛直 1 次元の平衡雲凝結モデルによって雲の鉛直分布とその組成が理論的に調べられ、その結果を元に表面の雲層の下に組成の異なる雲層が存在するという描像が得られた。この描像は半ば常識とされてきたが、1990 年代後半のガリレオ探査機の観測結果および近年の地上からの電波観測によって、平衡雲凝結モデルの予想から外れた雲の鉛直分布が得られた。さらにガリレオ探査機の大気プローブによって初めて木星大気の鉛直構造の直接観測が行われたが、1 地点の大気構造が観測されたにすぎず、観測された鉛直構造を木星の平均的な鉛直構造と見なせるかという点には疑問がある。また、力学的観点からの研究として、シューメーカー・レビー第 9 彗星の木星衝突の際に見られた衝突波の位相速度から木星大気中の H_2O 存在度を調べる試みが行われたが、その議論にはいくつか問題があり、この試みは成功したとは言い難い。雲解像モデルを用いて放射対流平衡状態として決まる対流運動と雲分布を調べる試みは、 H_2O の凝結のみ考慮した先駆的研究が行われたにすぎない。

本節では、これまで行われた木星大気の雲分布および雲対流に関する研究を俯瞰し、その成果と問題点をまとめる。

1.2.1 熱平衡計算の結果を基にした雲の鉛直分布

光の透過性の問題で、木星表面の雲層の下はほとんど観測することができない。表面の雲層よりも深い場所の雲の鉛直構造は、対流運動の存在と上昇気塊の熱平衡を仮定した「平衡雲凝結モデル」(Equilibrium Cloud Condensation Model; ECCM) によって推定されてきた (Weidenschilling and Lewis, 1973; Atreya and Romani, 1985)。平衡雲凝結モデルでは大気深部での組成を仮定し、大気深部から偽断熱的に上昇する気塊中で生じる凝結

量を評価する。仮定する大気組成は、惑星形成論に基づき、太陽組成に比べ C, N, O, S といった重元素に富んだものとする。なぜならば太陽系の標準形成モデルでは、木星大気は原始太陽系星雲ガスに微惑星の氷や岩石の成分が溶解したものと考えられているからである。

上記の組成を仮定した平衡雲凝結モデルの結果より、木星表面で観測される雲層は NH_3 氷の雲であり、その下には直接観測できないが NH_4SH の雲層と H_2O 氷 (アンモニア水溶液) の雲層が別々の高度領域に存在するという描像が得られた (図 1.3)。

一般に、上昇する気塊において常に熱平衡状態が保たれているわけではなく、また雲の分布は大気の運動と降水などの雲微物理過程によって変化する。そのため現実の木星大気における雲の鉛直分布は平衡雲凝結モデルの結果から外れる可能性が指摘されている (Atreya *et al.*, 1999)。しかし平衡雲凝結モデルの結果から得られた描像は、1970 年代から現在に至るまで、木星大気を理解するための基礎として利用され続けている。

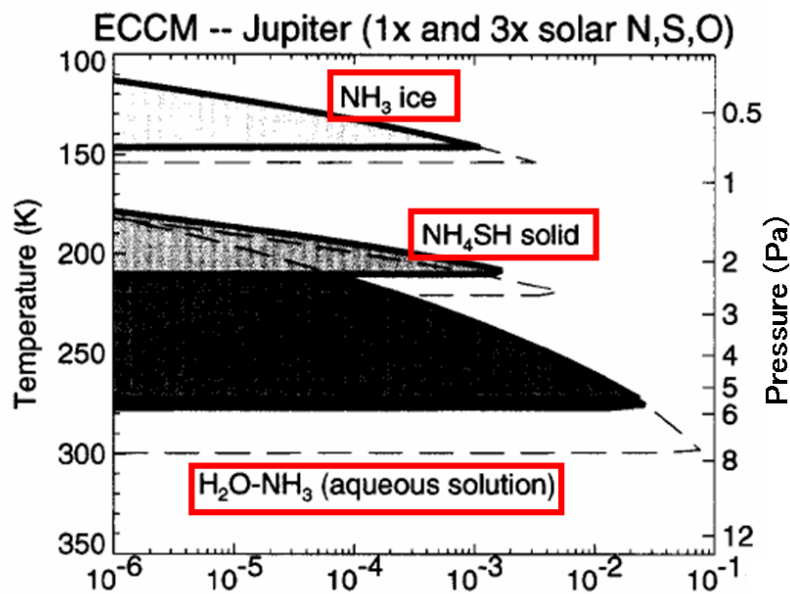


図 1.3 平衡雲凝結モデルより得られた雲密度の鉛直分布。O, N, S の存在度を太陽組成 (Anders and Grevesse, 1989) の 1, 3 倍とする (Atreya *et al.*, 1999 の図 4 より抜粋)。

1.2.2 ガリレオ探査機による雲の観測

1990 年代後半に行われたガリレオ探査機による木星探査では、観測的に雲の鉛直分布とその組成を決める試みが行われた。ここではその観測により、木星の雲に関する知見がどのように発展したかを解説する。

分光観測

木星からの可視および近赤外波長の放射には雲の散乱光が含まれている。いくつかの波長で散乱光強度を測定し、散乱を考慮して放射伝達方程式を解くことで観測結果を再現可能な雲の鉛直分布を探索すれば、木星大気における雲の鉛直分布を決めることが可能となる。Banfield *et al.* (1998) による CCD カメラ (Solid State Imager; SSI) の観測結果の解析では、木星表面の雲層は場所による違いは見られるものの $0.75 \pm 0.2 \times 10^5$ Pa 面高度に存在することが示された。平衡凝結モデルによるとこの高度で凝結するのは NH_3 氷であるため、彼らは表面の雲層は NH_3 氷の雲層であると推定された。その一方で、Irwin *et al.* (2005) による近赤外分光計 (Near-Infrared Mapping Spectrometer; NIMS) の観測結果の解析では、メインの雲層は $1\text{--}2 \times 10^5$ Pa 面高度に存在することが示された。平衡雲凝結モデルによると、この高度で凝結可能なのは NH_3 氷ではなく NH_4SH である。この高度で NH_3 氷の凝結が生じるためには、木星大気中の NH_3 混合比が非常識なほど大きくなければならない。そのため、Irwin らはこのメインの雲層は NH_4SH の雲層か、もしくは未知の H_2O , NH_3 , H_2S から成る化合物の雲層であると推定した。Irwin らの結果は NIMS の観測において純物質としての NH_3 氷が木星表面積の約 1 % しか占めていないこと (Baines *et al.*, 2002) と整合的である。SSI と NIMS の観測結果の解析が互いに異なる原因は、仮定せねばならない雲の濃度や吸収特性などのパラメタが異なるためと考えられている (Irwin *et al.*, 2005)。

SSI の観測ではさらに、大赤斑の近くに見られる雷を伴った積雲の集団が撮像され、大気深部から上昇する雲がとらえられた。図 1.4 は観測した積雲に対する 889 nm (メタンの強い吸収帯) での測定を青色、727 nm (メタンの弱い吸収帯) での測定を緑色、756 nm (吸収が弱い波長帯) での測定を赤色として重ね合わせたものである。889, 727, 756 nm の波長の光は、それぞれ 0.5×10^5 Pa 面高度, 3×10^5 Pa 面高度, 3×10^5 Pa 面高度より下方まで透過するため、図 1.4 において白く見える領域は $p < 0.5 \times 10^5$ に雲が存在する領域、赤く見える領域は $p > 3 \times 10^5$ Pa に雲が存在する領域を意味する。平衡雲凝結モデルに

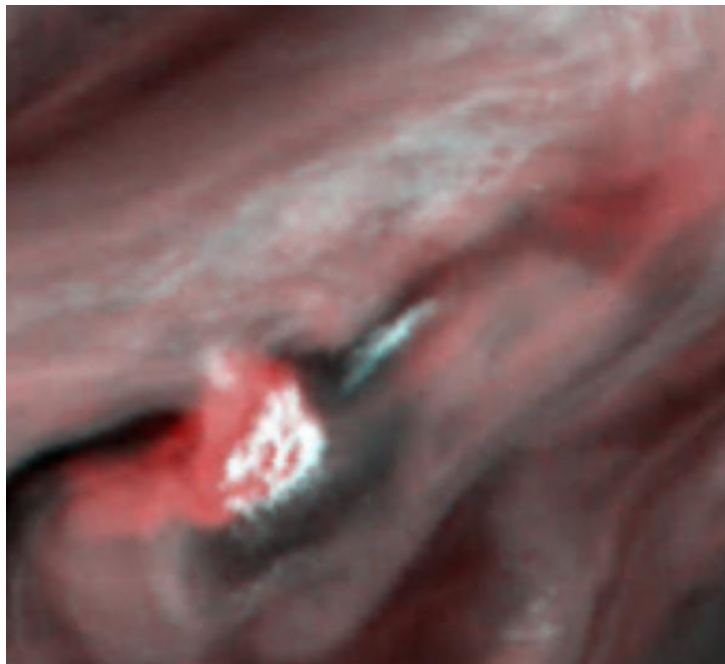


図 1.4 大赤斑の 10,000 km 北西側で見られた雷を伴う対流雲の疑似カラー画像. 対流雲の大きさは約 1,000 km である. この疑似カラー画像は, 3 種類の近赤外のフィルターを用いて撮像した画像を RGB 合成したものである. NASA photojournal PIA01639 (<http://photojournal.jpl.nasa.gov/>)

よると $p > 3 \times 10^5$ において凝結するのは H_2O であるため, 図 1.4 で赤く見える積雲は H_2O から成り, 潜熱の開放に伴う強い上昇流によって表面の雲層の上まで上昇すると解釈された (Banfield *et al.*, 1998; Gierasch *et al.*, 2000). 雷は, 地球大気の場合と同様に, H_2O 氷の雲粒の電荷分離によって生じると推測された.

平衡雲凝結モデルに基づいた雲の鉛直分布の描像では表面の雲層は NH_3 氷の雲と考えられていた. しかし Irwin *et al.*, (2005) による NIMS の観測結果の解析が正しいとすると, 表面の雲層は NH_3 氷から成るのではないということになる. ガリレオ探査機の分光観測によって, 表面の雲層の組成が改めて大きな謎として提示されることとなった. さらに, SSI の観測から得られた積雲の発達に伴って H_2O 氷の雲が表層の雲層の上まで上昇するという描像は, 表層の雲の下に NH_4SH と H_2O 氷の雲層が別々の高度に分かれて存在するという平衡雲凝結モデルの結果に基づく描像とは異なる.

直接観測

ガリレオ探査機の大気プローブは木星大気に初めて突入し、雲粒子と凝結成分気体の混合比を初めて直接観測した。ガリレオプローブに搭載された雲解析計 (Nephelometer) によると、 $0.46\text{--}0.55 \times 10^5$ Pa 面高度領域に希薄な雲、 $1.0\text{--}1.34 \times 10^5$ Pa 面高度において薄い雲、さらに 1.6×10^5 Pa 面高度に希薄な雲が検知された (Ragent *et al.*, 1998)。 $1.0\text{--}1.34 \times 10^5$ Pa 面高度の雲は NH_4SH の雲と考えられている。 $0.46\text{--}0.55 \times 10^5$ Pa 面高度領域の雲は NH_3 氷の雲層の下部を捉えたものではないかと考えられており、このことは正味放射計 (Net Flux Radiometer; NRF) の観測 (Sromovsky *et al.*, 1998) と整合的である。雲解析計の測定した予期せぬ雲構造は、ガリレオプローブ質量分析計 (Galileo Probe Mass Spectrometer; GPMS) やその他の測器の観測によって検出された大気上部において凝結成分気体が平衡雲凝結モデルの予想より非常に少ない状態とは整合的である。

GPMS の観測によると、大気深部では凝結成分気体は豊富に存在する (Niemann *et al.*, 1998; Atreya *et al.*, 1999)。 NH_3 と H_2S の混合比はそれぞれ 8×10^5 Pa, 16×10^5 Pa 面高度まで増加を続け、太陽組成 (Anders and Grevesse, 1998) のそれぞれ 3.5 倍、2.5 倍の値に漸近する。この漸近値は雲層高度以下の木星大気を代表する値と考えられる。その一方で H_2O の混合比は観測された最も深い深度でも増加を続けており、 2×10^6 Pa 面高度での混合比は太陽組成の 0.3 倍程度であった。もっと深い場所では H_2O の混合比も漸近値に達すると想像されているが、その値は不明のままである (図 1.5)。

直接観測の結果が平衡雲凝結モデルの予想から大きく外れた原因は、プローブの落下点が「ホットスポット」と呼ばれる木星でも特に雲の少ない領域であったためと考えられている。Showman and Ingersoll (1998) は、ホットスポットには局所的な下降流が存在し、凝結成分気体が大気深部に押し下げられていると考えた。しかし乾燥した気塊を 2.0×10^6 Pa 面高度まで下降させる具体的なメカニズムは未解明であるし、木星大気の平均的な鉛直大気構造も未知のまま残ってしまった。

1.2.3 電波観測

ミリ波およびサブミリ波は NH_3 の吸収帯に重なる。この波長で輝度温度を測定し、観測結果を再現可能な NH_3 の鉛直分布の探索を行うことで、木星大気の数気圧面高度までの NH_3 存在度を推定することが可能となる。de Pater *et al.* (2001), Gibson *et al.* (2005)

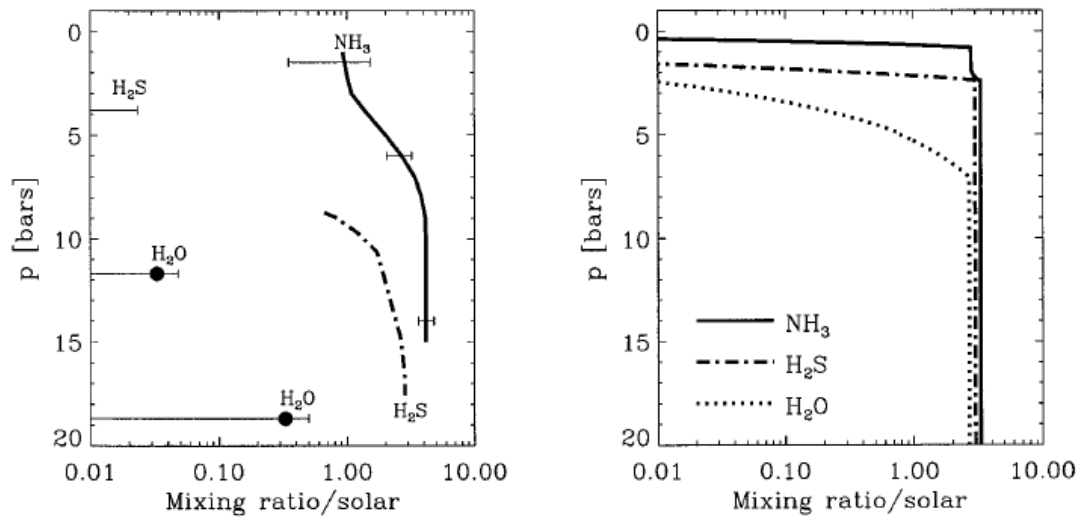


図 1.5 NH_3 , H_2S , H_2O 存在度の鉛直分布. (左) ガリレオ探査機の大気プローブの観測. (右) 平衡雲凝結モデルの結果 (Showman and Ingersoll, 1998 の図 1 より).

はこれまでに測定されたミリ波およびサブミリ波の波長での輝度温度から木星大気深部の NH_3 混合比を見積もった. 彼らは表面の雲層の下に相当する $0.6 - 2 \times 10^5$ Pa 面高度において NH_3 混合比は全球的に太陽組成の半分程度という結果を得た. 平衡雲凝結モデルの結果から考察すると, $0.6 - 2 \times 10^5$ Pa 面高度において NH_3 の存在度を減少させるためには $\text{NH}_3 + \text{H}_2\text{S} \rightarrow \text{NH}_4\text{SH}$ の化学反応が生じれば良い. そのため彼らは従来の予想に比べ H_2S が豊富に存在し, NH_3 は主に NH_4SH として凝結していると予想した.

de Pater *et al.* (2001), Gibson *et al.* (2005) らの結果は 1.2.2 節で述べた Irwin *et al.* (2005) の結果と整合的である. 電波観測からも表面の雲層の組成は大きな謎として提示されることとなった.

1.2.4 シューメーカーレビー第 9 彗星の衝突波

1994 年, 木星に接近したシューメーカーレビー第 9 彗星 (以下 SL9 彗星) は潮汐力によって破壊され, その分裂核は木星に衝突した. 衝突自体は地球から見て木星の裏側で起きたために直接観測することはできなかったが, 衝突によるリング状のパターンが観測された (図 1.6). Ingersoll *et al.* (1994) は, H_2O 雲の凝結に伴う成層に捕捉された内部重力波が衝突により励起される可能性があり, その速度から木星大気深部における H_2O の存在度が推定できると議論した. Ingersoll and Kanamori (1995) は Achterberg and Ingersoll

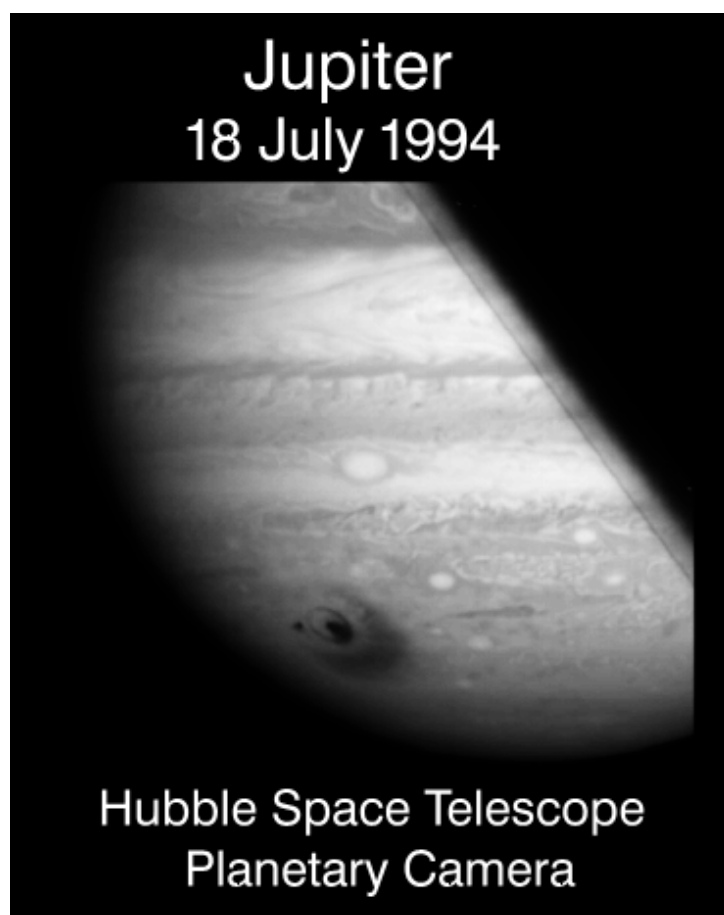


図 1.6 ハッブル宇宙望遠鏡の撮影した SL9 の D 核と G 核の衝突痕. リング状の衝突痕は G 核の衝突によるものであり, 衝突痕の中心から左側に見られる小さな黒く見える点は D 核の衝突痕である. D, G 核はそれぞれ 1994 年 7 月 17, 18 日に衝突した. <http://www2.jpl.nasa.gov/sl9/> より取得.

(1989) で見積もられた静的安定度の大きさと H_2O 存在度との比例関係の成立を仮定し, 木星大気中に太陽組成 (Anders and Grevesse, 1989) の 10 倍の H_2O が存在するならば, SL9 衝突波の位相速度 (450 m/s) を内部重力波として説明可能であると結論づけた.

SL9 彗星の衝突波の伝播速度の解釈としては, 他にも対流圏上部の低温層に捕捉された音波 (Kanamori, 1993), 成層圏を伝播する重力波 (Harrington *et al.*, 1994) とする説がある. これらが正しいとするならば, 深部の大気構造については何の情報も与えられないことになる. また, 衝突時に観測されたリング状のパターンはその存在する高度, すなわち NH_3 雲層の付近の成層に最も強く支配されると考えられるが, その高度領域での重力波の位相速度はほとんど調べられていない. 以上のような問題があり, SL9 彗星の衝突波から木星大気の鉛直構造を探る試みは成功したとは言い難い状況にある.

1.2.5 1つの雲の生成発達の直接数値計算

計算機の発展に伴い、1990年代から木星大気中での鉛直運動と凝結成分の雲微物理過程を陽に扱った数値流体モデル研究が行われるようになってきた。それらの研究のほとんどは、都合の良い初期条件の下で1つの雲の生成消滅を調べることを目的としている。Yair *et al.* (1992) らは2次元軸対象雲モデルを用いて H_2O 雲の生成発達過程を調べた。彼らのモデルは後年に改良され、木星における水雲の構造と雷発光を評価するために、圧力の擾乱項および詳細な微物理過程が取り入れられた (Yair *et al.*, 1995, 1998)。Yair *et al.* (1998) は、ガリレオプローブが観測したような H_2O 混合比の少ない条件では、雷発光の生じるような強い積雲は発達しないことを示した。Hueso and Sanchez-Lavega (2001) は3次元の雲対流モデルを用いて H_2O と NH_3 の凝結を考慮した対流雲の生成発達過程を調べた。彼らは、ガリレオプローブが観測したような H_2O 混合比の少ない条件においても、適当な水平風速の鉛直シアが存在すれば H_2O 氷の雲が大気上層まで達する強い積雲が発達することを示した。Hueso and Sanchez-Lavega (2001) の結果が Yair *et al.* に比べて雲が発達しやすい理由は、用いた雲微物理過程のパラメタリゼーションと環境場として設定した温度圧力条件が、対流の発達に有利だからである (Hueso and Sanchez-Lavega, 2001)。

これまでの雲対流モデル研究では、木星大気の大きな特徴である3種類の凝結成分の全てを考慮されておらず、それぞれの凝結成分による雲の生成消滅およびそれらの雲同士の相互作用は今後の課題となっている。さらに、これらの研究において、上昇域と下降域を合わせた平均的な大気構造がどのように定まるかについては調べていない問題である。

1.2.6 H_2O の凝結のみ考慮した雲対流の直接数値計算

木星大気の鉛直構造は基本的には雲対流の結果、すなわち放射による熱輸送と多数の対流雲による熱・物質輸送の相互作用の結果として統計的に決まる放射対流平衡状態、として定まるはずである。従って、従来の研究のように熱力学平衡状態や放射過程を独立に研究するのではなく、放射の効果を取り入れつつ多数の対流雲の生成消滅を長時間計算することで、雲の振る舞いのみならず、木星大気の鉛直構造が求められるはずである。放射対流平衡の観点からの先駆的な雲対流計算として Nakajima *et al.* (2000) がある。得られた対流は「二階建て対流」であり、水の凝結に起因する強い成層を持った境界層が形成され、乾燥

空気に対して安定成層した上部の湿潤対流領域と下部の乾燥対流領域とが分離されて存在するという構造を示唆した

しかしながら、彼らの用いた数値モデルには凝結成分として H_2O しか考慮されていない、系に与えた放射冷却を模した一様冷却が現実的な強度に比べて 2 桁程度大きい、という 2 つの問題があったため、計算結果と現実との定量的な対応付けは困難であった。

1.3 本研究の目的

前章で述べたように、従来の木星大気の力学・放射・熱力学的考察は、主としてそれぞれを専門とする研究者によって独立に研究されてきた。力学的研究の多くは基本となる温度圧力条件と成層構造を仮定したものであり、内在的にそれらを決定していない。雲の鉛直分布の研究は熱力学平衡を仮定したものであり、凝結成分の鉛直分布が力学的に保障されたものではない。放射研究は観測を説明するためのものであり、運動構造と結合しているわけではない。このような問題に取り組むためには、木星大気中の全ての凝結と化学反応および木星大気の放射過程を考慮した雲対流モデルを開発し、多数の雲の生成消滅が繰り返された結果として決まる木星大気の平均的な大気構造を調べることが必要である。

その第一歩として、本研究では木星大気中で生じる全ての相変化と化学反応が対流運動に及ぼす影響とその相互作用を調べることを目的とする。具体的には、熱平衡状態における木星大気の静的安定度 N^2 の見積もりと、放射を模した一様冷却の下で多数の雲の生成消滅が繰り返された結果として決まる木星大気の平均的な対流運動の鉛直構造と雲の鉛直分布を調べる。凝結成分は潜熱・反応熱の解放と気塊の分子量変化を通じて流れ場に影響を与えるが、その影響は成層の強度の目安である静的安定度 N^2 (浮力振動数 N の自乗) を通じて現れる。1.2.4 節で述べたように、 N^2 は重力波の位相速度を見積もりに必要な情報である。また 1.2.6 節で述べたように、 N^2 の値の大きな強い成層は対流運動の鉛直構造に大きな影響を与える。しかしながら、凝結成分の存在度を広く変化させた場合に N^2 が取りうる大きさ、および NH_3 の凝結と NH_4SH の生成に伴う N^2 の大きさはよく調べられてこなかった。さらに雲の生成消滅を陽に計算する数値流体モデル (雲対流モデル) 研究においても、内在的に木星大気で生じうる全ての相変化と化学反応に伴う成層構造を表現可能な数値モデルの開発とそれを用いた数値計算は行われてこなかった。

本論文では、第 2 章において、木星大気中で生じる全ての相変化と化学反応が対流運動に及ぼす影響を調べることを目的として、木星大気の静的安定度 N^2 の見積もりを行う。Achterberg and Ingersoll (1989) と同様に、平均的な大気構造を熱平衡状態として与え、乾燥気塊の上下運動に対する安定性を見積もる。計算を行う際には凝結成分として H_2O 、 NH_3 、 H_2S を考慮する。また、それらの凝結成分の存在度と N^2 の最大値との依存関係も合わせて調べる。第 2 章の内容は基本的に Sugiyama *et al.* (2006) の内容となっている。第 3 章においては、木星大気中で生じる全ての相変化・化学反応と対流運動との相互作用によって決まる平均的な大気構造を調べることを目的とし、雲対流の直接数値計算を行う。

Nakajima *et al.* (2000) と同様, 放射を模した一様冷却の下で多数の雲の生成消滅が繰り返された結果として決まる木星大気の平均的な大気構造を調べる. 第 4 章において, 得られた結果から示唆される現実の木星大気の平均的な大気構造についてまとめ, 今後の展開を述べる.

第 2 章

熱平衡計算による成層構造の推定

2.1 はじめに

静的安定度 N^2 (または浮力振動数 N) は成層流体としての大気の運動を議論する際に必要となる基本パラメタの 1 つである。木星型惑星においては複数の成分が凝結に関与し、それに付随する潜熱の放出は複雑な静的安定度をもった大気構造をもたらす可能性がある。ところが、まさに複数の成分が凝結するというその理由によって、大気の力学的な構造を研究しようとする際に必要な熱力学的考察が十分に行われて来なかった。

従来の研究において, Achterberg and Ingersoll (1989) は木星大気対流圏の浮力振動数の最大値, および浮力振動数の最大値と H_2O の存在度との関係を調べた。彼らは木星表層のアンモニア雲より下層の温度減率は偽湿潤断熱減率に等しいと仮定し, さらに浮力振動数は湿潤断熱減率と乾燥断熱減率の差から見積もれると仮定した。彼らは H_2O モル比 $x_{\text{H}_2\text{O}}$ が太陽組成の近傍, すなわち $x_{\text{H}_2\text{O}} = 1.0 \times 10^{-4}$ から 5.0×10^{-3} の範囲では, N^2 の大きさは H_2O モル比に比例すると結論づけた。この比例関係を仮定し, Ingersoll and Kanamori (1995) はおおよそ $x_{\text{H}_2\text{O}} = 1.5 \times 10^{-2}$ ならば, SL9 衝突波速度を木星大気対流圏の雲対流にともなう安定成層に捕捉された内部重力波として説明することができると主張した。この $x_{\text{H}_2\text{O}} = 1.5 \times 10^{-2}$ というモル比は, O の存在度が太陽組成[†]の 10 倍の時の値である^{*1}。しかしながら, 彼らの研究において調べられた木星大気の静的安程度 N^2 の大きさは H_2O の凝結に起因するものだけであり, NH_3 の凝結と NH_4SH の生成に

^{*1} Ingersoll and Kanamori (1995) で用いられている太陽組成は Anders and Grevesse (1989) の値であり, Asplund *et al.* (2005) の値ではない。本節において「太陽組成[†]」は, Anders and Grevesse (1989) の太陽組成を意味する。

伴う N^2 の大きさはよくわかっていない。また、凝結成分の存在度は太陽組成と同程度と仮定されており、凝結成分の存在度に対する N^2 の依存性については調べられていない。

本研究では Achterberg and Ingersoll (1989) と同様に、偽湿潤断熱的な密度分布を持つ大気中を乾燥断熱的に鉛直運動する気塊を考え、気塊と周囲の大気の密度差から静的安定度の値を見積もる。そして凝結成分存在度を広く変化させた計算を行うことで、 H_2O 、 NH_3 の凝結と NH_4SH の生成に伴う N^2 の大きさを見積もり、 N^2 の大きさの凝結成分存在度に対する依存性を調べることを目的とする。

2.2 静的安定度の計算方法

地球大気の大気圏の知見 (例えば Gill, 1982) からの類推として, 木星大気の平均的な大気構造は偽湿潤断熱的であると仮定する. さらに偽湿潤断熱的な密度分布を持つ大気中を上下運動する気塊を考え, 大気密度と気塊の密度の差から気塊の上下運動に対する安定性を見積もることとする (図 2.1 参照). この時, 静的安定度は以下のように表される.

$$\begin{aligned} N^2 &\equiv \frac{g}{\rho^*} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\partial \rho^*}{\partial z} \right) \\ &\approx \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \frac{Mg}{c_p} \right) - \frac{g}{M} \frac{dM}{dz}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここで ρ は密度, g は重力加速度, M は平均分子量, c_p はモル当たりの平均比熱である. 添え字 * は大気中に置かれた気塊を意味する. なお式変形には理想気体の状態方程式を用いた. 定式化の詳細は付録 B 章を参照のこと. ^{*2}

(2.1) 式を計算する際に必要となる偽湿潤断熱線に沿った温度変化 dT/dz と分子量変化 dM/dz は, 従来の研究ではクラウジウス-クラペイロンの式から計算しているが (Weidenschilling and Lewis, 1973; Atreya and Romani, 1985; Achterberg and Ingersoll, 1989), 本研究では惑星大気一般に広く利用可能なギブス自由エネルギー最小化法を用いて計算することにした. なぜならば, クラウジウス-クラペイロンの式を組み立てるためには, 大気中で独立して生じ得る化学反応を全て知っている必要があるが, 化学反応を特定することは一般的に簡単なことではない. さらに, 水溶液が存在する場合には, 溶液濃度と温度・圧力の関係式が別途必要となるからである. ギブス自由エネルギー最小化法を用いれば, 大気中で生じ得る化学反応を全て特定せず, 溶液濃度と温度・圧力の関係式がなくとも, 偽湿潤断熱線に沿った温度と組成の分布を得ることが可能となる. ギブス自由エネルギー最小化法を用いる場合, まず温度と圧力に対する平衡組成を計算し, 次にエントロピーが保存する温度と圧力を探索するという 2 段階の手順を踏む必要があるため, 以下ではそれぞれの手順を示す.

^{*2} (2.1) 式で定義された静的安定度は, 比熱の表現が Achterberg and Ingersoll (1989) の場合と若干異なる. 本研究ではある圧力高度における湿潤気塊の比熱を用いるのに対し, Achterberg and Ingersoll (1989) は乾燥気塊の比熱を用いた. Achterberg and Ingersoll (1989) が乾燥気塊の比熱を用いたのは, 彼らは木星型惑星大気中の凝結成分存在度は十分小さいと仮定したためである. 実際, Achterberg and Ingersoll (1989) の用いた凝結成分存在度のパラメータ範囲において, 本研究で得られた静的安定度の値は彼らの得た値にほぼ等しい.

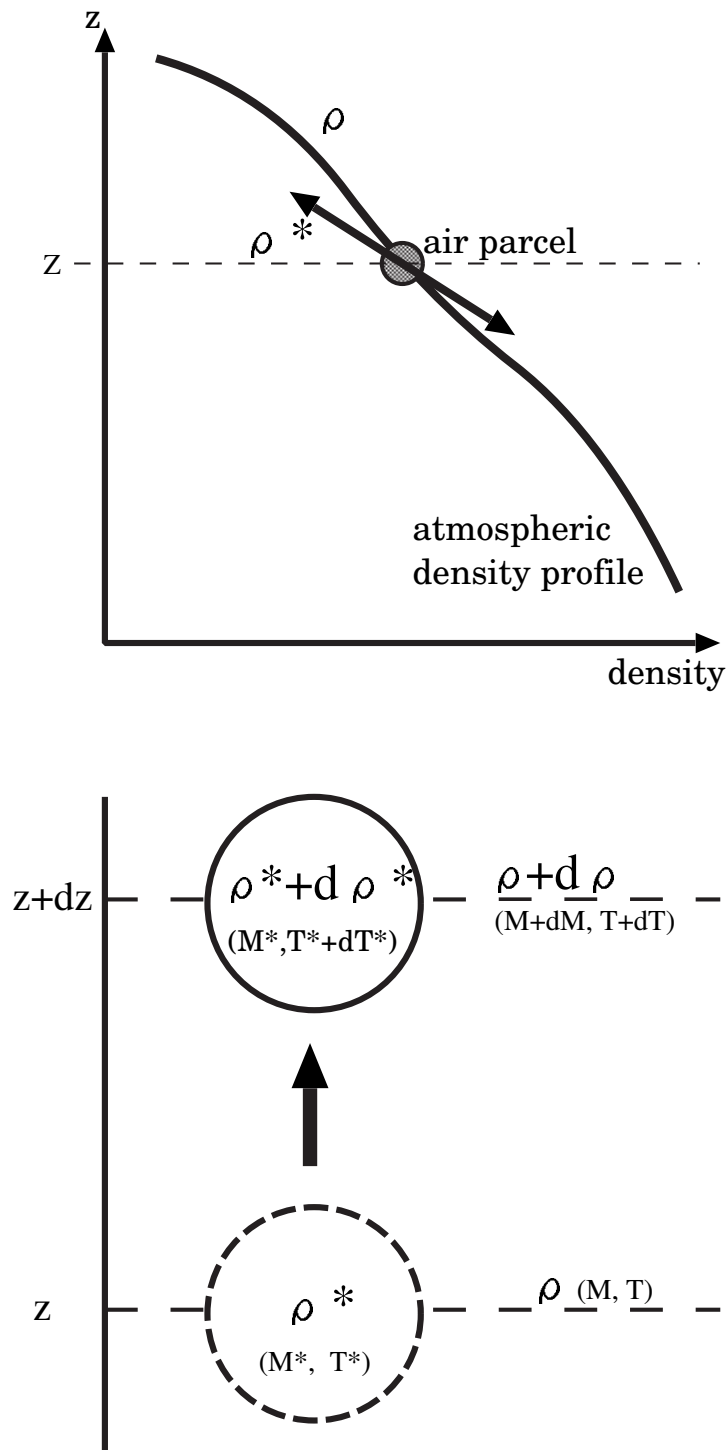


図 2.1 静的安定度の見積もり方の概念図。(上段) 偽湿潤断熱的な大気中に気塊を設定し、気塊の上下運動を考える。大気の密度を ρ 、気塊の密度を ρ^* で示す。気塊が上昇した際に $\rho - \rho^* < 0$ となるならば気塊は元の位置に戻ろうとするので、その運動を単振動 $\delta z = \sin Nt$ で表わす。ここで N はブラントバイサラ振動数、 N^2 は安定度となる。(下段) 気塊の上下運動の拡大図。高度 z において $\rho = \rho^*$ とする。また気塊中の分子量 M^* は変化しないものとする。このとき、高度 $z + \Delta z$ での N^2 は気塊と周囲の大気の密度差によって決まる。

2.2.1 ギブス自由エネルギーと平衡組成

熱力学平衡状態にある大気を考え、温度と圧力を与えた場合の大気の平衡組成を計算する。このときの平衡組成は元素数保存の条件の下でギブス自由エネルギー G を最小化するような組成として得られる。理想気体と理想溶液を仮定すると G は以下のように表される。

$$G(T, p) = \sum_i \sum_{\phi} n_i^{\phi} \mu_i^{\phi}(T, p, n_i^{\phi}), \quad (2.2)$$

$$\mu_i^{\phi}(T, p, n_i^{\phi}) = \mu_i^{\circ\phi}(T) + RT \ln x_i^{\phi} + \delta_{1\phi} RT \ln p/p_0, \quad (2.3)$$

ここで T は温度、 p と p_0 はそれぞれ圧力とその基準値、 n_i^{ϕ} と $x_i^{\phi} \equiv n_i^{\phi} / \sum_i n_i^{\phi}$ はそれぞれ化学種 i の ϕ 相でのモル数とモル比、 μ_i^{ϕ} と $\mu_i^{\circ\phi}(T)$ はそれぞれ化学ポテンシャルと基準状態での化学ポテンシャル、 R は気体定数、 $\delta_{1\phi}$ はクロネッカーのデルタである。ただし、 $\phi = 1$ を気相とする。上記の表現において、気相の化学ポテンシャルは圧力にのみ依存すると仮定した (Sugiyama *et al.*, 2001, 2005)。

(2.3) 式を計算するために必要となる各化学種の気相の基準状態での化学ポテンシャルは、以下の式より計算する。

$$\begin{aligned} \mu_i^{\circ\phi}(T) &= h_i^{\phi}(T_0) - T s_i^{\phi}(T_0, p_0) \\ &\quad + \int_{T_0}^T c_{p_i}^{\phi}(T) dT - T \int_{T_0}^T \frac{c_{p_i}^{\phi}(T)}{T} dT, \quad \text{for } \phi = 1. \end{aligned}$$

ここで、 T_0 は基準状態での温度、 h_i^{ϕ} はモルエンタルピー、 s_i^{ϕ} はモルエントロピー、 $c_{p_i}^{\phi}$ は定圧比熱である。 $h_i^{\phi}(T_0)$ 、 $s_i^{\phi}(T_0, p_0)$ の値は NIST-JANAF Thermochemical Tables (Chase, 1989) より得る。 $c_{p_i}^{\phi}(T)$ は、NIST-JANAF Thermochemical Tables (Chase, 1989) の値をスプライン補間して与える。 NH_4SH 以外の凝結相の基準状態での化学ポテンシャルは以下の式から計算する。

$$\mu_i^{\circ\phi}(T) = \mu_i^{\circ 1}(T) + RT \ln e_i(T)/p_0, \quad \text{for } \phi \neq 1.$$

ここで $e_i(T)$ は化学種 i の飽和蒸気圧であり、AMP 式より評価する。AMP 式の係数は Briggs and Sacket (1989) から取得する。AMP 式の適用できないような低温での $\mu_i^{\circ\phi}(T)$ は、上記の式になめらかに接続されるような温度に関する 2 次関数で与える。 NH_4SH の化学ポテンシャルは、Lewis (1969) に従い NH_4SH 生成反応の平衡定数から得る。化学ポテンシャルの計算方法の詳細は付録 A.3 章を参照のこと。

与えられた温度と圧力に対するギブス自由エネルギーの最小値を計算する方法として RAND 法 (White *et al.*, 1953; Van Zeggeren and Storey, 1970; Wood and Hashimoto, 1993) を用いる. RAND 法は Newton 法の一つで, 制約付き最小化法に特化した方法である. ただし RAND 法を適用する際, 当該温度圧力においてそれぞれの凝結成分が大気的气体成分と平衡しうるか調べるという操作を行う. この操作は, RAND 法の行列式の正則性を保証し, 局所的な平衡解への収束を回避し, RAND 法による数値計算の実行速度を向上させるために必要である. RAND 法を用いたギブス自由エネルギー最小化法の離散化の詳細については付録 A 章を参照のこと. また開発したソースコードは <http://www.gfd-dennou.org/library/oboro/> にて公開している.

2.2.2 偽湿潤断熱構造

圧力の関数としての温度, 組成, 凝結成分の分布は, 偽断熱的に上昇する気塊を考察することで得られる. 全ての凝結物は気塊から取り除かれる一方で, それぞれの圧力高度において既に取り除かれた凝結物のエントロピーも含めた全エントロピーが保存されると仮定する. 全エントロピー S は以下の式で計算される.

$$S(T, p) = - \sum_i \sum_{\phi} \frac{\partial \mu_i^{\phi}(T, p, n_i^{\phi})}{\partial T} n_i^{\phi} - \int_{p_b}^p \sum_i \sum_{\phi \neq 1} \frac{\partial \mu_i^{\phi}(T(p'), p', n_i^{\phi}(p'))}{\partial T} \frac{dn_i^{\phi}}{dp'} dp', \quad (2.4)$$

ここで p_b は計算開始時に気塊が置かれた圧力であり, $T(p)$ と $n_i^{\phi}(p)$ は擬断熱線に沿った温度とモル比である.

偽湿潤断熱構造の決め方を図 2.2 に示す. まず計算開始圧力 p_b での温度をパラメタとして変化させ, それぞれのケースでの $dS = 0$ の断熱線を (2.4) 式に従って求める (実線, 破線). 得られた断熱線のうち, 観測から与えられた温度 T_0 圧力 p_0 を満たすものを, 偽湿潤断熱線として採用する (実線).

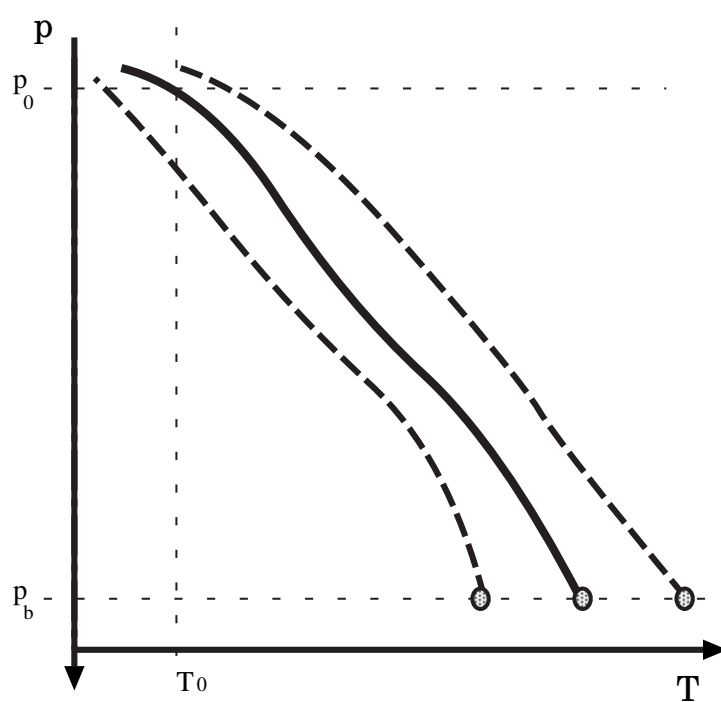


図 2.2 偽湿潤断熱線の求め方の概念図.

2.3 計算結果

2.2 節で説明した偽湿潤断熱線を引くための基準圧力と温度は、観測から 6.0×10^4 Pa において 150 K (Eshleman *et al.*, 1979) とする。考慮した化学種を表 2.1 に示す。これらの化学種のうち、 $\text{H}_2\text{O}(\text{l})$, $\text{NH}_3(\text{l})$, $\text{H}_2\text{S}(\text{l})$ は互いに混合して溶液を作るが $\text{CH}_4(\text{l})$ は溶液を作らないと仮定した。 $\text{H}_2\text{O}(\text{s})$, $\text{NH}_3(\text{s})$, $\text{H}_2\text{S}(\text{s})$, $\text{CH}_4(\text{s})$, $\text{NH}_4\text{SH}(\text{s})$ は互いに混合して固溶体を作ることはないと仮定した。オルソ水素とパラ水素の比率は平衡状態での値を仮定した。乾燥成分である H と He の存在度は太陽組成 (Asplund *et al.*, 2005) に等しいとし、凝結成分である C, N, O, S の存在度は太陽系元素存在度の 1 – 50 倍とする。本研究で用いる太陽組成の値は Asplund *et al.* (2005) によって改訂された値を用いる。従来の研究で利用されてきた Anders and Grevesse (1989) の太陽組成に比べると, He, C, N, O, S 元素の存在度がそれぞれ, 13%, 33%, 46%, 46%, 15% 減少している。

gas (g)	liquid (l)	solid (s)
H_2 , He, H_2O , CH_4 , NH_3 , H_2S	H_2O , NH_3 , H_2S , CH_4	H_2O , NH_3 , H_2S , CH_4 , NH_4SH

表 2.1 モデル大気で考慮されている大気成分。

図 2.3 に木星大気において凝結成分の存在度を太陽系元素存在度の 1, 5, 10 倍した時の雲粒密度の鉛直分布を示す。全ての場合に凝結相として $\text{H}_2\text{O}(\text{s})$, $\text{NH}_4\text{SH}(\text{s})$, $\text{NH}_3(\text{s})$ が生じ, 5 倍, 10 倍の場合には $\text{NH}_3\text{-H}_2\text{S-H}_2\text{O}(\text{liq})$ も生じる。それぞれの凝結成分の凝結高度は Atreya and Romani (1985) で得られた凝結高度に比べて高い。その理由は、利用した太陽組成が異なるため、凝結成分の存在度が Atreya and Romani (1985) の場合に比べ小さいからである。ここでは示さないが、太陽組成として Anders and Grevesse (1989) の値を利用すると、雲粒密度の大きさは Atreya and Romani (1985) の結果に一致した。

図 2.4 は木星大気において凝結成分の存在度を太陽系元素存在度の 1, 5, 10 倍した時の静的安定度 N^2 の鉛直分布を示す。 N^2 の大きさはそれぞれの凝結成分の凝結高度に対応したピークを持つ。木星大気において最も安定な成層は H_2O の凝結に伴い形成される。 H_2O の凝結に伴う N^2 の最大値は NH_3 によるその数倍大きく、また H_2O による安定層の厚さは他の凝結成分による安定層の厚さの数倍程度大きい。凝結成分の存在度を太陽系元素存在度の 1 倍にした場合には、太陽組成として Asplund *et al.* (2005) の値を用

いたので、静的安定度の最大値は、Achterberg and Ingersoll (1989) が得た値よりも小さい。それぞれの凝結成分による静的安定度のピーク値は、凝結成分の増加とともに増加する。しかしながら、 H_2O の凝結に伴う N^2 の最大値の増加は、凝結成分の増加に必ずしも比例しない。この点については次節で言及する。

図 2.3 と図 2.4 を比較すると、 H_2O の雲密度の最大値は NH_3 のそれよりもおよそ 10 倍程度大きいのに対し、 H_2O の凝結に伴う N^2 の最大値は NH_3 によるその数倍程度である。雲粒密度の最大値ほど N^2 の最大値に違いが現れないのは、 H_2O の凝結温度が NH_3 の凝結温度よりも高いからである。(2.1) 式に示されるように、静的安定度は凝結温度の逆数に比例する。

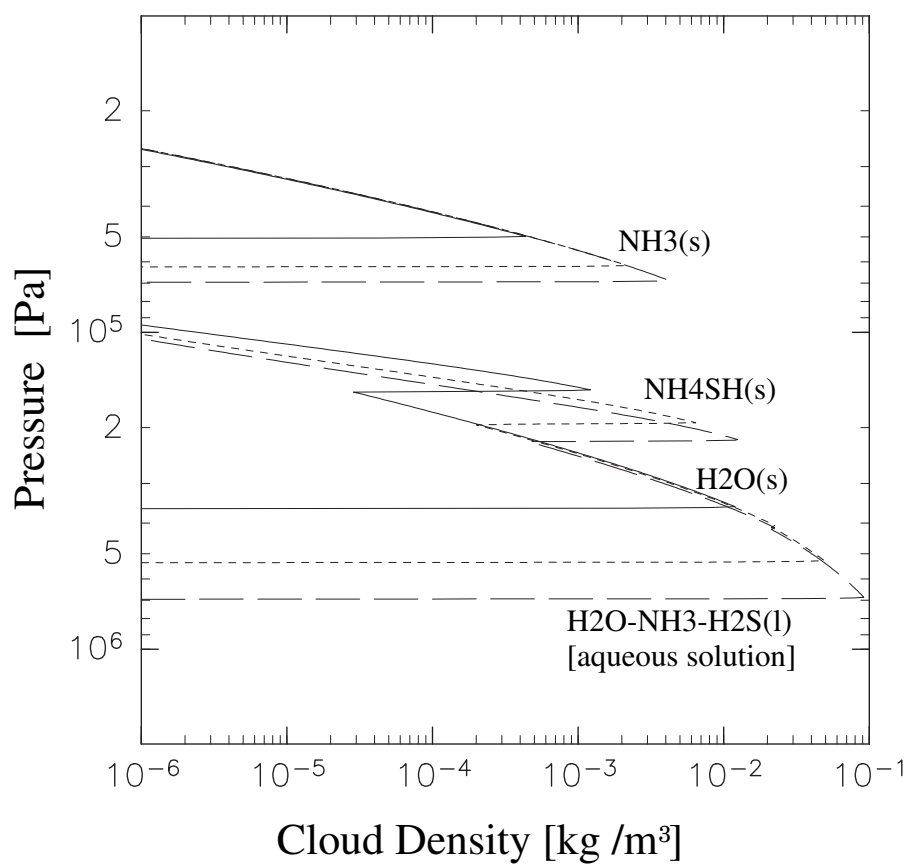


図 2.3 木星大気の雲粒密度の鉛直分布. 凝結成分気体の存在度は太陽組成の 1 倍 (実線), 5 倍 (破線), 10 倍 (点線) である.

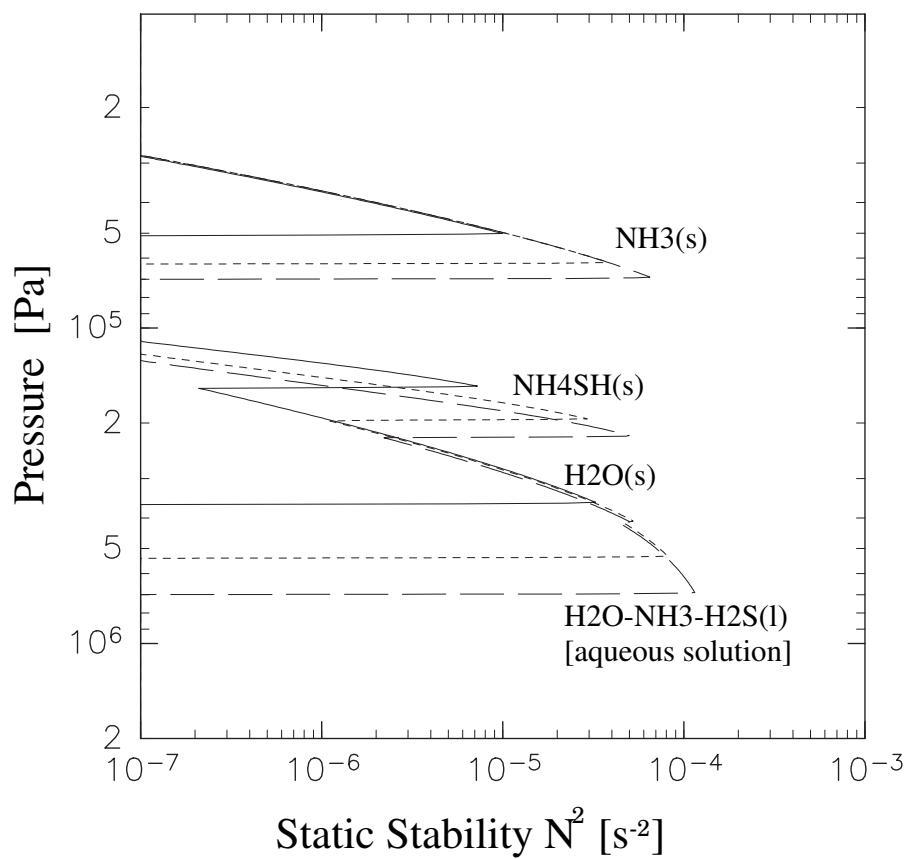


図 2.4 木星大気の N^2 の鉛直分布. 凝結成分気体の存在度は太陽組成の 1 倍 (実線), 5 倍 (破線), 10 倍 (点線) である.

2.4 まとめと議論

我々の計算結果から得られた重要な結果は、 N^2 の最大値の $x_{\text{H}_2\text{O}}$ に対する依存性は Achterberg and Ingersoll (1989) の得た比例関係とは異なる、ということである。このことは Achterberg and Ingersoll (1989) の仮定した凝結成分の存在度が十分に少ないという近似が計算に用いたパラメタ範囲では成立していないことを示唆する。そこで、以下ではまず Achterberg and Ingersoll (1989) の仮定した近似が適用可能な凝結成分存在度の範囲を調べる。その結果を基に、SL9 衝突波に対する Ingersoll and Kanamori (1995) の議論を再検討する。彼らは Achterberg and Ingersoll (1989) の比例関係の成立を仮定しているため、本計算で得られた N^2 の最大値の $x_{\text{H}_2\text{O}}$ に対する依存性を用いることで結論が変化する可能性があるからである。

2.4.1 凝結成分が十分少ないという近似の適用範囲

簡単のために、凝結成分と乾燥成分の 2 成分から成る大気を考える。その時、静的安定度の式 (2.1) は以下のように書くことができる。

$$N^2 = \frac{g}{T} \left[\Gamma_d + \Gamma_v \left\{ 1 - \frac{(M_v - M_d)}{M} \frac{\lambda_v x_v}{RT} \right\} - \frac{(M_v - M_d)}{M} \frac{Mg x_v}{R} \right]. \quad (2.5)$$

ここで M_d と M_v は乾燥成分と凝結成分の分子量、 x_v と λ_v は凝結成分のモル比と潜熱、 c_{pd} と c_{pv} は乾燥成分と凝結成分の定圧比熱である。 $\Gamma_d = Mg/c_p$ と $\Gamma_v = Mg/c_p \{ (1 + \lambda_v x_v / RT) / (1 + \lambda_v^2 x_v / c_p RT^2) \}$ はそれぞれ乾燥断熱温度減率、偽湿潤断熱温度減率である。さらに、Achterberg and Ingersoll (1989) と同様に凝結成分の存在度が少ないとする近似が成立すると仮定するならば、(2.5) 式は以下のような比例の式に書き直すことができる。

$$N^2 = \frac{M_d g^2}{c_{pd} T} \left(\frac{\lambda_v}{RT} - \frac{c_{pd}}{R} \right) \left(\frac{\lambda_v}{c_{pd} T} + \frac{M_v - M_d}{M_d} \right) x_v. \quad (2.6)$$

図 2.5 において、計算結果から得られた H_2O 氷もしくは $\text{H}_2\text{O}-\text{NH}_3-\text{H}_2\text{S}$ 水溶液の雲底で得られた N^2 の最大値を丸印で、(2.5) 式を破線と一点鎖線で、(2.6) 式を点線で示す。図 2.5 より、 H_2O モル比が小さい場合には N^2 の最大値は (2.6) 式で近似可能であるが、 $x_{\text{H}_2\text{O}}$ を 3.9×10^{-3} (太陽組成の 5 倍) より大きくした場合には (2.6) 式によって与えられる近似からずれ始める。 H_2O モル比を太陽組成の 5 倍より大きくした場合には、 N^2 の

最大値は (2.6) 式ではなく (2.5) 式によって近似する必要がある. (2.6) 式で近似できなくなる理由は, この近似式の成立する条件が破綻するからである. (2.6) 式の成立条件は

$$\lambda_v^2 x_v / c_p R T^2 \ll 1$$

であり, 木星の代表的な値として $T = 300 \text{ K}$, $c_{pd} = 30 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ および水の潜熱 $\lambda_v = 4.5 \times 10^4 \text{ J mol}^{-1}$ を代入すると,

$$x_v \ll 1 \times 10^{-2}$$

となる. H_2O モル比を太陽組成の 5 倍にした場合には $x_{\text{H}_2\text{O}} = 3.9 \times 10^{-3}$ なので, (2.6) 式の成立条件は, H_2O モル比が太陽組成の 5 倍より大きい場合には破綻する. Achterberg and Ingersoll (1989) では, H_2O モル比が太陽組成程度の場合を調べていたので, (2.6) 式の成立条件が破綻することはなかった.

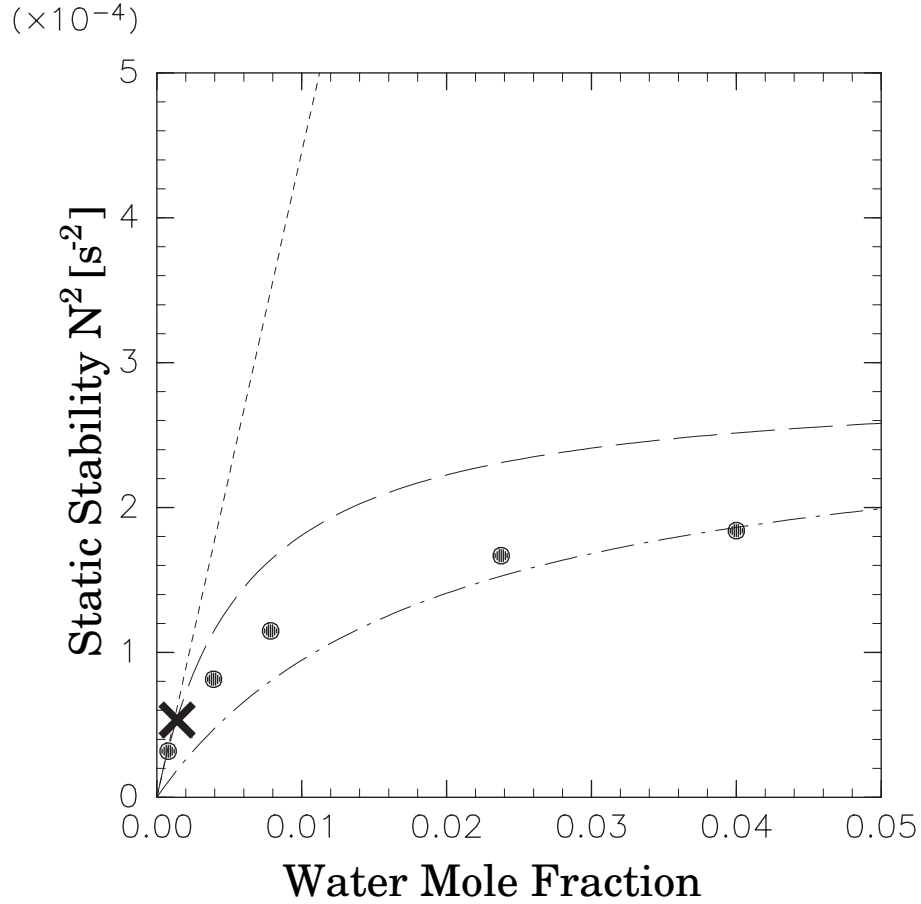


図 2.5 木星大気の水氷もしくは $\text{H}_2\text{O}-\text{NH}_3-\text{H}_2\text{S}$ 水溶液の雲底で得られた N^2 の最大値と $x_{\text{H}_2\text{O}}$ との関係. 丸印は Asplund *et al.* (2005) の太陽組成の 1, 5, 10, 30, 50 倍に相当する. バツ印は Anders and Grevesse (1989) の太陽組成の 1 倍に相当する. 破線と一点鎖線は, 凝結成分の少ないとする近似を用いない場合 ((2.5) 式) に得られる N^2 の最大値と $x_{\text{H}_2\text{O}}$ との関係を示す. 点線は凝結成分の少ないとする近似が成り立つ場合 ((2.6) 式) の N^2 の最大値と $x_{\text{H}_2\text{O}}$ との関係を示す. 但し, 破線および点線と一点鎖線では用いた c_p , M , λ_v , T の値が異なっている. 破線および点線では, c_p , M , λ_v , T の値として太陽組成の 1 倍にした場合に H_2O 氷雲の雲底で得られた値を利用している. その一方で, 一点鎖線では c_p , M , λ_v , T の値として太陽組成の 50 倍にした場合に H_2O の水溶液雲の雲底で得られた値を用いる. (2.5) 式は温度 T に反比例するため, 図 2.5 において破線で示した太陽組成の 1 倍 (雲層下部の温度は 263 K) の時の N^2 の最大値の方が, 一点鎖線で示した太陽組成の 50 倍の時の値よりも大きい.

2.4.2 SL9 衝突波の位相速度に関する再検討

図 2.5 から得られた重大な結論は, Ingersoll and Kanamori (1995) が示した SL9 衝突波の位相速度を内部重力波として説明するために必要な N^2 の最大値 ($5 \times 10^{-4} \text{ s}^{-2}$) は, 凝結成分気体の存在量を太陽組成の 50 倍にまで増加しても得られないということである. もしも比例関係が成立するならば, 上記の N^2 の値は凝結成分気体の存在量を太陽組成[†]の 10 倍程度にすることで得られた. 実は Ingersoll *et al.* (1994) も指摘していることだが, 内部重力波の位相速度は N に比例するのではなく, 安定層の厚さ H で N を積分した値に比例するものである. 実際, 図 2.4 に示すように凝結成分存在度の増加とともに安定層の厚さは増加しており, SL9 衝突波の位相速度を内部重力波の位相速度として説明できるかどうかは, Ingersoll and Kanamori (1995) のように安定層の厚さを一定と仮定するのではなく, この安定層の厚さが増加する効果を考慮した上で議論する必要がある.

表 2.2 に我々の計算結果を用いて見積もった重力波速度を示す. カッコ内の数字は太陽組成[†]の 1 倍, すなわち Anders and Grevesse (1989) の太陽組成を用いて計算した場合に得られた値との比を示す. 位相速度 c は $\text{H}_2\text{O}-\text{NH}_3-\text{H}_2\text{S}(\text{l})$, $\text{H}_2\text{O}(\text{s})$ の凝結と $\text{NH}_4\text{SH}(\text{s})$ の生成に伴う安定層の厚さで N を積分した値に比例すると仮定した. 凝結成分存在度が大きい場合には, それらの雲層が重なり合うようになるからである. 太陽組成[†]の 1 倍の場合での位相速度は Ingersoll and Kanamori (1995) より $c = 130 \text{ m/s}$ とした. 表 2.2 より, 水が太陽組成 (Asploud *et al.*, 2005) の 15 倍以上存在する場合には, SL9 衝突波速度 $c = 450 \text{ m/s}$ を説明することは可能である. すなわち, 安定層の厚さが増加する効果を考慮すれば, SL9 衝突波の位相速度を内部重力波の位相速度として説明可能である.

	$N^2[10^{-4}\text{s}^{-2}]$	$H[\text{km}]$	$c[\text{m/s}] (\int N dz)$
1× solar	0.31(0.6)	40(0.93)	96.8(0.74)
1× solar [†]	0.52(1)	43(1)	130(1)
10× solar	1.15(2.2)	63(1.47)	370(2.85)
15× solar	1.35(2.60)	70(1.62)	475(3.66)
20× solar	1.49(2.87)	75(1.74)	568(4.37)
30× solar	1.67(3.2)	85(1.98)	731(5.63)

表 2.2 H_2O の凝結に関する安定層で獲得する重力波速度の見積もり表中の N^2 の値は, H_2O 氷の凝結高度, もしくは $\text{H}_2\text{O}-\text{NH}_3-\text{H}_2\text{S}$ 水溶液の凝結高度で得られた値である. また, $N^2 > 1.0^{-7}$ となる高度領域の厚さを安定層の厚さ H とする.

第 3 章

雲対流の直接数値計算

3.1 はじめに

ガリレオ探査機の大気プローブによる直接探査を経た現在においても、木星大気の平均的な大気構造は未だによくわかっていない問題である。平均的な大気構造は放射対流平衡状態、すなわち放射による熱輸送と多数の雲対流による熱・物質輸送の相互作用の結果として決まる統計的平衡状態として定まるものである。したがって放射の効果を取り入れつつ長時間の雲対流の直接数値計算を行うことで、木星の平均的な大気構造が調べられるものと期待される。そこで本章では、放射強制を模した一様冷却の下で、 H_2O 、 NH_3 の凝結と NH_4SH の生成反応を考慮した木星大気の雲対流の直接数値計算を行い、多数の雲の生成消滅が繰り返された結果として決まる木星大気の平均的な対流運動の鉛直構造と雲の鉛直分布を調べることを目的とする。

このような研究を行う際にいくつかの問題が生じる。

- (1) 雲対流モデルの定式化を行う際に問題となることは、木星の雲微物理過程が観測的に明らかとされていないことである。対流雲の上昇速度と雲の到達高度は雲微物理過程に大きく左右されることが指摘されており (Hueso and Sanchez-Lavega, 2001), 定式化を行うには木星大気の雲微物理過程についての知識が本来必要である。
- (2) 雲対流の直接数値計算の計算条件として問題となることは、大気中の凝結成分存在量が明らかでないことである。太陽系形成論より太陽と同等かそれ以上の凝結成分が木星大気中に存在すると考えられているが、観測的に明らかにされているわけではない。

- (3) 雲対流の直接数値計算を実行する際に問題となることは、非常に膨大な計算機資源が必要になることである。計算領域としては鉛直方向には数百 km オーダー、水平方向はできるだけ広い領域を確保する必要があるが、格子点間隔は雲を解像可能な数 km 程度にする必要がある。さらに積分時間として放射緩和時間である数年程度の時間が必要となる。

本研究では上記の問題に対して以下のように対処することとした。

- (1) 観測的によくわかっていない木星大気の雲微物理過程は、Nakajima *et al.* (2000) と同様に、地球で良く利用されている雲微物理パラメタリゼーション (Kessler, 1969) を用いて定式化する。
- (2) 木星大気中の凝結成分の存在量は、従来行われてきた平衡凝結モデル (Weiden-schilling and Lewis, 1973; Atreya and Romani, 1985) にない、存在量を予想される範囲で何通りか用いることにする。
- (3) 広い計算領域と高い解像度を確保し易くするために、水平鉛直 2 次元の雲対流モデルを開発する。計算速度向上のためには、水平方向の計算領域はなるべく狭くしたいが、どの程度にするのが適当かは先見的に与えることはできない。そこで水平領域の大きさをパラメタとして変化させることとする。さらに現実の木星大気の放射強制よりも強い冷却を与えることで対流を加速させ、統計的平衡状態を得るまでの積分時間を短縮する。計算資源が許す限り、現実の木星大気で予想される冷却に近づける実験も合わせて行うこととする。

これらのパラメタに対して対流運動の鉛直構造と雲の鉛直分布がどのように変化するか調べることで、計算困難な現実の木星大気のパラメタ範囲での平均的な大気構造に対する示唆を得ることを目指す。

3.2 雲対流モデルの定式化

3.2.1 数値モデルの概要

モデル方程式として、地球の積雲対流研究によく用いられてきた準圧縮系方程式 (Klemp and Wilhelmson, 1978) を用いる。雲微物理過程は暖かい雨のバルクパラメタリゼーション (Kessler, 1969) を用いて表現する。このパラメタリゼーションでは、凝結成分を「蒸気」、「雲」、「雨」の3つのカテゴリに分ける (図 3.1 参照)。「雲」と「雨」は共に凝結物であるが、「雨」は大気の運動から離脱して落下し、「雲」は落下しないものとする。但し、雲から雨の変換率および雨の落下速度は地球の重力加速度と木星の重力加速度の差を考慮する。モデル格子間隔以下のスケールを持つ乱流による拡散は、Klemp and Wilhelmson (1978) のパラメタリゼーションにしたがって計算する。このパラメタリゼーションは、サブグリッドスケールの運動エネルギーの予報方程式を解くことで、乱流拡散係数を決めるものである。大気と雲の放射過程は陽に計算せず、その代わりに観測された放射強制分布を模した水平一様な熱強制を与える。

各凝縮成分の相平衡状態は、計算コストを抑えるため、Sugiyama *et al.* (2006) で用いたギブス自由エネルギー最小化法ではなく、飽和蒸気圧と化学反応の圧平衡定数を基に計算する。飽和蒸気圧の経験式は Briggs and Sackel (1989) より得る。NH₄SH の生成反応の圧平衡定数は Lewis (1969) より得る。相平衡計算において気液平衡もしくは固気平衡を考慮し、溶液と固溶体の生成は考慮しない。

本研究で開発した数値モデルは <http://www.gfd-dennou.org/library/deepconv> にて公開している。

3.2.2 運動方程式・圧力方程式・熱の式・混合比の保存式

力学的な枠組みは、準圧縮方程式系 (Klemp and Wilhelmson, 1978) を用いる。この方程式系では、予報変数を水平一様な基本場とそこからのずれに分離し、そのずれを解くものである。以下に準圧縮方程式系の時間発展方程式を一覧する。本定式化では圧力方程式において Klemp and Wilhelmson (1978) と同様に、非断熱加熱による大気の膨張と凝縮に伴う圧力変化の項は小さいものとして無視している。定式化の詳細は付録 C 章に、離散化

方法の詳細は付録 D 章に示した.

運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - c_{pd} \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi}{\partial x} + Turb.u. \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = & - \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - c_{pd} \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi}{\partial z} + Turb.w \\ & + \left(\frac{\theta}{\bar{\theta}} + \frac{\sum q_v / M_v}{1/M_d + \sum \bar{q}_v / M_v} - \frac{\sum q_v + \sum q_c + \sum q_r}{1 + \sum \bar{q}_v} \right) g. \end{aligned} \quad (3.2)$$

圧力方程式

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = - \frac{\bar{C}_s^2}{c_{pd} \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{\theta}_v u_j). \quad (3.3)$$

熱の式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} = & - \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \frac{1}{\bar{\pi}} (Q_{cnd} + Q_{rad} + Q_{dis}) \\ & + Turb.\bar{\theta} + Turb.\theta. \end{aligned} \quad (3.4)$$

混合比の保存式

$$\frac{\partial q_v}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial q_v}{\partial x} + w \frac{\partial q_v}{\partial z} \right) - w \frac{\partial \bar{q}_v}{\partial x} + Src.q_v + Turb.q_v + Turb.\bar{q}_v. \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial q_c}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial q_c}{\partial x} + w \frac{\partial q_c}{\partial z} \right) + Src.q_c + Turb.q_c. \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial q_r}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial q_r}{\partial x} + w \frac{\partial q_r}{\partial z} \right) + Src.q_r + Fall.q_r + Turb.q_r. \quad (3.7)$$

ただし, u は速度の x 成分, w は速度の z 成分, θ と θ_v はそれぞれ温位と仮温位, π は無次元圧力関数, C_s は音速, ρ は密度, Q_{cnd} は凝結加熱, Q_{rad} は放射加熱, Q_{dis} は散逸加熱, c_{pd} は乾燥成分気体の定圧比熱, M_d と M_v はそれぞれ乾燥成分と凝結成分の分子量, q_v は凝結成分気体の混合比, q_c は雲粒の混合比, q_r は雨粒の混合比, $Turb$ は乱流拡散項, Src は生成項, $Fall$ は落下項である. $-$ の付いた変数は水平一様な基本場であることを示す. 気体としては $H_2O(g)$, $NH_3(g)$, $H_2S(g)$ を考慮し, 雲と雨としては $H_2O(s)$, $NH_3(s)$, $NH_4SH(s)$ を考慮する.

エクスター関数 π , 温位 θ , 密度 ρ , 仮温位 θ_v , 音波速度の自乗 C_s^2 はそれぞれ以下のよう
に定義される.

エクスナー関数 π

$$\pi \equiv \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R_d/c_{pd}}. \quad (3.8)$$

温位 θ

$$\theta \equiv T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R_d/c_{pd}} = \frac{T}{\pi}. \quad (3.9)$$

密度 ρ

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{p}{R_d T} \left(\frac{1/M_d}{1/M_d + \sum \bar{q}_v/M_v} \right) \left(1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r \right) \\ &= \frac{p}{R_d T_v} = \frac{p_0 \pi^{c_{vd}/R_d}}{R_d \theta_v}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

仮温位 θ_v

$$\theta_v = \frac{\theta}{\left(\frac{1/M_d}{1/M_d + \sum q_v/M_v} \right) (1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r)}. \quad (3.11)$$

音波速度 C_s

$$C_s^2 = \sqrt{\frac{c_{pd}}{c_{vd}} R_d \pi \theta_v}. \quad (3.12)$$

但し, p_0 は基準状態での圧力, T は温度, R_d は乾燥成分の気体定数, c_{vd} は乾燥成分気体の定積比熱である.

3.2.3 雲微物理過程のパラメタリゼーション

(3.4) 式中の凝縮加熱項 Q_{cnd} , および (3.5) – (3.6) 式中の生成項 Src , 落下項 $Fall$ は, Kessler (1969) の暖かい雨のバルクパラメタリゼーションに従って評価する. このパラメタリゼーションでは, 気相と凝縮相を表 3.1 のように「気体」, 「雲」, 「雨」3つのカテゴリーに分ける. 生成項 Src と 落下項 $Fall$ は表 3.2 に挙げる雲微物理素過程によって表現する (図 3.1 参照). これらの量は全て正の値として定義される.

記号	意味	内容
q_v	気相の混合比	気体の状態で大気中に存在
q_c	雲水混合比	落下速度がゼロな液体の粒子で、実際の大気中の雲粒に対応する。 通常 $100 \mu\text{m}$ 以下の微小な流体粒子である。
q_r	雨水混合比	有意な落下速度を持つ液体の粒子で、実際の大気中の雨粒に対応する。

表 3.1 気相と凝結相のカテゴリ分け

記号	内容
CN_{vc}	凝結による水蒸気から雲水への変換 (condensation)
EV_{cv}	蒸発による雲水から水蒸気への変換 (evaporation)
EV_{rv}	蒸発による雨水から水蒸気への変換 (evaporation)
CN_{cr}	併合成長による雲水から雨水への変換。併合や水蒸気拡散により、 雲粒子が雨粒の大きさにまで成長する (autocondensation)
CL_{cr}	衝突併合による雲水から雨水への変換。大水滴が小水滴を衝突併合 する (collection)
PR_r	雨水の重力落下に伴う雨水混合比の変化率 (Precipitation)

表 3.2 考慮する雲微物理素過程

この微物理素過程を用いて (3.4) – (3.7) 式を書き直すと、以下ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} = & - \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \frac{L}{c_{pd} \bar{\pi}} (CN_{vc} - EV_{cv} - EV_{rv}) \\ & + \frac{1}{\bar{\pi}} (Q_{rad} + Q_{dis}) + Turb.\bar{\theta} + Turb.\theta, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_v}{\partial t} = & - \left(u \frac{\partial q_v}{\partial x} + w \frac{\partial q_v}{\partial z} \right) - w \frac{\partial \bar{q}_v}{\partial x} - (CN_{vc} - EV_{cv} - EV_{rv}) \\ & + Turb.q_v + Turb.\bar{q}_v, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial q_c}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial q_c}{\partial x} + w \frac{\partial q_c}{\partial z} \right) + (CN_{vc} - EV_{cv} - CN_{cr} - CL_{cr}) + Turb.q_c, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial q_r}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial q_c}{\partial x} + w \frac{\partial q_c}{\partial z} \right) + (CN_{cr} + CL_{cr} - EV_{rv}) + PR_r + Turb.q_r. \quad (3.16)$$

ここで、 L_v は潜熱もしくは蒸発熱 [$\text{J K}^{-1} \text{kg}^{-1}$] である。これらの計算方法については付録 D.4.3, D.4.4 節を参照されたい。

表 3.2 に挙げた微物理素過程は以下のように定式化する.

雲水の併合成長: CN_{cr}

Kessler(1969) に従って以下で与える.

$$CN_{cr} = (q_c - q^0)/\tau_0. \quad (3.17)$$

但し, 変換の時間スケール τ_0 と閾値 q^0 はそれぞれ $\tau_0 = 100$, $q^0 = 0$ としている (Nakajima *et al.*, 2000).

雲水の衝突併合: CL_{cr}

Kessler (1969) に従って, 以下で定式化する.

$$CL_{cr} = 2.2q_c(\bar{\rho}q_r)^{0.875}f_j. \quad (3.18)$$

ここで f_j は木星重力と地球重力の比で $f_j = 3$ である. 重力が大きいことで雲粒同士が衝突し易くなる効果を f_j で表現する. (Yair *et al.*, 1995, Nakajima *et al.*, 2000).

雨水の蒸発: EV_{rv}

蒸発量は過飽和量 $q_{vsw} - q_v$ に比例するように与える.

$$EV_{rv} = 4.85 \times 10^{-2}(q_{vsw} - q_v)(\bar{\rho}q_r)^{0.65}f_j. \quad (3.19)$$

雨水のフラックス: PR_r

雨水の重力落下による混合比の変化率は,

$$PR_r = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho}U_r q_r) \quad (3.20)$$

であり, 雨水の終端落下速度 U_r [m s^{-1}] は

$$U_r = 12.2(q_r)^{0.125}f_j. \quad (3.21)$$

で与える.

蒸気と雲水の間の変換: $-CN_{vc} + EV_{cv}$

雲水は粒が小さく, 蒸気との間で瞬間的に飽和調節が起こるものとする. すなわち, 移流などの項を計算した後の温度と蒸気量が過飽和状態となっている場合には, ちょうど飽和になる量の蒸気を凝結させる. 一方, 移流などの項を計算した後に, 雲水が存在するにも拘わらず未飽和になっている場所では, ちょうど飽和になる量の雲水を蒸発させる.

実際の計算では蒸気と雲水の間の変換を表す $-CN_{vc} + EV_{cv}$ は, Klemp and Wilhelmson (1983), CReSS ユーザーマニュアル (坪木と榊原, 2001) と同様に, 湿潤飽和調節法によって評価する. この方法は $dS = 0$ の断熱線と, $\mu_{\text{気相}} = \mu_{\text{凝結相}}$ の平衡条件 (μ は化学ポテンシャル) の交わる温度・圧力・組成を反復的に求める数値解法である. 具体的な数値解法は付録 D.4.2 章に示す.

3.2.4 放射強制項の扱い

(3.4) 式に現れる放射加熱項 Q_{rad} を評価するにあたっては, 大気と雲の放射伝達方程式を陽に解くのではなく, ガリレオプローブによって放射加熱が観測された高度 (Sromovsky *et al.*, 1998) に放射強制を模した水平一様な冷却を与える. 具体的には 1×10^4 Pa から 2×10^5 Pa 面高度において Q_{rad} の値は外部パラメタとして与え, それ以外の高度領域において $Q_{rad} = 0$ とする.

3.2.5 乱流混合のパラメタリゼーション

Klemp and Wilhelmson (1978) および CReSS (坪木と榊原, 2001) と同様に, 1.5 次のクロージャーを用いる. この時 (3.1) と (3.2) 式中の乱流拡散項 $Turb.u_i$ および (3.4) 式中の乱流拡散項 $Turb.\theta$ および散逸加熱項 Q_{dis} は以下のように書ける.

運動方程式中の乱流拡散項

$$\begin{aligned} Turb.u_i &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{(u'_i u'_j)} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[-K_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} E \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

ここで K_m は運動量に対する乱流拡散係数であり, E はサブグリッドスケールの乱流運動エネルギー

$$E = \frac{1}{2} \overline{(u')^2 + (w')^2} = \frac{K_m^2}{C_m l^2} \quad (3.23)$$

である.

熱の式の乱流拡散項

$$\begin{aligned}
 Turb.\theta &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i \theta} \\
 &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-K_h \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-3K_m \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right). \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

ここで K_h は温位に対する乱流拡散係数であり,

$$K_h = 3K_m \tag{3.25}$$

の関係を満たすという条件を用いた.

散逸加熱項

$$Q_{dis} = \frac{1}{c_p} \frac{C_\epsilon}{l} \frac{K_m^3}{(C_m l)^3}. \tag{3.26}$$

ここで $l = (\Delta x \Delta z)^{1/2}$ である.

(3.22), (3.24), (3.26) 式中の K_m は乱流エネルギーの時間発展方程式より求める. (3.23) 式を用いて乱流エネルギーの時間発展方程式を K_m の式として表現と以下のようにになる.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial K_m}{\partial t} &= - \left(u \frac{\partial K_m}{\partial x} + w \frac{\partial K_m}{\partial z} \right) - \frac{3gC_m^2 l^2}{2\theta_v} \left(\frac{\partial \theta_{el}}{\partial z} \right) \\
 &\quad + (C_m^2 l^2) \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
 &\quad + \frac{C_m^2 l^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{K_m}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial K_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial z} \right)^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2l^2} K_m^2. \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

ここで $C_\epsilon = C_m = 0.2$, 混合距離 $l = (\Delta x \Delta z)^{1/2}$ とする. θ_{el} は以下のように定義する

$$\theta_{el} = \bar{\theta}_v + \theta'_v \quad (for \quad q_c = 0), \tag{3.28}$$

$$\theta_{el} = \bar{\theta}_v + \theta'_v + \frac{\sum Lq_v}{c_{pd}\bar{\pi}} \quad (for \quad q_c > 0). \tag{3.29}$$

ただし,

$$\bar{\theta}_v + \theta'_v = \bar{\theta}_v \left\{ 1 + \frac{\theta}{\bar{\theta}} + \frac{\sum q_v/M_v}{1/M_d + \sum \bar{q}_v/M_v} - \frac{\sum q_v + \sum q_c + \sum q_r}{1 + \sum \bar{q}_v} \right\} \tag{3.30}$$

である. 但し Nakajima *et al.* (2000) に従い, K_m の上限値は $800 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ とした.

3.2.6 比熱の温度依存性を無視したことの考察

本定式化では予報変数として温位を用いたため、比熱の温度依存性が考慮されていない。水素の比熱を基準温度 (298.15 K) での値に固定したことにより、アンモニア凝縮高度付近において断熱温度減率の値に 20 % 程度のずれが生じる。しかし雲対流の循環構造の描像を描くという定性的目的においては、雲層で期待される静的安定度 N^2 の値がさほど変わらないのであれば、比熱の温度依存性を無視したことの影響は大きくはないのではないと期待される。そこでこの節では比熱の温度依存性の有無が安定成層の存在高度と N^2 の大きさに及ぼす影響について検討する。

N^2 は Sugiyama *et al.* (2006) と同様に以下の式から見積もる。

$$N^2 = \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \frac{Mg}{c_p} \right) - \frac{g}{M} \frac{dM}{dz}.$$

ここで T は温度、 M は平均分子量、 g は重力加速度、 c_p は単位モル当たりの比熱である。図 3.2 は Sugiyama *et al.* (2006) の求めた静的安定度と比熱一定とした場合の比較であり、安定成層の存在高度と N^2 の大きさには大きな変化は無いことが示された。そのため、本定式化は雲対流の循環構造の描像を描くという定性的目的においては、比熱の温度依存性を無視することは問題ないであろう。

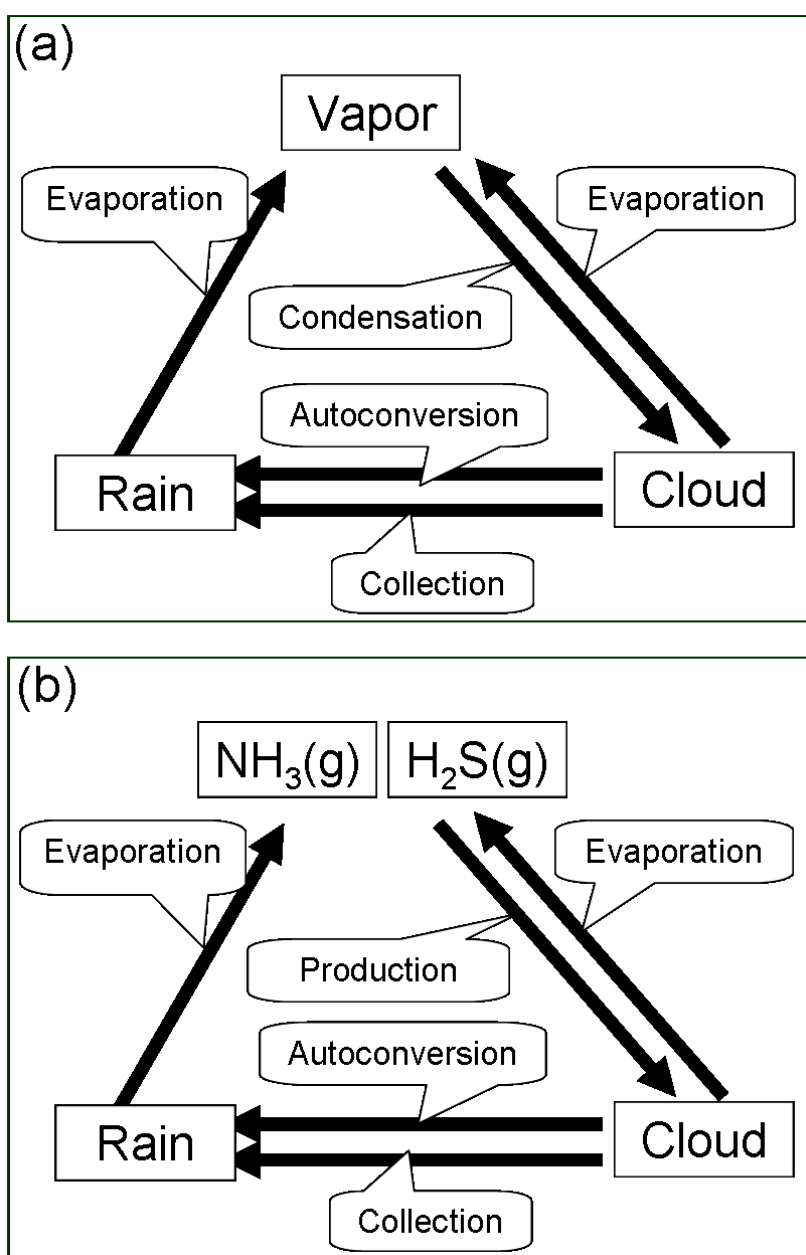


図 3.1 雲微物理過程の概念図. (a) は H_2O と NH_3 の場合であり, 蒸気は飽和蒸気圧に達すると雲となり, 雲はさらに雨となり, 雨は再蒸発して蒸気となる. (b) は NH_4SH の場合であり, NH_3 と H_2S の蒸気は NH_4SH の雲と平衡状態にあり, NH_4SH の雲はさらに雨となり, NH_4SH の雨は再蒸発して NH_3 と H_2S の蒸気となる.

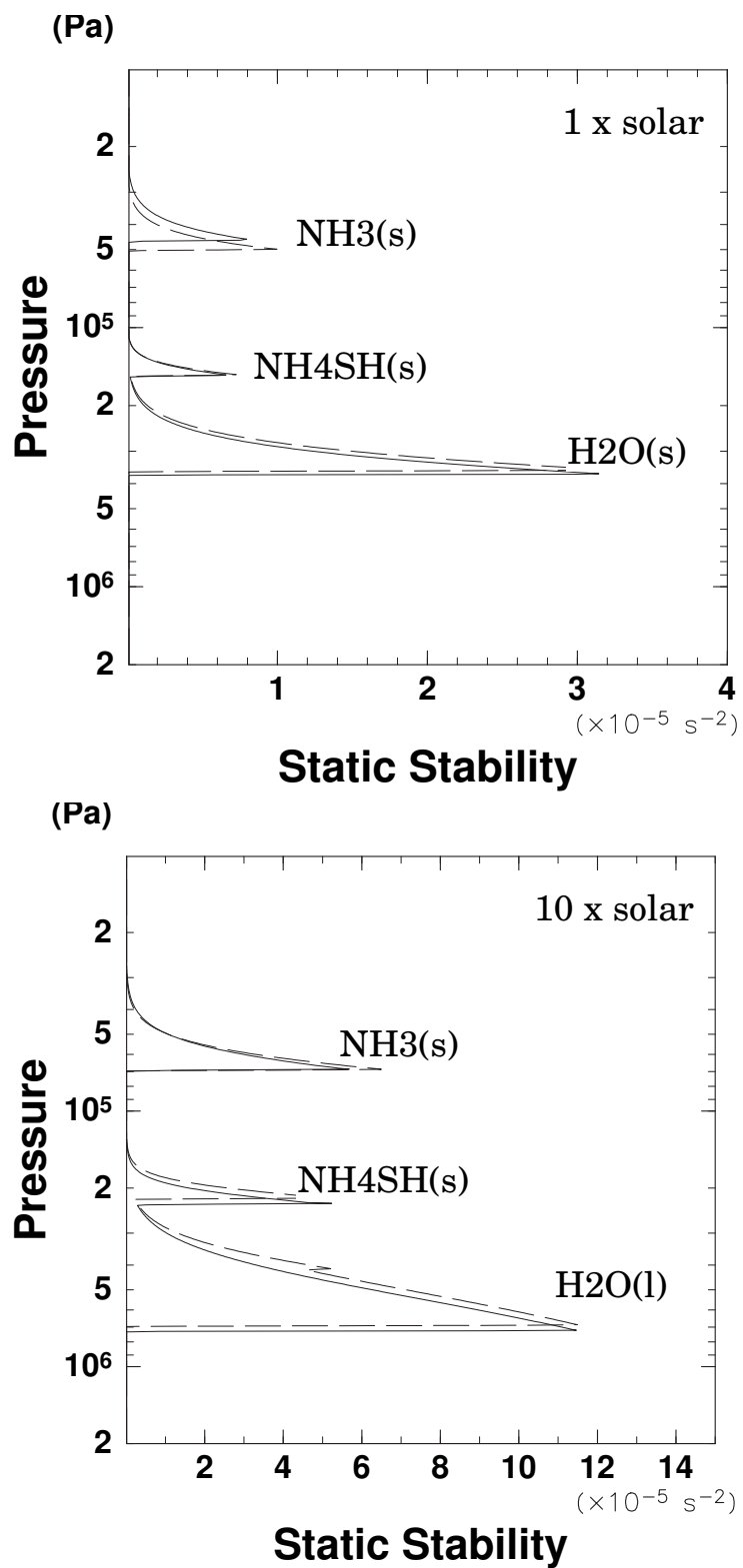


図 3.2 静的安定度の見積もり. 木星大気組成を太陽組成 (Asplund *et al.*, 2005) の 1 倍 (左), 10 倍 (右) にした場合の結果を示す. 図中の実線は対流モデルに含まれる相平衡計算モジュールを用いた結果, 破線は Sugiyama *et al.* (2006) の結果である.

3.3 数値実験の概要

計算設定の模式図を図 3.3 に示す. 計算領域は鉛直方向に 300 km (圧力深度 30 bar – 0.001 bar), 水平方向は 512 km とする. 一部の計算では 1024, 5120 km とし, それぞれを「2 × region 実験」, 「10 × region 実験」と呼ぶ. 空間格子間隔は水平鉛直ともに 2 km とする. 水平境界には周期境界条件を適用する.

上部境界境界において, 応力無し, 鉛直流無し, 温位フラックス無しと凝結成分気体の混合比フラックス無し, を適用する. 下部境界境界において, 応力無し, 鉛直流無しを適用し, さらに下部境界の温度と凝結成分の混合比は大規模な運動場によって決まっていると仮定することで, 下部境界の温度と混合比を初期の温度と混合比に戻すような拡散的なフラックス

$$\begin{aligned} F_\theta &= k \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ F_{q_v} &= k \frac{\partial q_v}{\partial z} \\ F_{q_c} &= F_{q_r} = 0.0 \end{aligned}$$

を与える. ここで θ は温位, q_v は凝結性気体の混合比, q_c は雲粒混合比, q_r は雨粒混合比, k は拡散係数である. 拡散係数の値は $k = 800 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ とする.

初期の鉛直温度構造は, 下部境界から 200 km (0.1 bar) までは断熱的 (0.6 bar 面高度で 160 K) とし, その上は温度一定とする. 対流運動を発生させるための種として, 高度 110 km に乱数的に微小な温位擾乱を与える.

大気組成として H_2 , He , H_2O , NH_3 , H_2S を考慮する. H_2 と He は非凝結成分として扱い, それらの存在度は太陽組成 (Asplund *et al.*, 2005) の 1 倍とする. その一方で, H_2O , NH_3 , H_2S は凝結成分として扱い, 「標準実験」ではそれらの凝結成分の存在度を太陽組成の 1 倍とする. 木星大気において表層の雲の下の大気組成は明らかでないため, 対流運動と凝結成分分布の凝結成分存在度依存性を把握することを目的として, 凝結成分の存在度を増減させた実験も行う. 具体的には, それぞれの凝結成分の存在度を太陽組成の 5, 10 倍とした実験 (ここではそれぞれ「5 × solar 実験」, 「10 × solar 実験」と呼ぶ) と, 0.1 倍とした実験 (ここでは「0.1 × solar 実験」と呼ぶ) を行う. 初期状態におけるそれぞれの凝結成分の混合比は, 相対湿度が 75 % となる高度までは一定とし, その高度より上空では相対湿度が 75 % となるように与える.

熱強制として、ガリレオプローブによって放射冷却が観測された高度 140 km (2 bar) から 200 km (0.1 bar) の間 (Sromovsky *et al.*, 1998) に、水平一様な熱強制 -1 K/day を与える。この冷却率の値は、統計的平衡状態に達するまでの積分時間を短縮するため、現実の木星大気での値よりも 2 桁大きくしている。冷却率を現実の木星大気での値により近づけた際に平均的な大気構造がどのように変化するか調べるために、水平一様な熱強제를 -0.1 K/day とした実験も行う (ここでは「 $0.1 \times \text{rad}$ 実験」と呼ぶ)。

上部境界での波の反射を抑え吸収するために、高度 200 km より上空にスポンジ層を導入し、レイリー摩擦で波を減衰させる。地球大気の場合、レイリー摩擦の緩和時間は 100 – 300 秒程度にするのが普通である (坪木と榊原, 2001)。そこで本計算では、レイリー摩擦の緩和時間を 100 秒とする。但し、 $1 \times \text{region}$ 実験、 $2 \times \text{region}$ 実験、 $10 \times \text{region}$ 実験では、レイリー摩擦の緩和時間を 500 秒としている。

数値積分は個々の雲の生成消滅の時間スケール (おおよそ数時間) よりも十分に長い時間積分し、数値積分終了時点で平均的な大気構造が確立し、系の全熱エネルギーが定常に達するようにする。

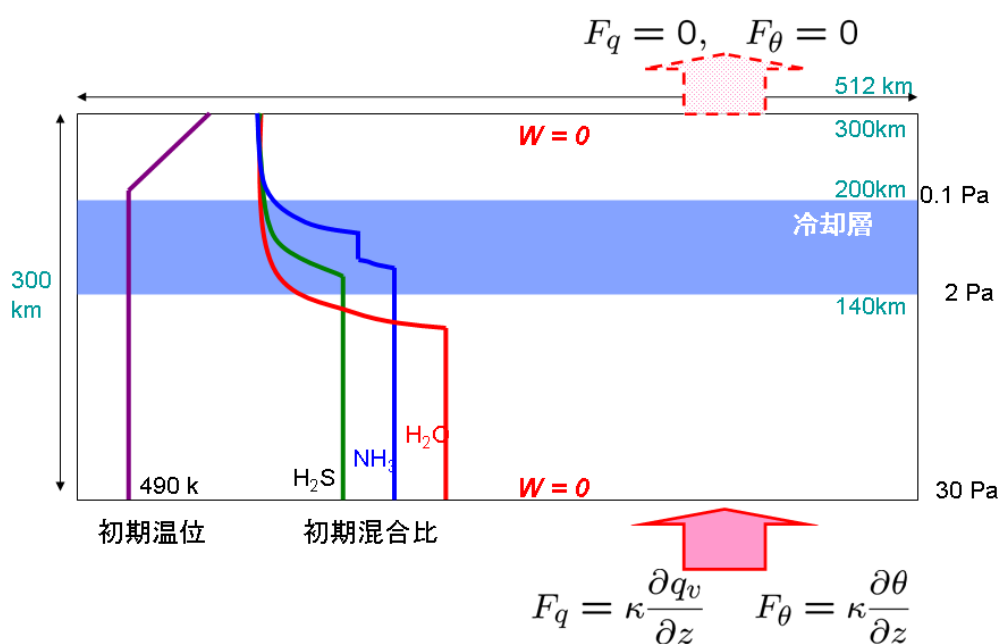


図 3.3 計算設定の模式図

実験名	N, S, O の存在度 (太陽組成との比)	冷却率 (K/day)	水平領域 (km)	積分時間 (day)	CPU 時間 (hour)
標準実験	1.0	- 1	512	10	4
0.1 × solar	0.1	- 1	512	10	4
5 × solar	5.0	- 1	512	50	32
10 × solar	10.0	- 1	512	50	32
0.1 × rad	1.0	- 0.1	1024	180	108
1 × region	1.0	- 0.1	512	100	30
2 × region	1.0	- 0.1	1024	100	60
10 × region	1.0	- 0.1	5120	180	540

表 3.3 実験名とそれぞれのパラメタ, および計算時間.

3.4 標準実験の結果

3.4.1 実験の概要

本節では、凝結成分の存在度を太陽組成と同じとし、放射強制を模した一様冷却の大きさを -1 K/day とした実験（標準実験）で得られた統計的平衡状態での対流運動と凝結成分分布の描像をまとめる。さらに、そのような対流運動と凝結成分分布を実現するためのメカニズムを大気の成層安定度と熱収支を元に考察する。

以降の議論では「雲」と「雨」をまとめて「雲」と呼ぶことにする。また単に「雲」と言った場合には、 H_2O 、 NH_4SH 、 NH_3 の雲すべてを指すこととする。

3.4.2 対流運動と凝結成分分布の描像

図 3.4 に鉛直速度を示す。 H_2O 凝結高度（約 120 km ）を境に対流運動は上下に分離する。 H_2O 凝結高度より下方は凝結を伴わない乾燥対流領域となり、同程度の幅を持つ上昇域と下降域が交互に並ぶ。 H_2O 凝結高度より上方は湿潤対流領域となり、対流雲の発達に伴う顕著な上昇域が見られる。湿潤対流領域において、上昇域の幅は下降域の幅に比べて狭い。これらの特徴は H_2O の凝結のみ考慮した Nakajima *et al* (2000) の結果に見られたものと同じである。我々の予想に反して、 NH_3 凝結高度（約 180 km ）と NH_4SH 生成高度（約 150 km ）は、その高度で細かな上昇流と下降流が見られるものの、対流運動に対する定常的な境界としては作用していない。

乾燥対流領域での鉛直速度は最大で 80 m/s 程度であり、湿潤対流領域での上昇域の鉛直速度は最大で 60 m/s 程度である。この鉛直速度は浮力による自由加速として説明可能である。代表的な値としてエンタルピー $\Delta H = 240 \text{ kJ mol}^{-1}$ 、比熱は $c_p = 30.0 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ 、分子量 $M = 18.0 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ を用いると、水の凝結に伴う潜熱は、

$$\begin{aligned} L\Delta q_v &= \Delta H \left(\frac{M}{c_p} \right) \Delta q \\ &= \frac{240.0 \times 10^3 \times 18.0 \times 10^{-3} \times 6.1 \times 10^{-3}}{30.0} \\ &\approx 0.9 \end{aligned} \tag{3.31}$$

である。但し凝結高度の下の $1 \times \text{solar}$ の H_2O を含んだ気塊が全て凝結したものとして Δq を与えた。この浮力を用いて乾燥対流領域における浮力に伴う自由加速を計算すると、

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{\frac{g\Delta\theta D}{\bar{\theta}}} \\ &= \sqrt{\frac{23 \times 0.9 \times 120 \times 10^3}{490}} \\ &\approx 71.0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

となり、湿潤対流領域について計算すると、

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{\frac{g\Delta\theta D}{\bar{\theta}}} \\ &= \sqrt{\frac{23 \times 0.9 \times 80 \times 10^3}{490}} \\ &\approx 58.0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

となる。これらの値は特徴的な鉛直速度の大きさと整合的である。

図 3.5 に初期状態からの温位偏差を示す。 H_2O 凝結高度 (約 120 km) から対流圏界面 (200 km) において、凝結の生じている領域は周囲に比べて温位が高くなっている。また H_2O 凝結高度より下では、その上部に存在する雲からの降雨が再蒸発することによって形成される負の温位偏差が見られる。この負の温位偏差によって、 H_2O 凝結高度より下方の下降流が駆動されている。

図 3.6 に雲の分布を示す。雲の成長に伴い、 H_2O 雲粒と NH_4SH 雲粒は NH_3 凝結高度を超えて対流圏界面付近まで移流されている。この特徴は、平衡雲凝結モデル (Weidenschilling and Lewis, 1973; Atreya and Romani, 1985) で与えられた 3 層の雲が別々の高度領域に分かれて存在するという描像 (例えば 図 2.3 参照) とは明らかに異なるものである。雲分布の時間変化 (ここでは示さない) を調べてみると、雲の生成消滅の時間スケールはおおよそ数時間である。

図 3.7 に凝結成分気体の分布を示す。それぞれの凝結成分気体は雲の存在する領域で飽和しているが、雲の無い領域では不飽和となっている。図 3.7 の大きな特徴は H_2O 凝結高度を境に 3 種類の凝結成分気体の混合比の分布が大きく変化することである。すなわち H_2O 凝結高度より下方では各々の凝結成分気体はほぼ水平一様に分布し、 H_2O 凝結高度より上方では各々の混合比の水平方向の非一様性が大きい。さらに、場所によっては非常に乾燥した気塊が対流圏界面から下降しているが、その乾燥気塊が H_2O 凝結高度を超えて下降することはない。これらの結果は、 H_2O 凝結高度は力学的な境界としてだけ

ではなく、物質的な境界としても作用することを意味する。その一方で、 NH_3 凝結高度と NH_4SH 生成高度は H_2O 凝結高度のように物質に対する境界として作用していない。

図 3.8 と図 3.9 に時間水平平均した雲と凝結成分気体の鉛直分布を示す。これらの図に示された雲と凝結成分気体の鉛直分布の特徴は、これまで木星大気の標準的なモデルとして利用されてきた平衡雲凝結モデルから予想される鉛直分布（例えば 図 2.3）とは大きく異なる。 H_2O 雲と NH_4SH 雲は NH_3 凝結高度を超えて対流圏界面付近まで移流され、対流圏上層で 3 種類の雲が重なり合って存在する。 NH_3 と H_2S の水平時間平均した混合比の鉛直分布は、それぞれの凝結高度よりも低い高度に存在する H_2O 凝結高度付近から高度と共に減少を始める。

3.4.3 流れ場の形成および安定度との関係

系の熱収支を元に、流れ場形成のメカニズムを考察する。図 3.10 の実線は H_2O および NH_3 の凝結と蒸発、 NH_4SH の生成と消滅に伴う加熱と冷却を示す。加熱冷却分布に対する NH_3 と NH_4SH の凝結と蒸発の寄与は H_2O のそれらの寄与に比べて小さい。高度 140 km から 200 km の範囲において、 NH_3 の凝結と蒸発に伴う加熱冷却、 NH_4SH の生成と消滅に伴う加熱冷却、および移流による加熱冷却は、合計で放射冷却を模した一様冷却と釣り合っている。また、 H_2O 凝結高度（約 120 km）より下での熱収支は、この高度領域の対流が H_2O 雲の蒸発による冷却と下部境界での加熱によって駆動されていることを示唆する。これらの特徴から考えると、流れ場形成のメカニズムは 図 3.11 のようになる。 H_2O 凝結高度（約 120 km 高度）から対流圏界面までの領域では、主に放射を模した一様冷却によって下降流が駆動され、冷却と釣り合うだけの H_2O 潜熱の解放によって上昇流が駆動されると考えられる。また H_2O 凝結高度より下方では、 H_2O 雨の冷却によって下降流が駆動され、下部境界に達した気塊が冷却量と釣り合うだけの熱を受け取ることで上昇流が駆動されると考えられる。

H_2O 凝結高度が対流運動と凝結成分気体の分布に対して力学的・物質的な境界として作用する理由は、この高度に強い安定層が形成されているためである。図 3.12 に時間水平平均した安定度 N^2 （浮力振動数 N の自乗）の鉛直分布を示す。 H_2O の凝結に伴う安定層の強度は主に分子量の鉛直勾配の寄与で決まっており、潜熱による加熱の寄与は相対的に小さい。 NH_4SH の生成に伴う安定層は H_2O の生成に伴う安定層と区別することは困難である。 NH_3 の凝結に伴う成層も存在するが、図 3.4 の鉛直速度の分布から、その強度は対流運動の鉛直構造を大きく変えるほど強くないことが示唆される。 NH_3 の凝結と NH_4SH

の生成に伴う安定度の大きさは、平衡雲凝結モデルの予想 (図 2.4) に比べて小さい。なぜならば、図 3.9 に示されたように NH_3 蒸気と H_2S 蒸気の鉛直分布はその平衡雲凝結モデルによって与えられた分布と異なることから、 NH_3 凝結高度と NH_4SH 生成高度での分子量の鉛直勾配は平衡雲凝結モデルの結果に比べて小さくなるからである。

3.4.4 実験のまとめ

凝結成分の存在度を太陽組成と同じとし、Nakajima *et al.* (2000) と同様に放射強制を模した一様冷却の大きさを -1 K/day とした実験を行った。

基本的に対流運動は標準実験と同様に、 H_2O 凝結高度を境に上下に 2 分され、上部に凝結を伴う湿潤対流領域、下側に凝結を伴わない乾燥対流領域が形成された。この特徴は Nakajima *et al.* (2000) と同じである。我々の予想に反して NH_3 の潜熱と NH_4SH の反応熱に起因する安定層は対流運動の鉛直構造に大きくは影響しない。また上昇域では湿潤対流層全体で対流が生じ、 H_2O と NH_4SH 雲層は NH_3 凝結高度を超え対流圏上部まで存在する。この雲分布の特徴は、3 層の雲が別々の高度領域に分かれて存在するという鉛直 1 次元の平衡雲凝結モデル (Weidenschilling and Lewis, 1973; Atreya and Romani, 1985) の結果に基づいた描像と明らかに異なるものである。

対流運動が H_2O 凝結高度を境に上下に 2 分される理由は、 H_2O の凝結に起因する強い安定層が形成されるからである。この成層構造の特徴のために、大気上部の乾燥気塊は H_2O 凝結高度よりも下へは下降できない。

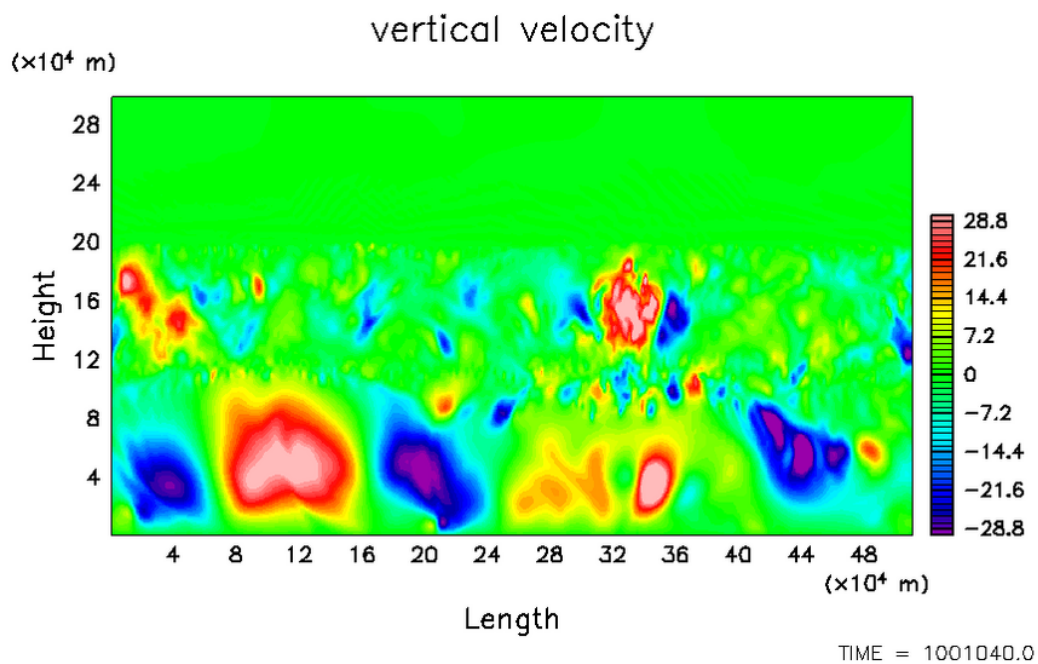


図 3.4 鉛直速度の分布. 30 m/s – –30 m/s の範囲を線形プロットした.

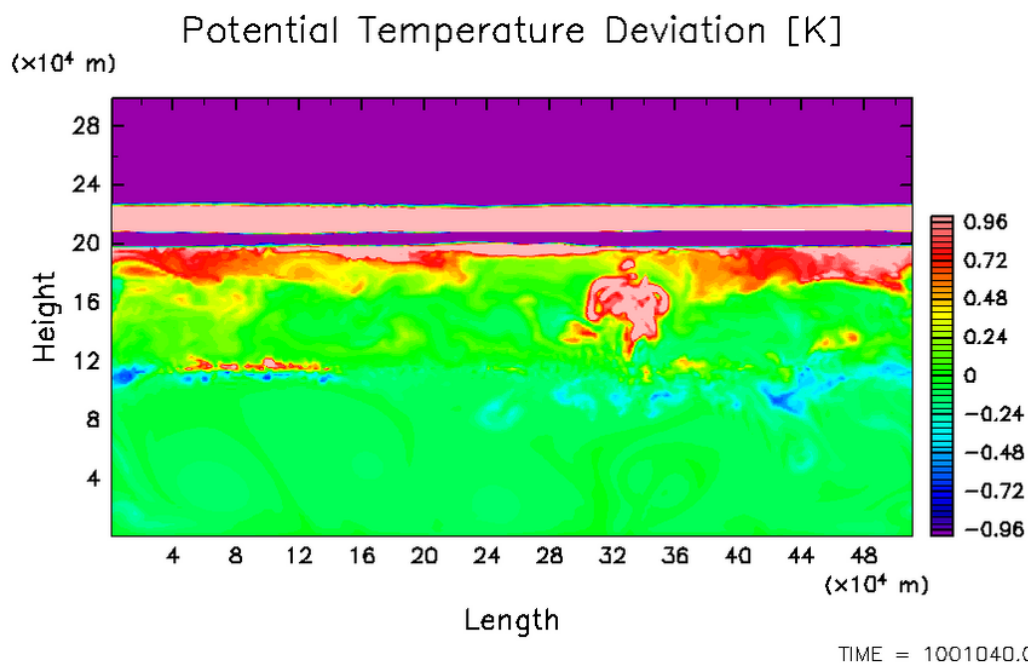


図 3.5 乾燥断熱状態からの温位偏差の分布. 1 K – –1 K の範囲を線形プロットした.

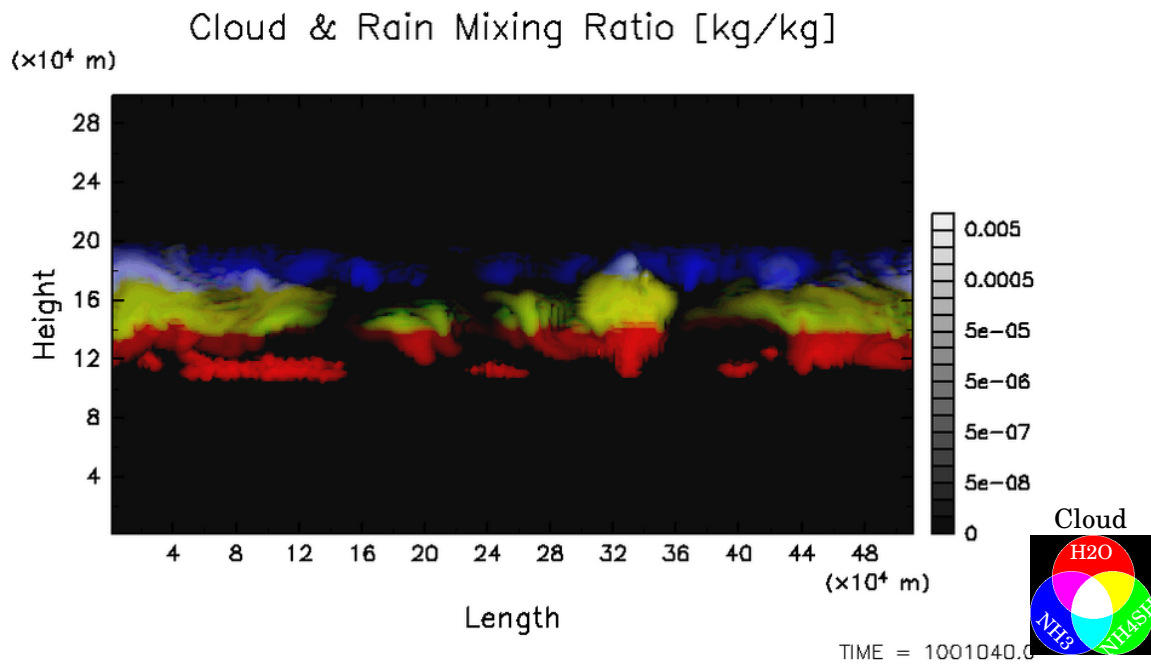


図 3.6 雲混合比の分布. H₂O を赤 (R), NH₄SH を緑 (G), NH₃ を青 (B) で表し, 共存する領域はそれぞれの色の合成色 (RGB 合成色) で表現する. 但し, 各々の凝結物を $1.0 \times 10^{-8} - 1.0 \times 10^{-2}$ の範囲を対数プロットした.

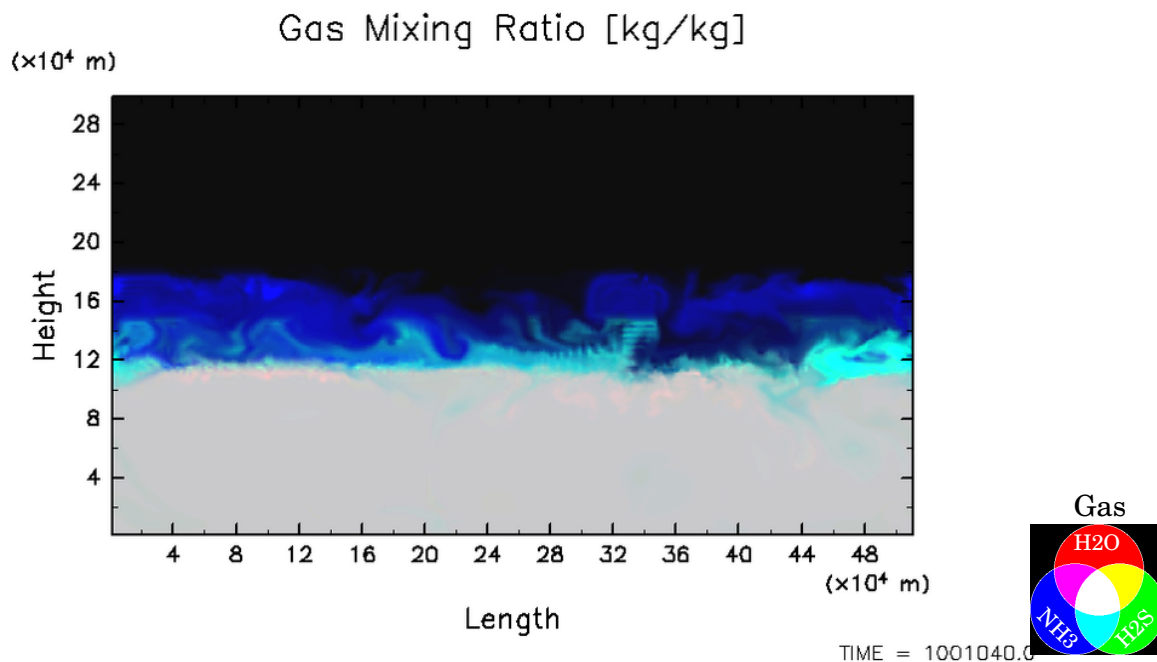


図 3.7 凝結成分気体の混合比の分布. H₂O を赤 (R), H₂S を緑 (G), NH₃ を青 (B) で表し, 共存する領域はそれぞれの色の合成色 (RGB 合成色) で表現する. 但し, 初期混合比で規格化し, 線形プロットした.

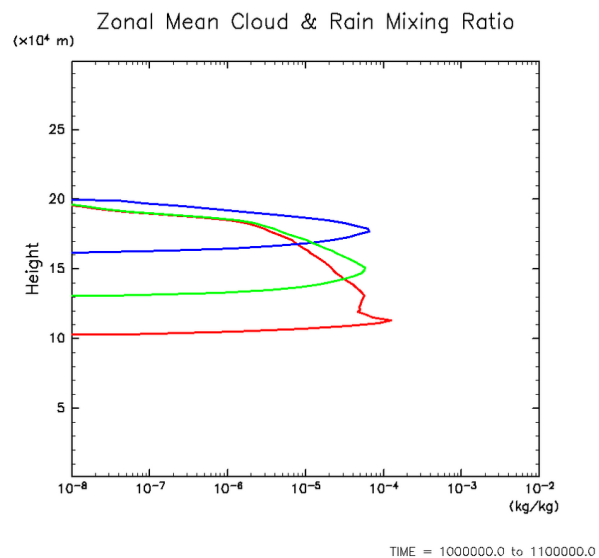


図 3.8 時間水平平均した雲の鉛直分布. 但し, 10^5 秒間の平均である. H_2O を赤 (R), NH_4SH を緑 (G), NH_3 を青 (B) で表す.

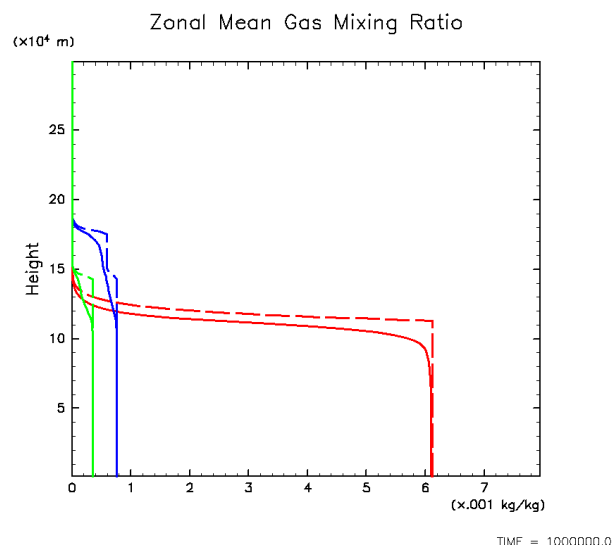


図 3.9 時間水平平均した凝結成分気体の混合比の鉛直分布. 但し, 10^5 秒間の平均である. H_2O を赤 (R), NH_4SH を緑 (G), NH_3 を青 (B) で表す. また, 太線は雲対流モデル計算の結果, 細線は平衡雲凝結モデルを用いて計算した結果である.

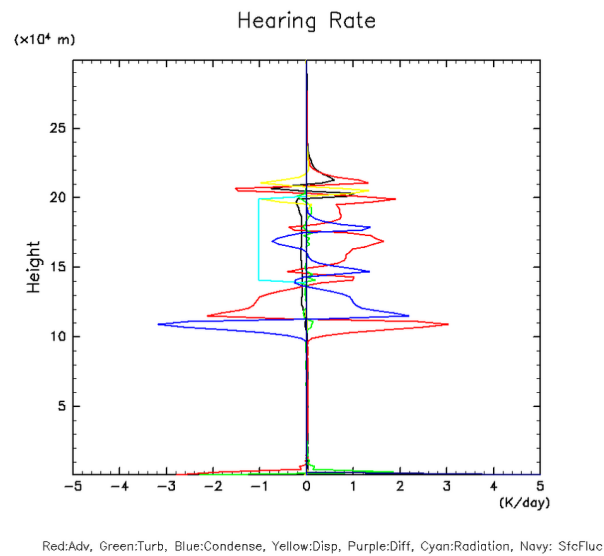


図 3.10 時間水平平均値した加熱率の鉛直分布. 但し, 10^5 秒間の平均である. 水色線が放射, 青線が凝結と化学反応に伴う加熱冷却, 赤線が移流, 緑線が乱流拡散, 黄色線が数値拡散, 紫線が散逸加熱, 紺色線が地表面フラックスである.

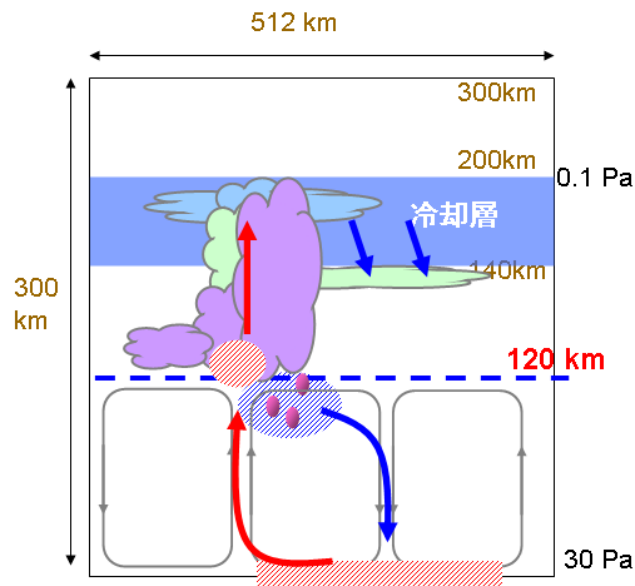


図 3.11 系の熱収支から予想される流れ場形成の模式図.

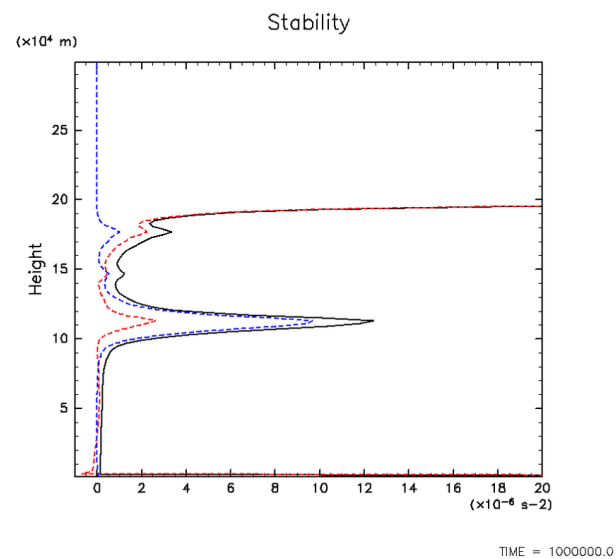


図 3.12 時間水平平均値した安定度の鉛直分布 (黒線). 安定度に対する温度の寄与 (赤破線), 安定度に対する凝結成分気体の分子量の寄与 (青破線) も示す. 但し, 10^5 秒間の平均である.

3.5 凝結成分の存在量に対する応答実験

3.5.1 実験の概要

大気中の凝結成分量を太陽組成の 0.1, 5, 10 倍した実験 (以下 $0.1 \times \text{solar}$ 実験, $5 \times \text{solar}$ 実験, $10 \times \text{solar}$ 実験と呼ぶ) の結果と標準実験の結果との相互比較を行い, 統計的平衡状態における対流運動と凝結成分分布の凝結成分存在度に対する依存性を調べることをする。

木星大気の凝結成分存在度は, 惑星形成論に基づき, 太陽組成程度もしくは太陽組成に比べ C, N, O, S といった重元素に富んだものと考えられている。なぜならば太陽系の標準形成モデルでは, 木星大気は集積された原始太陽系星雲ガスに微惑星の氷や岩石の成分が溶解したものと考えられているからである。その一方で, ガリレオプローブの観測結果では, 20 bar 面高度に至るまで H_2O 存在度は太陽組成の 0.3 倍程度であった。そのため, 大気中の凝結成分存在度をパラメタとして広く変化させる実験が必要となる。

3.5.2 対流運動と凝結成分分布の描像

本節では, それぞれの実験の典型的な対流運動と凝結成分分布の描像を示す。但し, $5 \times \text{solar}$ 実験と $10 \times \text{solar}$ 実験では H_2O 凝結高度から対流圏界面まで達する流れが存在する時期 (ここでは活発期と呼ぶ) と, 主として放射層の下端から NH_3 凝結高度の間で弱い対流が生じている時期 (ここでは静穏期と呼ぶ) を繰り返す。そのため, $5 \times \text{solar}$ 実験と $10 \times \text{solar}$ 実験に関しては活発期と静穏期における典型的な対流運動と凝結成分分布の描像を示す。

図 3.13 に鉛直速度の分布を示す。 $0.1 \times \text{solar}$ 実験 (a) は標準実験 (b) と異なり, 対流運動は H_2O 凝結高度 (約 140 km) で分割されない。下部境界から対流圏界面まで達する上昇域が見られる。このことは H_2O の凝結に伴う安定層が対流運動に対する力学的な境界として作用しないことを意味する。しかしながら, 凝結と反応熱の影響が完全に無視できるわけではなく, 上昇流と下降流の分布は必ずしもベナール対流的な分布とはならない。 $5 \times \text{solar}$ 実験と $10 \times \text{solar}$ 実験の活発期 (c, e) は標準実験 (b) と同様に, H_2O 凝結高度を境に対流運動は上下に分割され, 下部に凝結を伴わない乾燥対流領域, 上部に湿潤対流

領域が形成される。湿潤対流領域では領域全体を貫く顕著な上昇域が見られる。冷却層下端 (140 km) や NH_3 凝結高度 (約 170, 160 km) 付近に局所的な対流運動が見られるが、それらの高度領域は H_2O 凝結高度と異なり、力学的な境界として働いていない。その一方で $5 \times \text{solar}$ 実験と $10 \times \text{solar}$ 実験の静穏期 (d, f) では、対流運動の生じる高度領域は冷却層下端から対流圏界面の間と下部境界付近に分かれる。図には示さないが、 $10 \times \text{solar}$ 実験の場合には下部境界付近の対流運動は止まることもある。静穏期において NH_3 凝結高度 (約 170, 160 km) は平均的には力学的な境界として働き、その高度を境に対流運動は上下に2分される。上昇域と下降域の水平スケールはほとんど同じであり、その大きさは標準実験に比べて小さい。

図 3.14 に乾燥断熱状態からの温位偏差を示す。 $0.1 \times \text{solar}$ 実験 (a) では、上昇域において凝結と反応熱に起因する正の温位偏差が見られ、下降流域では雨の蒸発に起因する負の温位偏差が見られる。上昇流の水平スケールが大きいため、標準実験に比べ正の温位偏差が見られる領域は水平方向に広がる。 $5 \times \text{solar}$ 実験と $10 \times \text{solar}$ 実験の活発期 (c, e) では、 H_2O 凝結高度から対流圏界面 (200 km) において、凝結の生じている領域は周囲に比べて温位が高くなっている。また H_2O 凝結高度より下では、その上部に存在する雲からの降雨が再蒸発することによって形成される負の温位偏差が見られる。これら $5 \times \text{solar}$ 実験と $10 \times \text{solar}$ 実験の活発期の特徴は、標準実験に見られた特徴と同様である。 $5 \times \text{solar}$ 実験と $10 \times \text{solar}$ 実験の静穏期 (d, f) は、静穏期は活発期に比べて温位偏差の東西非一様性は小さい。 NH_3 凝結高度と対流圏界面 (200 km) に挟まれた高度領域と高度 120 km 付近から冷却層下端 (140 km) に挟まれた高度領域は相対的に温位が高い。その一方で、冷却層下端 (140 km) から NH_3 凝結高度に挟まれた高度領域は相対的に温位が低い。冷却層下端 (140 km) から NH_3 凝結高度に挟まれた高度領域で温位が低くなりやすい理由としては、常に -1 K/day の放射を模した一様冷却を受けること、 NH_3 雨の再蒸発に伴う冷却が働くこと、 NH_4SH の反応熱は NH_3 の潜熱に比べて小さいこと、が挙げられる。高度 120 km 付近から冷却層下端 (140 km) に挟まれた高度領域で温位がその上の領域に比べて温位が高い状態を保てる理由は分子量効果と考えられる。木星の凝結成分気体の分子量は大気主成分気体の分子量に比べて大きく、温位の上昇に伴う正の浮力は鉛直方向に分子量が減少することによる負の浮力よりも大きくなないと対流は始まらない (付録 E 章を参照のこと)。大気中の凝結成分の増加にかかわらず、冷却層よりも下方の高度 120 km 付近から温位の上昇が見られる。このことは、静穏期の対流が冷却層下端で生じた不安定を解消するために生じていることを示唆する。

図 3.15 に対流雲の分布を示す。 $0.1 \times \text{solar}$ 実験 (a) では、標準実験の結果 (b) に比べて水平スケールの大きな雲が見られる。 $0.1 \times \text{solar}$ 実験では対流セルの水平スケールと鉛

直スケールが標準実験に比べて大きいことを反映している。5 × solar 実験と 10 × solar 実験の活発期 (c, e) では、上昇域において H_2O の雲と NH_4SH の雲が NH_3 凝結高度の上空まで移流される。成長した対流雲が消滅する前に次の対流雲が成長を始め、また冷却層下部 (140 km) と NH_3 凝結高度 (約 170, 160 km) 付近で局所的な対流運動が生じる (図 3.13 c,e) ため、冷却層下端 (140 km) から対流圏界面までは常に雲に覆われた描像を示す。5 × solar 実験と 10 × solar 実験の静穏期 (d, f) では、 H_2O と NH_4SH から成る水平スケールの小さな対流雲が規則正しく並び、その雲層とは独立して NH_3 から成る水平スケールの小さな対流雲が存在する。この特徴は標準実験の雲分布には見られなかったものである。さらに H_2O と NH_4SH から成る雲層の雲底高度は 5 × solar と 10 × solar 実験の場合でほとんど変わらず、おおよそ 120 km である。このことは図 3.14 (d,f) の温位分布と整合的である。

時間水平平均した雲混合比の鉛直分布を図 3.16 に示す。標準実験 (b), 0.1 × solar 実験 (a), および 5 × solar 実験と 10 × solar 実験の活発期 (c, e) は同じ特徴を持つ。すなわち H_2O と NH_4SH 雲層が NH_3 凝結高度を超え対流圏上部まで存在する。この特徴は従来の熱平衡計算によって与えられた 3 種類の雲層が別々の高度領域に独立して存在するという描像とは明らかに異なる。5 × solar 実験と 10 × solar 実験の静穏期 (d, f) の水平平均値は、 H_2O の雲層と NH_4SH の雲層が重なり合って存在すること、 H_2O の雲層と NH_4SH の雲層は NH_3 凝結高度をあまり超えられないことを示す。静穏期では NH_3 と NH_4SH が主たる凝結物であり、 H_2O 混合比はそれらの混合比に比べ 1 桁程度小さい。さらに NH_3 混合比と NH_4SH 混合比は活発期におけるそれらの混合比に比べ 1 桁程度小さくなっている。5 × solar 実験と 10 × solar 実験の静穏期において NH_4SH の雲粒混合比の最大値となる高度は高度 140 km で変わらない。この高度は冷却層の下端であり、冷却層の下端の不安定によって対流雲が生成されることを示唆する。また 0.1 × solar 実験 (a) において H_2O の雲粒混合比の最大値が標準実験での値よりも大きいことは、雲に覆われた領域の面積を反映していると考えられる。図 3.17 に活発期と静穏期を含む平均的な雲混合比の鉛直分布を示す。 H_2O と NH_4SH 雲層が NH_3 凝結高度を超え対流圏上部まで存在する。この特徴は活発期に見られたものと同様であるが、雲混合比の大きさは活発期に比べて小さくなっている。また、 H_2O 雲混合比の鉛直分布には局所的なピークが 2 箇所見られ、これらは静穏期と活発期の H_2O 雲層の雲底に対応する。

凝結成分気体の分布を図 3.18 に示す。0.1 × solar 実験 (a) では、降水の再蒸発に伴って凝結成分気体混合比の増加した気塊や凝結成分がほとんど含まれていない気塊が凝結高度のかなり下方まで移流される。また、下部境界から上昇する凝結成分気体を多く含む気塊が対流圏界面付近まで上昇する。このことは、 H_2O 凝結高度は力学的境界として働かない

だけでなく、物質的境界として働かないことを意味する。5 × solar 実験 (c, d) と 10 × solar 実験 (e, f) は、標準実験 (b) と同様、 H_2O の凝結高度が力学的な境界として働くだけでなく、物質的境界としても働くことを示す。 H_2O 凝結高度より下方では各々の凝結成分気体はほぼ水平一様に分布し、 H_2O 凝結高度より上方では各々の混合比の水平方向の非一様性が大きい。さらに、場所によっては非常に乾燥した気塊が対流圏界面から下降しているが、その乾燥気塊が H_2O 凝結高度を超えて下降することはない。活発期は静穏期に比べ、湿潤対流領域における凝結成分気体の混合比の水平非一様性が大きい。

図 3.19 に時間水平平均した凝結成分気体の混合比の鉛直分布を示す。0.1 × solar 実験 (a) では、凝結成分気体の鉛直分布は熱平衡状態から予想される鉛直分布に比べて、凝結高度付近で値が減少し、凝結高度より下方で値が増加するという特徴を示す。この特徴は、降水の再蒸発に伴って凝結成分気体混合比の増加した気塊や凝結成分がほとんど含まれていない気塊が凝結高度のかかなり下方まで移流されること、および下部境界から上昇する凝結成分気体を多く含む気塊が対流圏界面付近まで上昇可能なこと、と整合的である (図 3.19 a 参照)。5 × solar 実験と 10 × solar 実験の活発期 (c,e) の特徴は標準実験 (b) とほぼ同様である。しかし 5 × solar 実験と 10 × solar 実験の活発期 (d,f) の特徴は標準実験 (b) とことなり、これまで木星大気の標準的なモデルとして利用されてきた平衡雲凝結モデルから予想される鉛直分布 (例えば 図 2.3) と似た分布となる。特に NH_3 の混合比の鉛直分布は、 NH_3 凝結高度と NH_4SH 生成高度付近で段階的に変化する。

図 3.20 に時間水平平均した安定度 N^2 (浮力振動数 N の自乗) の鉛直分布を示す。0.1 × solar 実験 (a) では H_2O 凝結高度に弱い成層が見られるが、 NH_4SH と NH_3 凝結高度では成層がほとんど見られない。このため、それぞれの凝結高度と生成高度は力学的・物質的な境界として作用しない。5 × solar 実験と 10 × solar 実験の活発期 (c,e) の特徴は、標準実験 (b) で見られた特徴とほとんどおなじである。すなわち、 H_2O の凝結に伴う安定層が卓越する。 H_2O の凝結に伴う安定層の強度は主に分子量の鉛直勾配の寄与で決まっており、潜熱による加熱の寄与は相対的に小さい。 NH_4SH の生成に伴う安定層は H_2O の生成に伴う安定層と区別することは困難である。 NH_3 の凝結に伴う成層も存在するが、図 3.13 の鉛直速度の分布から、その強度は対流運動の鉛直構造を大きく変えるほど強くないことが示唆される。その一方で、5 × solar 実験と 10 × solar 実験の静穏期 (d,f) では、活発期 (c,e) に比べ、 NH_3 の凝結に伴う安定度の大きさが大きくなる。なぜならば、静穏期において NH_3 気体の混合比の鉛直分布は平衡雲凝結モデルから予想される分布に近づき、 NH_3 凝結高度における分子量の鉛直勾配は活発期に比べて大きくなるからである (図 3.19 d,f 参照)。 NH_3 凝結高度は、例えば図 3.13 の鉛直速度の分布で見られたように、対流運動の鉛直構造に影響を与えるようになる。

図 3.20 に示した N^2 の大きさは、凝結成分存在度に対してほぼ線形に増加している。このことは、以下の 2 点に起因すると考えられる。すなわち (1) 乾燥断熱的な温位分布に対して相対湿度 75 % となるように初期混合比を与えたこと、(2) H_2O 凝結高度は物質的な境界として作用するために、 H_2O 凝結高度より上空で H_2O 混合比が初期混合比以上に増加するのは困難であること、に起因する。湿潤断熱的な温位分布に対して初期値を決めたならば、 H_2O 凝結高度での分子量の鉛直勾配は緩くなり、 H_2O 凝結に伴う安定層の強度は弱くなる。その場合には、第 2.4 節で述べたように、 N^2 の大きさが凝結成分存在度に比例しなくなると予想される。初期値の与え方に関しては今後の課題である。

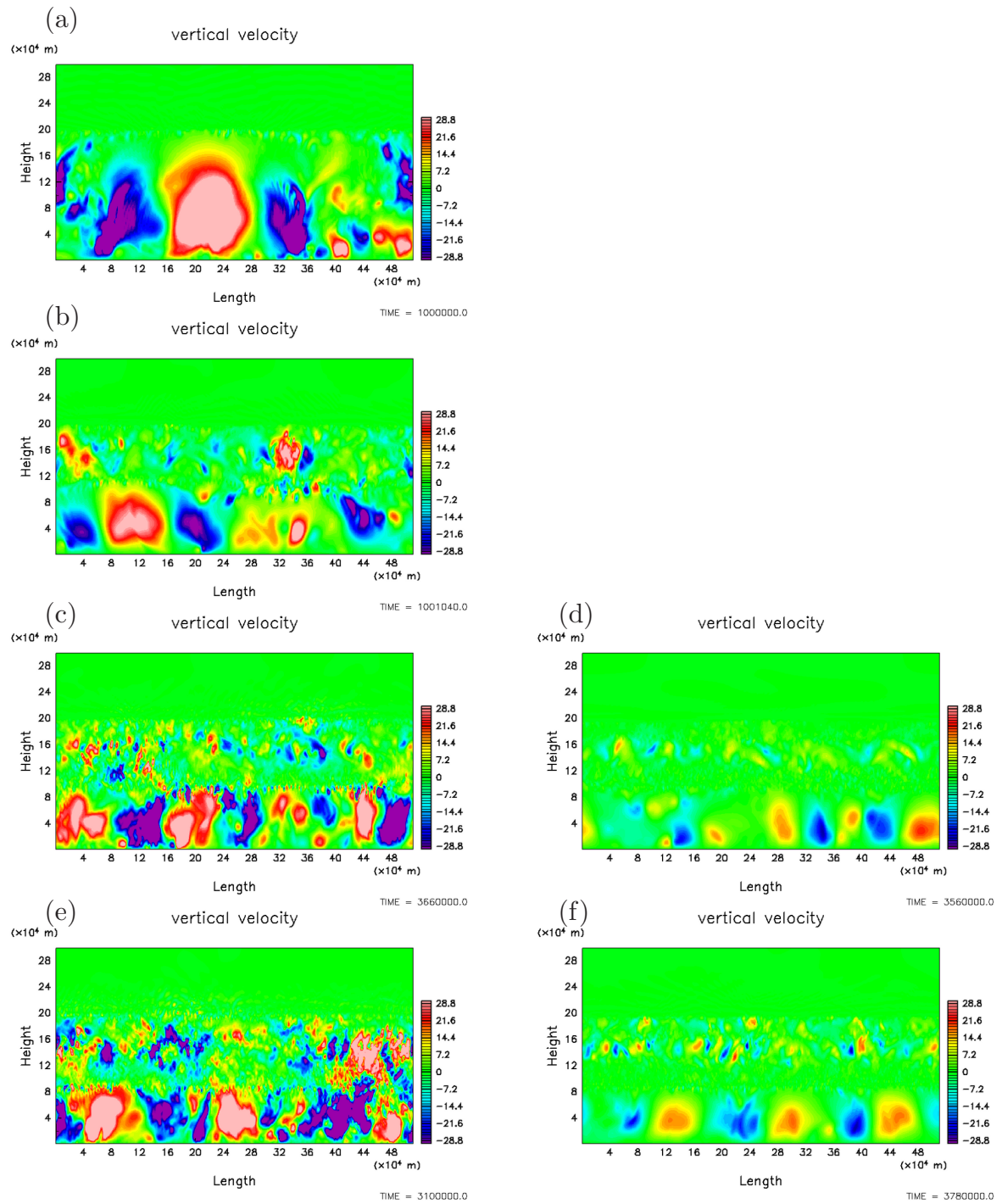


図 3.13 鉛直速度の分布の比較. 30 m/s – -30 m/s の範囲を線形プロットした. (a) 0.1 × solar 実験の結果, (b) 標準実験の結果, (c) 5 × solar 実験の活発期の結果, (d) 5 × solar 実験の静穏期の結果, (e) 10 × solar 実験の活発期の結果, (f) 10 × solar 実験の静穏期の結果, である.

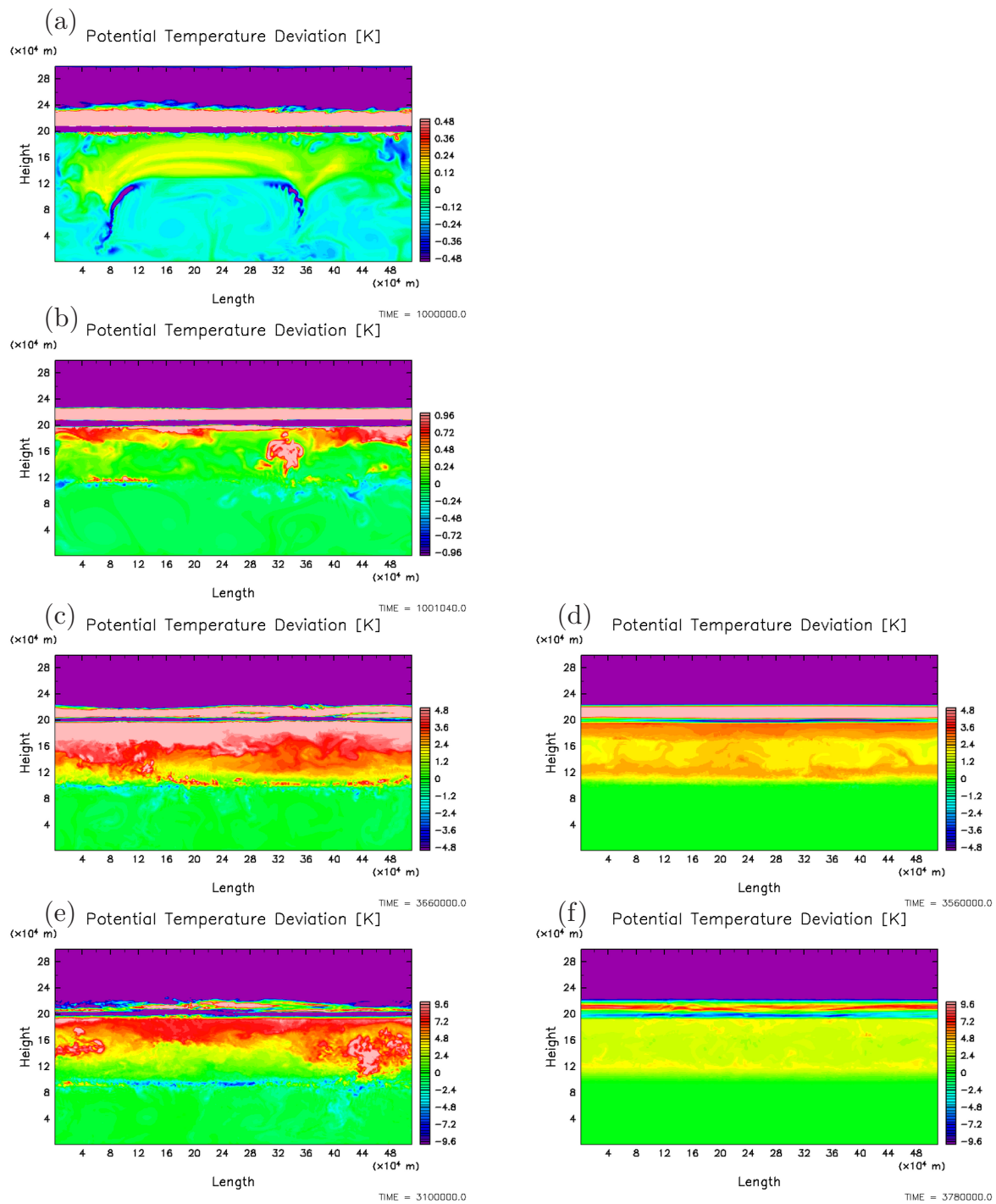


図 3.14 乾燥断熱状態からの温位偏差の分布の比較. 各実験でプロットしている温位偏差の範囲が異なることに注意. (a) $0.1 \times$ solar 実験の結果, (b) 標準実験の結果, (c) 活発期の $5 \times$ solar 実験の結果, (d) 静穏期の $5 \times$ solar 実験の結果, (e) 活発期の $10 \times$ solar 実験の結果, (f) 静穏期の $10 \times$ solar 実験の結果, である.

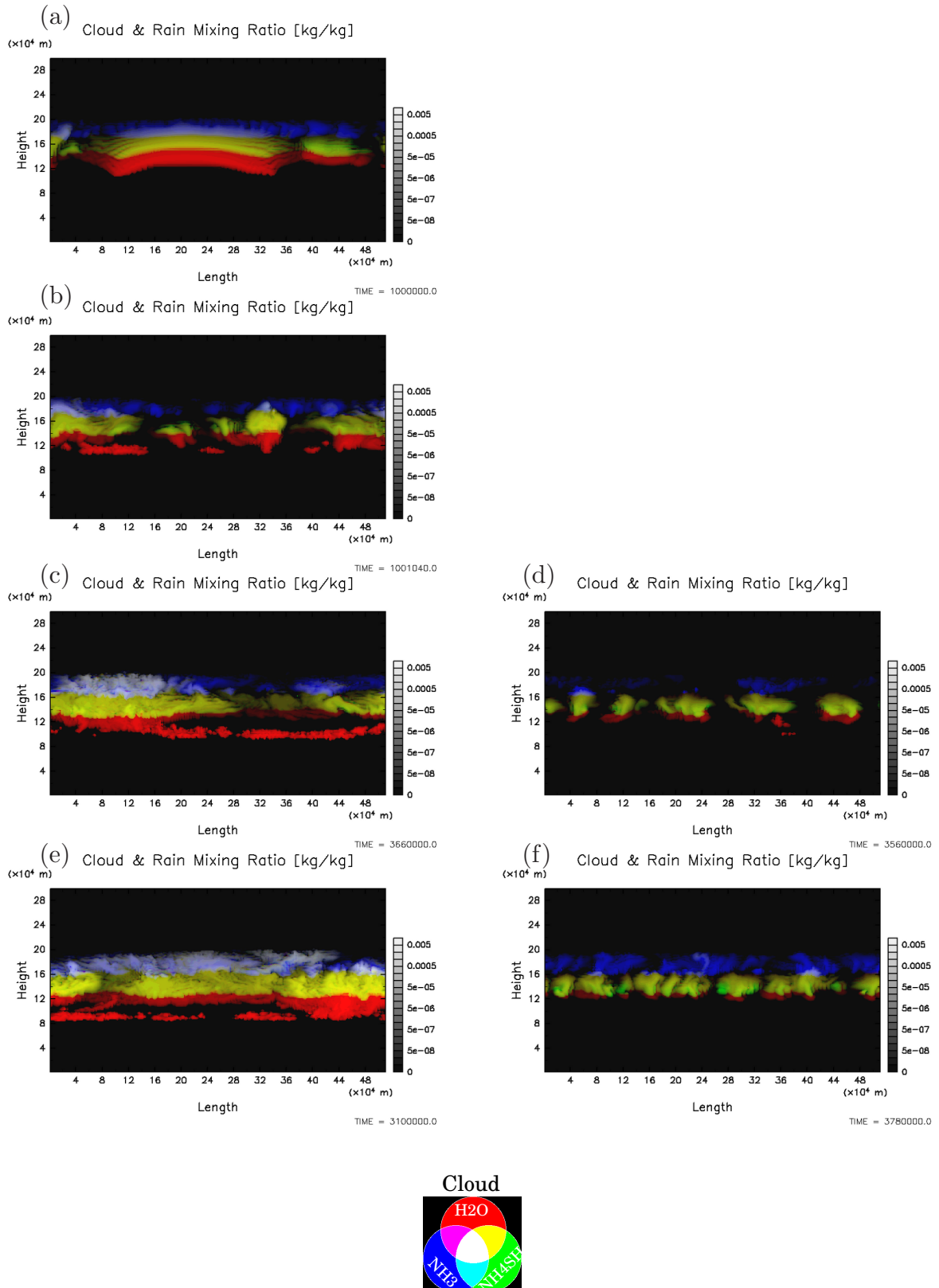


図 3.15 雲混合比の分布の比較. H_2O を赤 (R), NH_4SH を緑 (G), NH_3 を青 (B) で表し, 共存する領域はそれぞれの色の合成色 (RGB 合成色) で表現する. 但し, 各々の凝結物を $1.0 \times 10^{-8} - 1.0 \times 10^{-2}$ の範囲を対数プロットした. (a) $0.1 \times$ solar 実験の結果, (b) 標準実験の結果, (c) $5 \times$ solar 実験の活発期の結果, (d) $5 \times$ solar 実験の静穏期の結果, (e) $10 \times$ solar 実験の活発期の結果, (f) $10 \times$ solar 実験の静穏期の結果, である.

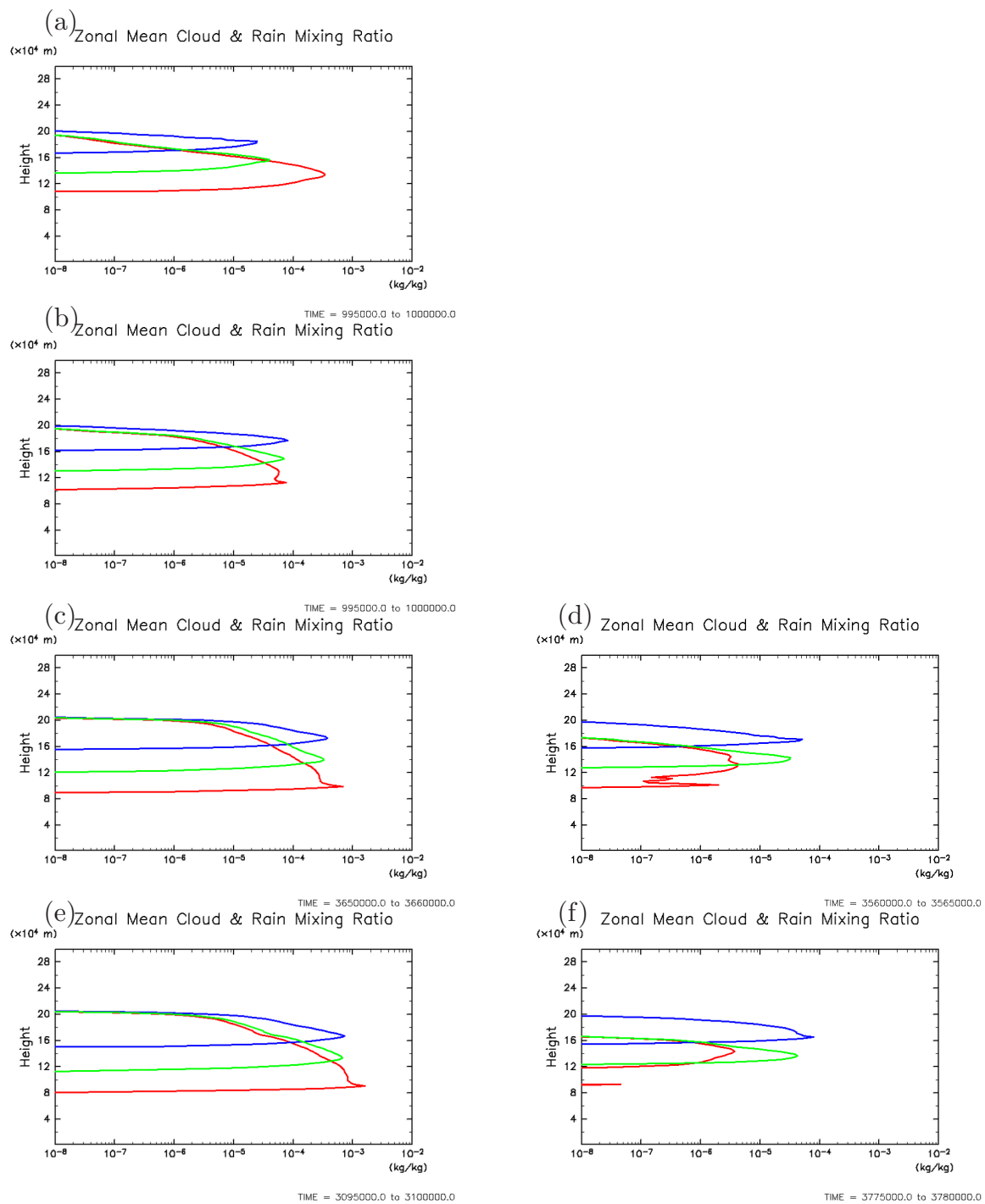
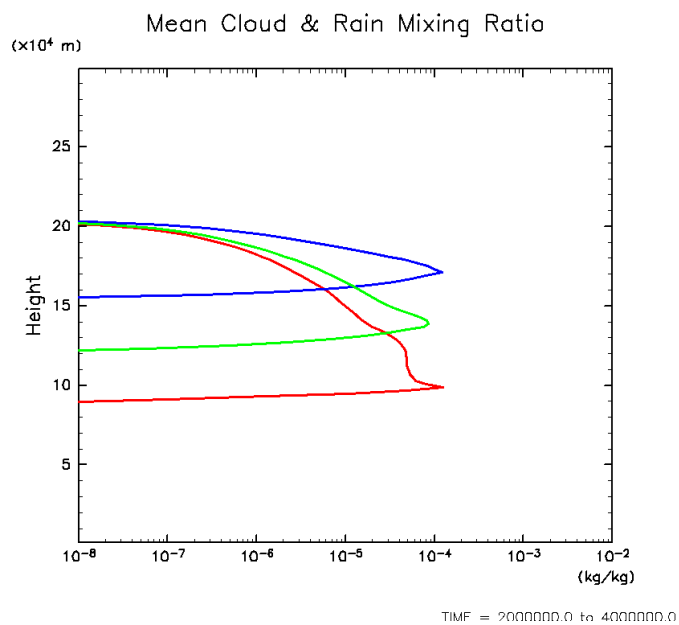


図 3.16 時間水平平均した雲の鉛直分布の比較. 但し, 5×10^3 秒間の平均である. H_2O を赤 (R), NH_4SH を緑 (G), NH_3 を青 (B) で表す. (a) $0.1 \times \text{solar}$ 実験の結果, (b) 標準実験の結果, (c) $5 \times \text{solar}$ 実験の活発期の結果, (d) $5 \times \text{solar}$ 実験の静穏期の結果, (e) $10 \times \text{solar}$ 実験の活発期の結果, (f) $10 \times \text{solar}$ 実験の静穏期の結果, である.

(a)



(b)

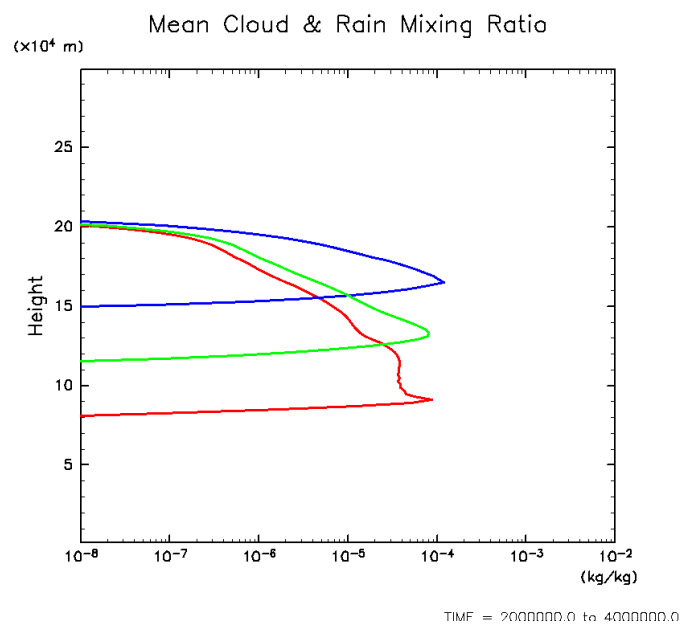


図 3.17 時間水平平均した雲の鉛直分布の比較。但し、活発期と静穏期を含む 2×10^6 秒間の平均である。H₂O を赤 (R), NH₄SH を緑 (G), NH₃ を青 (B) で表す。(a) $5 \times \text{solar}$ 実験の結果, (b) $10 \times \text{solar}$ 実験の結果である。

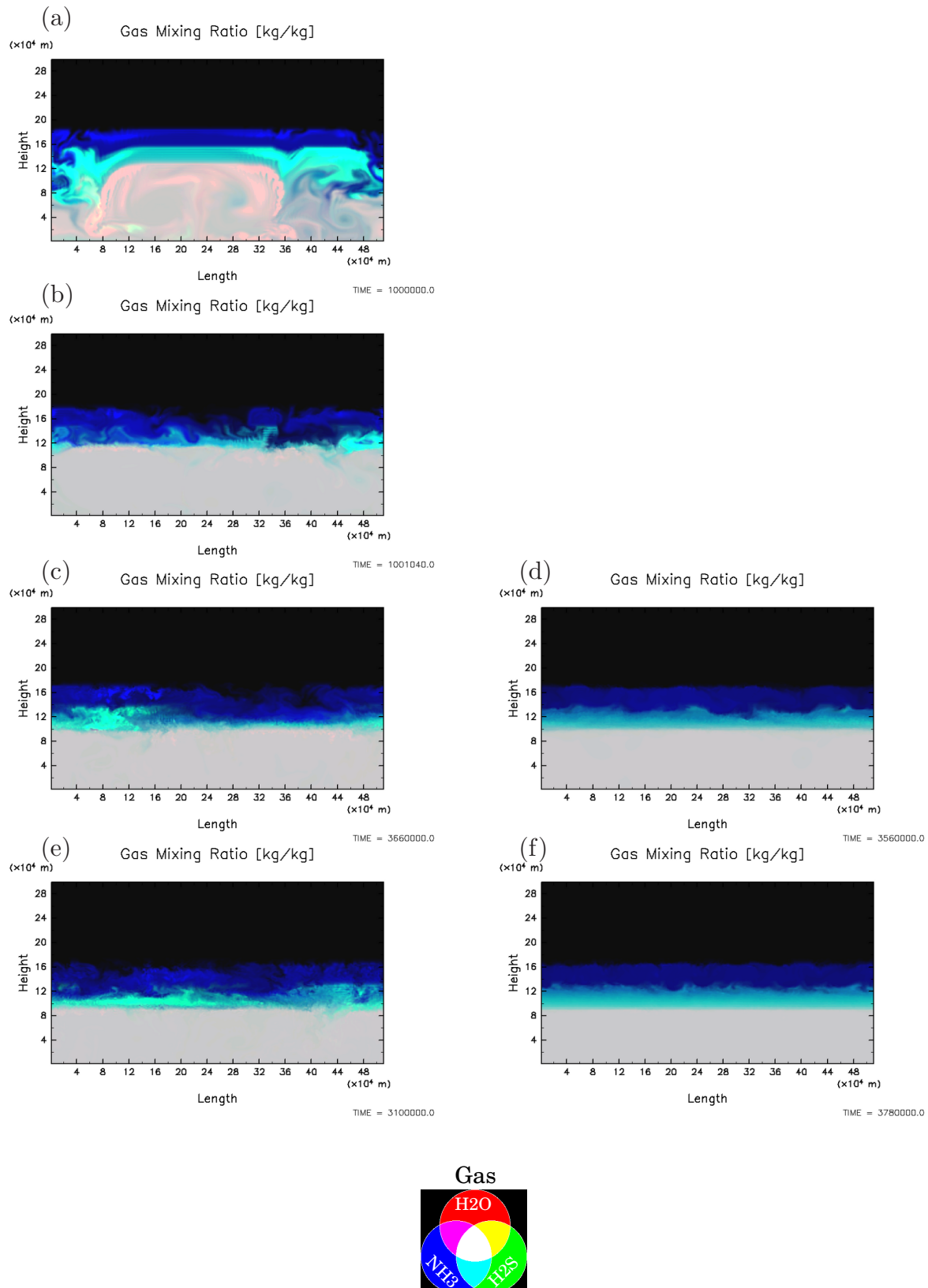


図 3.18 凝結成分気体の混合比の分布の比較. H₂O を赤 (R), H₂S を緑 (G), NH₃ を青 (B) で表し, 共存する領域はそれぞれの色の合成色 (RGB 合成色) で表現する. 但し, 初期混合比で規格化し, 線形プロットした. (a) 0.1 × solar 実験の結果, (b) 標準実験の結果, (c) 5 × solar 実験の活発期の結果, (d) 5 × solar 実験の静穏期の結果, (e) 10 × solar 実験の活発期の結果, (f) 10 × solar 実験の静穏期の結果, である.

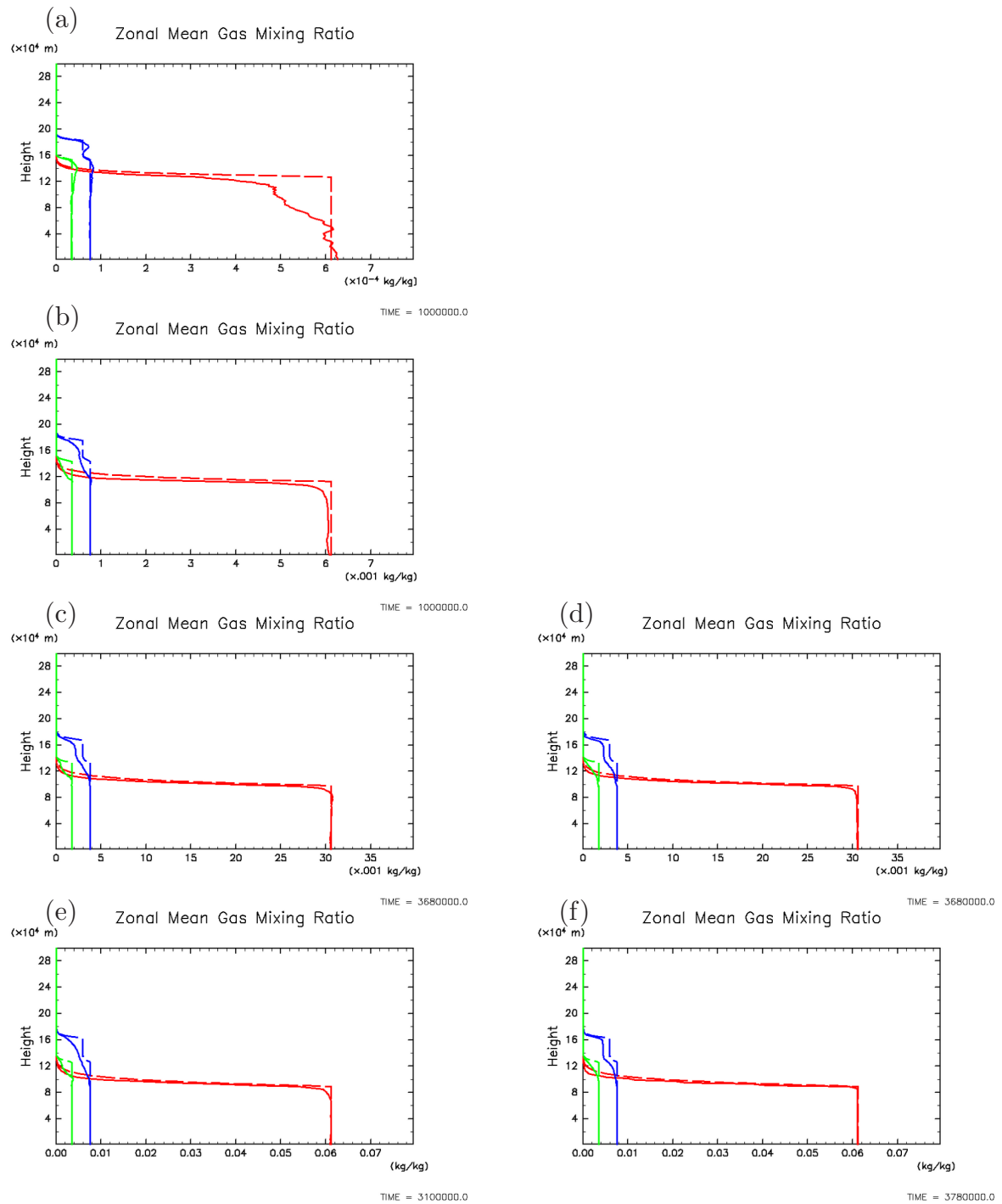


図 3.19 時間水平平均した凝結成分気体の混合比の鉛直分布. 但し, 5×10^3 秒間の平均である. H_2O を赤 (R), NH_4SH を緑 (G), NH_3 を青 (B) で表す. また, 太線は雲対流モデル計算の結果, 細線は平衡雲凝結モデルを用いて計算した結果である. (a) $0.1 \times \text{solar}$ 実験の結果, (b) 標準実験の結果, (c) $5 \times \text{solar}$ 実験の活発期の結果, (d) $5 \times \text{solar}$ 実験の静穏期の結果, (e) $10 \times \text{solar}$ 実験の活発期の結果, (f) $10 \times \text{solar}$ 実験の静穏期の結果, である.

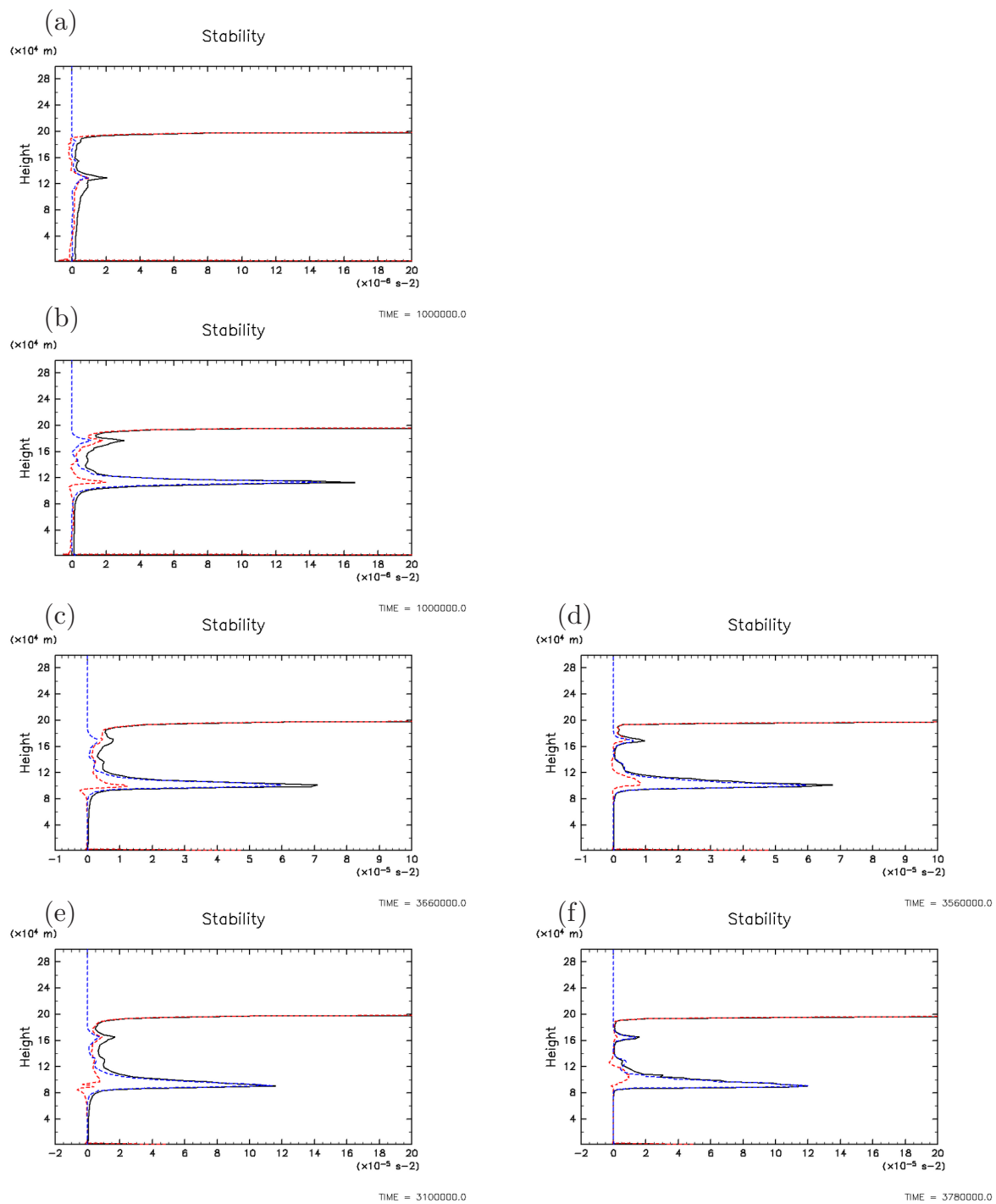


図 3.20 時間水平平均値した安定度の鉛直分布 (黒線). 安定度に対する温度の寄与 (赤破線), 安定度に対する凝結成分気体の分子量の寄与 (青破線) も示す. (a) $0.1 \times$ solar 実験の結果, (b) 標準実験の結果, (c) $5 \times$ solar 実験の活発期の結果, (d) $5 \times$ solar 実験の静穏期の結果, (e) $10 \times$ solar 実験の活発期の結果, (f) $10 \times$ solar 実験の静穏期の結果, である. 各実験において横軸の範囲が異なることに注意.

3.5.3 対流活動の時間変化とその要因

図 3.21 に水平平均した鉛直速度の自乗平均 $\sqrt{\bar{w}^2}$ の時間高度断面図を示す. $\sqrt{\bar{w}^2} \approx 0$ となる高度が図 3.21(b) においては $z = 120$ km 付近に, 図 3.21(c) においては $z = 100$ km 付近に, 図 3.21(d) においては $z = 90$ km 付近に見られる. これらの高度は H_2O 凝結高度に対応する. この結果は, 標準実験と $5 \times \text{solar}$ 実験, $10 \times \text{solar}$ 実験において H_2O 凝結高度が力学的な境界として作用することを示す. 一方で $0.1 \times \text{solar}$ 実験では, 下部境界から対流圏界面 (高度 200 km) の間で $\sqrt{\bar{w}^2} \approx 0$ となる高度は見られない. この結果は, $0.1 \times \text{solar}$ 実験において H_2O 凝結高度付近に形成される安定層は鉛直方向の運動を抑制するほど強くないことを示す. 実際, 前述したように, $0.1 \times \text{solar}$ 実験では乾燥した気塊が対流圏界面から下部境界付近の数十 bar 面高度まで下降する.

$5 \times \text{solar}$ 実験と $10 \times \text{solar}$ 実験での $\sqrt{\bar{w}^2}$ の時間変化に着目すると, H_2O 凝結高度から対流圏界面まで達する流れが存在する時期 (ここでは活発期と呼ぶ) と, 主として放射層の下端から NH_3 凝結高度の間で弱い対流が生じている時期 (ここでは静穏期と呼ぶ) を繰り返すことがわかる. $10 \times \text{solar}$ 実験において, くり返しの周期はおおよそ 1×10^6 秒である. 活発期の対流運動と雲の分布は標準実験の場合と同様である. その一方で, 静穏期では対流運動は主に冷却層下部 (140 km) から NH_3 凝結高度 (それぞれ約 170 km, 160 km) の間で生じており, 冷却層の下部で生じる不安定によって局所的な対流が駆動されていることが示唆される. 静穏期では NH_3 の凝結に伴う安定層が平均的には対流運動に対する境界として働き, 2 層に分かれた雲層が見られる. 静穏期に見られる上層の雲層は主として NH_3 の雲粒から成り, 下部の雲層は H_2O と NH_4SH の雲粒から成る. またこの時期には H_2O 凝結高度より下方の鉛直運動は非常に弱い.

温位偏差の水平平均値の時間変化を図 3.22 に示す. 標準実験および $0.1 \times \text{solar}$ 実験 (a, b) では, 温位偏差の水平平均値は小刻みな変動を示すがほぼ定常状態にある. 一方で, $5 \times \text{solar}$ 実験と $10 \times \text{solar}$ 実験 (c, d) では, 間欠的な鉛直運動に対応した周期的な変化が見られる. 活発期には潜熱と反応熱の解放によって温度は上昇し, 温度分布は湿潤断熱的な分布に近づく. その後の静穏期には放射冷却によってゆっくりと温度は低下し, 温度分布が乾燥断熱的な分布に近づくとともに, 対流活動が盛んになり活発期に至る. 但し, 静穏期において一方的に大気の温位が減少するのではなく, 例えば 図 3.22 (d) の $t = 2.4 \times 10^5 - 2.6 \times 10^5$ 秒付近に見られるように, たまに潜熱によって NH_3 凝結高度から対流圏界面の間で温位が上昇することもある. 活発期の開始時刻に着目すると (例えば 図 3.22 d の

$t = 3.1 \times 10^5$ 秒付近), 温位の上昇が対流圏界面付近から H_2O 凝結高度に向けて伝播する様子が見られ, このことは, 活発な対流が対流圏上部から発生することを意味する.

以上の結果より, 活発期では湿潤対流領域全体を貫く雲対流によって系の温位は急激に湿潤断熱的な温位に変化し, 静穏期では主に一様冷却によって乾燥断熱的な温位に変化することが示された. 対流運動の周期は, おおまかに, 潜熱と反応熱に伴う温度上昇を放射を模した熱強制で解消するまでに必要な時間で決まっている.

5 × solar 実験における対流運動の間欠性の描像

対流活動の間欠性を調べるために, ここでは 5 × solar 実験を例に取り, 対流雲の分布と乾燥断熱状態からの温位偏差の時間変化を調べる. 図 3.23 (a, b) は活発期から静穏期への遷移段階, 図 3.23 (c, d) は静穏期, 図 3.24 (e, f) は静穏期から活発期への遷移段階, 図 3.24 (g, h) は活発期, に対応する.

活発期から静穏期の遷移段階 (a,b) では, 温度の鉛直分布が湿潤断熱的な分布となることで対流活動が抑制され始める. H_2O 凝結高度から対流圏界面まで達する対流は生じなくなり, 放射冷却層下端 (140 km) から対流圏界面付近で対流が生じるようになる. そのため時間の経過とともに H_2O と NH_4SH から成る雲の雲底高度が上昇している. さらに, 放射冷却を模した一様冷却によって, 系の温位は下がるとともに温位分布は水平一様な分布に近づく.

静穏期 (c,d) では, 基本的に NH_3 凝結高度が力学的境界として働く. NH_3 凝結高度を境に対流運動は上下に分離し, H_2O と NH_4SH から成る雲層と NH_3 の雲層が鉛直方向に分かれて存在する. 時間の経過とともに, 湿潤対流領域の温位分布は乾燥断熱的な分布へと変化する. 冷却層下端から NH_3 凝結高度までの高度領域で相対的に冷却し易い原因として, 放射を模した一様冷却と, NH_3 雨の再蒸発に伴う冷却, NH_3 の潜熱に比べ NH_4SH の反応熱は小さいこと, が挙げられる. この時期の対流運動は冷却層下端で生じる不安定を解消するために生じる.

活発期から静穏期の遷移段階 (e,f) では, 温度分布が乾燥断熱的な分布になることによって, 対流が再び活発になる. 対流雲は NH_3 凝結高度を超えて発達するようになる. 時間の経過と共に対流の生じる高度領域は拡大し, 雲の雲底高度は下降する.

活発期 (g,h) では, H_2O 凝結高度 (約 100 km) から対流圏界面に達する対流が見られるようになる. 上昇域では H_2O 凝結高度付近から対流雲は成長を始め, H_2O の雲層と

NH_4SH の雲層は NH_3 凝結高度の上空まで移流される。放射冷却が働く高度 140 km から対流圏界面高度の間は対流運動が生じやすいため、場所によっては H_2O 凝結高度付近と冷却層下端に雲底が見られる。発達した対流雲は NH_3 凝結高度と NH_4SH 生成高度に沿って水平方向に広がる。この時期には潜熱と反応熱によって一気に大気の温度は上昇し、温度分布は湿潤断熱的な分布に近づく。

3.5.4 実験のまとめ

凝結成分の存在度を太陽組成の 0.1 倍, 5 倍, 10 倍として行った実験の結果と標準実験の結果とを相互比較し、大気中の凝結成分の存在度の増減に伴う対流運動の鉛直構造と雲の鉛直分布の変化を調べた。

大気組成を太陽組成の 5, 10 倍とした場合、 H_2O 凝結高度から対流圏界面まで達する流れが存在する時期（ここでは活発期と呼ぶ）と、主として放射層の下端から NH_3 凝結高度の間で弱い対流が生じている時期（ここでは静穏期と呼ぶ）を周期的に繰り返す。活発期は、大気組成を太陽組成の 1 倍以上とした場合と同様に、 H_2O 凝結高度を境に対流運動は鉛直方向に分割される。 NH_3 凝結高度と NH_4SH 生成高度は対流運動に対する定常的な境界とならない。静穏期では、対流運動は主に放射冷却層下端から NH_3 凝結高度の間で生じており、 NH_3 の凝結に伴う安定層は平均的には対流運動に対する境界として働く。その一方で大気組成を太陽組成の 0.1 倍とした場合、対流運動は H_2O 凝結高度を境に分割されることはなくなり、対流圏界面付近の乾燥気塊が数十 bar 面高度に対応する下部境界付近まで下降する。

雲の鉛直分布の特徴は、3 種類の雲層が相異なる高度に存在するという鉛直一次元熱平衡大気モデルの予想とは異なる。全てのケースにおいて水平・時間平均した雲粒混合比の鉛直分布は、凝結成分の存在度に依らず、 H_2O と NH_4SH 雲層が NH_3 凝結高度を超え対流圏上部まで存在するという特徴を示す。

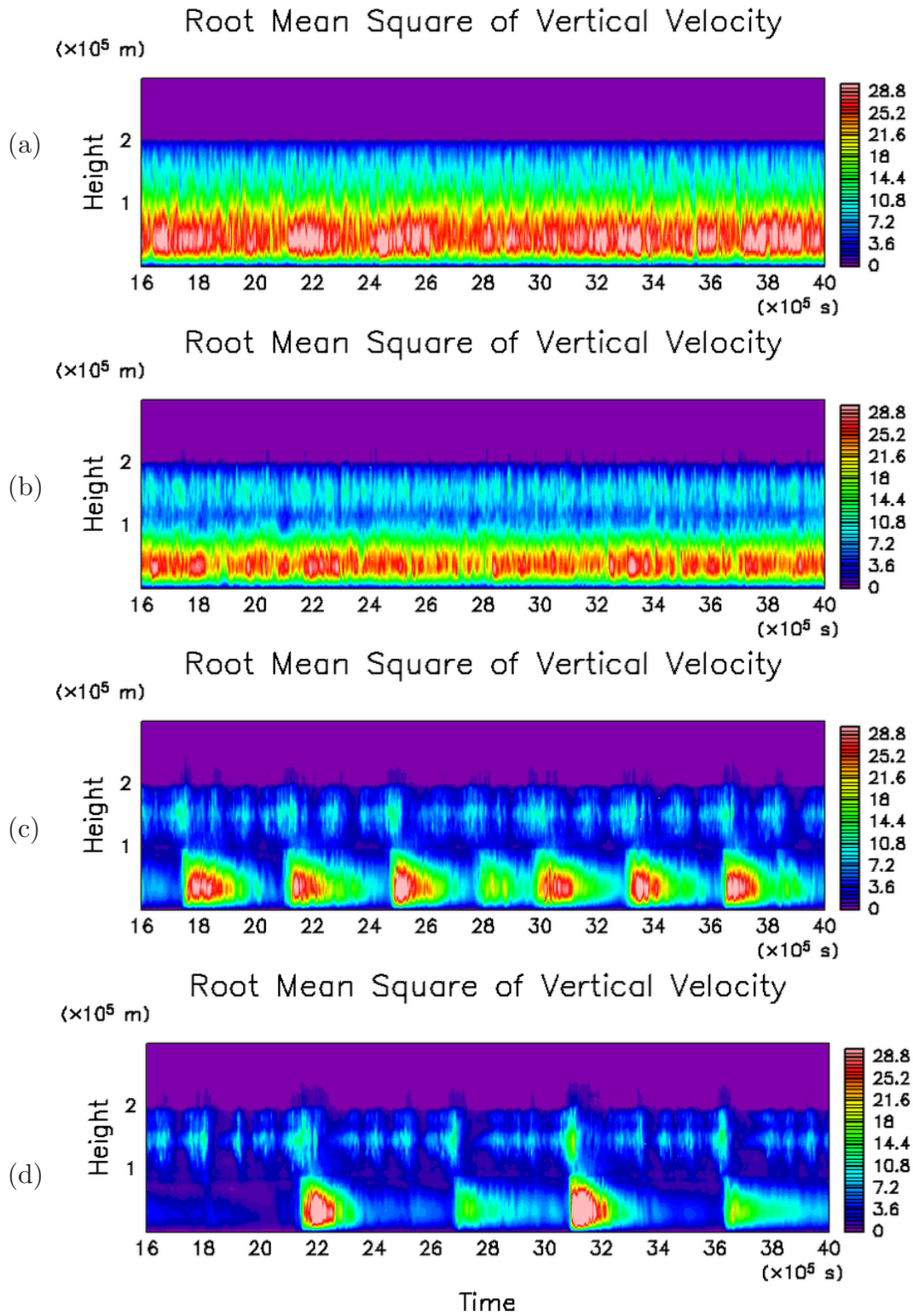


図 3.21 鉛直速度の自乗平均 $\sqrt{w^2}$ の水平平均値の時間変化の比較. (a) $0.1 \times \text{solar}$ 実験の結果, (b) 標準実験の結果, (c) $5 \times \text{solar}$ 実験の結果, (d) $10 \times \text{solar}$ 実験の結果, である.

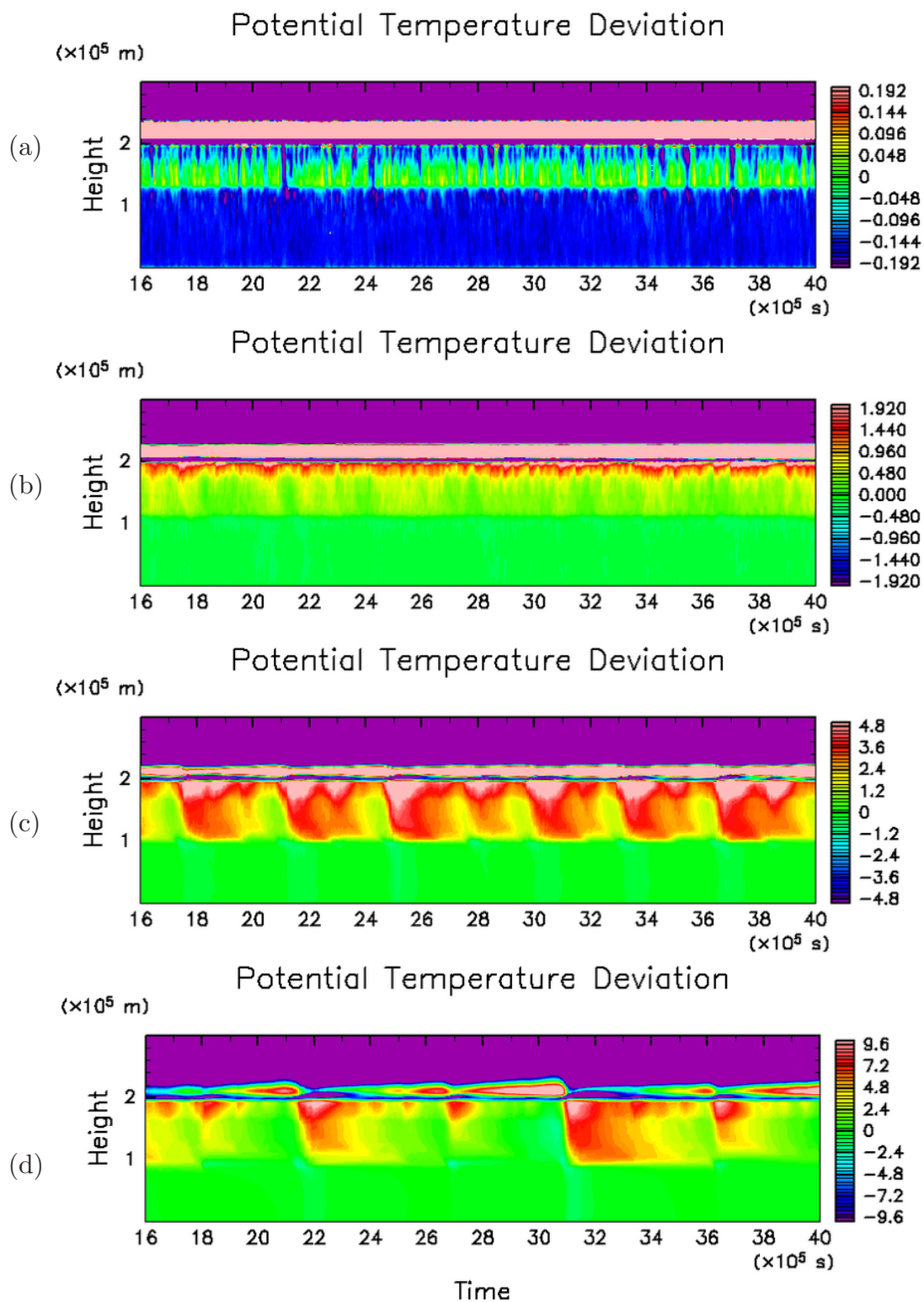


図 3.22 乾燥断熱状態からの温位偏差の水平平均値の時間変化の比較. (a) $0.1 \times$ solar 実験の結果, (b) 標準実験の結果, (c) $5 \times$ solar 実験の結果, (d) $10 \times$ solar 実験の結果, である.

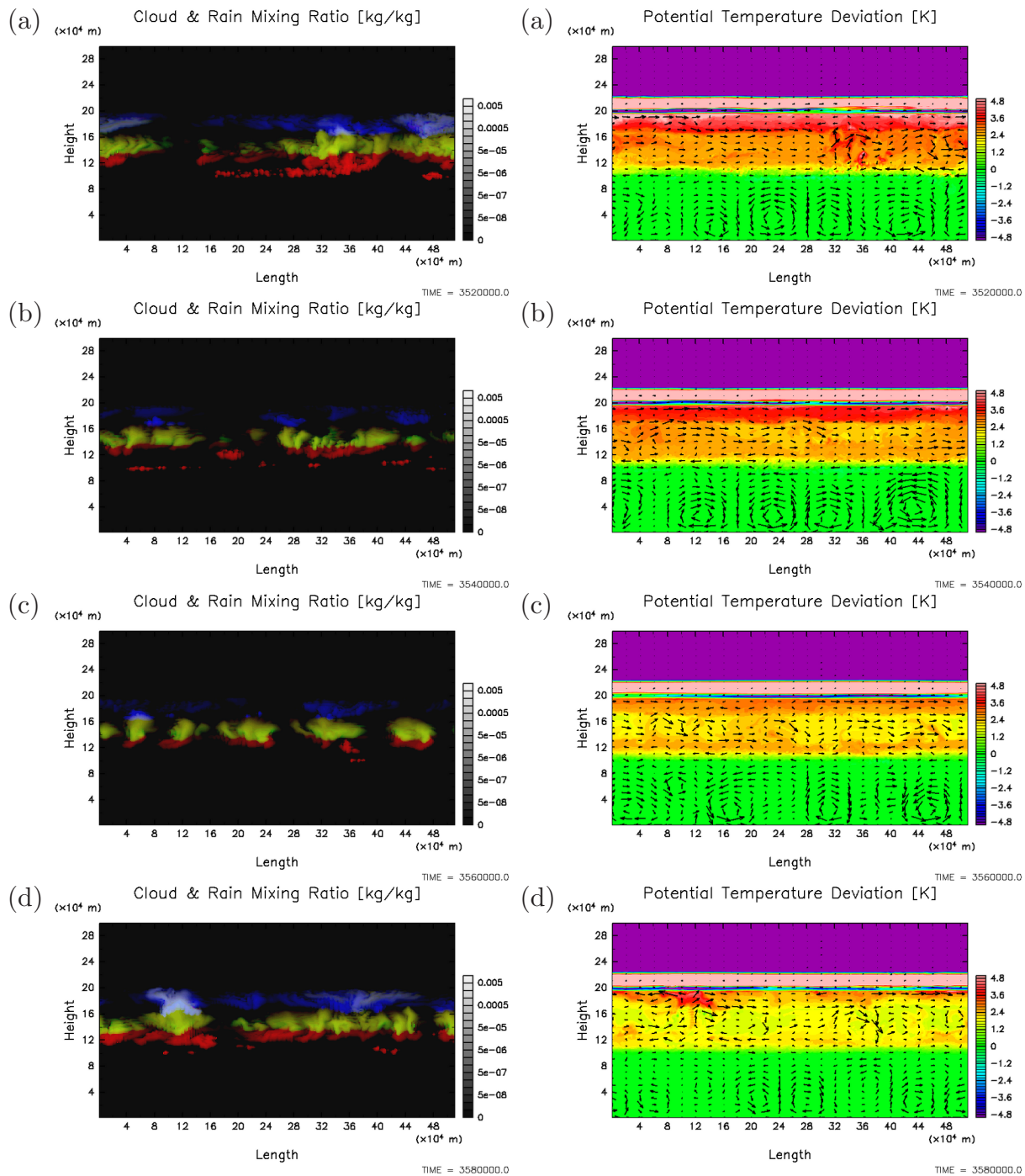


図 3.23 $5 \times \text{solar}$ 実験における対流活動の時間変化. 雲混合比の分布 (左列), 乾燥断熱状態からの温位偏差と風速ベクトル (右列). 2×10^4 秒間隔で描画する.

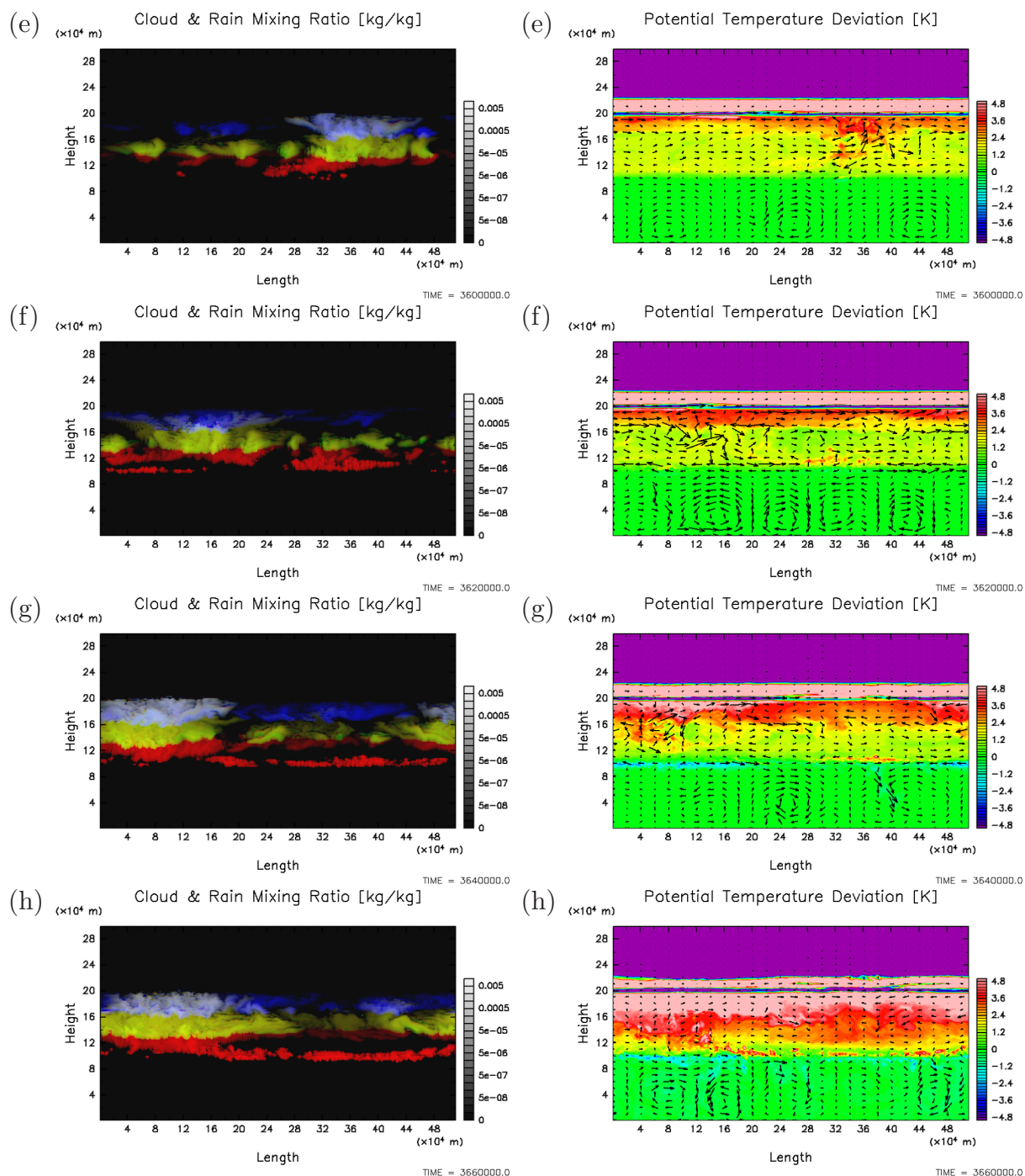


図 3.24 $5 \times$ solar 実験における対流活動の時間変化 (続き). プロットする物理量は図 3.23 と同様である.

3.6 冷却率の大きさに対する応答実験

3.6.1 実験の概要

本研究では放射を模した一様冷却の冷却率を -0.1 K/day とした実験 (ここでは $0.1 \times \text{rad}$ 実験と呼ぶ) と標準実験の結果との相互比較を行い, 統計的平衡状態における対流運動と凝結成分分布の冷却率に対する依存性を調べることをとする。

計算設定で述べたように, 統計的平衡状態に達するまでの積分時間を短縮するため, 標準実験の冷却率 -1 K/day と $0.1 \times \text{rad}$ 実験の冷却率 -0.1 K/day は, 現実の木星大気での値よりもそれぞれ 2 桁, 1 桁大きくしている。表 3.3 より類推されるように, 現実の木星大気での値を用いる場合には 1000 時間以上の積分時間が必要となり, その実行は計算資源の問題のために簡単でないからである。そのため, 冷却率をパラメタとして現実の木星大気での値に近づける実験を行う必要がある。

3.6.2 対流運動と凝結成分分布の描像

本節では, それぞれの実験の典型的な対流運動と凝結成分分布の描像を示す。 $0.1 \times \text{rad}$ 実験では, $5 \times \text{solar}$ 実験や $10 \times \text{solar}$ 実験と同様に, H_2O 凝結高度から対流圏界面まで達する流れが存在する時期 (ここでは活発期と呼ぶ) と, 主として放射層の下端から NH_3 凝結高度の間で弱い対流が生じている時期 (ここでは静穏期と呼ぶ) を繰り返す。そのため, 以下では活発期と静穏期における典型的な対流運動と凝結成分分布の描像を示す。

図 3.25 (上段) に活発期の鉛直速度の分布を示す。 H_2O 凝結高度 (約 120 km) を境に対流運動は上下に分離する。 H_2O 凝結高度より下方は凝結を伴わない乾燥対流領域となる。 H_2O 凝結高度より上方は湿潤対流領域となり, 対流雲の発達に伴う顕著な上昇域が見られる。湿潤対流領域において, 上昇域の幅は下降域の幅に比べて狭い。また, NH_3 凝結高度 (約 180 km) と NH_4SH 生成高度 (約 150 km) は, その高度で細かな上昇流と下降流が見られるものの, 対流運動に対する定常的な境界としては作用していない。これらの特徴は標準実験の結果から得られた特徴と同様である。但し, 乾燥対流領域において上昇域と下降域の水平スケールは必ずしも同程度となっていない。この時期は盛んに生じる H_2O の降雨の再蒸発によって, 乾燥対流領域の流れ場が形成途上にあるからである。図 3.25 (下

段) に静穏期の鉛直速度の分布を示す。H₂O 凝結高度 120 km から下層の乾燥対流領域は、上昇域と下降域の水平スケールが同程度であり、ベナール対流的な流れ場となる。湿潤対流領域では放射を模した熱強制が働く冷却層下端 (140 km) から対流圏界面 (200 km) で対流運動が生じる。NH₃ 凝結高度は平均的には力学的な境界として作用し、高度 140 km から 180 km は NH₄SH の生成と H₂O の凝結を伴う領域、高度 180 km から対流圏界面までは NH₃ の凝結領域となっている。高度 140 km から 180 km で NH₄SH の生成と H₂O の凝結が生じやすいのは、放射冷却層の下端である高度 140 km で大気が不安定になりやすいからである。

図 3.26 (上段) に活発期における温位偏差を示す。標準実験と同様に、H₂O 凝結高度 (約 120 km) から対流圏界面 (200 km) において、凝結の生じている領域は周囲に比べて温位が高くなっている。また H₂O 凝結高度より下では、その上部に存在する雲からの降雨が再蒸発することによって形成される負の温位偏差が見られる。この負の温位偏差によって、H₂O 凝結高度より下方の下降流が駆動されている。図 3.26 (下段) に静穏期における温位偏差を示す。5 × solar 実験および 10 × solar 実験の静穏期と同様に、活発期に比べて温位偏差の東西非一様性は小さい。NH₃ 凝結高度と対流圏界面 (200 km) に挟まれた高度領域と H₂O 凝結高度から冷却層下端 (140 km) に挟まれた高度領域は相対的に温位が高い。その一方で、冷却層下端 (140 km) から NH₃ 凝結高度に挟まれた高度領域は相対的に温位が低い。冷却層下端 (140 km) から NH₃ 凝結高度に挟まれた高度領域で温位が低くなりやすい理由としては、常に -1 K/day の放射を模した一様冷却を受けること、NH₃ 雨の再蒸発に伴う冷却が働くこと、NH₄SH の反応熱は NH₃ の潜熱に比べて小さいこと、が挙げられる。

図 3.27 (上段) に活発期の対流雲の分布を示す。雲の成長に伴い、H₂O 雲粒と NH₄SH 雲粒は NH₃ 凝結高度を超えて対流圏界面付近まで移流されている。この特徴は標準実験と同様である。しかし、標準実験と比べ、雲の存在する領域は標準実験と比べて狭い。図 3.27 (下段) に静穏期の対流雲の分布を示す。NH₄SH(s) と H₂O(s) から成る水平スケールの小さな雲が規則正しく並ぶ。その上に NH₃ から成る雲が分かれて存在する。このような特徴的な凝結物分布は標準実験では見られなかったものであり、5 × solar 実験および 10 × solar 実験の静穏期に見られたものと同様の特徴である。

図 3.28 (上段) に活発期の凝結成分気体の分布を示す。標準実験と同様に、H₂O 凝結高度は力学的な境界としてだけでなく、物質的な境界としても作用している。H₂O 凝結高度より下方では各々の凝結成分気体はほぼ水平一様に分布し、H₂O 凝結高度より上方では各々の混合比の水平方向の非一様性が大きい。さらに、場所によっては非常に乾燥した気塊が対流圏界面から下降しているが、その乾燥気塊が H₂O 凝結高度を超えて下降するこ

とはない。その一方で、 NH_3 凝結高度と NH_4SH 生成高度は H_2O 凝結高度のように物質に対する境界として作用していない。図 3.28 (下段) に静穏期の凝結成分気体の分布を示す。活発期と比べて H_2O 凝結高度から対流圏界面における各々の混合比の水平方向の非一様性は小さくなっている。この時期においても H_2O 凝結高度は物質的な境界として作用する。

図 3.8 と図 3.9 に時間水平平均した雲と凝結成分気体の鉛直分布を示す。これらの図に示された雲と凝結成分気体の鉛直分布の特徴は、これまで木星大気の標準的なモデルとして利用されてきた平衡雲凝結モデルから予想される鉛直分布 (例えば 図 2.3) とは大きく異なる。 H_2O 雲と NH_4SH 雲は NH_3 凝結高度を超えて対流圏界面付近まで移流され、対流圏上層で 3 種類の雲が重なり合って存在する。 NH_3 と H_2S の水平時間平均した混合比の鉛直分布は、それぞれの凝結高度よりも低い高度に存在する H_2O 凝結高度付近から高度と共に減少を始める。標準実験と比較すると、 H_2O 雲粒と NH_4SH 雲粒の上昇する高度が低く、雲混合比の値はでの値に比べて 1 桁程度小さい。

図 3.31 に時間水平平均した安定度 N^2 (浮力振動数 N の自乗) の鉛直分布を示す。 H_2O 凝結高度が対流運動と凝結成分気体の分布に対して力学的・物質的な境界として作用する理由は、標準実験と同様に、この高度に強い安定層が形成されているためである。 H_2O の凝結に伴う安定層の強度は主に分子量の鉛直勾配の寄与で決まっており、潜熱による加熱の寄与は相対的に小さい。 NH_4SH の生成に伴う安定層は H_2O の生成に伴う安定層と区別することは困難である。 NH_3 の凝結に伴う成層は、図 3.25 の鉛直速度の分布より、対流活動の静穏期には対流運動の鉛直構造に影響を与えることが示唆される。 H_2O の凝結に伴う成層の最大値は標準実験の結果より若干大きい、図 2.4 に示された平衡雲凝結モデルから予想される成層の大きさに比べて小さい。その理由は標準実験の場合と同様である。

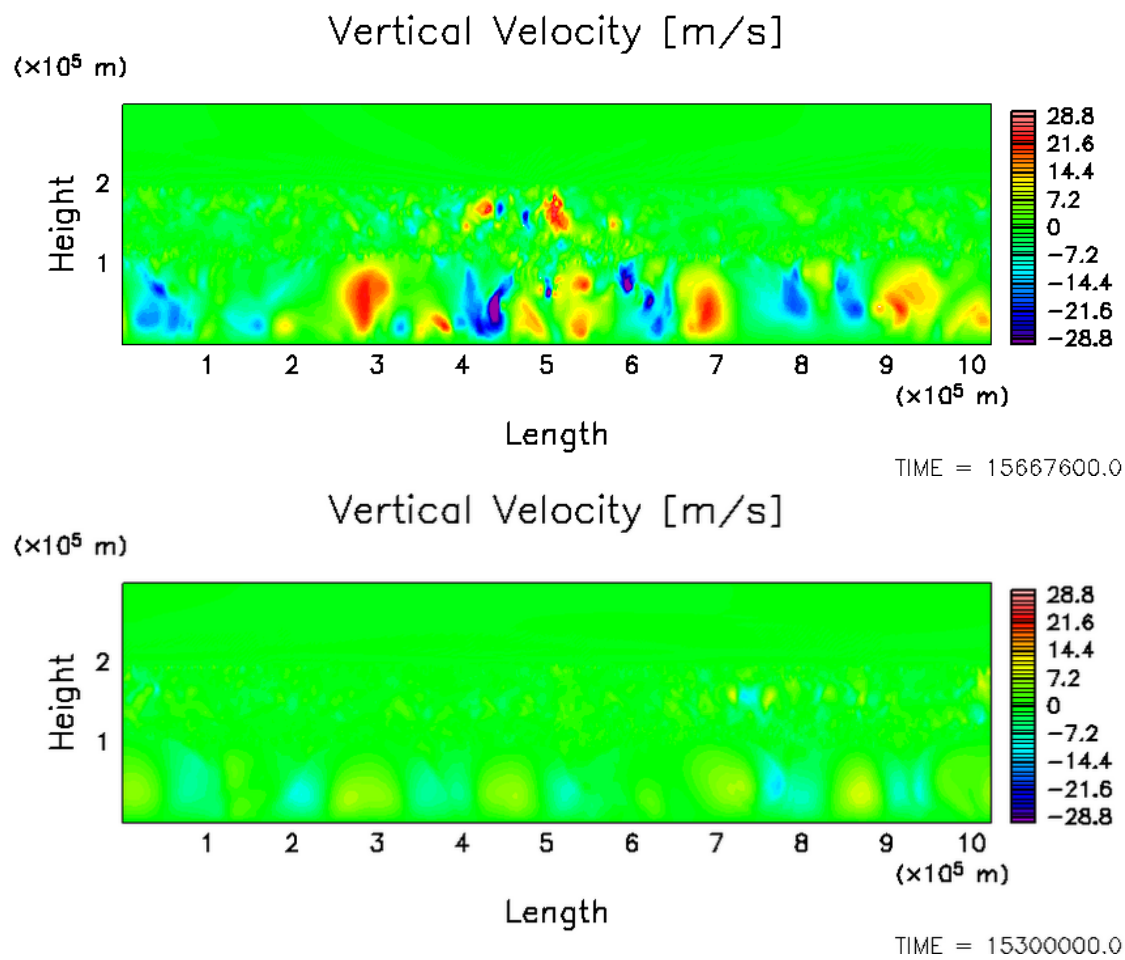


図 3.25 活発期 (上段) と静穏時 (下段) における鉛直速度の分布. 30 m/s – –30 m/s の範囲を線形プロットした.

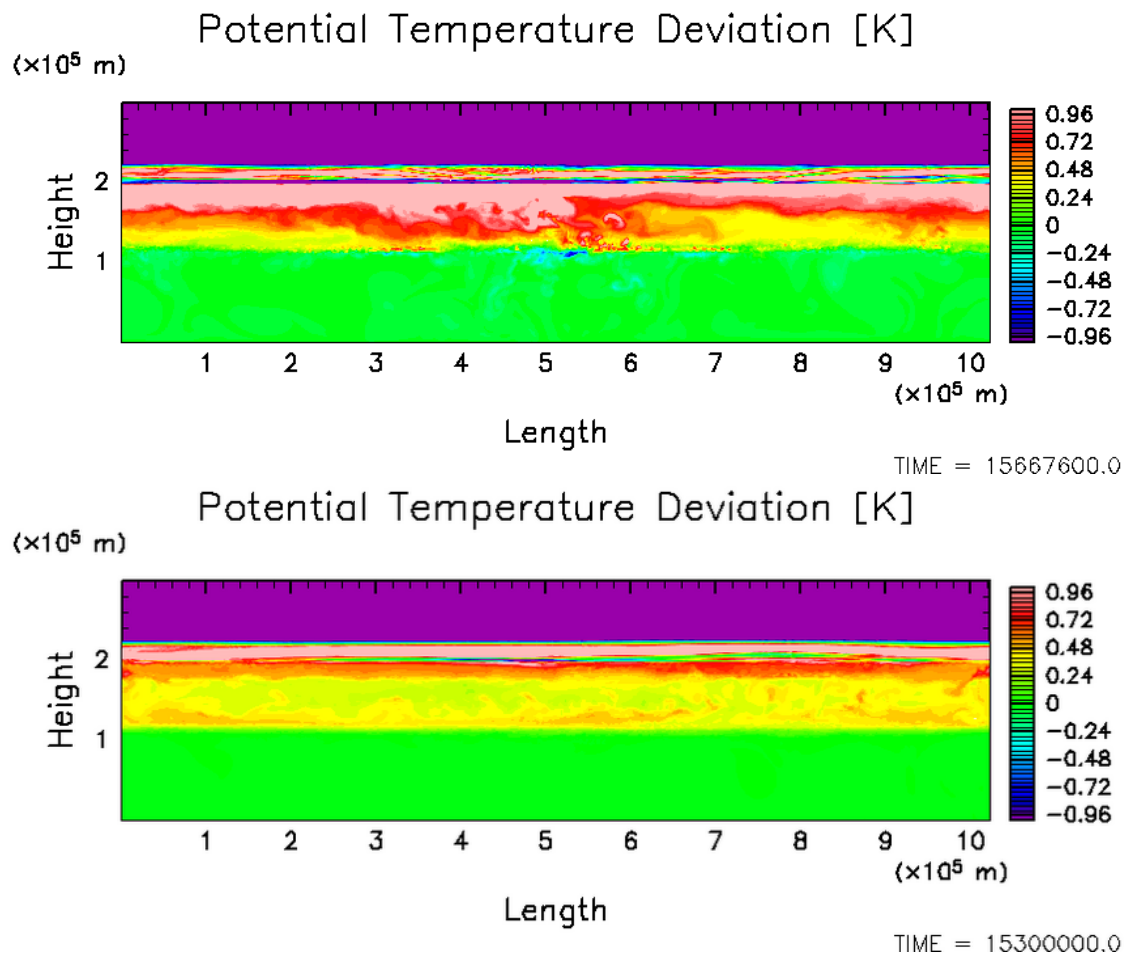


図 3.26 活発期 (上段) と静穏時 (下段) における乾燥断熱減率からの温位偏差の分布. 1 K - -1 K の範囲を線形プロットした.

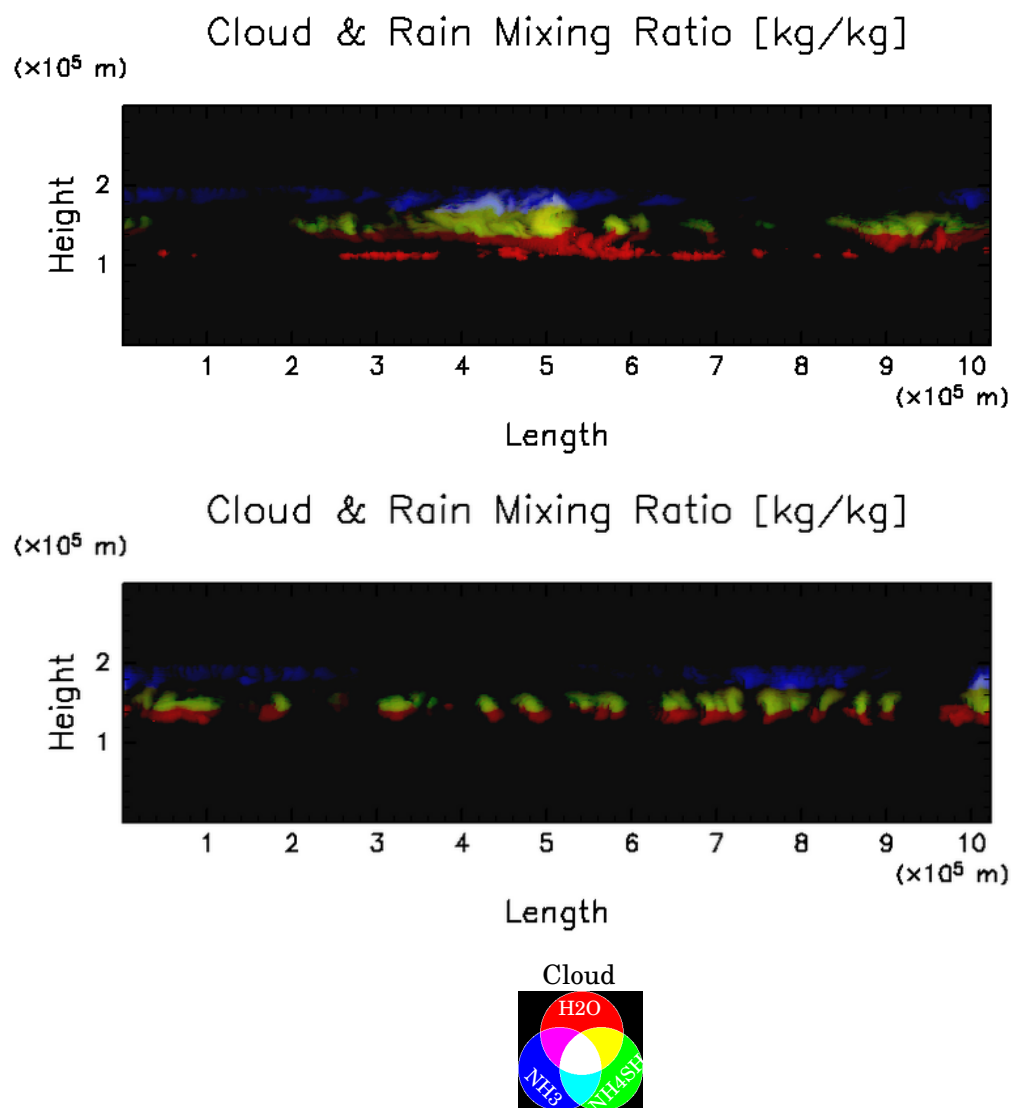


図 3.27 活発期 (上段) と静穏時 (下段) における雲混合比の分布. H_2O を赤 (R), NH_4SH を緑 (G), NH_3 を青 (B) で表し, 共存する領域はそれぞれの色の合成色 (RGB 合成色) で表現する. 但し, 各々の凝結物を $1.0 \times 10^{-8} - 1.0 \times 10^{-2}$ の範囲を対数プロットした.

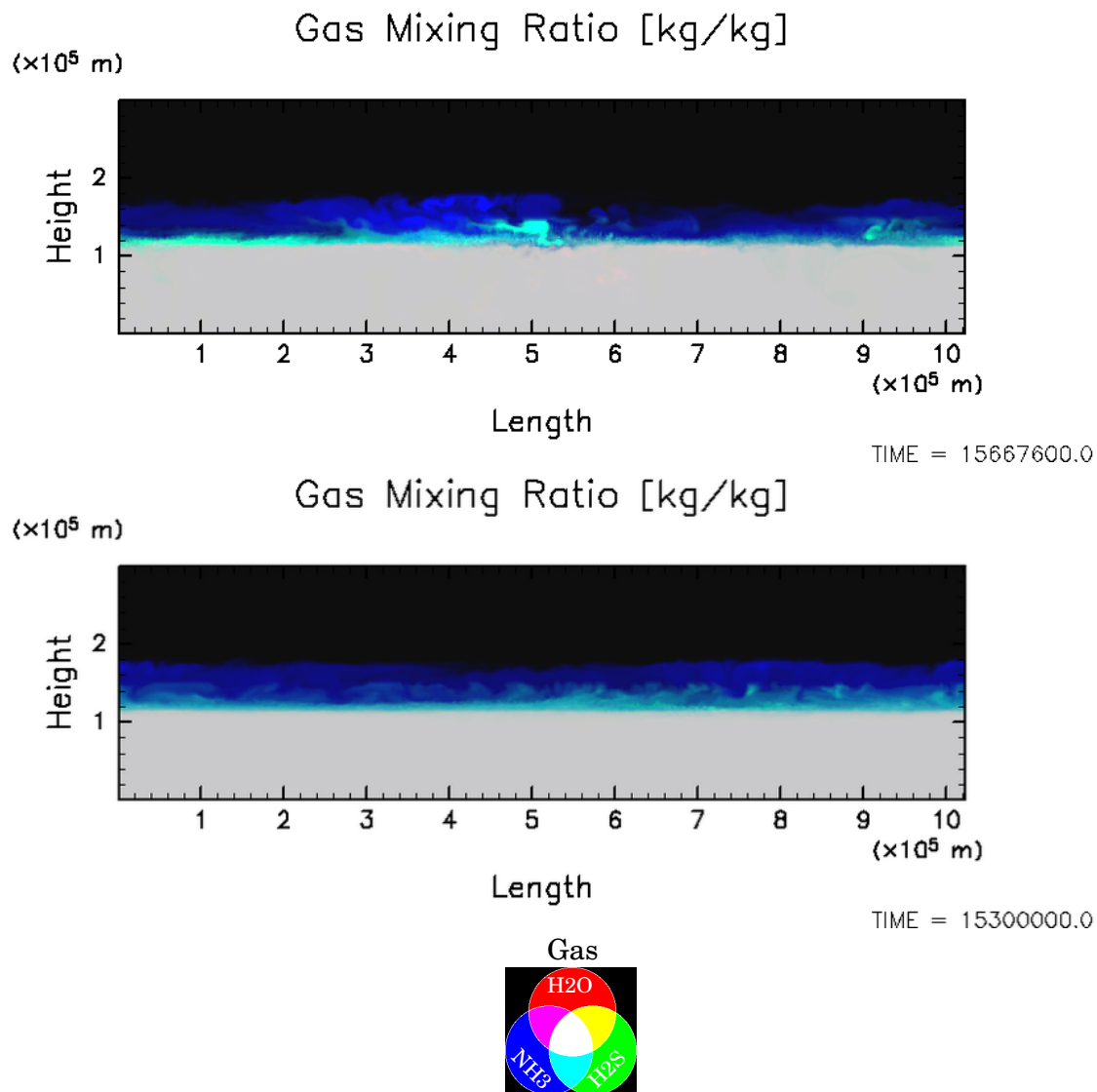


図 3.28 活発期 (上段) と静穏時 (下段) における凝結成分気体の混合比 q_v の分布. H_2O を赤 (R), H_2S を緑 (G), NH_3 を青 (B) で表し, 共存する領域はそれぞれの色の合成色 (RGB 合成色) で表現する. 但し, 初期混合比で規格化し, 線形プロットした.

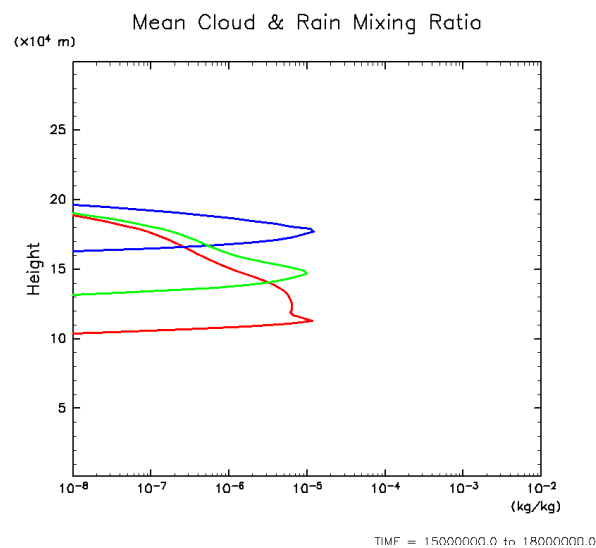


図 3.29 時間水平平均した雲の鉛直分布. 但し, 3.0×10^6 秒間の平均である. H_2O を赤 (R), NH_4SH を緑 (G), NH_3 を青 (B) で表す. H_2O を赤 (R), H_2S を緑 (G), NH_3 を青 (B) で表し, 共存する領域はそれぞれの色の合成色 (RGB 合成色) で表現する. 但し, 初期混合比で規格化し, 線形プロットした.

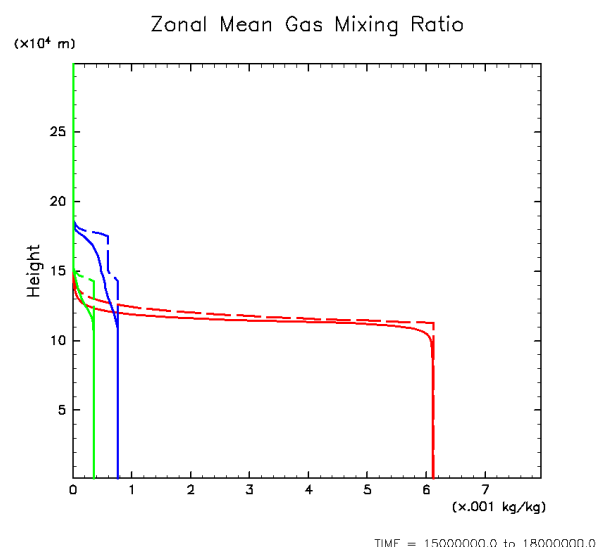


図 3.30 時間水平平均した凝結成分気体の混合比の鉛直分布. 但し, 3.0×10^6 秒間の平均である. H_2O を赤 (R), NH_4SH を緑 (G), NH_3 を青 (B) で表す. また, 太線は雲対流モデル計算の結果, 細線は平衡雲凝結モデルを用いて計算した結果である.

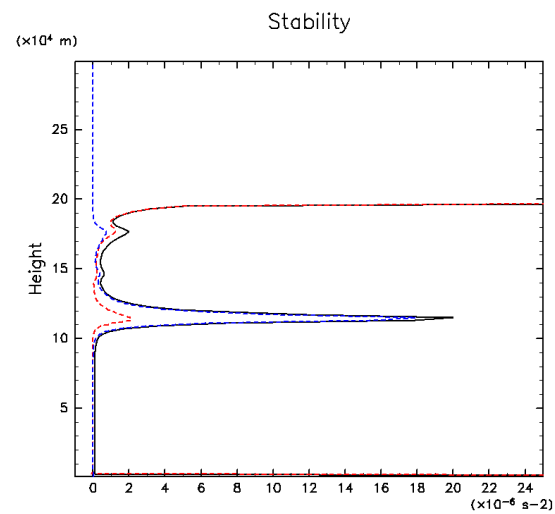


図 3.31 時間水平平均値した安定度の鉛直分布 (黒線). 安定度に対する温度の寄与 (赤破線), 安定度に対する凝結成分気体の分子量の寄与 (青破線) も示す. 但し, 3.0×10^6 秒間の平均である.

3.6.3 対流活動の時間変化とその要因

図 3.32 に水平平均した鉛直速度の自乗平均 $\sqrt{\overline{w^2}}$ の時間高度断面図を示す。 $z = 120$ km 付近に $\sqrt{\overline{w^2}} \approx 0$ となる高度が見られ、このことは基本的に対流運動は H_2O 凝結高度で上下に 2 分されることを意味する、 H_2O 凝結高度を境に、上部に凝結を伴う雲対流領域、下側に凝結を伴わない乾燥対流領域が形成される。これらの特徴は標準実験と同じである。しかし、対流活動の時間変化は、 $5 \times \text{solar}$ 実験および $10 \times \text{solar}$ 実験と同様に、湿潤対流領域全体を貫く上昇流が存在する活発期、そのような上昇流が存在しない静穏期を繰り返すことを示す。静穏期には乾燥対流領域の運動はほとんど止まる。図 3.33 に示されるように、活発期において活発な雲対流によって系の温位分布は急速に湿潤断熱的な分布となり、静穏期において徐々に冷却され系の温位分布は乾燥断熱的な分布となる。繰り返しの周期は 1×10^6 秒であり、この値は $10 \times \text{solar}$ 実験とほとんど同じである。これは放射強制の大きさと凝結成分の存在量が $1/10$ 倍のために、潜熱と冷却率の効き方が $10 \times \text{solar}$ 実験と同様であるためと考えられる。

3.6.4 実験のまとめ

放射強制を模した一様冷却の大きさを -0.1 K/day とした実験を行い、標準実験の結果とを比較することで、冷却の大きさに対する対流運動の鉛直構造と雲の鉛直分布の変化を調べた。

基本的に対流運動は標準実験と同様に、 H_2O 凝結高度 (約 120 km) で上下に 2 分され、上部に凝結を伴う湿潤対流領域、下側に凝結を伴わない乾燥対流領域が形成される。しかし標準実験では見られなかった対流活動の間欠性が現れる。その間欠性の周期は $10 \times \text{solar}$ 実験と同様に約 1.0×10^6 秒程度である。活発期においては湿潤対流層全体で対流が生じ、 H_2O と NH_4SH 雲層は NH_3 凝結高度を超え対流圏上部まで存在する。静穏期には冷却が直接働く NH_3 凝結高度付近および NH_4SH 凝結高度付近で局所的に対流が生じ、 H_2O と NH_4SH の雲層は NH_3 凝結高度をほとんど超えられない。静穏期には NH_3 凝結高度が平均的には力学的な境界として作用する。

時間水平平均した雲混合比の鉛直分布には対流運動の活発期の特徴である H_2O 雲層と NH_4SH 雲層が NH_3 凝結高度を超え対流圏上部まで存在する様子が見られる。しかし、 H_2O 雲粒と NH_4SH 雲粒の上昇する高度は標準実験の場合よりも低くなっており、雲混合

比の値は標準実験での値に比べて 1 桁程度小さい。この雲分布の特徴は、3 層の雲が別々の高度領域に分かれて存在するという鉛直 1 次元の平衡雲凝結モデル (Weidenschilling and Lewis, 1973; Atreya and Romani, 1985) の結果に基づいた描像と明らかに異なるものである。

対流運動が H_2O 凝結高度を境に上下に 2 分される理由は、標準実験と同様に、 H_2O の凝結に起因する強い安定層が形成されるからである。標準実験とは異なり、静穏時には対流運動や凝結成分分布のパターンに NH_3 の分子量効果に起因する安定層の影響が見られた。

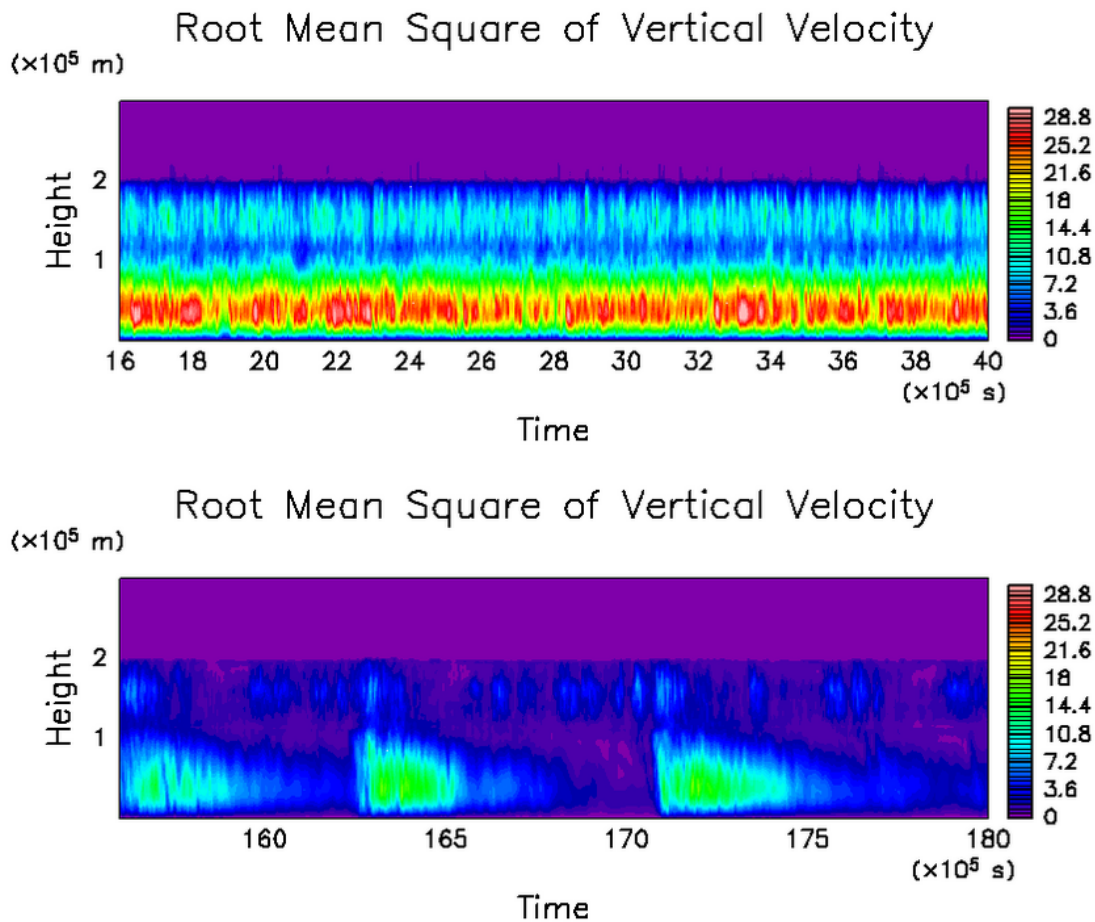


図 3.32 鉛直速度の自乗平均 $\sqrt{w^2}$ の水平平均値の時間変化の比較。(上段) 標準実験の結果。(下段) $0.1 \times \text{rad}$ 実験の結果。

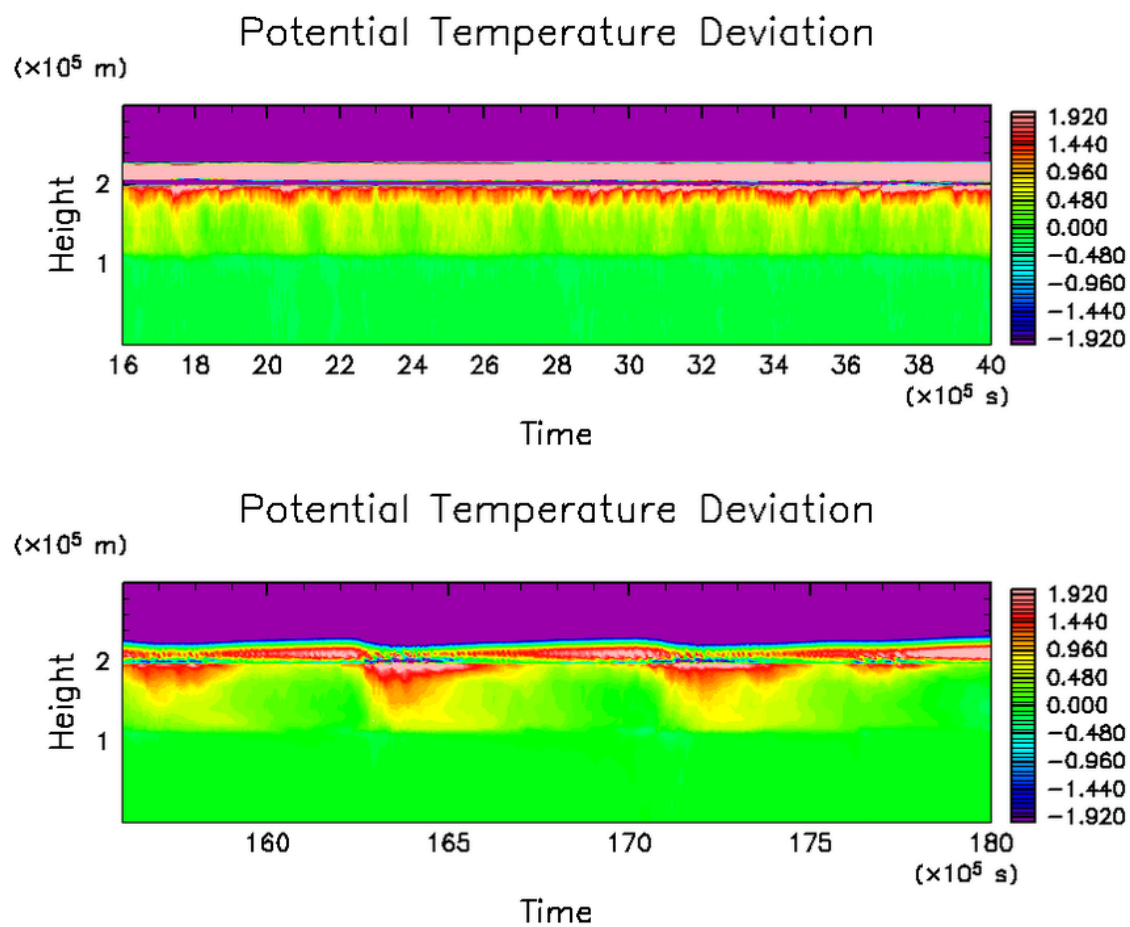


図 3.33 乾燥断熱状態からの温位偏差の水平平均値の時間変化の比較. (上段) 標準実験の結果. (下段) $0.1 \times \text{rad}$ 実験の結果.

3.7 計算領域の大きさに対する応答実験

3.7.1 実験の概要

標準実験で用いた水平領域 512 km は、木星半径 64,000 km に比べ非常に狭い。水平領域を広くすることで、1 つの積雲の生成に伴って発生する潜熱と反応熱はより広い空間を加熱することになるため、前節で示された対流活動の間欠性は弱くなる可能性がある。そこで本節では、水平領域の大きさを 512 km, 1024 km, 5012 km として行った実験 (以下 $1 \times \text{region}$ 実験, $2 \times \text{region}$ 実験 $10 \times \text{region}$ 実験と呼ぶ) の結果を相互比較することで、水平領域の大きさの変化に伴う対流活動の間欠性の変化を調べる。それにより、対流活動の間欠性が数値モデルの水平流域に起因するものか否かを検討する。

3.7.2 対流活動の間欠性の変化

鉛直速度の自乗平均値を 図 3.34 に示す。水平領域が狭い場合には値が連続的に分布する一方で、水平領域が広い場合には値が連続的に存在しなくなる。このことは、計算領域が狭いほど 1 つの積雲の生成が対流運動におよぼす影響が大きくなることを意味する。しかしながら水平領域を変化させても以下の特徴は変わらない。すなわち、 H_2O 凝結高度が力学的な境界として働くために、対流運動は H_2O 凝結高度を境に上下に分割されるという特徴は変わらない。さらに対流活動には活発期と静穏期が存在し、活発期には H_2O 凝結高度から対流圏界面に達する対流が生じ、静穏期には主として冷却層下端から NH_3 凝結高度の間で対流が生じるという特徴は変わらない。

温位偏差の水平平均値を 図 3.35 に示す。活発期と静穏期の特徴は水平領域を大きくしても変わらない。すなわち、活発期において、湿潤対流に伴って大気の色度が上昇することで温度分布が湿潤断熱的な分布になる。静穏期において、放射によって大気の色度が乾燥断熱的な分布になる。しかし、水平領域を大きくするにつれて、活発期での温度上昇は緩やかとなり、大気の色度が湿潤断熱的な分布になるまでに必要な時間が長くなる。このことは 1 つの積雲の生成に伴って発生する潜熱と反応熱はより広い空間を加熱する必要があることを示唆する。

対流活動の間欠性の周期は、水平領域を大きくするにつれて長くなる。しかし継続時間が

長くなるのは活発期の継続時間であり、静穏期の継続時間はほとんど変化しない。このことは水平領域を大きくしても、間欠性自体は失われないことを示唆する。

3.7.3 実験のまとめ

水平領域の大きさを 512 km, 1024 km, 5012 km とした実験の結果を相互比較し、水平領域の大きさの変化に伴う対流運動の間欠性の変化を調べた。

水平領域を大きくすると、1 つの積雲の生成に伴って発生する潜熱と反応熱はより広い空間を加熱することになるため、間欠性の周期は長くなる。但し、対流活動によって大気の温度分布が湿潤断熱的な分布に至るまでの時間が長くなっただけであり、静穏期の継続時間はあまり変化しない。そのため間欠性自体は失われることはなかった。この結果から推測すると、さらに水平領域を大きくしたとしても対流活動の間欠性が失われることはないであろう。

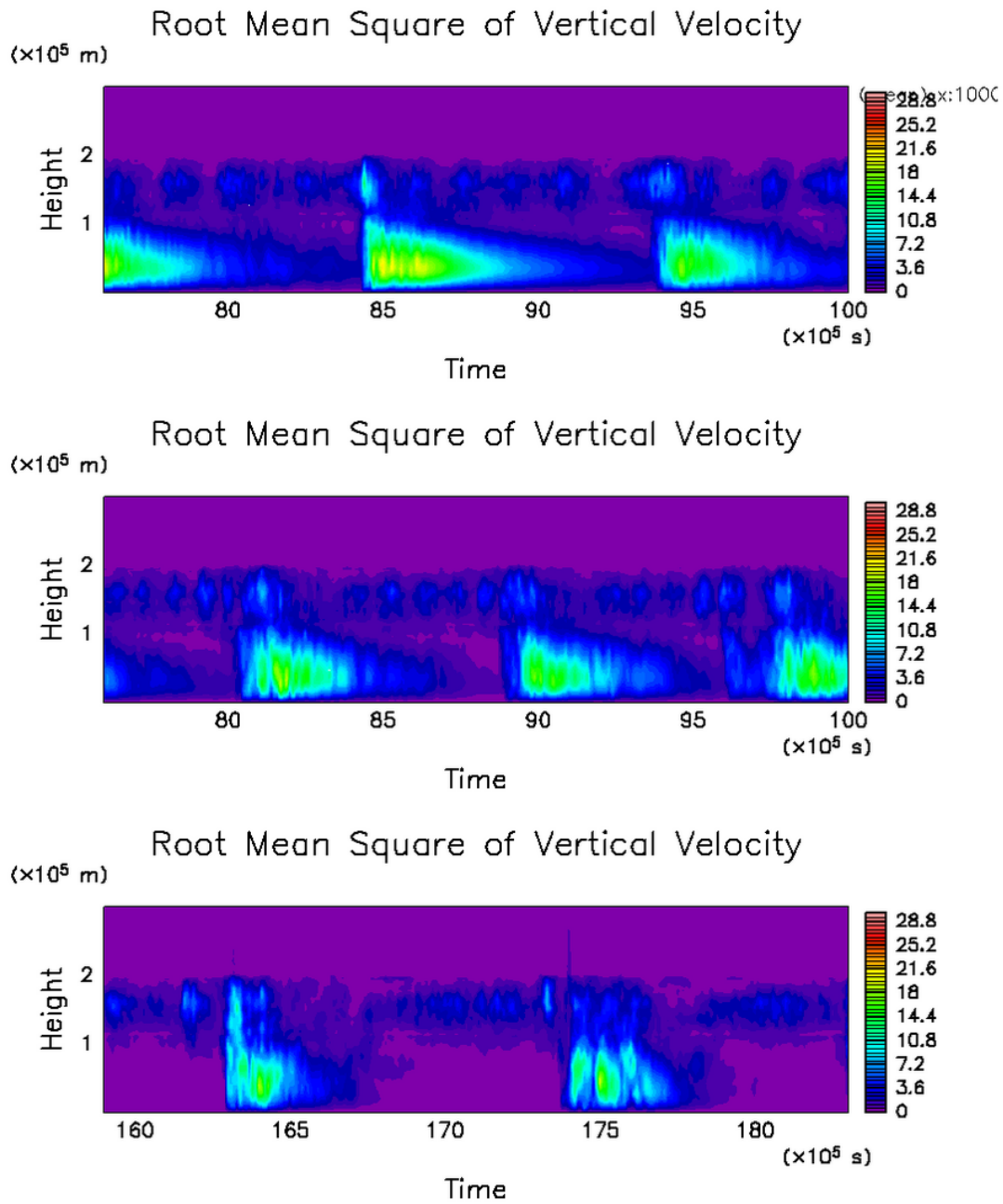


図 3.34 鉛直速度の自乗平均 $\sqrt{w^2}$ の水平平均値の時間変化. (上段) $1 \times$ region 実験, (中段) $2 \times$ region 実験, (下段) $10 \times$ region 実験, の結果.

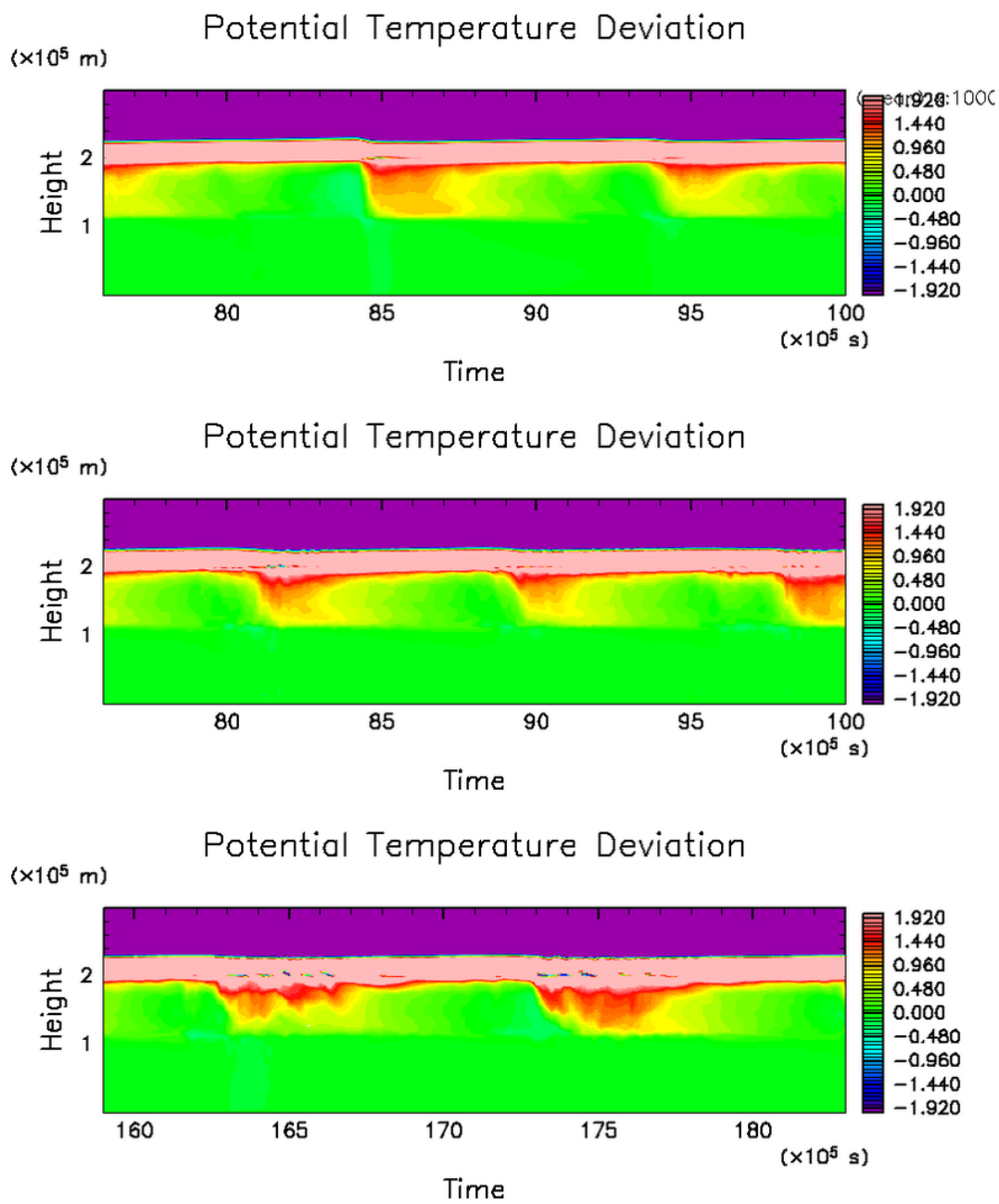


図 3.35 乾燥断熱状態からの温位偏差 θ の水平平均値の時間変化. (上段) $1 \times$ region 実験, (中段) $2 \times$ region 実験, (下段) $10 \times$ region 実験, の結果.

3.8 まとめ

放射強制を模した一様冷却の下で、 H_2O 、 NH_3 の凝結と NH_4SH の生成反応を考慮した木星大気の雲対流の直接数値計算を行い、多数の雲の生成消滅が繰り返された結果として決まる木星大気の平均的な対流運動の鉛直構造と雲の鉛直分布を調べた。

標準実験

凝結成分の存在度を太陽組成と同じとし、Nakajima *et al.* (2000) と同様に放射強制を模した一様冷却の大きさを -1 K/day とした実験を行った。

基本的に対流運動は標準実験と同様に、 H_2O 凝結高度を境に上下に 2 分され、上部に凝結を伴う湿潤対流領域、下側に凝結を伴わない乾燥対流領域が形成された。この特徴は Nakajima *et al.* (2000) と同じである。我々の予想に反して NH_3 の潜熱と NH_4SH の反応熱に起因する安定層は対流運動の鉛直構造に大きくは影響しない。また上昇域では湿潤対流層全体で対流が生じ、 H_2O と NH_4SH 雲層は NH_3 凝結高度を超え対流圏上部まで存在する。この雲分布の特徴は、3 層の雲が別々の高度領域に分かれて存在するという鉛直 1 次元の平衡雲凝結モデル (Weidenschilling and Lewis, 1973; Atreya and Romani, 1985) の結果に基づいた描像と明らかに異なるものである。

対流運動が H_2O 凝結高度を境に上下に 2 分される理由は、 H_2O の凝結に起因する強い安定層が形成されるからである。この成層構造の特徴のために、大気上部の乾燥気塊は H_2O 凝結高度よりも下へは下降できない。

凝結成分の存在量に対する応答実験

凝結成分の存在度を太陽組成の 0.1 倍、5 倍、10 倍として行った実験の結果と標準実験の結果とを相互比較し、大気中の凝結成分の存在度の増減に伴う対流運動の鉛直構造と雲の鉛直分布の変化を調べた。

大気組成を太陽組成の 5、10 倍とした場合、 H_2O 凝結高度から対流圏界面まで達する流れが存在する時期 (ここでは活発期と呼ぶ) と、主として放射層の下端から NH_3 凝結高度の

間で弱い対流が生じている時期 (ここでは静穏期と呼ぶ) を周期的に繰り返す。活発期は、大気組成を太陽組成の 1 倍以上とした場合と同様に、 H_2O 凝結高度を境に対流運動は鉛直方向に分割される。 NH_3 凝結高度と NH_4SH 生成高度は対流運動に対する定常的な境界とならない。静穏期では、対流運動は主に放射冷却層下端から NH_3 凝結高度の間で生じており、 NH_3 の凝結に伴う安定層は平均的には対流運動に対する境界として働く。その一方で大気組成を太陽組成の 0.1 倍とした場合、対流運動は H_2O 凝結高度を境に分割されることはなくなり、対流圏界面付近の乾燥気塊が数十 bar 面高度に対応する下部境界付近まで下降する。

雲の鉛直分布の特徴は、3 種類の雲層が相異なる高度に存在するという鉛直一次元熱平衡大気モデルの予想とは異なる。全てのケースにおいて水平・時間平均した雲粒混合比の鉛直分布は、凝結成分の存在度に依らず、 H_2O と NH_4SH 雲層が NH_3 凝結高度を超え対流圏上部まで存在するという特徴を示す。

冷却の大きさに対する応答実験

放射強制を模した一様冷却の大きさを -0.1 K/day とした実験を行い、標準実験の結果とを比較することで、冷却の大きさに対する対流運動の鉛直構造と雲の鉛直分布の変化を調べた。

基本的に対流運動は標準実験と同様に、 H_2O 凝結高度 (約 120 km) で上下に 2 分され、上部に凝結を伴う湿潤対流領域、下側に凝結を伴わない乾燥対流領域が形成される。しかし標準実験では見られなかった対流活動の間欠性が現れる。その間欠性の周期は $10 \times \text{solar}$ 実験と同様に約 1.0×10^6 秒程度である。活発期においては湿潤対流層全体で対流が生じ、 H_2O と NH_4SH 雲層は NH_3 凝結高度を超え対流圏上部まで存在する。静穏期には冷却が直接働く NH_3 凝結高度付近および NH_4SH 凝結高度付近で局所的に対流が生じ、 H_2O と NH_4SH の雲層は NH_3 凝結高度をほとんど超えられない。静穏期には NH_3 凝結高度が平均的には力学的な境界として作用する。

時間水平平均した雲混合比の鉛直分布には対流運動の活発期の特徴である H_2O 雲層と NH_4SH 雲層が NH_3 凝結高度を超え対流圏上部まで存在する様子が見られる。しかし、 H_2O 雲粒と NH_4SH 雲粒の上昇する高度は標準実験の場合よりも低くなっており、雲混合比の値は標準実験での値に比べて 1 桁程度小さい。この雲分布の特徴は、3 層の雲が別々の高度領域に分かれて存在するという鉛直 1 次元の平衡雲凝結モデル (Weidenschilling and Lewis, 1973; Atreya and Romani, 1985) の結果に基づいた描像と明らかに異なるも

のである。

対流運動が H_2O 凝結高度を境に上下に 2 分される理由は、標準実験と同様に、 H_2O の凝結に起因する強い安定層が形成されるからである。標準実験とは異なり、静穏時には対流運動や凝結成分分布のパターンに NH_3 の分子量効果に起因する安定層の影響が見られた。

水平領域の大きさに対する応答実験

水平領域の大きさを 512 km, 1024 km, 5012 km とした実験の結果を相互比較し、水平領域の大きさの変化に伴う対流運動の間欠性の変化を調べた。

水平領域を大きくすると、1 つの積雲の生成に伴って発生する潜熱と反応熱はより広い空間を加熱することになるため、間欠性の周期は長くなる。但し、対流活動によって大気の温度分布が湿潤断熱的な分布に至るまでの時間が長くなっただけであり、静穏期の継続時間はあまり変化しない。そのため間欠性自体は失われることはなかった。この結果から推測すると、さらに水平領域を大きくしたとしても対流活動の間欠性が失われることはないであろう。

第 4 章

まとめと議論

木星大気中で生じる全ての相変化と化学反応が対流運動に及ぼす影響とその相互作用を調べることを目的とし、熱平衡状態における木星大気の静的安定度 N^2 の見積もりと、放射を模した一様冷却の下で多数の雲の生成消滅が繰り返された結果として決まる木星大気の平均的な対流運動の鉛直構造と雲の鉛直分布を調べた。本章では、第 2, 3 章の結果から示唆される木星大気の平均的な対流構造をまとめ、さらに今後の展開を述べる。

4.1 現実の木星大気の対流構造に対する示唆

現実の木星大気での冷却率は $0.1 \times \text{rad}$ 実験で用いた冷却率よりもさらに 1 桁小さいと考えられており、潜熱と反応熱による温度上昇に比べ放射冷却の冷却率は小さい。しかし本研究で得た特徴、すなわち、(1) 顕著な上昇域では H_2O の雲粒と NH_4SH の雲粒が NH_3 凝結高度を超えて対流圏界面付近まで上昇するという特徴、(2) 凝結成分存在度が太陽組成と同程度以上存在するならば、対流運動は H_2O 凝結高度を境に鉛直方向に分割されるという特徴、(3) 対流活動には間欠性が存在するという特徴、は現実の木星大気においても成立すると予想される。

(1) の特徴は 3 層の雲が別々の高度領域に分かれて存在するという平衡凝縮モデルの結果に基づいた描像を大きく変化させるものである。さらにこの特徴は実際の木星大気の対流雲は大気の深い領域から上昇するという議論 (Gierasch *et al.*, 2000) と整合的である。

(2) の特徴は、大気上部の乾燥気塊は H_2O 凝結高度よりも下へは下降できないことを意味する。このことはガリレオプローブの観測した 20 bar 付近まで乾燥した状態と一見矛

盾的に見える。第3章で得た凝結成分存在度に対する依存性を基に考えると、ガリレオプローブの観測した数十 bar 面高度まで乾燥した状態を説明するためには2つのシナリオが考えられる。(a) 木星大気中の凝結成分気体の存在度が十分小さければ(例えば $0.1 \times \text{solar}$)、対流運動によって対流圏界面付近から下部境界(30 bar 面高度)まで乾燥気塊が運ばれることとなり、容易にガリレオプローブの観測結果を説明することができる。(b) もしも木星大気中の凝結成分気体の存在度が太陽組成程度もしくはそれより大きければ、 H_2O 凝結高度より下方の数十 bar 面高度まで乾燥した状態を実現することは難しい。本研究で考慮されていない子午面循環等の大規模な運動場の影響を考慮すれば、ガリレオプローブの観測結果を説明することができるかもしれない。

(3) の特徴は以下を意味する、すなわち、対流活動が活発な時期には H_2O 凝結高度から対流圏界面の間と H_2O 凝結高度から下部境界の間で活発な対流が生じ、 H_2O の雲粒と NH_4SH の雲粒は NH_3 凝結高度を超えて上昇する。一方で対流活動が静穏な時期には冷却層下部と NH_3 凝結高度の間で局所的に対流が生じ、 H_2O の雲層と NH_4SH の雲層は NH_3 凝結高度の上まで上昇できなくなる。第3章で述べた実験結果に比べ、対流活動の間欠性の周期は長くなり、ほとんどの時間帯は静穏期に対応すると予想される。

4.2 今後の展開に向けて

今後、現在進行中および将来的な木星探査計画と相補的な理論的知見の提供を行うことを目指し、力学・放射・熱力学の相互作用の結果として統計的に決まる木星大気の平均的な雲対流構造を用いて調べるためには、新たな木星大気用放射計算コードの開発と、3種類の雲の生成・大気成分の放射特性・大規模な縞帯構造の影響を考慮した木星雲対流の直接数値計算を行う必要があるだろう。その理由として以下の3点が挙げられる。

- (1) 我々の行った雲対流計算では、放射過程は陽に扱わず、ガリレオ探査機による正味の放射冷却の観測値を水平一様に与えていた。実際には水平方向にも吸収源物質や気温の不均質性があるはずであり、整合的なモデルを構築するには、木星大気の放射特性を陽に扱うことが必要である。
- (2) 我々の計算結果や Gierasch *et al.* (2001) で指摘されたように、木星の縞帯構造に伴うと考えられている大規模な鉛直流が対流雲と凝結成分気体の分布を支配している可能性がある。さらに、従来の研究でほとんど調べられていないが、縞帯構造に伴う雲の濃淡分布が放射過程を通じて熱収支のコントラストを生じさせ、やはり雲活動の非一様を強制する可能性がある。このような雲の非一様が木星全体の平均的な

大気構造に及ぼす影響については Showman and de Pater (2005) などが考察しているが、対流雲のでき方や輸送特性を先験的かつ簡略にモデル化しており、その妥当性には少なからず疑問が残る。縞帯構造の影響についての理解を格段に進めるためにも、現実的な放射計算コードを導入した雲対流モデルによる数値実験が不可欠である。

- (3) 既存の木星大気放射計算コードは特定の波長を用いたりリモートセンシングの解析を目的としたものであり、大気熱収支の見積もりに必要な全ての波長域を考慮した放射計算コードは開発されてこなかった。このような放射計算コードは、観測データと数値的研究の結果とを比較検討するためにも必要不可欠である。

雲対流モデルにおいて木星大気の縞帯構造を考慮するためには、木星大気の縞帯構造に伴って想定されている南北・鉛直循環を模した大規模な循環を生成する強制力をモデル中に導入することが必要であろう。強制力の大きさは凝結成分存在度と同様に計算パラメタとして扱い、木星大気で想定される範囲で広く変化させた実験を複数行うこととなる。その結果、大規模な循環構造と大気放射が木星大気の平均的な対流構造に及ぼす影響を調べることが可能となり、さらに動力的見地から木星の雲対流構造に関する理解を深めることが可能となるであろう。得られた結果を基に放射伝達を計算することで、観測データとの比較検討が可能となると期待される。

我々の開発した雲対流モデルは世界に先駆けて木星大気中の全ての凝結と化学反応を考慮したものであり、観測立案やデータ解釈のための基礎的情報を提供できると期待される。現在、木星大気の雲分布と凝結成分気体の分布をメインターゲットの 1 つとした観測計画が立案されつつある。宇宙航空研究開発機構 (Japan Aerospace Exploration Agency; JAXA) と複数の大学の研究グループが一体となって地球周回軌道の惑星用宇宙望遠鏡 TOPS の打ち上げを計画している。欧州宇宙機構 (European Space Agency; ESA) や米国航空宇宙局 (National Aeronautics and Space Administration; NASA) では次期木星探査計画が構想されつつあり、ESA の計画には日本も共同参加を検討している。地上観測施設として、日本・アメリカ・ヨーロッパの共同で電波干渉計 ALMA の建設が進められている。このような観測と相補的に研究を進めることで、木星の雲に関する知見が飛躍的に増大することを期待したい。

別の展開としては、系外惑星の表層状態を明らかにすることにも寄与することが考えられる。近年、木星と同程度の質量と半径を持ち、太陽近傍を公転する「ホットジュピター」と呼ばれる種類の系外惑星が多数発見され、その観測が進みつつある。我々の開発した雲対流モデルはホットジュピターを扱う枠組みを備えたものであり、系外惑星の研究者と議論

を重ねることで、その方面の研究も推進可能となるであろうであろう。

最後に我々の開発した雲対流モデルの問題点とその解決に向けた期待を述べる。本研究で用いた定式化では、木星大気での雲粒のサイズ分布や凝結核の性質が良くわかっていないために、地球大気で良く利用されている雲微物理過程のパラメタリゼーション (Kessler, 1969) を利用している。雲微物理過程の定式化は当然ながら計算結果に影響を与える。例えば、雲から雨に変換する時定数を極端に長くすると、雲は第3章で示した結果より水平方向に広がった分布を示す。木星のエアロゾルの候補としては、木星大気深部から対流によって供給されるであろう難溶性の NH_4Cl , Na_2S といった物質 (Sagan and Salpeter, 1976), 対流圏最上部のヘイズ層で生成される $(\text{C}_2\text{H}_2)_n$, $(\text{HCN})_n$ などの高分子有機化合物 (Bar-Nun *et al.*, 1988; West and Smith, 1991) 隕石起源の鉱物が考えられている (Yair *et al.*, 1995)。しかし、これらの存在度の直接観測は無く、また凝結核としての能率についての実験もほとんど行われていない。木星の雲物理の詳細な数値計算においてさえ、凝結核・氷晶核の存在度、平均サイズ、臨界飽和比は「適当に」仮定されているのが現状である²⁵⁾。また、雲から雨の変換率を定式化するためには雲のサイズ分布、すなわちどの程度の大きさを持った雲粒が何個存在するか把握することが重要であるが、それも観測されていない。今後、木星大気における平均的な対流構造を調べるためには、ガリレオ探査機が行ったようなプローブによる直接観測、および木星を模した温度圧力条件においてエアロゾル候補物質の凝結核としての能率を実験的に調べる必要があるであろう。

謝辞

本研究の主題は指導教官である北海道大学林祥介教授との議論の中から着想を得ました。本研究の意義を常に積極的に評価し、研究開始から論文作成に至るまで一貫して指導して下さいました林祥介教授に深く感謝します。北海道大学小高正嗣助手と九州大学の中島健介助手には、大気対流に関する著者の素朴な疑問に対しても丁寧な解説を頂き、さらに数値モデルの開発から日々の議論までつきあって頂きました。北海道大学倉本圭助教授には、熱力学の基礎から本研究を含めた地球惑星科学全般に関する議論に乗って頂きました。北海道大学石渡正樹助手には、折に触れて有益な助言を頂きました。北海道大学渡部重十教授と北海道大学遊馬芳雄講師（現 琉球大学教授）には、セミナーで大変有益な助言を頂きました。北海道大学橋元明彦助教授の授業で教わった、ギブス自由エネルギー最小化法による平衡組成の計算方法は、本研究で開発した熱平衡計算コードの基礎となりました。

本研究で利用した雲対流モデルは、小高正嗣助手と中島健介助手のみならず、北海道大学大学院理学研究科地球惑星科学専攻の皆さんの助けを借りて開発してきました。高橋こう子氏の修論は、雲対流モデル開発の参考にさせて頂きました。北守太一氏には雲対流モデルのテスト計算や火星大気への適用を行って頂きました。高橋芳幸博士、山田学博士、村田泰洋氏、佐々木洋平氏、小西丈予氏、山田由貴子氏、森川靖大氏、小松研吾氏、光田千紘氏を始めとする研究室の皆さんには、折りに触れてモデル開発や研究推進のための有益な助言を頂きました。

1 次元熱平衡計算は Intel Pentium III 1.0 GHz 搭載 PC/AT 互換機上で行いました。2 次元の雲対流計算は北海道大学情報基盤センターの日立 SR11000 および宇宙航空研究開発機構情報・計算工学センターの富士通 VPP800 を用いて行いました。作図の際には地球流体電脳ライブラリを使用しました。

最後に私事ではありますが、本論文の完成を心待ちしつつ研究生活を支援して下さいました両親と妹達、そして妻の早矢に、心からの感謝を捧げるものです。

付録 A

熱平衡計算コードの定式化と離散化

A.1 はじめに

熱力学量として温度・圧力・組成を選択すると、大気の平衡状態は大気中の元素数保存の下でギブス自由エネルギー G の最小化された状態として記述することができる。N 個の化学種が p 個の相に分かれているものとする。ギブス自由エネルギー G と化学ポテンシャル μ は物質の理想性を仮定することで以下のように書ける:

$$G(T, p, \mathbf{n}) = \sum_{i=1}^N \sum_{\phi=1}^p n_i^{\phi} \mu_i^{\phi}(T, p, \mathbf{n}) \quad (\text{A.1})$$

$$\mu_i^{\phi}(T, p, \mathbf{n}) = \mu_i^{\phi^{\circ}}(T) + RT \ln x_i^{\phi} + \delta_{1\phi} RT \ln p/p_0 \quad (\text{A.2})$$

ここで添字 i は化学種を表し、添字 ϕ は相を表す。 T は温度、 p は圧力、 p_0 は基準圧力、 R は気体定数、 $\mathbf{n}$ はモル数、 μ° は標準化学ポテンシャル、 $x_i^{\phi} = n_i^{\phi} / \sum_k n_k^{\phi}$ はモル比である。また相 $i = 1$ を気相とした。化学ポテンシャルは相、もしくは純物質/混合物に依らず同一な形式で書けるので、系に存在する全ての化学種の標準化学ポテンシャル $\mu_i^{\phi^{\circ}}$ を予め把握しておけば、混合気体や溶液、純物質の化学ポテンシャルは一元的に計算することができる。

平衡状態を求めるためには、温度・圧力を与え、元素数保存の条件

$$\sum_{\phi} \sum_i a_{ie}^{\phi} n_i^{\phi} = B_e \quad (\text{A.3})$$

$$n_i^{\phi} \geq 0 \quad (\text{A.4})$$

の下でギブス自由エネルギーを最小化するようなモル数 n を探索すれば良い。ただし e は元素を表し, a_{ie} は化学種 i に含まれる元素 e の個数を意味する。

A.2 RAND 法

RAND 法は「制約つき最適化法」の「Newton 法」に分類される最適化法である。この RAND 法は元々、気相のみの系での平衡状態を求めるために開発され、その後に多相系を扱えるよう拡張された。この方法はギブスの自由エネルギーを適当な組成のまわりで組成に関する 2 次の方程式に近似し、反復的に極値を求めるというものである。以下の議論は Van Zeggeren and Storey (1970) の教科書を元に行う。

A.2.1 気相のみの場合

初期の物質モル数を m_i とする。 m_i よりも熱平衡状態に近いモル比を $n_i (= m_i + \delta m_i)$ とする。熱平衡状態の熱力学ポテンシャル G を m_i のまわりでテーラー展開し、 δm_i に関する 2 次の微小量まで近似式 $Q(n_i)$ を作る。

$$Q(n_i) = G(m_i) + \sum_i \left(\frac{\partial G}{\partial m_i} \right) \delta m_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 G}{\partial m_i \partial m_j} \right) \delta m_i \delta m_j. \quad (\text{A.5})$$

ここで理想気体の化学ポテンシャルの定義式を用いると、(A.5) 式の右辺第 2 項のカッコ内は以下のように書ける。

$$\left(\frac{\partial G}{\partial m_i} \right) = \mu_i = \mu_i^\circ(T) + RT \ln \left(\frac{m_i}{\sum m_i} \right) + RT \ln \left(\frac{p}{p_0} \right). \quad (\text{A.6})$$

但し p_0 は基準圧力で通常 1.0×10^5 Pa である. (A.6) 式を用いて (A.5) 式の右辺第 3 項の括弧内は以下のように書ける.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2 G}{\partial m_i \partial m_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial m_j} \left\{ \mu_i^\circ(T) + RT \ln \left(\frac{m_i}{\sum m_i} \right) + RT \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) \right\} \\
 &= RT \frac{\partial}{\partial m_j} \left\{ \ln \left(\frac{m_i}{\sum m_i} \right) \right\} \\
 &= RT \frac{\sum m_i}{m_i} \frac{\partial}{\partial m_j} \left(\frac{m_i}{\sum m_i} \right) \\
 &= RT \frac{\sum m_i}{m_i} \left\{ \frac{\delta_{ij}}{\sum m_i} - \frac{m_i}{(\sum m_i)^2} \right\} \\
 &= RT \left(\frac{\delta_{il}}{m_i} - \frac{1}{\sum m_i} \right). \tag{A.7}
 \end{aligned}$$

(A.6), (A.7) 式を (A.5) 式に代入し, RT で割ることによって, 近似式

$$\frac{Q(n_i)}{RT} = \frac{G(m_i)}{RT} + \sum_i \frac{\mu_i}{RT} \delta m_i + \frac{1}{2} \left[\sum_i \frac{(\delta m_i)^2}{m_i} - \frac{\{\sum (\delta m_i)\}^2}{\sum m_i} \right] \tag{A.8}$$

が導かれる.

(A.8) 式の $Q(n_i)/RT$ と (B.14) 式で気相のみ考えた場合の元素数の保存式

$$\sum_i a_{ie} n_i = B_e \tag{A.9}$$

を用いて, ラグランジュの未定係数法を用いて極値の条件を与える. L を

$$L \equiv \frac{G(m_i)}{RT} + \sum_i \frac{\mu_i}{RT} \delta m_i + \frac{1}{2} \left[\sum_i \frac{(\delta m_i)^2}{m_i} - \frac{\{\sum (\delta m_i)\}^2}{\sum m_i} \right] - \sum_e \chi_e \left[\sum_i a_{ie} n_i - B_e \right]$$

と定義すると, (A.8) 式が極値をとる条件は $\partial L / \partial n_i = 0$ なので,

$$\frac{\mu_i}{RT} + \frac{n_i}{m_i} - \frac{\sum n_i}{\sum m_i} - \sum_e \chi_e a_{ie} = 0 \tag{A.10}$$

となる. (A.10) 式と元素数保存の式 (A.9) を連立することで, 変数 n_i, n, χ_e (ラグランジュの未定係数) に関する $N + M$ 個の線形方程式が得られ, 方程式系が閉じる.

(A.10) 式は式変形を行うことで連立方程式の次数を減らすことができる. まず (A.10) 式を n_i に関する式に書き直す.

$$n_i = m_i \left\{ -\frac{\mu_i}{RT} + \frac{\sum n_i}{\sum m_i} + \sum_e \chi_e a_{ie} \right\}. \tag{A.11}$$

この (A.11) 式を i に関して 1 から N までの和をとり、元素数の保存式 (A.9) 式を用いると、

$$\sum_e B_e \chi_e = \sum_i m_i \frac{\mu_i}{RT} \quad (\text{A.12})$$

となる。また (A.11) 式の両辺に a_{if} をかけて i に関して和を取り、元素数の保存式 (A.9) 式を用いると、

$$\sum_e \left\{ \sum_i a_{ie} a_{if} m_i \right\} \chi_e + B_f \left(\frac{\sum n_i}{\sum m_i} - 1 \right) = \sum_i a_{if} m_i \frac{\mu_i}{RT} \quad (\text{A.13})$$

となる。 a_{if} の添字 f ($0 \leq f \leq N$) はダミーサフィックスで、実質的には e と同等である。

式変形の結果得られた (A.12), (A.13) 式は $M + 1$ 個の方程式から成り、それらを連立することで χ_e と $(\sum n_i / \sum m_i - 1)$ の値が求まる。 χ_e と $(\sum n_i / \sum m_i)$ の値を (A.11) 式に代入することで各化学種のモル数が得られる。得られた n_i を m_i とみなして反復的に計算を繰り返すことで、 n_i を平衡組成へ収束させる。

この式変形の利点は、 $N + M + 1$ 個の方程式を連立すべきところを $M + 1$ 個の方程式の連立で済ませられる点にある。この変形によって逆変換する行列の大きさが $M + 1$ となるので、計算量や計算時間を短縮できるものと期待される。

(A.12), (A.13) 式を行列式の形式で書けば、

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \sum_i a_{i1} a_{i1} m_i & \sum_i a_{i2} a_{i1} m_i & \cdots & \sum_i a_{ie} a_{i1} m_i & B_1 \\ \sum_i a_{i1} a_{i2} m_i & \sum_i a_{i2} a_{i2} m_i & \cdots & \sum_i a_{ie} a_{i2} m_i & B_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_i a_{i1} a_{if} m_i & \sum_i a_{i2} a_{if} m_i & \cdots & \sum_i a_{ie} a_{if} m_i & B_f \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \vdots \\ \chi_e \\ \left(\frac{\sum n_i}{\sum m_i} - 1 \right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum a_{i1} m_i \frac{\mu_i}{RT} \\ \sum a_{i2} m_i \frac{\mu_i}{RT} \\ \vdots \\ \sum a_{if} m_i \frac{\mu_i}{RT} \\ \sum m_i \frac{\mu_i}{RT} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

と書くことができる。

最終的に解くべき式をまとめる。

温度・圧力一定、初期状態での化学種のモル数 m_i 、理想気体を仮定した場合、平衡状態での化学種のモル数 n_i は以下の式から得られる。

$$n_i = m_i \left\{ -\frac{\mu_i}{RT} + \frac{\sum n_i}{\sum m_i} + \sum_e \chi_e a_{ie} \right\}.$$

但し、上式に含まれる変数 $\chi_e, \sum n_i$ は以下の 2 式を連立させることで得られる。

$$\begin{aligned} \sum_e B_e \chi_e &= \sum_i m_i \frac{\mu_i}{RT}, \\ \sum_e \left\{ \sum_i a_{ie} a_{if} m_i \right\} \chi_e + B_f \left(\frac{\sum n_i}{\sum m_i} - 1 \right) &= \sum_i a_{if} m_i \frac{\mu_i}{RT}. \end{aligned}$$

A.2.2 多相系の場合

前章と同様に、初期モル数 m_i^ϕ のまわりで 2 次のテーラー展開を行い、その極値を求める (m_i^ϕ においても質量保存を満足していると仮定する)。

$$\begin{aligned} Q(n_i^\phi) &= G(m_i^\phi) + \underbrace{\sum_\phi \sum_i \left(\frac{\partial G}{\partial m_i^\phi} \right)}_A \delta m_i^\phi \\ &\quad + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_\phi \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 G}{\partial m_i^\phi \partial m_j^\phi} \right)}_B \delta m_i^\phi \delta m_j^\phi. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

ここで (A.15) 式の A 項は (A.2) 式を用いることによって、

$$\left(\frac{\partial G}{\partial m_i^\phi} \right) \equiv \mu_i^\phi = \mu_i^{\circ\phi}(T) + RT \ln \left(\frac{m_i^\phi}{\sum_i m_i^\phi} \right) + \alpha RT \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) \quad (\text{A.16})$$

と書ける。また (A.15) 式の B 項を (A.2) 式を用いて書き下すと、

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial m_i^\phi \partial m_l^\phi} \right) = RT \left(\frac{\delta_{il}}{m_i^\phi} - \frac{1}{\sum_i m_i^\phi} \right) \quad (\text{A.17})$$

となる. (A.16), (A.17) 式を (A.15) 式に代入し, RT で割ることによって,

$$\begin{aligned} \frac{Q(n_i^\phi)}{RT} &= \sum_{\phi} \frac{G(m_i^\phi)}{RT} + \sum_{\phi} \sum_i \frac{\mu_i^\phi}{RT} \delta m_i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\phi} \left[\sum_i \frac{(\delta m_i^\phi)^2}{m_i^\phi} - \frac{\left\{ \sum_i (\delta m_i^\phi) \right\}^2}{\sum_i m_i^\phi} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

が導かれる.

(A.18) 式の $Q(n_i)/RT$ と元素数の保存式 (A.3) より, ラグランジュの未定係数法を用いて極値の条件を与える. L を

$$\begin{aligned} L \equiv & \sum_{\phi} \frac{G(m_i^\phi)}{RT} + \sum_{\phi} \sum_i \frac{\mu_i^\phi}{RT} \delta m_i + \frac{1}{2} \sum_{\phi} \left[\sum_i \frac{(\delta m_i^\phi)^2}{m_i^\phi} - \frac{\left\{ \sum_i (\delta m_i^\phi) \right\}^2}{\sum_i m_i^\phi} \right] \\ & - \sum_e \chi_e \sum_{\phi} \left[\sum_i a_{ie}^\phi n_i^\phi - B_e^\phi \right] \end{aligned}$$

と定義すると, 極値をとる条件は $\partial L / \partial n_i^\phi = 0$ なので,

$$\frac{\mu_i^\phi}{RT} + \frac{n_i^\phi}{m_i^\phi} - \frac{\sum_i n_i^\phi}{\sum_i m_i^\phi} - \sum_e \chi_e a_{ie}^\phi = 0 \quad (\text{A.19})$$

である. (A.19) 式と (A.3) 式を連立することで, 変数 n_i^ϕ , χ_e (ラグランジュの未定係数) に関する $\Phi N + M$ 個の線形方程式が得られ, 方程式系が閉じる.

気相のみの場合と同様に (A.19) 式は式変形を行うことで連立方程式の次数を減らすことができる. まず (A.19) 式を n_i^ϕ に関する式に書き直す.

$$n_i^\phi = m_i^\phi \left\{ -\frac{\mu_i^\phi}{RT} + \frac{\sum_i n_i^\phi}{\sum_i m_i^\phi} + \sum_e \chi_e a_{ie}^\phi \right\}. \quad (\text{A.20})$$

この (A.20) 式を i に関して 1 から N までの和をとり, 元素数の保存式 (A.3) を用いると,

$$\sum_i \sum_e a_{ie}^\phi m_i^\phi \chi_e = \sum_i m_i^\phi \frac{\mu_i^\phi}{RT} \quad (\text{A.21})$$

となる. また (A.20) 式の両辺に a_{if}^ϕ をかけて i と ϕ に関して和を取り, 元素数の保存式

(A.3) を用いると,

$$\begin{aligned} \sum_e \left\{ \sum_i \sum_\phi a_{ie}^\phi a_{if}^\phi m_i^\phi \right\} \chi_e + \sum_\phi \sum_i a_{if}^\phi m_i^\phi \left(\frac{\sum_i n_i^\phi}{\sum_i m_i^\phi} \right) \\ = \sum_i \sum_\phi a_{if}^\phi m_i^\phi \frac{\mu_i^\phi}{RT} + B_f \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

である. a_{if} の添字 f ($0 \leq f \leq M$) はダミーサフィックスで, e と同等である.

(A.21), (A.22) 式は $M + \Phi$ の方程式であり, また変数の数は χ_e (M 個) と $\sum_i n_i^\phi$ (Φ 個) なので, この 2 式を連立することによって方程式が閉じる. 得られた n_i^ϕ を m_i^ϕ とみなして反復的に計算を繰り返すことで, n_i^ϕ を平衡組成へ収束させる.

最後に解くべき式は以下ようになる.

温度・圧力一定, 初期状態での化学種のモル数 m_i^ϕ , 理想気体を仮定した場合, 平衡状態での化学種のモル数は以下の式から得られる.

$$n_i^\phi = m_i^\phi \left\{ -\frac{\mu_i^\phi}{RT} + \frac{\sum_i n_i^\phi}{\sum_i m_i^\phi} + \sum_e \chi_e a_{ie}^\phi \right\}.$$

但し, 上式に含まれる変数 χ_e, n^ϕ は以下の 2 式を連立させることで得られる.

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_e a_{ie}^\phi m_i^\phi \chi_e &= \sum_i m_i^\phi \frac{\mu_i^\phi}{RT} \\ \sum_e \left\{ \sum_i \sum_\phi a_{ie}^\phi a_{if}^\phi m_i^\phi \right\} \chi_e + \sum_\phi \sum_i a_{if}^\phi m_i^\phi \left(\frac{\sum_i n_i^\phi}{\sum_i m_i^\phi} \right) &= \sum_i \sum_\phi a_{if}^\phi m_i^\phi \frac{\mu_i^\phi}{RT} + B_f \end{aligned}$$

A.2.3 負のモル数の回避

RAND 法の導出において, 化学種のモル数が常に正であるという条件は用いられていない. そのため得られた n_i^ϕ は負になる可能性がある.

そこで計算から得られた存在量 n_i^ϕ が負となった場合にはその化学種のモル数を計算開始時の組成の λ 倍とし, それと辻褃があうように他の化学種のモル数を決めるという操作を行っている. 具体的には以下の式より得られる $n_i^{\phi*}$ をより平衡状態に近い物質存在量と

みなすことにする.

$$n_i^{\phi*} = m_i^{\phi} + \lambda \{n_i^{\phi} - m_i^{\phi}\}. \quad (\text{A.23})$$

ここで $\lambda(>0)$ は定数で, 以下のように定義する.

$$\lambda = \maxval(\lambda_i). \quad (\text{A.24})$$

ここで λ_i は

$$\lambda_i \equiv \begin{cases} \frac{m_i^{\phi}}{m_i^{\phi} - n_i^{\phi}} \times C & (n_i^{\phi} \leq 0) \\ 1 & (n_i^{\phi} > 0) \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

である. ただし, C は 1 より小さい定数である.

なお, (A.23) 式の $n_i^{\phi*}$ は元素数の保存式

$$\sum_{\phi} \sum_i a_{ie}^{\phi} n_i^{\phi} = B_e \quad (\text{A.26})$$

$$n_i^{\phi} \geq 0 \quad (\text{A.27})$$

を満たす. 本計算では, $C = 0.9$ とし, (A.25) 式を以下のように利用している.

$$\lambda_i \equiv \begin{cases} \frac{m_i^{\phi}}{m_i^{\phi} - n_i^{\phi}} \times 0.9 & (n_i^{\phi} \leq 0) \\ 1 & (n_i^{\phi} > 0) \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

A.2.4 初期モル数の作成方法

本節では最適化問題の初期値の作り方を議論する. 化学平衡を扱う最適化問題の初期組成はなるべく平衡組成に近いものである必要がある. そこで当該温度圧力において気相と平衡しうる凝結相を予め選び出し, 選択された凝結相の初期モル比は気相との平衡状態でのモル数を与えることとした. 具体的には次のようなフローチャートにしたがって初期組成を作成する.

この操作は, 当該温度圧力においてそれぞれの凝結相が大気的气体成分と平衡しうるか調べるといふ操作でもある. フローチャート (4) の操作によって凝結し得ない凝結相を除去することは, RAND 法の行列式の正則性を保証し, 局所的な平衡解への収束を回避し, RAND 法による数値計算の実行速度を向上させることにつながる.

- (1) 系に含まれる化学種からある凝結相を 1 つ選択し, 気相とその凝結相の 2 相からなる系を作る

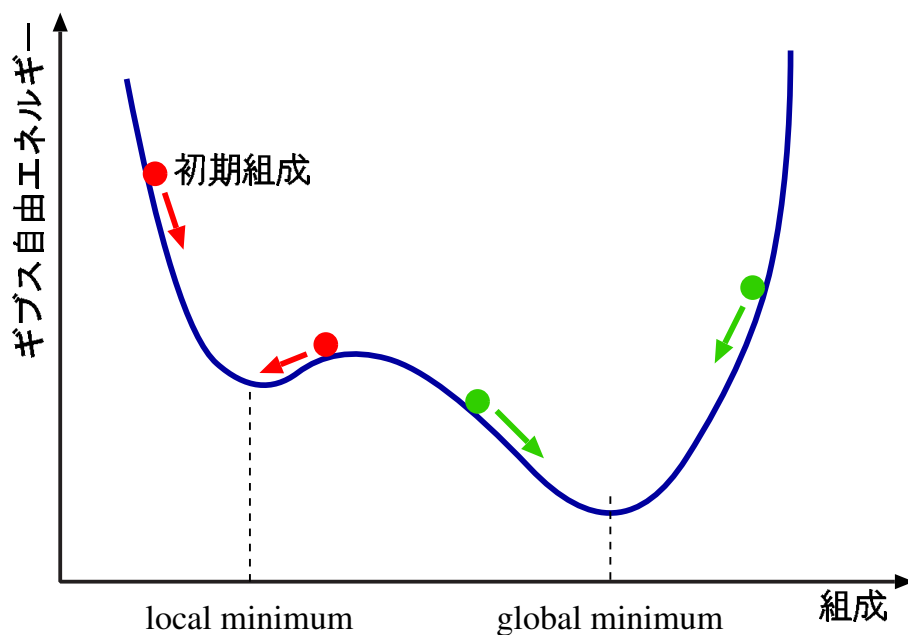


図 A.1 適当な初期組成から計算を開始しないと, global minimum ではなく local minimum に収束することがある.

- (2) (1) の凝結相の初期モル数を前の圧力ステップでの平衡組成とする. もしも前の圧力ステップにおいてその凝結相が存在しない場合は, その凝結相を形成する気相のモル数の適当な割合を割り当てることとする. そしてこの 2 相系での平衡組成を計算する.
- (3) (2) の操作を系に含まれる全ての凝結相に対して行う.
- (4) (3) から得られたそれぞれの凝結相の初期モル数とする. 但し, 平衡状態での凝結相のモル数が微小な場合は, その凝結相が系に含まれないものとみなす.

A.2.5 RAND 法の例外

RAND 法の欠点の 1 つは単純な 1 成分 2 相系が扱えないことである. 1 成分 2 相系の場合にはギブス自由エネルギーは組成に関する 1 次関数でしかないので, G を組成に関する 2 次式に近似するという RAND 法の仮定に反する. 多成分多相系においても, ある 2 つの相に含まれる化学種が全く同じ場合には RAND 法で扱うことができない.

これを回避するため, 初期組成を作る段階でどちらの相が存在できるか予め判断する必要がある. 実際には各相での化学種の化学ポテンシャルを比較し, 化学ポテンシャルの大き

い相を削除すれば良い。

木星大気のように、気相に複数の成分が含まれ、また液相は溶液として存在し固相は単独で存在するような場合には、2 つの相に含まれる化学種が全く同じになることは無い。

1 成分 2 相系の場合

具体例としてまず 1 成分 2 相系の場合を考える。例として $\text{H}_2\text{O}(\text{l})$, $\text{H}_2\text{O}(\text{s})$ からなる 1 成分 2 相系を考える。温度・圧力を与えると、熱力学関数 G は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} G &= \sum_{\phi} \mu^{\phi} n^{\phi} \\ &= \mu^l n^l + \mu^s n^s \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

ここで添字 ϕ は相を表し、 l は液相、 s は固相である。 μ は化学ポテンシャル、 n はモル数である。さらに物質の保存則は以下のように書ける。

$$n^l + n^s = n \quad (\text{A.30})$$

物質は保存されるので n は定数である。(A.29) 式に (A.30) 式を代入し、さらに化学ポテンシャルを標準化学ポテンシャル μ° を用いて書き直すと、

$$\begin{aligned} G &= \mu^{\circ l}(T) n^l + \mu^{\circ s}(T) (n - n^l) \\ &= \{\mu^{\circ l}(T) - \mu^{\circ s}(T)\} n^l + \mu^{\circ s}(T) n \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

(A.31) 式より、1 成分 2 相系の G は物質質量に関する 1 次関数であることがわかる。(A.31) 式の最小値を与える n^l は以下のように決まる：

$$\begin{aligned} &\mu^{\circ l}(T) < \mu^{\circ s}(T) \text{ の場合} \\ &\quad n^l = n \\ &\mu^{\circ l}(T) > \mu^{\circ s}(T) \text{ の場合} \\ &\quad n^l = 0 \\ &\mu^{\circ l}(T) = \mu^{\circ s}(T) \text{ の場合 (相平衡の場合)} \\ &\quad 0 \leq n^l \leq n \end{aligned}$$

従って標準化学ポテンシャルの値から、どの相に存在するか判定することができる。

多成分多相系の場合

多成分多相系においても、ある 2 つの相に含まれる化学種が全く同じ場合には 1 成分 2 相系と同様の状況が生じる。具体例として、 $\text{H}_2\text{O}(\text{l})$, $\text{H}_2\text{O}(\text{s})$ がそれぞれ単独で 1 つの相

を形成する場合を考えると,

$$\begin{aligned}\sum_e a_{\text{H}_2\text{O},e}^l m_{\text{H}_2\text{O}}^l \chi_e &= m_{\text{H}_2\text{O}}^l \mu_{\text{H}_2\text{O}}^l \\ \sum_e a_{\text{H}_2\text{O},e}^s m_{\text{H}_2\text{O}}^s \chi_e &= m_{\text{H}_2\text{O}}^s \mu_{\text{H}_2\text{O}}^s\end{aligned}$$

となり, これらの両辺を物質質量で通分すると,

$$\begin{aligned}\sum_e a_{\text{H}_2\text{O},e} \chi_e &= \mu_{\text{H}_2\text{O}}^l \\ \sum_e a_{\text{H}_2\text{O},e} \chi_e &= \mu_{\text{H}_2\text{O}}^s\end{aligned}\tag{A.32}$$

となる. 物質が同じなので相が異なっても a_{ie} の値は変化しないので, $a_{\text{H}_2\text{O},e}^l = a_{\text{H}_2\text{O},e}^s$ の関係を用いた. (A.32) 式を見ると, 左辺の係数は同じであるが, 右辺の値は異なることがわかる. これでは χ_e を求める行列式が非正則となり, 解が求まらない.

A.3 化学ポテンシャル, エントロピーの計算方法

熱平衡計算コードにおいて必要とされる物性値は化学ポテンシャル及びエントロピーである. 大気中の物質が全て理想気体/ 液体/ 固体/ 溶液であるとする, 化学ポテンシャル $\mu_i^\phi(T, p, n_i^\phi)$ は,

$$\begin{aligned}\mu_i^\phi(T, p, n_i^\phi) &= \mu_i^{\circ\phi}(T) + RT \ln \left(\frac{m_i^\phi}{\sum_i m_i^\phi} \right) + \alpha RT \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) \\ &= \mu_i^{\circ\phi}(T) + RT \ln \left(\frac{p_i^\phi}{p_0} \right)\end{aligned}\tag{A.33}$$

$$\mu_i^{\circ\phi}(T) = h_i^\phi(T_0) - T s_i^\phi(T_0, p_0) + \int_{T_0}^T c_{p_i}^\phi dT - T \int_{T_0}^T \frac{c_{p_i}^\phi}{T} dT\tag{A.34}$$

と書け, モルエントロピー $s_i^\phi(T, p, n_i^\phi)$ は,

$$\begin{aligned}s_i^\phi(T, p, n_i^\phi) &= s_i^{\circ\phi}(T) - \frac{\partial}{\partial T} \left\{ RT \ln \left(\frac{m_i^\phi}{\sum_i m_i^\phi} \right) + \alpha RT \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) \right\} \\ &= s_i^{\circ\phi}(T) - \frac{\partial}{\partial T} \left\{ RT \ln \left(\frac{p_i^\phi}{p_0} \right) \right\} + R \ln(p_0)\end{aligned}\tag{A.35}$$

$$s_i^{\circ\phi}(T) = s_i^\phi(T_0, p_0) + \int_{T_0}^T \frac{c_{p_i}^\phi}{T} dT\tag{A.36}$$

と書ける. 但し, $\mu_i^{\circ\phi}(T)$ は標準化学ポテンシャル, $s_i^{\circ\phi}(T)$ は標準モルエントロピー, $c_{p_i}^{\phi}$ は比熱, $T_0 = 298.15$ K は基準温度, $p_0 = 1.0 \times 10^5$ Pa は基準圧力, $p_i^{\phi} = \alpha * p * m_i^{\phi} / \sum_i m_i^{\phi}$ は分圧である. (A.33) — (A.36) 式より, 化学ポテンシャル及びエントロピーは温度, 圧力, 組成, 基準状態のエントロピーとエンタルピーに加え, 各化学種の飽和蒸気圧もしくは比熱から求まることがわかる.

エントロピーと化学ポテンシャルの関係式は $s = -\partial\mu/\partial T$ なので, 化学ポテンシャルを数値微分することでエントロピーを求めることもできる. しかし数値微分による数値誤差は大きいので, エントロピーも飽和蒸気圧もしくは比熱から求める方が無難である.

A.3.1 比熱を用いる場合

比熱は NIST Chemical Web Book, 化学工学便覧, 化学便覧より簡単に得られる. しかし温度に対して離散的にしか与えられていないので, まず比熱を温度に対する方程式として表現する必要がある. 熱平衡計算コードでは比熱を 3 次のスプライン補完している. 以下ではスプライン補間した場合の標準化学ポテンシャル, 標準モルエントロピーの計算方法を述べる.

希ガス

理想気体を仮定した場合, 希ガスの比熱は $20.786 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ の一定値である. そのため簡単に計算することができる.

$$\mu_i^{\circ\phi}(T) = h_i^{\phi}(T_0) - T s_i^{\phi}(T_0, p_0) + 20.786 \left\{ (T - T_0) - T \ln \frac{T}{T_0} \right\} \quad (\text{A.37})$$

$$s_i^{\circ\phi}(T) = s_i^{\phi}(T_0, p_0) + 20.786 \ln \frac{T}{T_0} \quad (\text{A.38})$$

スプライン補間

熱平衡計算コードでは科学計算サブルーチン SSL II の INSPL ルーチンを用いて補間式を作る. INSPL ルーチンの補間係数 $C_j, D_j, E_j (1 \leq j \leq n)$ を用いることにより, 比熱

$c_{p_j}^\phi(T)$ は以下のように書ける.

$$\begin{aligned} c_{p_j}^\phi(T) &= c_{p_{i_1}}^\phi + C_1(T - T_1) + D_1(T - T_1)^2 & T < T_1 \\ c_{p_i}^\phi(T) &= c_{p_{i_j}}^\phi + C_j(T - T_i) + D_j(T - T_i)^2 + E_j(T - T_i)^3 & T_j \leq T \leq T_{j+1} \\ c_{p_i}^\phi(T) &= c_{p_{i_n}}^\phi + C_n(T - T_n) + D_n(T - T_n)^2 & T > T_n \end{aligned}$$

但し $1 \leq j \leq n-1$ であり, $c_{p_{i_j}}^\phi$ は物性表から得た温度 T_j での比熱とする.

(A.34), (A.36) 式の比熱の積分項は以下のように書ける.

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^T c_{p_i}^\phi dt &= \int_{T_0}^{T_j} c_{p_i}^\phi dT + \int_{T_j}^T c_{p_i}^\phi dT \\ &= \sum_{j=a}^{j-1} (c_p)_{\text{int}}^j \\ &\quad + C_j \left\{ \frac{1}{2}(T^2 - T_j^2) + T_j(T - T_j) \right\} \\ &\quad + D_j \left\{ \frac{1}{3}(T^3 - T_j^3) - T_j(T^2 - T_j^2) + T_j^2(T - T_j) \right\} \\ &\quad + E_j \left\{ \frac{1}{4}(T^4 - T_j^4) - T_j(T^3 - T_j^3) + \frac{3}{2}T_j^2(T^2 - T_j^2) - T_j^3(T - T_j) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^T \frac{c_{p_i}^\phi}{T} dt &= \int_{T_0}^{T_j} \frac{c_{p_i}^\phi}{T} dT + \int_{T_j}^T \frac{c_{p_i}^\phi}{T} dT \\ &= \sum_{j=a}^{j-1} \left(\frac{c_p}{T} \right)_{\text{int}}^j + c_{p_i}^\phi \ln(T/T_j) \\ &\quad + C_j \{ (T - T_j) + T_j \ln(T/T_j) \} \\ &\quad + D_j \left\{ \frac{1}{2}(T^2 - T_j^2) - 2T_j(T - T_j) + T_j^2 \ln(T/T_j) \right\} \\ &\quad + E_j \left\{ \frac{1}{3}(T^3 - T_j^3) - \frac{3}{2}T_j(T^2 - T_j^2) + 3T_j^2(T - T_j) - T_j^3 \ln(T/T_j) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

但し $T_j = T_0$ となる j を $a = j$ とした. $(c_p)_{\text{int}}^j$, $(c_p/T)_{\text{int}}^j$ はそれぞれ, $c_{p_i}^\phi$, $(c_{p_i}^\phi/T)$ を T_{j-1} から T_j まで積分した値である.

A.3.2 飽和蒸気圧を用いる場合

凝結相の場合、比熱よりも飽和蒸気圧の方がデータとして入手しやすい。そこで飽和蒸気圧を用いた化学ポテンシャル、エントロピーの計算方法をまとめる。相平衡が成立しているならば凝結相と気相の化学ポテンシャルは等しいので、

$$\begin{aligned}\mu_i^{c\circ} + RT \ln x_i^c &= \mu_i^{g\circ} + RT \ln \{x_i^c p^* / p_0\} \\ \mu_i^{c\circ} &= \mu_i^{g\circ} + RT \ln \{p^* / p_0\}\end{aligned}\quad (\text{A.41})$$

となる。ここで $\mu_i^{c\circ}$ は凝結相の標準化学ポテンシャル、 $\mu_i^{g\circ}$ は気相の標準化学ポテンシャル、 x_i はモル比、 p^* は飽和蒸気圧である。以上から気相の化学ポテンシャルと飽和蒸気圧より、凝結相の化学ポテンシャルが計算できる。以下ではよく利用される飽和蒸気圧の式に対して化学ポテンシャルとエントロピーの定式化を行う。

Antoine 式を利用する場合

Antoine の式は、

$$\ln \{p^*(T)\} = A - \frac{B}{C + T} \quad (\text{A.42})$$

の形式で与えられる。T は温度、A, B, C は定数であり、その値は表 A.1 に示されている。標準化学ポテンシャルは (A.34) 式、(A.42) 式より、

$$\begin{aligned}\mu_i^{c\circ} &= \mu_i^{g\circ}(T) + RT \left(A - \frac{B \ln(10)}{C + (T - 273.15)} \right) \\ &\quad - RT \ln p_0 + RT \ln(133.322).\end{aligned}\quad (\text{A.43})$$

となり、標準モルエントロピーは (A.36) 式、(A.42) 式より、

$$\begin{aligned}s_i^{c\circ} &= s_i^{g\circ}(T) - R \left(A - \frac{B \ln(10)}{C + (T - 273.15)} \right) \\ &\quad - RT \left(\frac{B \ln(10)}{(C + (T - 273.15))^2} \right) + R \ln p_0\end{aligned}\quad (\text{A.44})$$

となる。但し、表 A.1 の単位系を SI に変換する必要があるために、(A.43)、(A.44) 式に補正項を加えてある。

物質名	A	B	C
H ₂ O(l)	7.9186968	1636.909	224.92
H ₂ S(l)	6.99392	768.1302	247.093
H ₂ S(s)	7.61418	885.319	250.25
NH ₃ (l)	7.3605	926.132	240.17
NH ₃ (s)	9.96382	1617.907	272.55
CH ₄ (l)	6.61184	389.93	266.0
CH ₄ (s)	7.6954	532.2	275.0
CO ₂ (s)	9.81062	1347.79	272.99

表 A.1 Antoine の式の定数 A, B, C の値 (化学便覧より). 但し T の単位は $^{\circ}\text{C}$, p^* の単位は mmHg とする.

AMP 式

AMP 式は分子構造に基づいた蒸気圧の推算式 (グループ寄与法) である.

$$\ln p^*(T) = \frac{a_1}{T} + a_2 + a_3 \ln T + a_4 T + a_5 T^2 \quad (\text{A.45})$$

で与えられる. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 は定数であり, 代表的な定数は表 A.2 に与えられる. 標準化学ポテンシャルは (A.34) 式, (A.45) 式より,

$$\begin{aligned} \mu_l(T, p^*(T)) &= \mu_g^{\circ}(T) + RT \left(\frac{a_1}{T} + a_2 + a_3 \ln T + a_4 T + a_5 T^2 \right) \\ &\quad - RT \ln p_0 + RT \ln (0.1) \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

となる. 但し, 表 A.2 の単位系は cgs なので, SI 単位系に変換するために係数をかけてある. 標準モルエントロピーは (A.36) 式, (A.45) 式より,

$$\begin{aligned} s_i^{c^{\circ}} &= s_i^{g^{\circ}}(T) - R \left(\frac{a_1}{T} + a_2 + a_3 \ln T + a_4 T + a_5 T^2 \right) \\ &\quad - RT \left(-\frac{a_1}{T^2} + \frac{a_3}{T} + a_4 + 2a_5 T \right) + R \ln p_0 \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

となる.

物質名	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
NH ₃ (s)	-4122	41.67871	-1.81630	0	0
NH ₃ (l)	-4409.3512	76.864252	-8.4598340	5.51029×10^{-3}	6.804632×10^{-6}
H ₂ O(s)	-5631.1206	-8.363602	8.2312	-3.861449×10^{-2}	2.77494×10^{-5}
H ₂ O(l)	-2313.0338	-164.03307	38.053682	$-1.3844344 \times 10^{-1}$	7.4465367×10^{-5}

表 A.2 AMP 式の定数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 の値 (Table 4 of Briggs and Sackett, 1989, *ICARUS*, **80**, p98.). 但し単位系は cgs である.

A.3.3 化学反応の圧平衡定数を用いる場合

化学種の比熱, 飽和蒸気圧の知られていなくとも, 化学反応の圧平衡定数を用いて標準化学ポテンシャル, 標準モルエントロピーを計算することができる. NH₄SH の標準化学ポテンシャル, 標準モルエントロピーは化学反応の圧平衡定数を用いて計算することとする.

NH₄SH の生成反応は以下のように書ける.



Briggs and Sackett (1989) によれば, (A.48) 式の圧平衡定数は以下のように書くことができる.

$$K_p = \ln(p_{\text{NH}_3} \cdot p_{\text{H}_2\text{S}}) = 61.781 - \frac{10834}{T} \quad (\text{A.49})$$

但し, p_{NH_3} , $p_{\text{H}_2\text{S}}$ はそれぞれ, アンモニア気体の分圧, 硫化水素の分圧である. 単位系は cgs 単位系である (圧力の単位は dynes/cm²).

平衡条件より, NH₄SH の標準化学ポテンシャルは NH₃ 及び H₂S の標準化学ポテンシャル

ルを用いて以下のように書ける.

$$\begin{aligned}
 \mu_{\text{NH}_4\text{SH}}^s &= \mu_{\text{NH}_3}^g + \mu_{\text{H}_2\text{S}}^g \\
 &= \left\{ \mu_{\text{NH}_3}^{g\circ} + RT \ln \left(\frac{p_{\text{NH}_3}^g}{p_0} \right) \right\} + \left\{ \mu_{\text{H}_2\text{S}}^{g\circ} + RT \ln \left(\frac{p_{\text{H}_2\text{S}}^g}{p_0} \right) \right\} \\
 &= \mu_{\text{NH}_3}^{g\circ} + \mu_{\text{H}_2\text{S}}^{g\circ} + RT \ln \left(\frac{p_{\text{NH}_3}^g \cdot p_{\text{H}_2\text{S}}^g}{p_0^2} \right) \\
 &= \mu_{\text{NH}_3}^{g\circ} + \mu_{\text{H}_2\text{S}}^{g\circ} + RT \ln (p_{\text{NH}_3} \cdot p_{\text{H}_2\text{S}}) - RT \ln p_0^2 \\
 &= \mu_{\text{NH}_3}^{g\circ} + \mu_{\text{H}_2\text{S}}^{g\circ} + RT \left(61.781 - \frac{10834}{T} \right) \\
 &\quad - RT \ln (1.0 \times 10^2) - RT \ln p_0^2.
 \end{aligned} \tag{A.50}$$

また, 標準モルエントロピーは以下のように書ける.

$$\begin{aligned}
 s_{\text{NH}_4\text{SH}}^s &= - \frac{\partial \mu_{\text{NH}_4\text{SH}}^s}{\partial T} \\
 &= s_{\text{NH}_3}^{g\circ} + s_{\text{H}_2\text{S}}^{g\circ} - R \left(61.781 - \frac{10834}{T} \right) \\
 &\quad - RT \left(\frac{10834}{T^2} \right) + R \ln (1.0 \times 10^2) + R \ln p_0^2.
 \end{aligned} \tag{A.51}$$

但し, $\mu_{\text{NH}_3}^{g\circ}(T)$ はアンモニア気体の標準化学ポテンシャル, $\mu_{\text{H}_2\text{S}}^{g\circ}(T)$ は硫化水素気体の標準化学ポテンシャルである. また単位を SI 単位系にするために補正項が加えられている.

A.4 飽和蒸気圧の経験式の適用範囲

(A.44), (A.47) 式より, T が 0 に近付くとエントロピーは発散する. エントロピーは 0 K でその値が 0 と定義される状態量なので, (A.44), (A.47) 式をそのまま使うのは物理的に誤りである. そこで, (A.44), (A.47) 式の適用できない低温の範囲では, $\mu_i^{\circ\phi}(T)$ は, なめらかに接続されるような温度に関する 1 次関数で与える. また高温側では温度に関する 2 次関数で与える. 図 A.2 – 図 A.4 において線で囲まれた領域は飽和蒸気圧の経験式を利用している範囲で, 圧力にして 10 Pa – 1 MPa である.

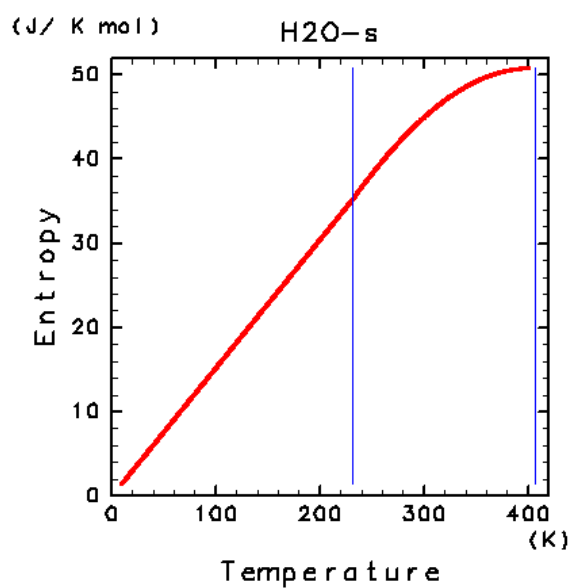
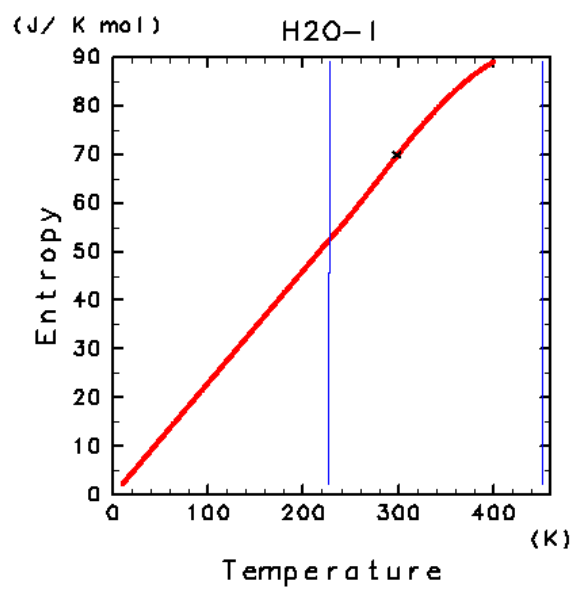
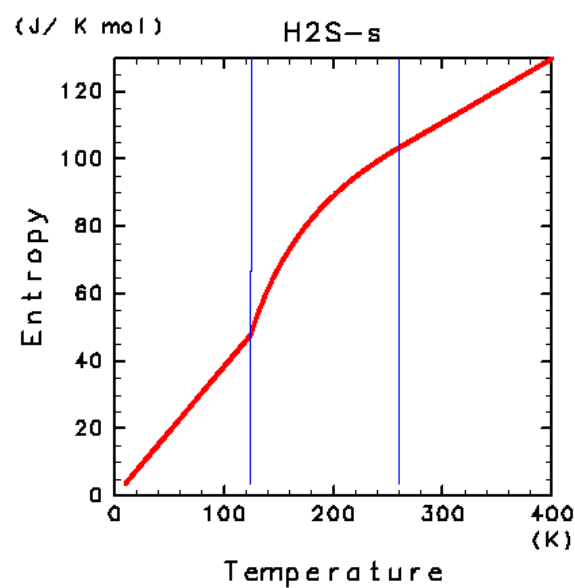
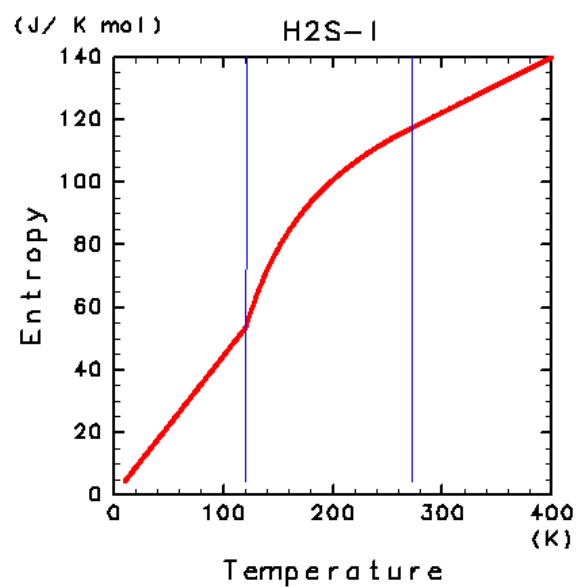


図 A.2 H₂O(l) と H₂O(s) のエントロピー.

図 A.3 H₂S(l) と H₂S(s) のエントロピー.

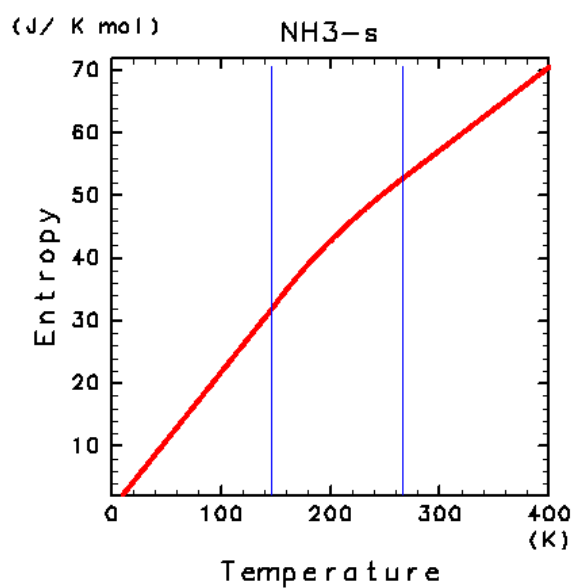
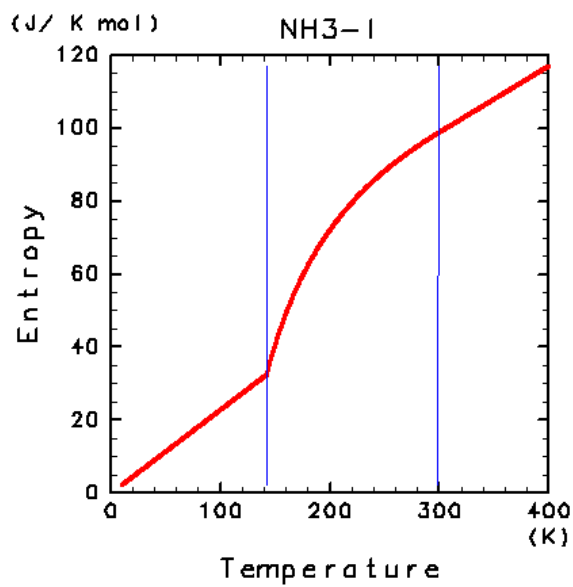


図 A.4 NH₃(l) と NH₃(s) のエントロピー.

付録 B

静的安定度の定式化

B.1 静的安定度の定義

気塊を断熱的に上昇させる過程を考える。気塊の密度と周囲の空気の密度差によって浮力が生じ、その浮力を復元力とする振動の振動数を浮力振動数 N と呼ぶ。浮力振動数の 2 乗を静的安定度 N^2 と呼ぶ。

気塊が上昇することによって、本来は気塊の周囲の大気の圧力と密度も影響を受けるはずである。しかしその影響を小さいとして無視する方法をパーセル法という。本節ではパーセル法による静的安定度の定式化を述べる。

気塊とその周囲の大気を考える。気塊とその周囲の大気には以下のような関係が成立すると仮定する。

- 気塊と周囲の大気は理想気体の状態方程式に従う。
- 気塊を変位させる前の高度 $z = z_0$ において、気塊と周囲の大気の密度 ρ は等しい (図 B.1)。

$$\rho|_{z=z_0} = \rho^*|_{z=z_0} \quad (\text{B.1})$$

- 気塊の分子量は変化しない。すなわち、雨として凝結物が気塊から分離することはない。

$$\frac{dM^*}{dz} = 0 \quad (\text{B.2})$$

但し M^* は周囲の大気の分子量である。

気塊と周囲の大気の密度差は,

$$d\rho = \rho^* - \rho \quad (\text{B.3})$$

と書けるので, 運動方程式は,

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta z = \frac{(\rho - \rho^*)g}{\rho^*} \quad (\text{B.4})$$

となる. ただし g は重力加速度である. (B.4) 式右辺の ρ, ρ^* をテーラー展開し, 2 次以上の微小項を無視すると,

$$\begin{aligned} \frac{(\rho - \rho^*)g}{\rho^*} &= \frac{g}{\rho^*} \left\{ \left(\rho|_{z=z_0} + \frac{d\rho}{dz}\delta z \right) - \left(\rho^*|_{z=z_0} + \frac{d\rho^*}{dz}\delta z \right) \right\}, \\ &= \frac{g}{\rho^*} \left(\frac{d\rho}{dz}\delta z - \frac{d\rho^*}{dz}\delta z \right) \end{aligned}$$

となる. ただし式変形において (B.1) 式の関係を用いた. 理想気体の状態方程式が成立するので, 以下のように変形できる.

$$\begin{aligned} \frac{g}{\rho^*} \left(\frac{d\rho}{dz}\delta z - \frac{d\rho^*}{dz}\delta z \right) &= \frac{gT^*}{M^*} \left\{ \frac{d}{dz} \left(\frac{M}{T} \right) - \frac{d}{dz} \left(\frac{M^*}{T^*} \right) \right\} \delta z, \\ &= \frac{gT^*}{M^*} \left\{ M \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{T} \right) + \frac{1}{T} \frac{dM}{dz} - M^* \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{T^*} \right) - \frac{1}{T^*} \frac{dM^*}{dz} \right\} \delta z, \\ &= \frac{gT^*}{M^*} \left\{ -\frac{M}{T^2} \frac{dT}{dz} + \frac{M^*}{T^{*2}} \frac{dT^*}{dz} + \frac{1}{T} \frac{dM}{dz} \right\} \delta z, \\ &= \left\{ \frac{g}{T} \left(-\frac{dT}{dz} + \frac{M}{M^*} \frac{dT^*}{dz} \right) + g \left(\frac{1}{M} \frac{dM}{dz} \right) \right\} \delta z \quad (\text{B.5}) \end{aligned}$$

但し M は大気のも分子重量である. また式変形において (B.2) 式を利用した. (B.5) 式を (B.4) 式に代入することで,

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta z = \left\{ \frac{g}{T} \left(-\frac{dT}{dz} + \frac{M}{M^*} \frac{dT^*}{dz} \right) + g \left(\frac{1}{M} \frac{dM}{dz} \right) \right\} \delta z \quad (\text{B.6})$$

となる. 解として $\delta z = \sin(Nt)$ を用いることで静的安定度は,

$$N^2 \equiv \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} - \frac{M}{M^*} \frac{dT^*}{dz} \right) - g \left(\frac{1}{M} \frac{dM}{dz} \right) \quad (\text{B.7})$$

と定義される.

B.2 惑星大気の静的安定度の定式化

前節の議論より、静的安定度を与えるためには、1) 気塊の分子量と大気の分子量との関係、2) 大気の平均的な温度分布、3) 大気の平均的な分子量分布、4) 気塊の温度変化、の情報が必要である。本節ではそれらを地球大気の常識を基に仮定し、その時の静的安定度の定式化を考察する。

1) の気塊と大気の分子量の関係であるが、理想気体の条件が成立し、かつ $z = z_0$ において気塊と周囲の大気温度が等しいと仮定するならば、以下の関係が成立する。

$$M = M^*. \quad (\text{B.8})$$

2) の大気の平均的な温度分布は、大気の湿潤断熱温度減率から与える。図 B.2 は地球大気の平均的な温度構造の決まり方の模式図であるが、地球のように活発な対流を生じる大気での温度構造は湿潤断熱的な構造となっている。他の惑星大気においても、活発な対流活動が存在すれば、温度構造は湿潤断熱的な構造になっている可能性がある。

3) の大気の平均的な分子量分布は、大気の湿潤断熱的に決まる分子量減率をそのまま用いる。図 B.2 に示したように、地球大気のア平均分子量はほぼ乾燥成分の分子量である。他の惑星大気においても平均的な分子量分布は湿潤断熱的に決まる分子量分布からずれている可能性が高い。しかし本節では分子量の効果を最大限に見積もるために、あえて上記の設定を用いる。

4) の気塊の温度変化は、気塊内で凝結が生じないものと仮定し、乾燥断熱温度減率によって与える。 dT^*/dz は以下のように表すことができる。

$$\frac{dT^*}{dz} = -\frac{Mg}{c_p}. \quad (\text{B.9})$$

以上の仮定より、(B.7) は以下のように表現される。

$$N^2 = \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} \Big|_{moist} + \frac{Mg}{c_p} \right) - g \left(\frac{1}{M} \frac{dM}{dz} \Big|_{moist} \right). \quad (\text{B.10})$$

但し、式変形には、(B.9) 式を利用し、 $dT/dz|_{moist}$ と $dM/dz|_{moist}$ はそれぞれ偽湿潤断熱線に沿った温度変化と分子量変化を意味する。 $dT/dz|_{moist}$ と $dM/dz|_{moist}$ は凝結成分と乾燥成分の 2 成分から成る大気では簡単に与えることができる。2 成分系での

$dT/dz|_{moist}$ と $dM/dz|_{moist}$ の定式化と、その場合の静的安定度の定式化については次章で述べる。

B.2.1 2 成分系での静的安定度の定式化

本節では、大気は乾燥成分と凝結成分の 2 成分から成るものと仮定し、その時の静的安定度の定式化を行う。前章の議論より、惑星大気の静的安定度を求めるためには断熱温度減率が必要なので、本節では始めに断熱温度減率の近似系の定式化を行い、次に静的安定度の近似系の定式化を行うこととする。

簡単のために、大気は乾燥成分と凝結成分の 2 成分から成るものとする。乾燥成分と凝結成分の分子量をそれぞれ M_d と M_v 、乾燥成分と凝結成分の比熱をそれぞれ c_{p_d} と c_{p_v} 、凝結成分のモル比を X とする。その時、系全体の分子量と比熱は以下のように書ける。

$$M = M_d(1 - X) + M_v X, \quad (B.11)$$

$$c_p = c_{p_d}(1 - X) + c_{p_v} X. \quad (B.12)$$

断熱温度減率

Weidenschilling and Lewis (1973), Atreya and Romani (1985) に従って湿潤断熱減率を定式化する。熱力学の第 1 法則は、

$$dU = \delta Q + \delta W + \delta Z \quad (B.13)$$

である。ここで dU は内部エネルギー、 δQ は系に加えられる熱量、 δW は系に加える仕事、 δZ は化学エネルギーである。考えている系において気体は理想気体として取り扱うことができ、その変化は断熱的にであるとすると、(B.13) 式の各項は以下のように書ける。

$$dU = c_v dT. \quad (B.14)$$

$$\delta Q = 0. \quad (B.15)$$

$$\begin{aligned} \delta W &= -pdV, \\ &= -d(pV) + Vdp, \\ &= -RdT + Vdp, \\ &= -RdT + V \left(\frac{-Mpg}{RT} \right) dz, \quad (\text{静水圧平衡の式}) \\ &= -RdT - Mgdz. \end{aligned} \quad (B.16)$$

$$\delta Z = -\lambda dX. \quad (B.17)$$

ここで c_v は大気の定積モル比熱の平均値, T は温度, p は圧力, V は 気体分子の 1 モル当たりの体積, R は気体定数, M は平均分子量, g は重力加速度, λ は大気中の凝結成分のモル当たりの凝結のエンタルピー, dX は凝結成分のモル比の変化である. (B.13) 式に (B.14) – (B.17) 式を代入することで,

$$\begin{aligned} c_v dT + R dT + M g dz + \lambda dX &= 0, \\ c_p dT + M g dz + \lambda dX &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

となる. 但し c_p は大気の定圧モル比熱の平均値で, 理想気体の場合 $c_p = c_v + R$ である.

乾燥断熱温度減率

(B.18) 式の潜熱による項を無視することで乾燥断熱温度減率が求まる.

$$\begin{aligned} c_p dT + M g dz &= 0, \\ \frac{dT}{dz} &= -\frac{M g}{c_p}. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

平均分子量と平均比熱を (B.11), (B.12) 式を用いて表現すると, 乾燥断熱温度減率は以下のように変形できる.

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{M_v g}{c_{p_d}} \left\{ \frac{1 + \frac{(M_v - M_d)X}{M_d}}{1 + \frac{(c_{p_v} - c_{p_d})X}{c_{p_d}}} \right\}. \quad (\text{B.20})$$

さらに温度の圧力微分は以下のように書ける.

$$\frac{dT}{dp} = \frac{RT}{c_p p}, \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{dT}{dp} = \frac{RT}{c_{p_d} p} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{(c_{p_v} - c_{p_d})X}{c_{p_d}}} \right\}. \quad (\text{B.22})$$

(B.20) 式において十分に凝結性成分の少ない場合, すなわち

$$M \approx M_d, \quad c_p \approx c_{p_d}, \quad (\text{B.23})$$

の場合には,

$$\frac{dT}{dz} \approx -\frac{M_d g}{c_{p_d}} \quad (\text{B.24})$$

と近似することができる. また, (B.20) において十分に凝結性成分の多い場合, すなわち

$$M \approx M_v, \quad c_p \approx c_{p_v}, \quad (\text{B.25})$$

の場合には,

$$\frac{dT}{dz} \approx -\frac{M_v g}{c_{p_v}} \quad (\text{B.26})$$

と近似することができる.

湿潤断熱温度減率

dX をモル分率と分圧の関数として表すと以下ようになる.

$$dX = \frac{1}{p} de - \left(\frac{e}{p^2} \right) dp. \quad (\text{B.27})$$

ただし e は凝結成分の飽和蒸気圧である. この式にクラウジウス・クラペイロンの式

$$de = \frac{e \lambda dT}{RT^2} \quad (\text{B.28})$$

を代入して変形すると, 以下ようになる.

$$\begin{aligned} dX &= \frac{1}{p} de - \frac{e}{p^2} dp, \\ &= \frac{1}{p} \left(\frac{e \lambda dT}{RT^2} \right) - \frac{e}{p^2} \left(-\frac{M p g}{RT} dz \right), \\ &= \frac{e}{p} \frac{\lambda}{R_v T^2} dT + \frac{e}{p} \frac{M g}{RT} dz, \\ &= \frac{\lambda X}{RT^2} dT + \frac{M g X}{RT} dz. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

(B.18) 式に (B.29) 式を代入することで湿潤断熱温度減率が求まる.

$$\begin{aligned} c_p dT + M g dz + \lambda dX &= 0, \\ c_p dT + M g dz + \lambda \left(\frac{\lambda X}{RT^2} dT + \frac{M g X}{RT} dz \right) &= 0, \\ c_p \left(1 + \frac{\lambda^2 X}{c_p R T^2} \right) dT + M g \left(1 + \frac{\lambda X}{RT} \right) dz &= 0, \\ \frac{dT}{dz} &= -\frac{M g}{c_p} \left(\frac{1 + \frac{\lambda X}{RT}}{1 + \frac{\lambda^2 X}{c_p R T^2}} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

平均分子量と平均比熱を (B.11), (B.12) 式を用いて表現すると, 湿潤断熱温度減率は以下のように変形できる.

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{M_d g}{c_{p_d}} \left\{ \frac{1 + \frac{(M_v - M_d) X}{M_d}}{1 + \frac{(c_{p_v} - c_{p_d}) X}{c_{p_d}}} \right\} \left(\frac{1 + \frac{\lambda X}{RT}}{1 + \frac{\lambda^2 X}{c_p R T^2}} \right). \quad (\text{B.31})$$

さらに (B.30), (B.31) を変形することで温度の圧力微分は以下のように書ける.

$$\frac{dT}{dp} = \frac{RT}{c_p p} \left(\frac{1 + \frac{\lambda X}{RT}}{1 + \frac{\lambda^2 X}{c_p RT^2}} \right), \quad (\text{B.32})$$

$$\frac{dT}{dp} = \frac{RT}{c_{pd} p} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{(c_{pv} - c_{pd})X}{c_{pd}}} \right\} \left(\frac{1 + \frac{\lambda X}{RT}}{1 + \frac{\lambda^2 X}{c_p RT^2}} \right). \quad (\text{B.33})$$

次に凝結成分が少ないとする近似式と凝結成分が多いとする近似式を導出する. (B.30) 式において十分に凝結性成分の少ない場合, すなわち

$$M \approx M_d, \quad c_p \approx c_{pd}, \quad \frac{\lambda X}{RT} \ll 1, \quad \frac{\lambda^2 X}{c_p RT^2} \ll 1 \quad (\text{B.34})$$

の場合には,

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dz} &\approx -\frac{M_d g}{c_{pd}} \left(1 + \frac{\lambda X}{RT} \right) \left(1 - \frac{\lambda^2 X}{c_{pd} RT^2} \right), \\ &\approx -\frac{M_d g}{c_{pd}} \left\{ 1 - \frac{\lambda X}{c_{pd} T} \left(\frac{\lambda}{RT} - \frac{c_{pd}}{R} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

と近似することができる. 但し X に関する 2 次の微少量は十分に小さいものとして無視した. また (B.30) において十分に凝結性成分の多い場合, すなわち

$$M \approx M_v, \quad c_p \approx c_{pv}, \quad \frac{\lambda X}{RT} \gg 1, \quad \frac{\lambda^2 X}{c_p RT^2} \gg 1, \quad (\text{B.36})$$

の場合には,

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dz} &\approx -\frac{M_v g}{c_{pv}} \frac{\frac{\lambda X}{RT}}{\frac{\lambda^2 X}{c_{pv} RT^2}}, \\ &= -\frac{M_v g T}{\lambda} \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

と近似することができる.

静的安定度

静的安定度の式 (B.10) に (B.11) 式を代入することで得られた式,

$$N^2 = \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \frac{Mg}{c_p} \right) - \frac{g(M_v - M_d)}{M} \frac{dX}{dz},$$

にクラウジウス・クラペイロンの式 (B.29) を

$$\frac{dX}{dz} = \frac{\lambda X}{RT^2} \frac{dT}{dz} + \frac{MgX}{RT}$$

のように変形して代入すると,

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \frac{Mg}{c_p} \right) - \frac{g(M_v - M_d)}{M} \left(\frac{\lambda X}{RT^2} \frac{dT}{dz} + \frac{MgX}{RT} \right), \\ &= \frac{g}{T} \left[\frac{Mg}{c_p} + \frac{dT}{dz} \left\{ 1 - \frac{(M_v - M_d)\lambda X}{M RT} \right\} \right] - \frac{g}{T} \frac{(M_v - M_d)}{M} \frac{MgX}{R} \quad (\text{B.38}) \end{aligned}$$

となる. 平均分子量と平均比熱を (B.11), (B.12) 式を用いて表現すると, 静的安定度は以下のように変形できる.

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{g}{T} \left[\frac{M_d g}{c_{pd}} \left\{ \frac{1 + \frac{(M_v - M_d)X}{M_d}}{1 + \frac{(c_{pv} - c_{pd})X}{c_{pd}}} \right\} + \frac{dT}{dz} \left\{ 1 - \frac{(M_v - M_d)\frac{\lambda X}{RT}}{M_d \left\{ 1 + \frac{(M_v - M_d)X}{M_d} \right\}} \right\} \right] \\ &\quad - \frac{g}{T} \frac{(M_v - M_d)gX}{R}. \quad (\text{B.39}) \end{aligned}$$

次に凝結成分が少ないとする近似式と凝結成分が多いとする近似式を導出する. (B.38) 式に (B.24), (B.34), (B.35) 式を代入する. その結果, 凝結成分が少ない場合の静的安定度の近似式が得られる.

$$\begin{aligned} N^2 &\approx \frac{g}{T} \left[\frac{M_d g}{c_{pd}} - \frac{M_d g}{c_{pd}} \left\{ 1 - \frac{\lambda X}{c_{pd} T} \left(\frac{\lambda}{RT} - \frac{c_{pd}}{R} \right) \right\} \left\{ 1 - \frac{(M_v - M_d)\lambda X}{M_d RT} \right\} \right] \\ &\quad - \frac{g}{T} \frac{(M_v - M_d)M_d g X}{M_d R}, \\ &\approx \frac{M_d g^2}{c_{pd} T} \left\{ \frac{\lambda X}{c_{pd} T} \left(\frac{\lambda}{RT} - \frac{c_{pd}}{R} \right) + \frac{(M_v - M_d)\lambda X}{M_d RT} \right\} - \frac{M_d g^2}{c_{pd} T} \frac{(M_v - M_d)c_{pd} X}{M_d R}, \\ &= \frac{M_d g^2}{c_{pd} T} \left(\frac{\lambda}{RT} - \frac{c_{pd}}{R} \right) \left\{ \frac{\lambda}{c_{pd} T} + \frac{(M_v - M_d)}{M_d} \left(1 - \frac{\lambda^2 X}{c_{pd} RT^2} \right) \right\} X, \\ &\approx \frac{M_d g^2}{c_{pd} T} \left(\frac{\lambda}{RT} - \frac{c_{pd}}{R} \right) \left(\frac{\lambda}{c_{pd} T} + \frac{(M_v - M_d)}{M_d} \right) X. \quad (\text{B.40}) \end{aligned}$$

(B.38) 式に (B.26), (B.36), (B.37) 式を代入する. その結果, 凝結成分が多い場合の静的安定度の近似式が得られる.

$$\begin{aligned} N^2 &\approx \frac{g}{T} \left[\frac{M_v g}{c_{pv}} - \frac{M_v g T}{\lambda} \left\{ 1 - \frac{(M_v - M_d)\lambda X}{M_v RT} \right\} - \frac{(M_v - M_d)M_v g X}{M_v R} \right], \\ &= \frac{g}{T} \left[\frac{M_v g}{c_{pv}} \left(1 - \frac{c_{pv} T}{\lambda} \right) + \frac{M_v g T}{\lambda} \frac{(M_v - M_d)\lambda X}{M_v RT} - \frac{(M_v - M_d)M_v g X}{M_v R} \right], \\ &= \frac{M_v g^2}{c_{pv} T} \left(1 - \frac{c_{pv} T}{\lambda} \right). \quad (\text{B.41}) \end{aligned}$$

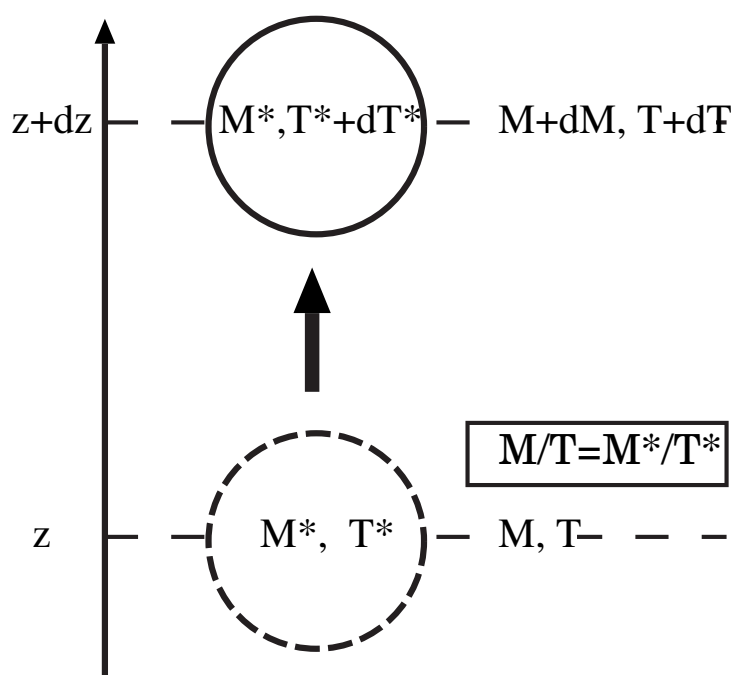


図 B.1 パーセル法による静的安定度の見積もりの概要. 気塊の周囲の大気温度 T と分子量 M , 気塊の温度 T^* と分子量 M^* とする. $z = z_0$ において気塊と周囲の大気の密度が等しく, 理想気体の状態方程式が成立するならば, $M/T = M^*/T^*$ となる. また気塊を上昇・下降させた際, 気塊の温度は変化するが気塊から凝結物が離脱しないと仮定したので, $z + dz$ における気塊の分子量は M^* のまま維持される.

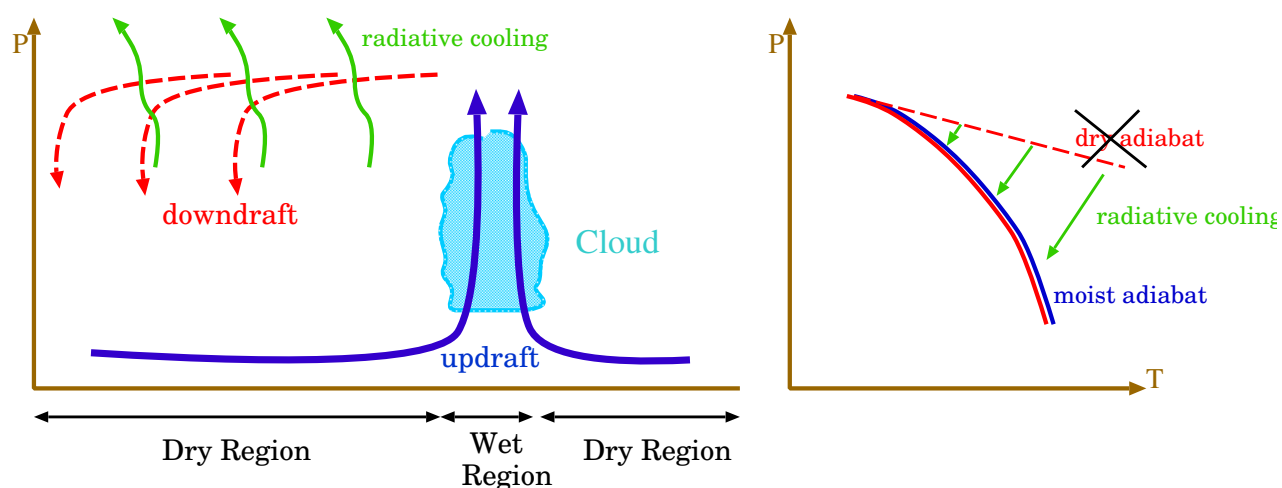


図 B.2 地球大気での平均的な温度・分子量の決まりかたの模式図. 地球大気の大気構造は, 狭い上昇流域と広い下降流域, によって特徴づけられる. 平均的な温度は雲の中の湿潤断熱減率で決まり, 平均的な分子量は下降域の乾燥成分のみの分子量で決まる.

付録 C

雲対流モデルの定式化

C.1 準圧縮方程式系の導出

地球大気における湿潤対流の定式化同様、大気の乾燥成分と湿潤成分の分子量の差は密度の式には考慮するが、熱の式には考慮しないような系を考える。この系では大気の熱エネルギーは乾燥大気の熱エネルギーで決まることになる。このような系では温位 θ が保存量として使える。

準圧縮方程式系は、基礎方程式中の各変数を基本場と擾乱場に分離し、擾乱場は基本場に比べて小さいという仮定の下で方程式を近似することで得られる。

C.1.1 基礎方程式系

水平鉛直 2 次元大気の状態を温位 θ 、無次元圧力 π 、風速 u, w 、密度 ρ で表現する場合、基礎方程式系は以下ようになる。この方程式系では、連続の式

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{C.1})$$

と状態方程式

$$\rho = \frac{p}{R_d T_v} \quad (\text{C.2})$$

を用いることで得られる圧力方程式を利用する。Klemp and Willhelmson (1978) では、この基礎方程式を用いている。

運動方程式

$$\frac{du}{dt} + c_{pd}\theta_v \frac{\partial \pi}{\partial x} = Turb.u \quad (C.3)$$

$$\frac{dw}{dt} + c_{pd}\theta_v \frac{\partial \pi}{\partial z} - g = Turb.w \quad (C.4)$$

圧力方程式

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{C_s^2}{c_{pd}\rho\theta_v} \left\{ -\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{f} \left(\sum \frac{\partial f}{\partial q_v} \frac{dq_v}{dt} + \sum \frac{\partial f}{\partial q_c} \frac{dq_c}{dt} + \sum \frac{\partial f}{\partial q_r} \frac{dq_r}{dt} \right) \right\} \quad (C.5)$$

状態方程式

$$\rho = \frac{p_0 \pi^{c_{vd}/R_d}}{R_d \theta_v} \quad (C.6)$$

熱の式

$$\frac{d\theta}{dt} = Q + Turb.\theta \quad (C.7)$$

凝結成分の混合比の式

$$\frac{dq_v}{dt} = Src.q_v + Turb.q_v \quad (C.8)$$

$$\frac{dq_x}{dt} = Src.q_c + Turb.q_c \quad (C.9)$$

$$\frac{dq_x}{dt} = Src.q_r + Fall.q_x + Turb.q_r \quad (C.10)$$

ただし、エクスター関数 π は,

$$\pi \equiv \frac{T}{\theta} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R_d/c_{pd}} \quad (C.11)$$

であり、音速 C_s は

$$C_s^2 \equiv \frac{c_{pd}}{c_{vd}} R_d \pi \theta_v = \frac{c_{pd}}{c_{vd}} R_d \pi \left(\frac{\theta}{f} \right) \quad (C.12)$$

である。

運動方程式の圧力勾配は、温位とエクスター関数を用いることで得られる。

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho} dp &= \frac{R_d \pi(\theta/f)}{p} d \left(p_0 \pi^{c_{p_d}/R_d} \right) \\
 &= \frac{R_d \pi(\theta/f)}{p} \left(\frac{p_0 c_{p_d}}{R_d} \pi^{c_{p_d}/R_d - 1} \right) d\pi \\
 &= \frac{R_d \pi(\theta/f)}{p} \left(\frac{c_{p_d}}{R_d} p \pi^{-1} \right) d\pi \\
 &= c_{p_d}(\theta/f) d\pi \\
 &= c_{p_d} \theta_v d\pi
 \end{aligned} \tag{C.13}$$

圧力方程式は密度の式と連続の式を組み合わせることで得られる。まず密度を $\rho = \rho(\theta, \pi, q_v, q_x)$ として ρ の全微分を計算する。

$$\begin{aligned}
 d\rho &= d \left[\frac{p_0 \pi^{c_v/R_d}}{R_d \theta_v} \right] \\
 &= d \left[\frac{p_0 \pi^{c_v/R_d}}{R_d(\theta/f)} \right] \\
 &= \frac{p_0}{R_d(\theta/f)} \pi^{(c_v/R_d)-1} \frac{c_v d}{R_d} d\pi - \frac{p_0 \pi^{c_v/R_d} f}{R_d} \frac{d\theta}{\theta^2} \\
 &\quad + \frac{p_0 \pi^{c_v/R_d}}{R_d \theta} \left(\sum \frac{\partial f}{\partial q_v} dq_v + \sum \frac{\partial f}{\partial q_c} dq_c + \sum \frac{\partial f}{\partial q_r} dq_r \right) \\
 &= c_{p_d}(\theta/f) \left(\frac{c_v d}{c_{p_d} R_d \pi(\theta/f)} \right) \left(\frac{p_0 \pi^{c_v/R_d}}{R_d(\theta/f)} \right) d\pi - \frac{p_0 \pi^{c_v/R_d}}{R_d(\theta/f)} \frac{d\theta}{\theta} \\
 &\quad + \frac{1}{f} \left(\frac{p_0 \pi^{c_v/R_d}}{R_d(\theta/f)} \right) \left(\sum \frac{\partial f}{\partial q_v} dq_v + \sum \frac{\partial f}{\partial q_c} dq_c + \sum \frac{\partial f}{\partial q_r} dq_r \right) \\
 &= \frac{c_{p_d} \rho(\theta/f)}{C_s^2} d\pi - \frac{\rho}{\theta} d\theta + \rho \frac{1}{f} \left(\sum \frac{\partial f}{\partial q_v} dq_v + \sum \frac{\partial f}{\partial q_c} dq_c + \sum \frac{\partial f}{\partial q_r} dq_r \right) \\
 &= \frac{c_{p_d} \rho \theta_v}{C_s^2} d\pi - \frac{\rho}{\theta} d\theta + \rho \frac{1}{f} \left(\sum \frac{\partial f}{\partial q_v} dq_v + \sum \frac{\partial f}{\partial q_c} dq_c + \sum \frac{\partial f}{\partial q_r} dq_r \right) \tag{C.14}
 \end{aligned}$$

となる。(C.14) 式を圧力の式として整理すると、

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{C_s^2}{c_{p_d} \rho \theta_v} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{f} \left(\sum \frac{\partial f}{\partial q_v} dq_v + \sum \frac{\partial f}{\partial q_c} dq_c + \sum \frac{\partial f}{\partial q_r} dq_r \right) \right\} \tag{C.15}$$

となり、連続の式を用いると、

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{C_s^2}{c_{p_d} \rho \theta_v} \left\{ -\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{f} \left(\sum \frac{\partial f}{\partial q_v} dq_v + \sum \frac{\partial f}{\partial q_c} dq_c + \sum \frac{\partial f}{\partial q_r} dq_r \right) \right\} \tag{C.16}$$

となり、圧力方程式が得られる。

C.1.2 基本場と擾乱場の分離

変数を基本場と擾乱場に分離し、基本場は静水圧平衡にあると仮定する。この時、変数は以下のように書ける。

$$\begin{aligned}
 u &= u'(x, z, t) \\
 w &= w'(x, z, t) \\
 \pi &= \bar{\pi}(z) + \pi'(x, z, t) \\
 \theta_v &= \bar{\theta}_v(z) + \theta'_v(x, z, t) \\
 \rho &= \bar{\rho}(z) + \rho'(x, z, t) \\
 q_v &= \bar{q}_v(z) + q'_v(x, z, t) \\
 q_r &= q'_r(x, z, t) \\
 q_c &= q'_c(x, z, t)
 \end{aligned}$$

但し、 $\theta_v = \theta/f$ とし、基本場の風速 u, w と雲粒混合比と雨粒混合はゼロと見なした。そして基本場には静水圧平衡、

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} = -\frac{g}{c_{pd}\bar{\theta}_v} = -\frac{g}{c_{pd}(\bar{\theta}/\bar{f})} \quad (\text{C.17})$$

の関係が成り立つものとする。

C.1.3 水平方向の運動方程式の導出

水平方向の運動方程式を基本場と擾乱場に分離する。

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\left(u' \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial u'}{\partial z}\right) - c_{pd} \left(\bar{\theta}_v \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x} + \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi'}{\partial x} + \theta'_v \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial x} + \theta'_v \frac{\partial \pi'}{\partial x}\right) + T_{urb.u}$$

上式において移流項以外の 2 次の微小項を消去し、さらに基本場は x 方向には変化しないことを利用すると、以下の擾乱成分の式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u'}{\partial t} &= -\left(u' \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial u'}{\partial z}\right) - c_{pd} \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi'}{\partial x} + T_{urb.u} \\
 &= -\left(u' \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial u'}{\partial z}\right) - c_{pd} \left(\frac{\bar{\theta}}{\bar{f}}\right) \frac{\partial \pi'}{\partial x} + T_{urb.u}
 \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

ここで $\bar{f}$ は,

$$\bar{f} = \left(1 - \frac{\sum \bar{q}_v / M_v}{1/M_d + \sum \bar{q}_v / M_v}\right) (1 + \sum \bar{q}_v) \quad (\text{C.19})$$

である.

C.1.4 準圧縮系方程式系

鉛直方向の運動方程式の導出

鉛直方向の運動方程式を基本場と擾乱場に分離する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w'}{\partial t} = & - \left(u' \frac{\partial w'}{\partial x} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} \right) - c_{pd} \left(\bar{\theta}_v \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} + \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi'}{\partial z} + \theta_v' \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} + \theta_v' \frac{\partial \pi'}{\partial z} \right) \\ & - g + \text{Turb}.w \end{aligned}$$

上式において移流項以外の 2 次の微小項を消去すると以下となる.

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = - \left(u' \frac{\partial w'}{\partial x} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} \right) - c_{pd} \left(\bar{\theta}_v \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} + \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi'}{\partial z} + \theta_v' \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} \right) - g + \text{Turb}.w.$$

さらに静水圧の式を利用すると以下となる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w'}{\partial t} = & - \left(u' \frac{\partial w'}{\partial x} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + c_{pd} \bar{\theta}_v \left(\frac{g}{c_{pd} \bar{\theta}_v} \right) - c_{pd} \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi'}{\partial x} \\ & + c_{pd} \theta_v' \left(\frac{g}{c_{pd} \bar{\theta}_v} \right) - g + \text{Turb}.w \\ = & - \left(u' \frac{\partial w'}{\partial x} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} \right) - c_{pd} \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi'}{\partial x} + \frac{\theta_v'}{\bar{\theta}_v} g + \text{Turb}.w \end{aligned}$$

ここで θ_v' は,

$$\begin{aligned} \theta_v' = & \frac{1}{f} \left\{ \theta' - \sum \frac{\theta}{f} \frac{\partial f}{\partial q_v} q_v' - \sum \frac{\theta}{f} \frac{\partial f}{\partial q_c} q_c' - \sum \frac{\theta}{f} \frac{\partial f}{\partial q_r} q_r' \right\} \\ = & \frac{1}{f} \left\{ \frac{\theta'}{\theta} - \sum \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial q_v} q_v' - \sum \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial q_c} q_c' - \sum \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial q_r} q_r' \right\} \quad (\text{C.20}) \end{aligned}$$

であり, (C.20) 式の第 2 項を計算すると,

$$\begin{aligned}
 \sum \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial q_v} &= \frac{1}{\frac{1/M_d}{1/M_d + \sum q_v/M_v} (1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r)} \\
 &\quad \times \frac{\frac{\partial}{\partial q_v} \frac{1/M_d}{1/M_d + \sum q_v/M_v} (1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r)}{\frac{\partial q_v}{\partial q_v}} \\
 &= \frac{1}{\frac{1/M_d}{1/M_d + \sum q_v/M_v} (1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r)} \\
 &\quad \left[\frac{1/M_d}{1/M_d + \sum q_v/M_v} - \left\{ \frac{\sum 1/M_d M_v}{(1/M_d + \sum q_v/M_v)^2} (1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r) \right\} \right] \\
 &= \frac{1}{1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r} - \frac{\sum 1/M_v}{1/M_d + \sum q_v/M_v}
 \end{aligned}$$

であり, (C.20) 式の第 3 項を計算すると,

$$\begin{aligned}
 \sum \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial q_c} &= \frac{1}{\frac{1/M_d}{1/M_d + \sum q_v/M_v} (1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r)} \\
 &\quad \times \frac{\frac{\partial}{\partial q_c} \frac{1/M_d}{1/M_d + \sum q_v/M_v} (1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r)}{\frac{\partial q_c}{\partial q_c}} \\
 &= \frac{1}{1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r}
 \end{aligned}$$

であり, (C.20) 式の第 4 項を計算すると,

$$\begin{aligned}
 \sum \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial q_r} &= \frac{1}{\frac{1/M_d}{1/M_d + \sum q_v/M_v} (1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r)} \\
 &\quad \times \frac{\frac{\partial}{\partial q_r} \frac{1/M_d}{1/M_d + \sum q_v/M_v} (1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r)}{\frac{\partial q_r}{\partial q_r}} \\
 &= \frac{1}{1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r}
 \end{aligned}$$

となるので,

$$\theta_v' = \frac{1}{f} \left\{ \frac{\theta'}{\theta} + \frac{\sum q_v'/M_v}{1/M_d + \sum q_v/M_v} - \frac{\sum q_v' + \sum q_c' + \sum q_r'}{1 + \sum q_v + \sum q_c + \sum q_r} \right\} \quad (\text{C.21})$$

である. ここで擾乱成分は平均成分に比べて十分に小さいので, 全量を平均成分に置き換えることで,

$$\theta_v' = \frac{\bar{\theta}}{\bar{f}} \left\{ \frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \frac{\sum \bar{q}_v'/M_v}{1/M_d + \sum \bar{q}_v/M_v} - \frac{\sum \bar{q}_v' + \sum \bar{q}_c' + \sum \bar{q}_r'}{1 + \sum \bar{q}_v} \right\} \quad (\text{C.22})$$

となる. これを用いると, 擾乱成分の速度 w の式は以下のように書ける.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w'}{\partial t} = & - \left(u' \frac{\partial w'}{\partial x} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} \right) - c_{pd} \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi'}{\partial x} \\ & + \left(\frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \frac{\sum q'_v / M_v}{1/M_d + \sum \bar{q}_v / M_v} - \frac{\sum q'_v + \sum q'_c + \sum q'_r}{1 + \sum \bar{q}_v} \right) g + T_{urb.w} \end{aligned} \quad (C.23)$$

圧力方程式の導出

Klemp and Wilhelmson (1978) では, 非断熱的な加熱による熱膨張と凝縮に伴う圧力変化を無視し,

$$\frac{d\pi}{dt} = - \frac{C_s^2}{c_{pd}(\theta/f)} \nabla \cdot \mathbf{u}$$

として定式化した. 本モデルで考える系では, 凝縮成分が十分に小さいので, この近似を用いることとした.

圧力方程式に関して, 平均成分と擾乱成分に分ける. ただし, 擾乱成分は平均成分よりも十分小さいという仮定を用い, $1/\theta = 1/\bar{\theta}$, $1/f = 1/\bar{f}$ とする.

$$\frac{\partial \bar{\pi} + \pi'}{\partial t} + u' \frac{\partial \bar{\pi} + \pi'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{\pi} + \pi'}{\partial z} = - \frac{\overline{C_s^2}}{c_{pd}(\bar{\theta}/\bar{f})} \nabla \cdot \mathbf{u}'$$

上式では C_s^2 を平均成分と擾乱成分に分離して 2 次の微小項を無視すると, $\overline{C_s^2}$ と等しくなることを利用している.

$$\begin{aligned} C_s^2 &= \frac{c_{pd}}{c_{vd}} R_d (\bar{\pi} + \pi') \left(\frac{(\bar{\theta} + \theta')}{\bar{f}} \right) \\ &\approx \frac{c_{pd}}{c_{vd}} R_d \left(\bar{\pi} \frac{\bar{\theta}}{\bar{f}} + \bar{\pi} \frac{\theta'}{\bar{f}} + \pi' \frac{\bar{\theta}}{\bar{f}} \right) \\ &= \frac{c_{pd}}{c_{vd}} R_d \bar{\pi} \frac{\bar{\theta}}{\bar{f}} \left(1 + \frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \frac{\pi'}{\bar{\pi}} \right) \\ &\approx \frac{c_{pd}}{c_{vd}} R_d \bar{\pi} \frac{\bar{\theta}}{\bar{f}} \equiv \overline{C_s^2} \end{aligned} \quad (C.24)$$

ただし $\theta'/\bar{\theta} \ll 1$, $\pi'/\bar{\pi} \ll 1$ であることを用いた. 平均成分は z にのみ依存することを利

用し, また 2 次の微小項を無視する.

$$\frac{\partial \pi'}{\partial t} = -w' \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} - \frac{\overline{C_s^2}}{c_{pd}(\bar{\theta}/\bar{f})} \nabla \cdot \mathbf{u}'$$

さらに π を理想気体の状態方程式で変形してまとめると, 圧力の擾乱成分の時間発展方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi'}{\partial t} &= -w' \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{\rho} R_d (\bar{\theta}/\bar{f})}{p_0} \right)^{R_d/c_{vd}} - \frac{\overline{C_s^2}}{c_{pd}(\bar{\theta}/\bar{f})} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \\ &= -w' \frac{R_d}{c_{vd}} \bar{\pi} \frac{1}{\left(\frac{\bar{\rho} R_d (\bar{\theta}/\bar{f})}{p_0} \right)} \frac{R_d}{p_0} \frac{\partial \bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})}{\partial z} - \frac{\overline{C_s^2}}{c_{pd}(\bar{\theta}/\bar{f})} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\overline{C_s^2}}{c_{pd} \bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})^2} \left\{ w' \frac{\partial \bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})}{\partial z} + \bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f}) \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \right\} \\ &= -\frac{\overline{C_s^2}}{c_{pd} \bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})^2} \nabla \cdot \left\{ \bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f}) \mathbf{u}' \right\} \end{aligned}$$

以上より,

$$\frac{\partial \pi'}{\partial t} = -\frac{\overline{C_s^2}}{c_{pd} \bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f})^2} \nabla \cdot \left\{ \bar{\rho}(\bar{\theta}/\bar{f}) \mathbf{u}' \right\} \quad (\text{C.25})$$

である.

熱の式の導出

熱の式を平均成分と擾乱成分に分離する.

$$\frac{\partial (\bar{\theta} + \theta')}{\partial t} = -u' \frac{\partial (\bar{\theta} + \theta')}{\partial x} - w' \frac{\partial (\bar{\theta} + \theta')}{\partial z} + Q + \text{Turb.}(\bar{\theta} + \theta')$$

ここで平均場の量は z の関数であることを用いると,

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} = - \left(u' \frac{\partial \theta'}{\partial x} + w' \frac{\partial \theta'}{\partial z} \right) - w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + Q + \text{Turb.} \bar{\theta} + \text{Turb.} \theta' \quad (\text{C.26})$$

となる.

凝結成分の混合比の保存式の導出

凝結成分の混合比の保存式についても, 変数を平均成分と擾乱成分に分離する. 熱の式と同様に, 以下のように書ける. 但し, 生成項, 落下項は擾乱成分のみ存在すると仮定する.

この仮定は平均場では凝結は生じていないと考えることに等しい。

$$\frac{\partial q'_v}{\partial t} = - \left(u' \frac{\partial q'_v}{\partial x} + w' \frac{\partial q'_v}{\partial x} \right) - w' \frac{\partial \bar{q}_v}{\partial x} + Src.q'_v + Turb.\bar{q}_v + Turb.q'_v, \quad (C.27)$$

$$\frac{\partial q'_c}{\partial t} = - \left(u' \frac{\partial q'_c}{\partial x} + w' \frac{\partial q'_c}{\partial x} \right) + Src.q'_c + Turb.q'_c, \quad (C.28)$$

$$\frac{\partial q'_r}{\partial t} = - \left(u' \frac{\partial q'_r}{\partial x} + w' \frac{\partial q'_r}{\partial x} \right) + Src.q'_r + Fall.q'_r + Turb.q'_r \quad (C.29)$$

但し雲水量と雨水量は擾乱成分のみの量である。

まとめ

準圧縮方程式系は以下のようにまとめられる。ただし、擾乱を示す $'$ は除いた。

運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - c_{pd} \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi}{\partial x} + Turb.u \quad (C.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = & - \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) - c_{pd} \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi}{\partial x} + Turb.w \\ & + \left(\frac{\theta}{\bar{\theta}} + \frac{\sum q_v/M_v}{1/M_d + \sum \bar{q}_v/M_v} - \frac{\sum q_v + \sum q_c + \sum q_r}{1 + \sum \bar{q}_v} \right) g \end{aligned} \quad (C.31)$$

圧力方程式

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = - \frac{\overline{C_s^2}}{c_{pd} \bar{\rho} (\bar{\theta}/\bar{f})^2} \nabla \cdot \{ \bar{\rho} (\bar{\theta}/\bar{f}) \mathbf{u} \} \quad (C.32)$$

熱の式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + Q + Turb.\bar{\theta} + Turb.\theta \quad (C.33)$$

凝縮成分の混合比の保存式

$$\frac{\partial q_v}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial q_v}{\partial x} + w \frac{\partial q_v}{\partial x} \right) - w \frac{\partial \bar{q}_v}{\partial x} + Src.q_v + Turb.\bar{q}_v + Turb.q_v, \quad (C.34)$$

$$\frac{\partial q_c}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial q_c}{\partial x} + w \frac{\partial q_c}{\partial x} \right) + Src.q_c + Turb.q_c, \quad (C.35)$$

$$\frac{\partial q_r}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial q_r}{\partial x} + w \frac{\partial q_r}{\partial x} \right) + Src.q_r + Fall.q_r + Turb.q_r \quad (C.36)$$

C.2 乱流パラメタリゼーション

C.2.1 サブグリッドスケールの運動エネルギー方程式

Klemp and Wilhelmson (1978) および CReSS で用いられている 1.5 次のクロージャーを用いる. 1.5 次のクロージャーでは, 乱流運動エネルギーの時間発展方程式を,

$$\frac{dE}{dt} = B + S + D_E - \left(\frac{C_\varepsilon}{l}\right) E^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{C.37})$$

とする. 但し l は混合距離であり $l = (\Delta x \Delta z)^{1/2}$ とする. B と S はそれぞれ浮力と流れの変形速度による乱流エネルギー生成項, D_E は乱流エネルギー拡散項, 第 4 項は乱流エネルギーの消散項であり,

$$\begin{aligned} B &= \frac{g_j}{\theta} \overline{u'_j \theta'}, \\ S &= -\overline{(u'_i u'_j)} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\ D_E &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K_m \frac{\partial E}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

である. 1.5 次のクロージャーでは, レイノルズ応力を以下のように定義する.

$$\overline{(u'_i u'_j)} = -K_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} E \quad (\text{C.39})$$

$$\overline{u'_j \theta} = K_h \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \quad (\text{C.40})$$

ここで K_m は運動量に対する渦粘性係数であり, E はサブグリッドスケールの乱流運動エネルギー, K_h は渦拡散係数である. K_m, K_h は E を用いて以下のように与えられる.

$$K_m = C_m E^{\frac{1}{2}} l, \quad (\text{C.41})$$

$$K_h = 3K_m. \quad (\text{C.42})$$

(C.37) 式の各項を書き下す. 浮力による乱流エネルギー生成項は,

$$\begin{aligned} B &= \frac{g_j}{\theta} \overline{u'_j \theta'}, \\ &= -\frac{g}{\theta} \overline{w' \theta'}, \\ &= -\frac{g}{\theta} \left(K_h \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

である。次に流れの変形速度による乱流エネルギー生成項 S は、

$$\begin{aligned}
 S &= -\overline{(u'_i u'_j)} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\
 &= -\left\{ -K_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} E \right\} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\
 &= \left\{ K_m \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} E \right\} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\
 &= \left\{ K_m \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \delta_{1j} E \right\} \frac{\partial u}{\partial x_j} \\
 &\quad + \left\{ K_m \left(\frac{\partial w}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} \delta_{3j} E \right\} \frac{\partial w}{\partial x_j}, \\
 &= \left\{ 2K_m \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} E \right\} \frac{\partial u}{\partial x} + K_m \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial u}{\partial z} \\
 &\quad + K_m \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left\{ 2K_m \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} E \right\} \frac{\partial w}{\partial z}, \\
 &= 2K_m \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} + K_m \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\
 &\quad - \frac{2}{3} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{C.44}$$

である。乱流エネルギー拡散項 D_E は、

$$\begin{aligned}
 D_E &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K_m \frac{\partial E}{\partial x_j} \right), \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial E}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial E}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{C.45}$$

である。以上の (C.43), (C.44), (C.45) 式を (C.37) 式に代入することで以下の式を得る。

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt} &= -\frac{g}{\theta} \left(K_h \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \\
 &\quad + 2K_m \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} + K_m \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial E}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial E}{\partial x} \right) \\
 &\quad - \left(\frac{C_\varepsilon}{l} \right) E^{\frac{3}{2}}.
 \end{aligned} \tag{C.46}$$

さらに (C.46) 式を (C.41) 式を用いて K_m に関する式に変形する。右辺の乱流エネル

ギー拡散項を書き下すと,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial E}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_m \frac{\partial E}{\partial z} \right) &= \frac{1}{C_m^2 l^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(K_m \frac{\partial K_m^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_m \frac{\partial K_m^2}{\partial z} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{C_m^2 l^2} \left\{ K_m \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} + \frac{\partial K_m}{\partial x} \frac{\partial K_m^2}{\partial x} + K_m \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2} + \frac{\partial K_m}{\partial z} \frac{\partial K_m^2}{\partial z} \right\} \\
 &= \frac{K_m}{C_m^2 l^2} \left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2} \right) + \frac{2K_m}{C_m^2 l^2} \left\{ \left(\frac{\partial K_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial z} \right)^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{C.47}$$

となるので, (C.46) 式を変形すると,

$$\begin{aligned}
 \frac{2K_m}{C_m^2 l^2} \frac{dK_m}{dt} &= -\frac{g}{\theta} \left(K_h \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + 2K_m \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
 &\quad + K_m \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{K_m^2}{C_m^2 l^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
 &\quad + \frac{K_m}{C_m^2 l^2} \left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2} \right) + \frac{2K_m}{C_m^2 l^2} \left\{ \left(\frac{\partial K_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
 &\quad - \frac{C_\varepsilon}{C_m^3 l^4} K_m^3 \\
 \frac{\partial K_m}{\partial t} &= - \left(u \frac{\partial K_m}{\partial x} + w \frac{\partial K_m}{\partial z} \right) - \frac{g C_m^2 l^2}{2\theta} \frac{K_h}{K_m} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \\
 &\quad + (C_m^2 l^2) \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
 &\quad + \frac{C_m^2 l^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{K_m}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial K_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial z} \right)^2 \\
 &\quad - \frac{C_\varepsilon}{2C_m l^2} K_m^2
 \end{aligned}$$

となり, ここで $C_m = C_\varepsilon = 0.2$ と $K_h = 3K_m$ という関係を用いると,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial K_m}{\partial t} = & - \left(u \frac{\partial K_m}{\partial x} + w \frac{\partial K_m}{\partial z} \right) - \frac{3gC_m^2 l^2}{2\bar{\theta}} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \\
 & + (C_m^2 l^2) \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\
 & + \frac{C_m^2 l^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{K_m}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 K_m^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_m^2}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial K_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial K_m}{\partial z} \right)^2 \\
 & - \frac{1}{2l^2} K_m^2
 \end{aligned} \tag{C.48}$$

となる.

付録 D

雲対流モデルの離散化

D.1 離散化の概要

D.1.1 格子と変数の配置

本モデルでは 図 D.1 に示すように, 水平・鉛直方向の変数をずらして互い違いに配置する. 配置方法は, 水平方向に Arakawa C グリッド, 鉛直方向には Lorenz グリッドを用いている.

すべてのスカラー量 (ϕ : 気圧偏差, 温位偏差, 水蒸気混合比, 雲水混合比, 雨水混合比) を格子の中心に配置する. ベクトル量 (速度 u, w など) は中心から次のように半格子ずらして配置する. x 方向ベクトル量を評価する点は, 鉛直方向にはスカラー量と同じとし水平方向に半格子ずらす. y 方向ベクトル量を評価する点は, 水平方向にはスカラー量と同じとし鉛直方向に半格子ずらす. 格子点のラベルづけおよび境界は 図 D.2 のように設定する.

D.1.2 空間, 時間方向の離散化の方法

空間方向の離散化は 2 次精度中心差分を用いて行う. 時間方向の離散化は時間分割法を用いて行う. 運動方程式と圧力方程式は短い時間刻み $\Delta\tau$ で時間積分を行う. 音波に関する項の離散化には HE-VI 法を採用し, u の式は前進差分, w, π の式は後退差分で評価する. 音波にかかわらない項についてはリープフロッグ法を用いて積分する. 熱力学の式と水蒸

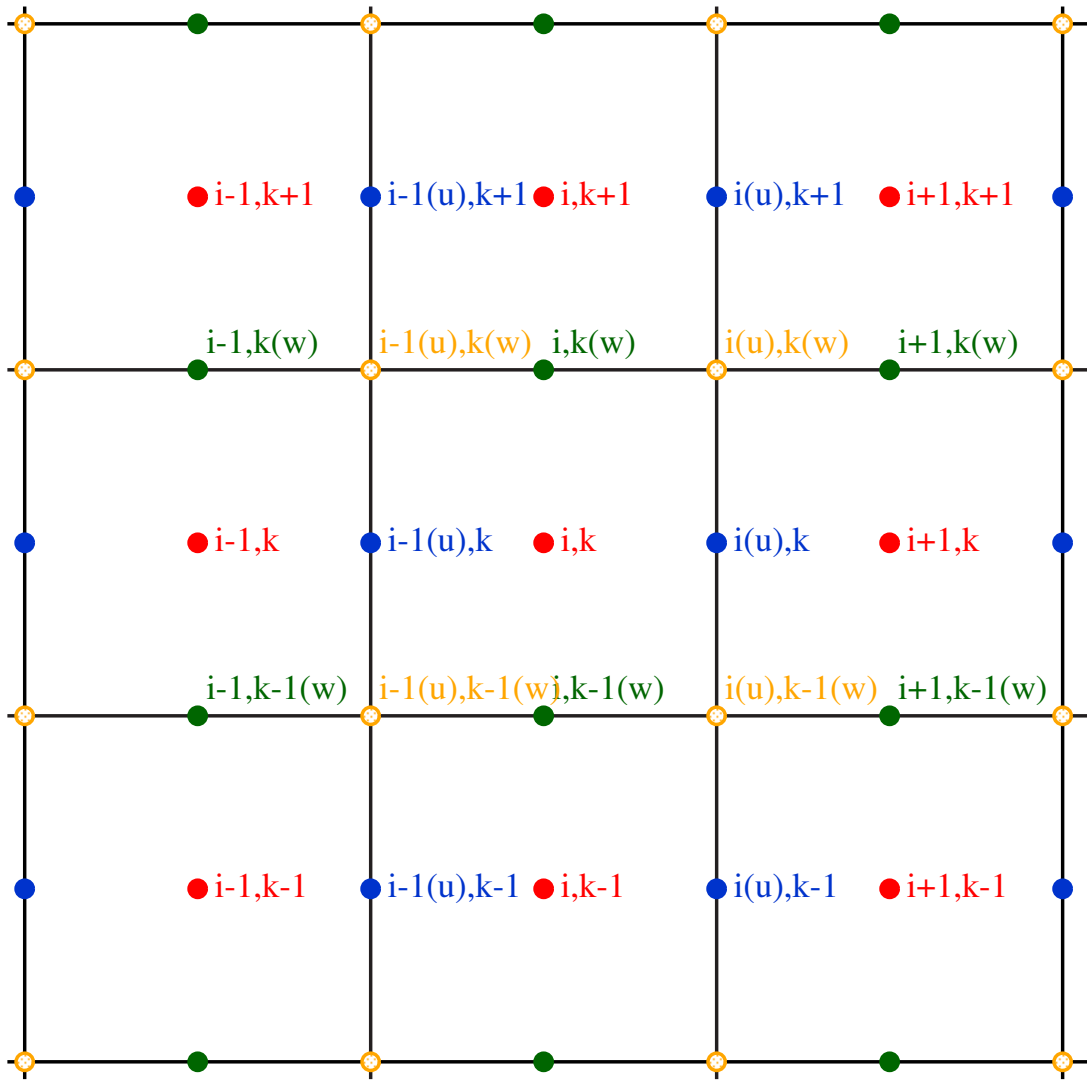


図 D.1 格子点の配置.

気混合比, 雲水混合比, 雨水混合比の式は, リーフログ法を用いて長い時間刻み Δt で時間積分を行う.

D.2 空間方向の離散化

この節では空間微分の離散化の方法とそのため必要となる平均操作, 境界条件の与え方について説明する. 離散化は 2 次精度差分または 4 次精度差分を用いて行う.

図 D.1 の空間の位置を表す添字として, x 方向フラックスの格子点を $(i(u), k)$, z 方向

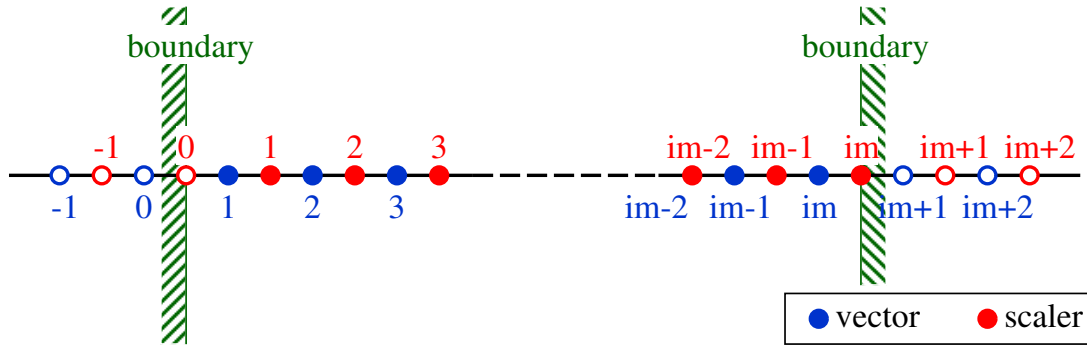


図 D.2 添字と境界の設定. 実際に計算する添字の範囲は 1 から im とする.

フラックスの格子点を $(i, k(w))$, スカラー量の格子点を (i, k) , 格子の角に当たる点を $(i(u), k(w))$ とする (図 D.1 参照). 但し $1 \leq i(u) \leq im$, $1 \leq i \leq im$, $1 \leq k(w) \leq km$, $1 \leq k \leq km$ である.

D.2.1 平均操作

まず始めに空間微分の離散化を行う際に必要となる平均操作を定義しておく. ここでは x 方向のフラックス格子点の変数を $u_{i(u),k}$, z 方向のフラックス格子点の変数を $w_{i,k(w)}$, スカラー格子点の変数を $\pi_{i,k}$ としている.

$$\pi_{i(u),k} \equiv \frac{\pi_{i+1,k} + \pi_{i,k}}{2} \quad (D.1)$$

$$\pi_{i,k(w)} \equiv \frac{\pi_{i,k+1} + \pi_{i,k}}{2} \quad (D.2)$$

$$\pi_{i(u),k(w)} \equiv \frac{\pi_{i,k} + \pi_{i+1,k} + \pi_{i,k+1} + \pi_{i+1,k+1}}{4} \quad (D.3)$$

$$u_{i,k} \equiv \frac{u_{i(u),k} + u_{i-1(u),k}}{2} \quad (D.4)$$

$$u_{i,k(w)} \equiv \frac{u_{i(u),k+1} + u_{i-1(u),k+1} + u_{i(u),k} + u_{i-1(u),k}}{4} \quad (D.5)$$

$$u_{i(u),k(w)} \equiv \frac{u_{i(u),k+1} + u_{i(u),k}}{2} \quad (D.6)$$

$$w_{i,k} \equiv \frac{w_{i,k(w)} + w_{i,k-1(w)}}{2} \quad (D.7)$$

$$w_{i(u),k} \equiv \frac{w_{i+1,k(w)} + w_{i,k(w)} + w_{i+1,k-1(w)} + w_{i,k-1(w)}}{4} \quad (D.8)$$

$$w_{i(u),k(w)} \equiv \frac{w_{i+1,k(w)} + w_{i,k(w)}}{2} \quad (D.9)$$

D.2.2 空間微分の離散化

2 次精度中心差分

空間微分を 2 次精度差分で離散化する際に必要となる微分操作を以下に示す. ここでは x 方向のフラックス格子点の変数を $u_{i(u),k}$, z 方向のフラックス格子点の変数を $w_{i,k(w)}$, スカラー格子点の変数を $\pi_{i,k}$ としている. x, z 方向ともにフラックス格子点の変数を $\phi_{i(u),k(w)}$ としている. それぞれの変数に対して微分を評価する格子点は一意に決まる. そのため, 他の格子点において微分を評価する場合には, 平均操作を用いることとなる.

$$\left[\frac{\partial \pi}{\partial x} \right]_{i(u),k} \equiv \frac{\pi_{i+1,k} - \pi_{i,k}}{\Delta x} \quad (\text{D.10})$$

$$\left[\frac{\partial \pi}{\partial z} \right]_{i,k(w)} \equiv \frac{\pi_{i,k+1} - \pi_{i,k}}{\Delta z} \quad (\text{D.11})$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,k} \equiv \frac{u_{i(u),k} - u_{i-1(u),k}}{\Delta x} \quad (\text{D.12})$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{i(u),k(w)} \equiv \frac{u_{i(u),k+1} - u_{i(u),k}}{\Delta z} \quad (\text{D.13})$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{i(u),k(w)} \equiv \frac{w_{i+1,k(w)} - w_{i,k(w)}}{\Delta x} \quad (\text{D.14})$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial z} \right]_{i,k} \equiv \frac{w_{i,k(w)} - w_{i,k-1(w)}}{\Delta z} \quad (\text{D.15})$$

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{i,k(w)} \equiv \frac{\phi_{i(u),k(w)} - \phi_{i-1(u),k(w)}}{\Delta x} \quad (\text{D.16})$$

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{i(u),k} \equiv \frac{\phi_{i(u),k(w)} - \phi_{i(u),k-1(w)}}{\Delta z} \quad (\text{D.17})$$

4 次精度中心差分

2 次精度中心差分の場合と同様に、空間微分を 4 次精度差分で離散化する際に必要となる微分操作を以下に示す。

$$\left[\frac{\partial \pi}{\partial x} \right]_{i(u),k} \equiv \frac{9}{8} \left(\frac{\pi_{i+1,k} - \pi_{i,k}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{\pi_{i+2,k} - \pi_{i-1,k}}{\Delta x} \right) \quad (\text{D.18})$$

$$\left[\frac{\partial \pi}{\partial z} \right]_{i,k(w)} \equiv \frac{9}{8} \left(\frac{\pi_{i,k+1} - \pi_{i,k}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{\pi_{i,k+2} - \pi_{i,k-1}}{\Delta x} \right) \quad (\text{D.19})$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,k} \equiv \frac{9}{8} \left(\frac{u_{i(u),k} - u_{i-1(u),k}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{u_{i(u)+1,k} - u_{i-2(u),k}}{\Delta x} \right) \quad (\text{D.20})$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{i(u),k(w)} \equiv \frac{9}{8} \left(\frac{u_{i(u),k+1} - u_{i(u),k}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{u_{i(u),k+2} - u_{i(u),k-1}}{\Delta x} \right) \quad (\text{D.21})$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{i(u),k(w)} \equiv \frac{9}{8} \left(\frac{w_{i+1,k(w)} - w_{i,k(w)}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{w_{i+2,k(w)} - w_{i-1,k(w)}}{\Delta x} \right) \quad (\text{D.22})$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial z} \right]_{i,k} \equiv \frac{9}{8} \left(\frac{w_{i,k(w)} - w_{i,k-1(w)}}{\Delta z} \right) - \frac{1}{24} \left(\frac{w_{i,k+1(w)} - w_{i,k-2(w)}}{\Delta z} \right) \quad (\text{D.23})$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{i,k(w)} &\equiv \frac{9}{8} \left(\frac{\phi_{i(u),k(w)} - \phi_{i-1(u),k(w)}}{\Delta x} \right) \\ &\quad - \frac{1}{24} \left(\frac{\phi_{i+1(u),k(w)} - \phi_{i-2(u),k(w)}}{\Delta x} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{i(u),k} &\equiv \frac{9}{8} \left(\frac{\phi_{i(u),k(w)} - \phi_{i(u),k-1(w)}}{\Delta z} \right) \\ &\quad - \frac{1}{24} \left(\frac{\phi_{i(u),k+1(w)} - \phi_{i(u),k-2(w)}}{\Delta z} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

D.2.3 空間離散化した基礎方程式

基礎方程式を空間方向に離散化する。静水圧平衡の式は以下のように離散化する。

$$\left[\frac{\partial \pi}{\partial z} \right]_{i,k} = - \frac{g}{c_{pd} [\theta_v]_{i,k}}. \quad (\text{D.26})$$

但し、基本場の密度 $\bar{\rho}_{i,k}$ は以下のように離散化する。

$$\bar{\rho}_{i,k} = \frac{p_0}{R_d} \frac{[\bar{\pi}^{c_v/R_d}]_{i,k}}{[\theta_v]_{i,k}}. \quad (\text{D.27})$$

運動方程式は以下のように離散化する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i(u),k}}{\partial t} = & -u_{i(u),k} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i(u),k} - w_{i(u),k} \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{i(u),k} \\ & - c_{pd} [\overline{\theta_v}]_{i(u),k} \left[\frac{\partial \pi}{\partial x} \right]_{i(u),k} + [\text{Turb.}u]_{i(u),k}. \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{i,k(w)}}{\partial t} = & -u_{i,k(w)} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,k(w)} - w_{i,k(w)} \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{i,k(w)} \\ & - c_{pd} [\overline{\theta_v}]_{i,k(w)} \left[\frac{\partial \pi}{\partial z} \right]_{i,k(w)} + [\text{Turb.}w]_{i,k(w)} \\ & + g \frac{\theta_{i,k(w)}}{\overline{\theta}_{i,k(w)}} \\ & + g \frac{\sum [q_v]_{i,k(w)} / M_v}{1/M_d + \sum [\overline{q_v}]_{i,k(w)} / M_v} \\ & - g \frac{\sum [q_v]_{i,k(w)} + \sum [q_c]_{i,k(w)} + \sum [q_r]_{i,k(w)}}{1 + \sum [\overline{q_v}]_{i,k(w)}}. \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

圧力方程式は以下のように離散化する.

$$\frac{\partial \pi_{i,k}}{\partial t} + \frac{\overline{c}_{i,k}^2}{c_{pd} \overline{\rho}_{i,k} [\overline{\theta_v}^2]_{i,k}} \left[\frac{\partial \overline{\rho \theta_v} u}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho \theta_v} u}{\partial z} \right]_{i,k} = 0. \quad (\text{D.30})$$

但し, 基本場の音速 $\overline{c}$ は以下のように離散化する.

$$\overline{c}_{i,k}^2 = \frac{c_{pd} R_d}{c_v} \overline{\pi}_{i,k} [\overline{\theta_v}]_{i,k}. \quad (\text{D.31})$$

熱の式は以下のように離散化する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{i,k}}{\partial t} = & -u_{i,k} \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_{i,k} - w_{i,k} \left[\frac{\partial \theta}{\partial z} \right]_{i,k} - w_{i,k} \left[\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} \right]_{i,k} + [\text{Turb.}\theta]_{i,k} + [\text{Turb.}\overline{\theta}]_{i,k} \\ & + \frac{1}{\overline{\pi}_{i,k}} ([Q_{cnd}]_{i,k} + [Q_{rad}]_{i,k} + [Q_{dis}]_{i,k}). \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

凝結成分の混合比の保存式は以下のように離散化する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial [q_v]_{i,k}}{\partial t} = & -u_{i,k} \left[\frac{\partial q_v}{\partial x} \right]_{i,k} - w_{i,k} \left[\frac{\partial q_v}{\partial x} \right]_{i,k} - w_{i,k} \left[\frac{\partial \bar{q}_v}{\partial x} \right]_{i,k} \\ & + [\text{Src}.q_v]_{i,k} + [\text{Turb}.\bar{q}_v]_{i,k} + [\text{Turb}.q_v]_{i,k}, \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

$$\frac{\partial [q_c]_{i,k}}{\partial t} = -u_{i,k} \left[\frac{\partial q_c}{\partial x} \right]_{i,k} - w_{i,k} \left[\frac{\partial q_c}{\partial x} \right]_{i,k} + [\text{Src}.q_c]_{i,k} + [\text{Turb}.q_c]_{i,k}, \quad (\text{D.34})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial [q_r]_{i,k}}{\partial t} = & -u_{i,k} \left[\frac{\partial q_r}{\partial x} \right]_{i,k} - w_{i,k} \left[\frac{\partial q_r}{\partial x} \right]_{i,k} + [\text{Src}.q_r]_{i,k} \\ & + [\text{Fall}.q_r]_{i,k} + [\text{Turb}.q_r]_{i,k}. \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

D.2.4 境界条件

ここでは離散化した変数に対する境界条件の与え方をまとめる. 考慮する境界条件は, 周期境界条件, 境界ですべりなし条件と応力なし条件である.

周期境界条件の与え方

例として, x 方向フラックス格子点に配置された変数 $u_{i(u),k}$ を考える. 計算領域内の x 方向の添字を $1(u) \sim im(u)$ とし, 糊代部分の格子点数を 2 とする (図 D.2 参照). このとき周期境界条件は以下のように与えられる.

$$u_{0(u),k} = u_{im(u),k} \quad (\text{D.36})$$

$$u_{-1(u),k} = u_{im-1(u),k} \quad (\text{D.37})$$

$$u_{im+1(u),k} = u_{1(u),k} \quad (\text{D.38})$$

$$u_{im+2(u),k} = u_{2(u),k} \quad (\text{D.39})$$

ただし k は任意の整数であり, その範囲は $-1 \leq k \leq km + 2$ である.

z 方向フラックス格子点に配置された変数, スカラー格子点に配置された変数に対しても同様に与えることができる.

すべりなし条件の与え方

境界で速度を 0 とする. この場合, 境界をはさんで変数の値が反対称になるように与える.

例として x 方向に境界を与えた場合を考える. x 方向フラックス格子点に配置された変数に対しては,

$$u_{0(u),k} = u_{im(u),k} = 0 \quad (\text{D.40})$$

$$u_{-1(u),k} = -u_{1(u),k} \quad (\text{D.41})$$

$$u_{im+1(u),k} = -u_{im-1(u),k} \quad (\text{D.42})$$

$$u_{im+2(u),k} = -u_{im-2(u),k} \quad (\text{D.43})$$

とする. 境界上に配置されていない変数に対しては,

$$\pi_{0,k} = -\pi_{1,k} \quad (\text{D.44})$$

$$\pi_{-1,k} = -\pi_{1,k} \quad (\text{D.45})$$

$$\pi_{im+1,k} = -\pi_{im,k} \quad (\text{D.46})$$

$$\pi_{im+2,k} = -\pi_{im-1,k} \quad (\text{D.47})$$

とする.

応力なし条件の与え方

境界上で法線方向速度を 0, 接線方向速度の法線方向微分を 0 とする. この場合, 境界上で配置された速度成分は境界をはさんで変数の値が反対称になるように与え, 境界上に配置されていない変数に対しては壁をはさんで変数の値が対称になるように与える.

例として x 方向に境界を与えた場合を考える. x 方向フラックス格子点に配置された変数に対しては,

$$u_{0(u),k} = u_{im(u),k} = 0 \quad (\text{D.48})$$

$$u_{-1(u),k} = -u_{1(u),k} \quad (\text{D.49})$$

$$u_{im+1(u),k} = -u_{im-1(u),k} \quad (\text{D.50})$$

$$u_{im+2(u),k} = -u_{im-2(u),k} \quad (\text{D.51})$$

とする. 境界上に配置されていない変数に対しては,

$$\pi_{0,k} = \pi_{1,k} \quad (\text{D.52})$$

$$\pi_{-1,k} = \pi_{1,k} \quad (\text{D.53})$$

$$\pi_{im+1,k} = \pi_{im,k} \quad (\text{D.54})$$

$$\pi_{im+2,k} = \pi_{im-1,k} \quad (\text{D.55})$$

とする.

D.3 時間方向の離散化

D.3.1 運動方程式と圧力方程式

空間離散化された運動方程式 (D.28), (D.29) と圧力方程式 (D.30) を時間方向に離散化する. 音波に関連する項は短いタイムステップ $\Delta\tau$ で離散化し, その他の項は長いタイムステップ Δt で離散化する. 音波に関連する項の離散化には HE-VI 法を採用し, u の式は前進差分, w, π の式は後退差分 (クランク・ニコルソン法) で離散化する. その他の項の離散化にはリープフロッグ法を用いる. 離散化した式の計算はまず u の式から行う. 得られた $\tau + \Delta\tau$ の u を用いて π を計算し, u, π を用いて w を計算する.

運動方程式の各項のうち, 音波に関係しない項を F_u, F_w としてまとめると, 運動方程式と圧力方程式は以下のように書ける.

$$\frac{\partial u_{i(u),k}}{\partial t} = - \left[\bar{c}_p \bar{\theta}_v \frac{\partial(\pi - \alpha Div)}{\partial x} \right]_{i(u),k} + [F_u]_{i(u),k}^t, \quad (D.56)$$

$$\frac{\partial w_{i,k(w)}}{\partial t} = - \left[\bar{c}_p \bar{\theta}_v \frac{\partial(\pi - \alpha Div)}{\partial z} \right]_{i,k(w)} + [F_w]_{i,k(w)}^t, \quad (D.57)$$

$$\frac{\partial \pi_{i,k}}{\partial t} + \left[\frac{\bar{c}^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{\theta}_v w)}{\partial z} \right]_{i,k} = - \left[\frac{\bar{c}^2}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,k}. \quad (D.58)$$

ただし u, w の式には音波減衰項 αDiv を加えてある (Skamarock and Klemp, 1992). 音波に関連しない項 F_u, F_w は,

$$[F_u]_{i(u),k}^t = - [\text{Adv.}u]_{i(u),k}^t + [\text{Turb.}u]_{i(u),k}^{t-\Delta t} + [\text{Diff.}u]_{i(u),k}^{t-\Delta t} \quad (D.59)$$

$$[F_w]_{i,k(w)}^t = - [\text{Adv.}w]_{i,k(w)}^t + [\text{Buoy}]_{i,k(w)}^t + [\text{Turb.}w]_{i,k(w)}^{t-\Delta t} + [\text{Diff.}w]_{i,k(w)}^{t-\Delta t}. \quad (D.60)$$

であり, 時刻 t で評価することにする. 但し, 中心差分でリープフロッグ法を用いるため, 数値粘性項 Diff を追加してある.

音波に関連する項の時間方向の離散化

水平方向の運動方程式の離散化

(D.56) を時間方向に離散化すると以下のようになる.

$$u_{i(u),k}^{\tau+\Delta\tau} = u_{i(u),k}^{\tau} - \left[\bar{c}_p \bar{\theta}_v \Delta\tau \left\{ \frac{\partial \pi^{\tau}}{\partial x} - \frac{\partial(\alpha Div)^{\tau}}{\partial x} \right\} \right]_{i(u),k} + F_{u,i(u),k}^t \Delta\tau. \quad (\text{D.61})$$

鉛直方向の運動方程式と圧力方程式の離散化

HE-VI 法を用いるので, w と π の式を連立して解く. w の式において音波減衰項は前進差分, 圧力項は後退差分で離散化する. π の式において水平微分項は (D.61) で求めた $u^{\tau+\Delta\tau}$ を用いて離散化し, 鉛直微分項は後退差分で離散化する.

$$w^{\tau+\Delta\tau} = w^{\tau} - \bar{c}_p \bar{\theta}_v \Delta\tau \left\{ \beta \frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} + (1-\beta) \frac{\partial \pi^{\tau}}{\partial z} - \frac{\partial(\alpha Div)^{\tau}}{\partial z} \right\} + F_w^t \Delta\tau. \quad (\text{D.62})$$

$$\pi^{\tau+\Delta\tau} + \beta \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{\theta}_v w^{\tau+\Delta\tau})}{\partial z} = \pi^{\tau} - (1-\beta) \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{\theta}_v w^{\tau})}{\partial z} - \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} \frac{\partial u^{\tau+\Delta\tau}}{\partial x}. \quad (\text{D.63})$$

ここでは簡単のため格子点位置を表す添字は省略した. (D.63) 式に (D.62) を代入して $w^{\tau+\Delta\tau}$ を消去する.

$$\begin{aligned} \pi^{\tau+\Delta\tau} - \beta^2 \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2) \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right) \right\} \\ = \pi^{\tau} - (1-\beta) \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{\theta}_v w^{\tau})}{\partial z} - \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} \frac{\partial u^{\tau+\Delta\tau}}{\partial x} \\ - \beta \frac{\bar{c}^2 \Delta\tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \bar{\rho} \bar{\theta}_v \left\{ w^{\tau} - \bar{c}_p \bar{\theta}_v \Delta\tau \left\{ (1-\beta) \frac{\partial \pi^{\tau}}{\partial z} - \frac{\partial(\alpha Div)^{\tau}}{\partial z} \right\} + F_w^t \Delta\tau \right\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.64})$$

(D.64) 式右辺を空間方向に離散化し, 格子点位置を表す添字を付けて表すと以下のようになる (導出の詳細は第 D.4.1 節参照).

$$\begin{aligned}
& \left\{ -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{k(w)} \right\} \pi_{i,k+1}^{\tau+\Delta\tau} \\
& + \left[1 + \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^2} \left\{ (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{k(w)} + (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{k-1(w)} \right\} \right] \pi_{i,k}^{\tau+\Delta\tau} \\
& + \left\{ -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{k-1(w)} \right\} \pi_{i,k-1}^{\tau+\Delta\tau} \\
& = \pi_{i,k}^\tau - (1-\beta) \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \left\{ \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{\theta}_v w^\tau)}{\partial z} \right\}_{i,k} - \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} \right)_k \left(\frac{\partial u^{\tau+\Delta\tau}}{\partial x} \right)_{i,k} \\
& - \beta \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \left[\frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \bar{\theta}_v)_{i,k(w)} \left\{ w_{i,k(w)}^\tau \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (\bar{c}_p \bar{\theta}_v)_{i,k(w)} \Delta \tau \left\{ (1-\beta) \frac{\partial \pi^\tau}{\partial z} - \frac{\partial(\alpha Div)^\tau}{\partial z} \right\}_{i,k(w)} + (F_w^t)_{i,k(w)} \Delta \tau \right\} \right]_{i,k}.
\end{aligned} \tag{D.65}$$

但し平均場の量は鉛直方向にしか依存しないので z 方向の添字のみ付けてある.

境界条件

上下境界を固定壁とする場合, 境界条件は上部下部境界で,

$$w(i, 0(w)) = 0, \tag{D.66}$$

$$w(i, km(w)) = 0 \tag{D.67}$$

である.

1) 下部境界:

下部境界 ($k(w) = 0(w)$) について考える. この時 (D.62) 式に添字を付けて書き下すと,

$$\begin{aligned}
& \beta \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right)_{i,0(w)} \\
& = \left(\frac{\partial(\alpha Div)^\tau}{\partial z} \right)_{i,0(w)} - (1-\beta) \left(\frac{\partial \pi^\tau}{\partial z} \right)_{i,0(w)} + \left(\frac{1}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} F_w^t \right)_{i,0(w)} \\
& \equiv E_{i,0(w)}
\end{aligned} \tag{D.68}$$

となる. したがって (D.65) 式は以下ようになる.

$$\begin{aligned}
& \left\{ -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{1(w)} \right\} \pi_{i,2}^{\tau+\Delta\tau} \\
& + \left\{ 1 + \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{1(w)} \right\} \pi_{i,1}^{\tau+\Delta\tau} \\
& = \pi_{i,1}^\tau - (1-\beta) \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \left\{ \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{\theta}_v w^\tau)}{\partial z} \right\}_{i,1} - \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} \right)_1 \left(\frac{\partial u^{\tau+\Delta\tau}}{\partial x} \right)_{i,1} \\
& - \beta \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \left[\frac{\partial}{\partial z} \bar{\rho} \bar{\theta}_v \left\{ w^\tau - \bar{c}_p \bar{\theta}_v \Delta \tau \left\{ (1-\beta) \frac{\partial \pi^\tau}{\partial z} - \frac{\partial(\alpha Div)^\tau}{\partial z} \right\} + F_w^t \Delta \tau \right\} \right]_{i,1} \\
& - \beta \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{i,0(w)} E_{i,0(w)}. \tag{D.69}
\end{aligned}$$

2) 上部境界:

上部境界 ($k(w) = km(w)$) について考える. この時 (D.62) 式を添字を付けて書き下すと,

$$\begin{aligned}
& \beta \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right)_{i,km(w)} \\
& = \left(\frac{\partial(\alpha Div)^\tau}{\partial z} \right)_{i,km(w)} - (1-\beta) \left(\frac{\partial \pi^\tau}{\partial z} \right)_{i,km(w)} + \left(\frac{1}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} F_w^t \right)_{i,km(w)} \\
& \equiv E_{i,km(w)} \tag{D.70}
\end{aligned}$$

となる. したがって (D.65) 式は以下ようになる.

$$\begin{aligned}
& \left\{ 1 + \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{km-1(w)} \right\} \pi_{i,km}^{\tau+\Delta\tau} \\
& + \left\{ -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{km-1(w)} \right\} \pi_{i,km-1}^{\tau+\Delta\tau} \\
& = \pi_{i,km}^\tau - (1-\beta) \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \left\{ \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{\theta}_v w^\tau)}{\partial z} \right\}_{i,km} - \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} \right)_{km} \left(\frac{\partial u^{\tau+\Delta\tau}}{\partial x} \right)_{i,km} \\
& - \beta \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \left[\frac{\partial}{\partial z} \bar{\rho} \bar{\theta}_v \left\{ w^\tau - \bar{c}_p \bar{\theta}_v \Delta \tau \left\{ (1-\beta) \frac{\partial \pi^\tau}{\partial z} - \frac{\partial(\alpha Div)^\tau}{\partial z} \right\} + F_w^t \Delta \tau \right\} \right]_{i,km} \\
& + \frac{\beta}{\Delta z} \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{km(w)} E_{i,km(w)}. \tag{D.71}
\end{aligned}$$

圧力方程式の時間積分方法

(D.65), (D.69), (D.71) 式を連立すると, 以下のような行列式の形式で書くことができる.

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_2 & & 0 \\ C_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & B_{km} \\ 0 & & C_{km-1} & A_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{1,1} & \pi_{2,1} & \cdots & \pi_{im,1} \\ \pi_{1,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \pi_{1,km} & \cdots & \cdots & \pi_{im,km} \end{pmatrix}^{\tau+\Delta\tau} \\
 = \begin{pmatrix} D_{1,1} & D_{2,1} & \cdots & D_{im,1} \\ D_{1,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ D_{1,km} & \cdots & \cdots & D_{im,km} \end{pmatrix}^{\tau}. \quad (\text{D.72})$$

この連立方程式を解くことで $\pi_{i,k}$ を求める. この連立方程式の係数は以下のように書ける.

$$\begin{aligned}
A_k &= 1 + \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^2} \left\{ (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{k(w)} + (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{k-1(w)} \right\} \\
&\quad (k = 2, 3, \dots, km - 1), \\
A_1 &= 1 + \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{1(w)}, \\
A_{km} &= 1 + \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{km-1(w)}, \\
B_k &= -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{k-1} \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{k-1(w)}, \\
&\quad (k = 2, 3, \dots, km), \\
C_k &= -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{k+1} \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{k(w)}, \\
&\quad (k = 1, 2, \dots, km - 1), \\
D_{i,k} &= \pi_{i,k}^\tau - (1 - \beta) \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \left\{ \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta}_v w^\tau)}{\partial z} \right\}_{i,k} - \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} \right)_k \left(\frac{\partial u^{\tau+\Delta \tau}}{\partial x} \right)_{i,k} + F_{i,k} \\
&\quad (k = 2, 3, \dots, km - 1), \\
D_{i,1} &= \pi_{i,1}^\tau - (1 - \beta) \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \left\{ \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta}_v w^\tau)}{\partial z} \right\}_{i,1} - \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} \right)_1 \left(\frac{\partial u^{\tau+\Delta \tau}}{\partial x} \right)_{i,1} + F_{i,1} \\
&\quad - \beta \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{i,0(w)} E_{i,0(w)}, \\
D_{i,km} &= \pi_{i,km}^\tau - (1 - \beta) \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \left\{ \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\theta}_v w^\tau)}{\partial z} \right\}_{i,km} - \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} \right)_{km} \left(\frac{\partial u^{\tau+\Delta \tau}}{\partial x} \right)_{i,km} \\
&\quad + F_{i,km} + \beta \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{km(w)} E_{i,km(w)}.
\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
E_{i,k(w)} &\equiv \left(\frac{\partial (\alpha Div)^\tau}{\partial z} \right)_{i,k(w)} - (1 - \beta) \left(\frac{\partial \pi^\tau}{\partial z} \right)_{i,k(w)} + \left(\frac{1}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} F_w^t \right)_{i,k(w)} \\
F_{i,k} &\equiv -\beta \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta \tau}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \left[\frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \bar{\theta}_v)_{i,k(w)} \left\{ w_{i,k(w)}^\tau \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\bar{c}_p \bar{\theta}_v)_{i,k(w)} \Delta \tau \left\{ (1 - \beta) \frac{\partial \pi^\tau}{\partial z} - \frac{\partial (\alpha Div)^\tau}{\partial z} \right\}_{i,k(w)} + (F_w^t)_{i,k(w)} \Delta \tau \right\} \right]_{i,k}.
\end{aligned}$$

である.

音波に関連しない項の時間方向の離散化

運動方程式の音波に関連しない項 (D.56), (D.57) 式を離散化する.

$$F_{u,i(u),k}^t = -[\text{Adv}.u]_{i(u),k}^t + [\text{Turb}.u]_{i(u),k}^{t-\Delta t} + [\text{Diff}.u]_{i(u),k}^{t-\Delta t}, \quad (\text{D.73})$$

$$F_{w,i,k(w)}^t = -[\text{Adv}.w]_{i,k(w)}^t + [\text{Buoy}]_{i,k(w)}^t + [\text{Turb}.w]_{i,k(w)}^{t-\Delta t} + [\text{Diff}.w]_{i,k(w)}^{t-\Delta t} \quad (\text{D.74})$$

ここで, Adv は移流項, D は粘性拡散項, Buoy は浮力項, Diff は数値粘性項である. それぞれの項を書き下すと,

$$[\text{Adv}.u]_{i(u),k}^t = u_{i(u),k}^t \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i(u),k}^t + w_{i(u),k}^t \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{i(u),k}^t \quad (\text{D.75})$$

$$[\text{Adv}.w]_{i,k(w)}^t = u_{i,k(w)}^t \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{i,k(w)}^t + w_{i,k(w)}^t \left[\frac{\partial w}{\partial z} \right]_{i,k(w)}^t \quad (\text{D.76})$$

であり, 浮力項は,

$$\begin{aligned} [\text{Buoy}]_{i,k(w)}^t &= g \frac{\theta_{i,k(w)}^t}{\bar{\theta}_{i,k(w)}} \\ &\quad + g \frac{\sum [q_v]_{i,k(w)}^t / M_v}{1/M_d + \sum [\bar{q}_v]_{i,k(w)} / M_v} \\ &\quad - g \frac{\sum [q_v]_{i,k(w)}^t + \sum [q_c]_{i,k(w)}^t + \sum [q_r]_{i,k(w)}^t}{1 + \sum [\bar{q}_v]_{i,k(w)}} \end{aligned} \quad (\text{D.77})$$

であり、粘性拡散項は、

$$\begin{aligned}
 [\text{Turb.}u]_{i(u),k}^{t-\Delta t} = & 2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (K_m)_{i,k} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,k} \right\} \right]_{i(u),k}^{t-\Delta t} \\
 & + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left\{ (K_m)_{i(u),k(w)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{i(u),k(w)} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (K_m)_{i(u),k(w)} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i(u),k(w)} \right\} \right]_{i(u),k}^{t-\Delta t} \\
 & - \frac{2}{3C_m^2 l^2} \left(\frac{\partial K_m^2}{\partial x} \right)_{i(u),k}^{t-\Delta t}
 \end{aligned} \tag{D.78}$$

$$\begin{aligned}
 [\text{Turb.}w]_{i,k(w)}^{t-\Delta t} = & 2 \left[\frac{\partial}{\partial z} \left\{ (K_m)_{i,k} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{i,k} \right\} \right]_{i,k(w)}^{t-\Delta t} \\
 & + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (K_m)_{i(u),k(w)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{i(u),k(w)} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (K_m)_{i(u),k(w)} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i(u),k(w)} \right\} \right]_{i,k(w)}^{t-\Delta t} \\
 & - \frac{2}{3C_m^2 l^2} \left(\frac{\partial K_m^2}{\partial z} \right)_{i,k(w)}^{t-\Delta t}
 \end{aligned} \tag{D.79}$$

である。数値粘性項は、

$$[\text{Diff.}u]_{i(u),k}^{t-\Delta t} = \nu_h \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,k} \right\}_{i(u),k}^{t-\Delta t} + \nu_v \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i(u),k(w)} \right\}_{i(u),k}^{t-\Delta t}, \tag{D.80}$$

$$[\text{Diff.}w]_{i,k(w)}^{t-\Delta t} = \nu_h \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{i(u),k(w)} \right\}_{i,k(w)}^{t-\Delta t} + \nu_v \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{i,k} \right\}_{i,k(w)}^{t-\Delta t} \tag{D.81}$$

である。 K_m は乱流エネルギーの時間発展方程式から計算し（詳細は後述）、 ν_h, ν_v は以下のように定める。

$$\nu_h = \frac{\alpha_h \Delta x^2}{\Delta t} \tag{D.82}$$

$$\nu_v = \frac{\alpha_v \Delta z^2}{\Delta t} \tag{D.83}$$

ここで $\Delta x, \Delta z$ は水平・鉛直方向の格子間隔を意味し、 α_h, α_v はそれぞれ、

$$\alpha_h \leq \frac{1}{8}, \quad \alpha_v \leq \frac{1}{8} \tag{D.84}$$

とする。

D.3.2 熱力学の式と混合比の保存式の離散化

熱の式と混合比の保存式の右辺をまとめて F で表し、時間方向にリープフロッグ法を用いて離散化する。

$$\theta_{i,k}^{t+\Delta t} = \theta_{i,k}^{t-\Delta t} + 2\Delta t [F_\theta]_{i,k}^t \quad (\text{D.85})$$

$$[q_v]_{i,k}^{t+\Delta t} = [q_v]_{i,k}^{t-\Delta t} + 2\Delta t [F_{q_v}]_{i,k}^t \quad (\text{D.86})$$

$$[q_c]_{i,k}^{t+\Delta t} = [q_c]_{i,k}^{t-\Delta t} + 2\Delta t [F_{q_c}]_{i,k}^t \quad (\text{D.87})$$

$$[q_r]_{i,k}^{t+\Delta t} = [q_r]_{i,k}^{t-\Delta t} + 2\Delta t [F_{q_r}]_{i,k}^t \quad (\text{D.88})$$

ここで、

$$\begin{aligned} [F_\theta]_{i,k} = & -[\text{Adv.}\theta]_{i,k}^t - [\text{Adv.}\bar{\theta}]_{i,k}^t + [\text{Turb.}\theta]_{i,k}^{t-\Delta t} + [\text{Turb.}\bar{\theta}]_{i,k}^{t-\Delta t} + [\text{Diff.}\theta]_{i,k}^{t-\Delta t} \\ & + [Q_{cnd}]_{i,k}^t + [Q_{rad}]_{i,k}^{t-\Delta t} + [Q_{dis}]_{i,k}^{t-\Delta t} \end{aligned} \quad (\text{D.89})$$

$$\begin{aligned} [F_{q_v}]_{i,k}^t = & -[\text{Adv.}q_v]_{i,k}^t - [\text{Adv.}\bar{q}_v]_{i,k}^t + [\text{Turb.}q_v]_{i,k}^{t-\Delta t} + [\text{Turb.}\bar{q}_v]_{i,k}^{t-\Delta t} \\ & + [\text{Diff.}q_v]_{i,k}^{t-\Delta t} + [EV_{rv}]_{i,k}^t \end{aligned} \quad (\text{D.90})$$

$$\begin{aligned} [F_{q_c}]_{i,k}^t = & -[\text{Adv.}q_c]_{i,k}^t + [\text{Turb.}q_c]_{i,k}^{t-\Delta t} + [\text{Diff.}q_c]_{i,k}^{t-\Delta t} \\ & - [CN_{cr} + CL_{cr}]_{i,k}^t \end{aligned} \quad (\text{D.91})$$

$$\begin{aligned} [F_{q_r}]_{i,k}^t = & -[\text{Adv.}q_r]_{i,k}^t + [\text{Turb.}q_r]_{i,k}^{t-\Delta t} + [\text{Diff.}q_c]_{i,k}^{t-\Delta t} \\ & + [CN_{cr} + CL_{cr} - EV_{rv}]_{i,k}^t + [PR_r]_{i,k}^t \end{aligned} \quad (\text{D.92})$$

である。移流を中心差分で安定して解くために、数値粘性項 Diff を追加してある。また、 CN_{vc}, EV_{cv} 項は湿潤飽和調節法より決めるため、それらの項を含めない。

θ, q_v, q_c, q_r をまとめて ϕ で表し、それぞれの項を書き下す。移流項は、

$$[\text{Adv.}\phi]_{i,k}^t = \left[u_{i(u),k} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{i(u),k} \right]_{i,k}^t + \left[w_{i,k(w)} \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{i,k(w)} \right]_{i,k}^t \quad (\text{D.93})$$

であり、基本場の移流項は、

$$[\text{Adv.}\bar{\phi}]_{i,k}^t = \left[w_{i,k(w)} \left[\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right]_{i,k(w)} \right]_{i,k}^t \quad (\text{D.94})$$

である。粘性拡散項は CReSS と同様に 1.5 次のクロージャーを用いることで、

$$[\text{Turb.}\phi]_{i,k}^{t-\Delta t} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (K_h)_{i(u),k} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i(u),k} \right\} \right]_{i,k}^{t-\Delta t} + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left\{ (K_h)_{i,k(w)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{i,k(w)} \right\} \right]_{i,k}^{t-\Delta t} \quad (\text{D.95})$$

となり、基本場の粘性拡散項は、

$$[\text{Turb.}\bar{\phi}]_{i,k}^{t-\Delta t} = \left[\frac{\partial}{\partial z} \left\{ (K_h)_{i,k(w)} \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right)_{i,k(w)} \right\} \right]_{i,k}^{t-\Delta t} \quad (\text{D.96})$$

となる。数値粘性項は、

$$[\text{Diff}_\phi]_{i,k}^{t-\Delta t} = \nu_h \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i(u),k} \right\}_{i,k}^{t-\Delta t} + \nu_v \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{i,k(w)} \right\}_{i,k}^{t-\Delta t} \quad (\text{D.97})$$

である。\$K_h\$ は乱流エネルギーの時間発展方程式から計算する (詳細は後述)。\$\nu_h, \nu_v\$ は (D.84) 式を利用する。

凝縮加熱項 \$Q_{cnd}\$ は

$$[Q_{cnd}]_{i,k}^t = - \left[\frac{L}{c_p \bar{\pi}} EV_{rv} \right]_{i,k}^t \quad (\text{D.98})$$

である。潜熱 \$L\$ の値については第 D.4.3 節参照。

散逸加熱項 \$Q_{dis}\$ は

$$[Q_{dis}]_{i,k}^{t-\Delta t} = \frac{1}{c_{pd} \bar{\pi}} \frac{C_\varepsilon}{l} \frac{(K_{m,i,k}^{t-\Delta t})^3}{(C_m l)^3} = \frac{1}{c_{pd} \bar{\pi}} \frac{(K_{m,i,k}^{t-\Delta t})^3}{C_m^2 l^4} \quad (\text{D.99})$$

と与える。ここで \$l = (\Delta x \Delta z)^{1/2}\$ である。

放射強制 \$[Q_{rad}]_{i,k}\$ は計算設定ごとに与える。

雲水から雨水への変換を表す \$CN_{cr}\$, \$CL_{cr}\$ は以下ようになる。

$$[CN_{cr}]_{i,k}^t = ([q_c]_{i,k}^t - q_0) / \tau_0, \quad (\text{D.100})$$

$$[CL_{cr}]_{i,k}^t = 2.2 [q_c]_{i,k}^t \left([\bar{\rho}]_{i,k} [q_r]_{i,k}^t \right)^{0.875} f_j. \quad (\text{D.101})$$

但し, τ_0, q_0 は変換の時間スケールと閾値であり, $T_0 = 100, q_0 = 0$ とする. f_j は木星と地球の重力加速度の比で, $f_j = 3$ である. 雨水の蒸発を表す EV_{rv} は以下ようになる.

$$[EV_{rv}]_{i,k}^t = 4.85 \times 10^{-2} ([q_{vsw}]_{i,k}^t - [q_v]_{i,k}^t) ([\bar{\rho}]_{i,k} [q_r]_{i,k}^t)^{0.65} f_j. \quad (D.102)$$

降水による雨水フラックスを表す PR_r は以下のように書ける.

$$[PR_r]_{i,k}^t = \frac{1}{[\bar{\rho}]_{i,k}} \frac{\partial}{\partial z} ([\bar{\rho}]_{i,k} [U_r]_{i,k}^t [q_r]_{i,k}^t), \quad (D.103)$$

$$[U_r]_{i,k}^t = 12.2 ([q_r]_{i,k}^t)^{0.125} f_j. \quad (D.104)$$

湿潤飽和調節法

水蒸気と雲水の間の変換を表す $-CN_{vc} + EV_{cv}$ は, Klemp and Wilhelmson (1983), CReSS ユーザーマニュアル (坪木と榊原, 2001) と同様に, 湿潤飽和調節法によって評価する. この方法は $dS = 0$ の断熱線と, $\mu_{\text{気相}} = \mu_{\text{凝結相}}$ の平衡条件 (μ は化学ポテンシャル) の交わる温度・圧力・組成を反復的に求める数値解法である.

1) 飽和蒸気圧を用いる場合

湿潤飽和調節法を用いる場合, まず始めに (D.85) – (D.92) 式から求まる量に * を添付し, $[\theta]^*, [q_v]^*, [q_c]^*, [q_r]^*$ とする. 水に対する過飽和混合比

$$\Delta q_c = \text{MAX}\{0, [q_v]^* - q_{vsw}([\theta]^*)\} \quad (D.105)$$

が $\Delta q_c > 0$, もしくは雲粒混合比が $q_c^* > 0$ ならば, 次式を用いて暫定的に θ, q_v, q_c を求める.

$$[\theta]^{t+\Delta t} = \theta^* + \frac{\gamma([q_v]^* - q_{vsw}([\theta]^*))}{1 + \gamma \frac{\partial q_{vsw}([\theta]^*)}{\partial \theta}} \quad (D.106)$$

$$[q_v]^{t+\Delta t} = [q_v]^* + \frac{[\theta]^* - [\theta]^{t+\Delta t}}{\gamma}, \quad (D.107)$$

$$[q_c]^{t+\Delta t} = [q_v]^* + [q_c]^* - [q_v]^{t+\Delta t}. \quad (D.108)$$

ただし, $\gamma = L_v/(c_p \Pi)$ である. もしも $[q_c]^{t+\Delta t} > 0$ ならば, 暫定的に得られた値を * 付きのものに置き換え, (D.106) – (D.108) 式の値が収束するまで繰り返し適用する. 普通, 高々数回繰り返せば収束し, 調整後の値が得られる (導出は第 D.4.2 節参照).

もしも $q_c^{t+\Delta t} < 0$ の場合には,

$$[\theta]^{t+\Delta t} = [\theta]^* - \gamma[q_c]^*, \quad (\text{D.109})$$

$$[q_v]^{t+\Delta t} = [q_v]^* + [q_c]^* \quad (\text{D.110})$$

$$[q_c]^{t+\Delta t} = 0 \quad (\text{D.111})$$

とし, 繰り返しを中止する.

2) 圧平衡定数を用いる場合

硫化アンモニウムの生成反応



のような, 2 種類の気体 1 モルずつから凝縮物質 1 モルが生成されるような生成反応の場合の, 湿潤飽和調節法を考える.

硫化アンモニウムの生成反応の圧平衡定数は,

$$K_p \equiv \ln(p_{\text{NH}_3} \cdot p_{\text{H}_2\text{S}}) = 61.781 - \frac{10834}{T} - \ln 10^2 \quad (\text{D.113})$$

である. 圧平衡定数を用いることで, 任意の温度に対するアンモニアと硫化水素のモル比の積を求めることができる.

任意の温度 T における NH_4SH の生成量を X とすると, 圧平衡定数の式は以下のように書ける.

$$\begin{aligned} (p_{\text{NH}_3} - X)(p_{\text{H}_2\text{S}} - X) &= e^{K_p} \\ X^2 - (p_{\text{NH}_3} + p_{\text{H}_2\text{S}})X + p_{\text{NH}_3} \cdot p_{\text{H}_2\text{S}} - e^{K_p} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.114})$$

解の公式を使うと, 生成量 X は以下となる.

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \left\{ (p_{\text{NH}_3} + p_{\text{H}_2\text{S}}) \pm \sqrt{(p_{\text{NH}_3} + p_{\text{H}_2\text{S}})^2 - 4(p_{\text{NH}_3} \cdot p_{\text{H}_2\text{S}} - e^{K_p})} \right\} \\ X &= \frac{1}{2} \left\{ (p_{\text{NH}_3} + p_{\text{H}_2\text{S}}) \pm \sqrt{(p_{\text{NH}_3} - p_{\text{H}_2\text{S}})^2 + 4e^{K_p}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.115})$$

ただし $\exp(K_p) \approx 0$ の場合には, 明らかに

$$X = \min(p_{\text{NH}_3}, p_{\text{H}_2\text{S}}) \quad (\text{D.116})$$

なために, X は符号は負しか取り得ない.

$$X = \frac{1}{2} \left\{ (p_{\text{NH}_3} + p_{\text{H}_2\text{S}}) - \sqrt{(p_{\text{NH}_3} - p_{\text{H}_2\text{S}})^2 + 4e^{K_p}} \right\} \quad (\text{D.117})$$

X の満たすべき条件は,

$$\min(P_{\text{NH}_3}, P_{\text{H}_2\text{S}}) > X, \quad X < -\frac{M_{\text{NH}_4\text{SH}} \cdot \min(P_{\text{NH}_3}, P_{\text{H}_2\text{S}})}{M_d P_{\text{all}}} \quad (\text{D.118})$$

である. 上記の条件を満たさない場合には $X = 0$ とする.

X が (D.118) 式の条件を満たすならば, 次式を用いて暫定的に θ, q_v, q_c を求める.

$$[q_{\text{NH}_3}]^{t+\Delta t} = [q_{\text{NH}_3}]^* + \Delta q_{\text{NH}_3}, \quad (\text{D.119})$$

$$[q_{\text{H}_2\text{S}}]^{t+\Delta t} = [q_{\text{H}_2\text{S}}]^* + \Delta q_{\text{H}_2\text{S}}, \quad (\text{D.120})$$

$$[q_{\text{NH}_4\text{SH}}]^{t+\Delta t} = [q_{\text{NH}_3}]^* + [q_{\text{H}_2\text{S}}]^* - [q_{\text{NH}_3}]^{t+\Delta t} - [q_{\text{H}_2\text{S}}]^{t+\Delta t}, \quad (\text{D.121})$$

$$[\theta]^{t+\Delta t} = \theta^* + \gamma ([q_{\text{NH}_3}]^* + [q_{\text{H}_2\text{S}}]^* - [q_{\text{NH}_3}]^{t+\Delta t} - [q_{\text{H}_2\text{S}}]^{t+\Delta t}). \quad (\text{D.122})$$

ただし, $\gamma = L_{\text{NH}_4\text{SH}}/(c_{pd}\Pi)$ であり, Δq_{NH_3} と $\Delta q_{\text{H}_2\text{S}}$ はそれぞれ, 生成量 X に対応する NH_3 と H_2S の混合比である. 温位が収束するまで反復改良を行う. また反応熱 $L_{\text{NH}_4\text{SH}}$ の値については第 D.4.4 節参照.

D.3.3 乱流運動エネルギーの式

Klemp and Wilhelmson (1978) および CReSS (坪木と榊原篤志, 2001) と同様に, 1.5 次のクロージャーを用いる. 乱流エネルギーの時間発展方程式をリーブフロッグ法を用いて時間方向に離散化すると, 以下ようになる.

$$[K_m]_{i,k}^{t+\Delta t} = [K_m]_{i,k}^{t-\Delta t} + 2\Delta t [F_{K_m}]_{i,k}^t \quad (\text{D.123})$$

ここで,

$$\begin{aligned} [F_{K_m}]_{i,k}^t = & -[\text{Adv.}K_m]_{i,k}^t + [\text{Buoy.}K_m]_{i,k}^{t-\Delta t} + [\text{Shear.}K_m]_{i,k}^{t-\Delta t} \\ & + [\text{Turb.}K_m]_{i,k}^{t-\Delta t} + [\text{Disp.}K_m]_{i,k}^{t-\Delta t} \end{aligned} \quad (\text{D.124})$$

である. CReSS にならい, 移流項を t で, 移流項以外を $t - \Delta t$ で評価した.

F_{K_m} に含まれる各項は以下のように書き下すことができる.

$$[\text{Adv.}K_m]_{i,k}^t = \left\{ u_{i(u),k} \left(\frac{\partial K_m}{\partial x} \right)_{i(u),k} \right\}_{i,k}^t + \left\{ w_{i,k(w)} \left(\frac{\partial K_m}{\partial z} \right)_{i,k(w)} \right\}_{i,k}^t \quad (\text{D.125})$$

$$[\text{Buoy.}K_m]_{i,k}^{t-\Delta t} = - \left\{ \frac{3gC_m^2 l^2}{2\bar{\theta}} \left(\frac{\partial \theta_{el}}{\partial z} \right)_{i,k(w)} \right\}_{i,k}^{t-\Delta t} \quad (\text{D.126})$$

$$\begin{aligned} [\text{Shear.}K_m]_{i,k}^{t-\Delta t} &= (C_m^2 l^2)_{i,k} \left[\left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\}_{i(u),k} \right]_{i,k}^{t-\Delta t} \\ &\quad + (C_m^2 l^2)_{i,k} \left[\left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\}_{i,k(w)} \right]_{i,k}^{t-\Delta t} \\ &\quad + \left(\frac{C_m^2 l^2}{2} \right)_{i,k} \left[\left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i(u),k(w)} \right\}_{i,k}^{t-\Delta t} + \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{i(u),k(w)} \right\}_{i,k}^{t-\Delta t} \right]^2 \\ &\quad - \left(\frac{K_m}{3} \right)_{i,k}^{t-\Delta t} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,k}^{t-\Delta t} + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{i,k}^{t-\Delta t} \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.127})$$

$$\begin{aligned} [\text{Turb.}K_m]_{i,k}^{t-\Delta t} &= \frac{1}{2} \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial K_m^2}{\partial x} \right)_{i(u),k} \right\}_{i,k}^{t-\Delta t} + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial K_m^2}{\partial z} \right)_{i,k(w)} \right\}_{i,k}^{t-\Delta t} \right] \\ &\quad + \left[\left\{ \left(\frac{\partial K_m}{\partial x} \right)^2 \right\}_{i(u),k} \right]_{i,k}^{t-\Delta t} + \left[\left\{ \left(\frac{\partial K_m}{\partial z} \right)^2 \right\}_{i,k(w)} \right]_{i,k}^{t-\Delta t} \end{aligned} \quad (\text{D.128})$$

$$[\text{Disp.}K_m]_{i,k}^{t-\Delta t} = - \frac{1}{2l^2} (K_m^2)_{i,k}^{t-\Delta t} \quad (\text{D.129})$$

ここで $C_\varepsilon = C_m = 0.2$, 混合距離 $l = (\Delta x \Delta z)^{1/2}$ とする. また θ_{el} は以下で与えられる.

$$\theta_{el} = \bar{\theta}_v + \theta'_v \quad (\text{for } q_c = 0) \quad (\text{D.130})$$

$$\theta_{el} = \bar{\theta}_v + \theta'_v + \frac{\sum Lq_v}{c_{pd}\bar{\pi}} \quad (\text{for } q_c > 0) \quad (\text{D.131})$$

ただし,

$$\bar{\theta}_v + \theta'_v = \bar{\theta}_v \left\{ 1 + \frac{\theta}{\bar{\theta}} + \frac{\sum q_v/M_v}{1/M_d + \sum \bar{q}_v/M_v} - \frac{\sum q_v + \sum q_c + \sum q_r}{1 + \sum \bar{q}_v} \right\} \quad (\text{D.132})$$

である.

D.3.4 時間フィルター

リープフロッグ法を用いたことによって生じる計算モードの増幅を抑制するため, Asselin (1972) の時間フィルターを長い時間刻みで 1 ステップ計算する毎に (実際には短い時間刻みの計算を $N_\tau \equiv 2\Delta t/\Delta\tau$ ステップ計算する毎に) 適用する.

たとえば (D.61) を用いて $u_{i(u),k}^{t+\Delta t}$ を計算する場合, 以下のように時間フィルターを適用する.

$$\begin{aligned} u_{i(u),k}^* &= u_{i(u),k}^{\tau+(N_\tau-1)\Delta\tau} - \left[\bar{c}_p \bar{\theta}_v \Delta\tau \left\{ \frac{\partial \pi^{\tau+(N_\tau-1)\Delta\tau}}{\partial x} - \frac{\partial (\alpha Div)^{\tau+(N_\tau-1)\Delta\tau}}{\partial x} \right\} \right]_{i(u),k} \\ &\quad + F_{u,i(u),k}^t \Delta\tau, \\ u_{i(u),k}^t &= (1 - 2\gamma) u_{i(u),k}^t + \gamma (u_{i(u),k}^* + u_{i(u),k}^{t-\Delta t}) \end{aligned} \quad (\text{D.133})$$

ここで γ はフィルターの係数であり, その値は 0.1 を用いる. (D.62), (D.63) の計算に対しても同様に時間フィルターを適用する.

D.3.5 スポンジ層

境界面付近での波の反射を抑えるために, 基礎方程式の付加的な項を付け加える.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\text{Adv.}\phi + \cdots + \gamma_h(x)(\phi - \phi_e) + \gamma_v(z)(\phi - \phi_e) \quad (\text{D.134})$$

ただし, ϕ は任意の予報変数であり, ϕ_e は客観解析値等の既知の値である. この項は 1 つ前のタイムステップ $t - \Delta t$ で計算され, 小さいタイムステップで扱われる予報変数に対しても, 移流項や数値粘性項と同様に $2\Delta t$ の大きなタイムステップ間の値として評価される. 具体的には,

$$[\pi]^{t+\Delta t} = 2\Delta t \left\{ [\text{Adv.}\pi]^t + \cdots + \{\gamma_h(x) + \gamma_v(z)\} (\pi - \bar{\pi})^{t-\Delta t} \right\}, \quad (\text{D.135})$$

$$[u]^{t+\Delta t} = 2\Delta t \left\{ [\text{Adv.}u]^t + \cdots + \{\gamma_h(x) + \gamma_v(z)\} [u]^{t-\Delta t} \right\}, \quad (\text{D.136})$$

$$[w]^{t+\Delta t} = 2\Delta t \left\{ [\text{Adv.}w]^t + \cdots + \{\gamma_h(x) + \gamma_v(z)\} [w]^{t-\Delta t} \right\} \quad (\text{D.137})$$

とする. 但し $\bar{\pi}$ はエクスナー関数の基本場である.

γ_h, γ_v はそれぞれ水平方向には各境界面に向かって, 鉛直方向には上境界面に向かって小さくなる減衰係数である. これらの減衰係数は, 水平方向には吸収層の厚みを d_h とし, x

の範囲を $0 \leq x \leq x_{max}$ とすれば,

$$\begin{aligned}\gamma_h &= \alpha_h \left(1 - \frac{x}{d_h}\right)^3 & (x < d_h), \\ \gamma_h &= 0 & (d_h \leq x \leq x_{max} - d_h), \\ \gamma_h &= \alpha_h \left(1 - \frac{(x - x_{max})}{d_h}\right)^3 & (x > x_{max} - d_h),\end{aligned}\tag{D.138}$$

であり, 鉛直方向には吸収層の厚さを d_v とし, z の範囲を $0 \leq z \leq z_{max}$ とすれば,

$$\begin{aligned}\gamma_v &= 0 & (z \leq z_{max} - d_v), \\ \gamma_v &= \alpha_v \left(1 - \cos \frac{\pi(z - z_{max})}{d_v}\right)^3 & (z > z_{max} - d_v),\end{aligned}\tag{D.139}$$

である. ここで, α_h, α_v はそれぞれ水平・鉛直方向の減衰定数である. α_h, α_v は時間の逆数の次元を持ち, それらの逆数 $1/\alpha_h, 1/\alpha_v$ は e-folding time と呼ばれる. e-folding time は通常 100 – 300 s に設定する. また吸収層の厚み d_h, d_v はそれぞれ, 水平方向には数格子分, 鉛直方向には上面から 1/3 程度設定すれば良い.

D.4 補遺

D.4.1 (D.65) 式の導出

圧力方程式 (D.64) の左辺の空間微分を導出する. (D.64) 左辺の変形を行う.

$$\begin{aligned}
(D.64)\text{left side} &= \pi_{i,k}^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z} \left\{ (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{k(w)} \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right)_{i,k(w)} \right\} \\
&\quad +\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z} \left\{ (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{k-1(w)} \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right)_{i,k-1(w)} \right\} \\
&= \pi_{i,k}^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z} \left\{ (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{k(w)} \left(\frac{\pi_{i,k+1}^{\tau+\Delta\tau} - \pi_{i,k}^{\tau+\Delta\tau}}{\Delta z} \right) \right\} \\
&\quad +\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z} \left\{ (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{k-1(w)} \left(\frac{\pi_{i,k}^{\tau+\Delta\tau} - \pi_{i,k-1}^{\tau+\Delta\tau}}{\Delta z} \right) \right\} \\
&= \left\{ -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{k(w)} \right\} \pi_{i,k+1}^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad + \left[1 + \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^2} \left\{ (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{k(w)} + (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{k-1(w)} \right\} \right] \pi_{i,k}^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad + \left\{ -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_k \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{k-1(w)} \right\} \pi_{i,k-1}^{\tau+\Delta\tau}. \tag{D.140}
\end{aligned}$$

下部境界 ($k(w) = 0(w)$) について考える. この時 (D.62) 式は,

$$\begin{aligned}
\beta \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right)_{i,0(w)} &= \left[\left(\frac{\partial (\alpha \text{Div})^\tau}{\partial z} \right) - (1 - \beta) \left(\frac{\partial \pi^\tau}{\partial z} \right) + \left(\frac{1}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} F_w^t \right) \right]_{i,0(w)} \\
&\equiv E_{i,0(w)} \tag{D.141}
\end{aligned}$$

となるので, (D.64) 式の左辺は, $k = 1$ の場合には,

$$\begin{aligned}
(D.64)\text{left side} &= \pi_{i,1}^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z} \left\{ (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{1(w)} \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right)_{i,1(w)} \right\} \\
&\quad +\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z} \left\{ (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{0(w)} \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right)_{i,0(w)} \right\} \\
&= \pi_{i,1}^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z} \left\{ (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{1(w)} \left(\frac{\pi_{i,2}^{\tau+\Delta\tau} - \pi_{i,1}^{\tau+\Delta\tau}}{\Delta z} \right) \right\} \\
&\quad +\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z} \left\{ (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{0(w)} \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right)_{i,0(w)} \right\} \\
&= \left\{ -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{1(w)} \right\} \pi_{i,2}^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad + \left\{ 1 + \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{1(w)} \right\} \pi_{i,1}^{\tau+\Delta\tau} \\
&\quad + \beta \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_1 \frac{1}{\Delta z} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{0(w)} E_{i,0(w)}
\end{aligned}$$

上部境界 ($k(w) = km(w)$) について考える. (D.64) 式の左辺は,

$$\begin{aligned}
\beta \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right)_{i,km(w)} &= \left[\left(\frac{\partial (\alpha Div)^\tau}{\partial z} \right) - (1 - \beta) \left(\frac{\partial \pi^\tau}{\partial z} \right) + \left(\frac{1}{\bar{c}_p \bar{\theta}_v} F_w^t \right) \right]_{i,km(w)} \\
&\equiv E_{i,km(w)} \tag{D.142}
\end{aligned}$$

となるので, (D.64) 式の左辺は, $k(w) = km(w)$ の場合には,

$$\begin{aligned}
 (D.64)\text{left side} &= \pi_{i,km}^{\tau+\Delta\tau} \\
 &\quad -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z} \left\{ (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{km(w)} \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right)_{i,km(w)} \right\} \\
 &\quad +\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z} \left\{ (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{km-1(w)} \left(\frac{\partial \pi^{\tau+\Delta\tau}}{\partial z} \right)_{i,km-1(w)} \right\} \\
 &= \pi_{i,km}^{\tau+\Delta\tau} \\
 &\quad -\beta \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{km(w)} E_{i,km(w)} \\
 &\quad +\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z} \left\{ (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{km-1(w)} \left(\frac{\pi_{i,km}^{\tau+\Delta\tau} - \pi_{i,km-1}^{\tau+\Delta\tau}}{\Delta z} \right) \right\} \\
 &= \left\{ 1 + \beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{km-1(w)} \right\} \pi_{i,km}^{\tau+\Delta\tau} \\
 &\quad + \left\{ -\beta^2 \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z^2} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{km-1(w)} \right\} \pi_{i,km-1}^{\tau+\Delta\tau} \\
 &\quad -\beta \left(\frac{\bar{c}^2 \Delta\tau^2}{\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2} \right)_{km} \frac{1}{\Delta z} (\bar{c}_p \bar{\rho} \bar{\theta}_v^2)_{km(w)} E_{i,km(w)}
 \end{aligned}$$

D.4.2 湿潤飽和調節法の導出

湿潤飽和調節を用いる段階では, 潜熱の開放による温位の変化を考えるので, 熱力学第一法則の非断熱項は無視する.

$$d\theta + \gamma dq_v = 0. \quad (D.143)$$

ただし $\gamma = L_v/(c_p \Pi)$ である. 相変化の効果を除いた予報方程式を解くことで得られた値を $[\theta]^*$, $[q_v]^*$, $[q_c]^*$, $[q_r]^*$ とし, 相変化の効果も含めたより真に近い値を $[\theta]^{t+\Delta t}$, $[q_v]^{t+\Delta t}$, $[q_c]^{t+\Delta t}$, $[q_r]^{t+\Delta t}$ する. この時, (D.143) 式は,

$$([\theta]^{t+\Delta t} - [\theta]^*) = \gamma([q_v]^* - [q_v]^{t+\Delta t}) \quad (D.144)$$

となる. ここで過飽和を許さないで,

$$[q_v]^{t+\Delta t} = q_{sw}([\theta]^{t+\Delta t})$$

と表すことができる. ここで q_{vsw} は飽和蒸気圧である. $q_{vsw}([\theta]^{t+\Delta t})$ を $[\theta]^*$ の回りでテーラー展開して 2 次の微小項以下を無視すると,

$$q_{sw}([\theta]^{t+\Delta t}) = q_{sw}([\theta]^*) + \frac{\partial q_{vsw}([\theta]^*)}{\partial \theta}([\theta]^{t+\Delta t} - [\theta]^*) \quad (\text{D.145})$$

となる. (D.145) 式を (D.144) 式に代入することによって (D.106) 式が得られる.

$$\begin{aligned} ([\theta]^{t+\Delta t} - [\theta]^*) &= \gamma \left([q_v]^* - q_{sw}([\theta]^*) - \frac{\partial q_{vsw}([\theta]^*)}{\partial \theta}([\theta]^{t+\Delta t} - [\theta]^*) \right) \\ \left(1 + \gamma \frac{\partial q_{vsw}([\theta]^*)}{\partial \theta} \right) ([\theta]^{t+\Delta t} - [\theta]^*) &= \gamma ([q_v]^* - q_{sw}([\theta]^*)) \\ [\theta]^{t+\Delta t} &= [\theta]^* + \gamma \frac{[q_v]^* - q_{vsw}([\theta]^*)}{1 + \gamma \frac{\partial q_{vsw}([\theta]^*)}{\partial \theta}}. \end{aligned}$$

(D.107) 式は (D.144) 式から直接得ることができる.

$$\begin{aligned} ([\theta]^{t+\Delta t} - [\theta]^*) &= \gamma ([q_v]^* - [q_v]^{t+\Delta t}), \\ [q_v]^{t+\Delta t} &= [q_v]^* - ([\theta]^{t+\Delta t} - [\theta]^*)/\gamma. \end{aligned}$$

(D.108) 式は水蒸気と雲水量の和が常に等しいという条件から容易に得られる.

$$\begin{aligned} ([q_v]^* + [q_c]^*) &= ([q_v]^{t+\Delta t} + [q_c]^{t+\Delta t}), \\ [q_c]^{t+\Delta t} &= [q_v]^* + [q_c]^* - [q_v]^{t+\Delta t}. \end{aligned}$$

D.4.3 潜熱

飽和蒸気圧と潜熱はクラウジウス・クラペイロンの式,

$$\frac{dp_v}{dT} = \frac{p_v L_v}{RT^2} \quad (\text{D.146})$$

で関係づけられる. この式を L_v の式としてまとめなおすことで, 潜熱は以下のように与えられる.

$$L = \frac{d \ln p_v}{dT} R_v T^2 \quad (\text{D.147})$$

但し R_v は凝縮成分に対する気体定数である. 飽和蒸気圧式として AMP 式

$$\ln p^*(T) = \frac{a_1}{T} + a_2 + a_3 \ln T + a_4 T + a_5 T^2 \quad (\text{D.148})$$

を利用すると,

$$L = \left\{ -\frac{a_1}{T^2} + \frac{a_3}{T} + a_4 + a_5 T \right\} R_v T^2 \quad (\text{D.149})$$

である. 係数の値は 表 D.1 を参照.

物質名	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
NH ₃ (s)	-4122	41.67871	-1.81630	0	0
NH ₃ (l)	-4409.3512	76.864252	-8.4598340	5.51029×10^{-3}	6.804632×10^{-6}
H ₂ O(s)	-5631.1206	-8.363602	8.2312	-3.861449×10^{-2}	2.77494×10^{-5}
H ₂ O(l)	-2313.0338	-164.03307	38.053682	$-1.3844344 \times 10^{-1}$	7.4465367×10^{-5}

表 D.1 AMP 式の定数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 の値 (Table 4 of Briggs and Sacket, 1989, *ICARUS*, **80**, p98.). 但し単位系は cgs である.

D.4.4 反応熱

硫化アンモニウムの生成反応



において, NH₄SH のエントロピーと NH₃ と H₂S のエントロピーの差が, 反応に伴うエントロピー変化に対応する.

NH₄SH のモルエントロピーは,

$$\begin{aligned} s_{\text{NH}_4\text{SH}} &= -\frac{\partial \mu_{\text{NH}_4\text{SH}}}{\partial T} \\ &= -\frac{\partial}{\partial T} (\mu_{\text{NH}_3} + \mu_{\text{H}_2\text{S}} + RTK_p - RT \ln p_0^2) \\ &= s_{\text{NH}_3} + s_{\text{H}_2\text{S}} - RT \frac{\partial K_p}{\partial T} - RK_p - RT \ln p_0^2 \end{aligned} \quad (\text{D.151})$$

である. ここで K_p は (D.150) の反応式の圧平衡定数である. NH₃ と H₂S のモルエントロピーの和は,

$$\begin{aligned} s_{\text{NH}_3} + s_{\text{H}_2\text{S}} &= -\frac{\partial \mu_{\text{NH}_3} + \mu_{\text{H}_2\text{S}}}{\partial T} \\ &= -\frac{\partial}{\partial T} (\mu_{\text{NH}_3}^\circ + \mu_{\text{H}_2\text{S}}^\circ + RT \ln(p_{\text{NH}_3} p_{\text{H}_2\text{S}}) - RT \ln p_0^2) \\ &= -\frac{\partial}{\partial T} (\mu_{\text{NH}_3}^\circ + \mu_{\text{H}_2\text{S}}^\circ + RTK_p - RT \ln p_0^2) \\ &= s_{\text{NH}_3} + s_{\text{H}_2\text{S}} - RK_p - RT \ln p_0^2 \end{aligned} \quad (\text{D.152})$$

定圧変化を考えているので, 圧力は温度依存しない. (D.151) と (D.152) の差

$$\Delta s = RT \frac{\partial K_p}{\partial T} \quad (\text{D.153})$$

が反応のエントロピー変化に相当する. モル当たりの反応熱は,

$$L_{\text{NH}_4\text{SH}} = T\Delta s = RT^2 \frac{\partial K_p}{\partial T} \quad (\text{D.154})$$

である. NH_4SH 生成反応の圧平衡定数を代入すると,

$$L_{\text{NH}_4\text{SH}} = \frac{10834}{T^2} RT^2 = 10834R \quad (\text{D.155})$$

である.

付録 E

上昇するサーマルに対する分子量の影響

浮力はパーセルの密度と周囲（パーセルと同じ圧力とする）の密度の差で決まるが、密度は温度と成分の関数であることに注意しなければならない。凝結の潜熱によってパーセルの温度が上がるとき、凝結成分の飽和蒸気圧も高くなるので、凝結成分の混合比が増す。この際、凝結成分が相対的に「重い」（凝結成分の分子量が主成分の分子量より大きい）場合には、温度効果と成分効果が競合する。

大気成分は乾燥成分と湿潤成分の 2 つから成るものとし、凝縮物は速やかに気塊から除去されるものとする。このとき問題は、ある温度の飽和した気塊とそれより高い温度のやはり飽和した気塊ではどちらが密度が大きいか、という問題に帰着される。

気塊の平均分子量 M は、

$$\begin{aligned}\bar{M} &= M_d \left(1 - \frac{p_v^{sat}}{p}\right) + M_v \frac{p_v^{sat}}{p} \\ &= M_d \left\{1 + \left(\frac{M_v - M_d}{M_d}\right) \frac{p_v^{sat}}{p}\right\}\end{aligned}\quad (E.1)$$

である。ここで M_d, M_v はそれぞれ乾燥成分と湿潤成分の分子量であり、 p_v^{sat} は湿潤成分の飽和蒸気圧である。この平均分子量の式を用いて気塊の密度 ρ を書き下すと、

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{p}{R_d T} \left\{1 + \left(\frac{M_v - M_d}{M_d}\right) \frac{p_v^{sat}}{p}\right\} \\ &= \frac{1}{R_d T} \left\{p + \left(\frac{M_v - M_d}{M_d}\right) p_v^{sat}\right\}\end{aligned}$$

となる。この式を圧力一定で温度 T に対して偏微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial T} &= -\frac{p}{R_d T^2} - \frac{1}{R_d T^2} \left(\frac{M_v - M_d}{M_d} \right) p_v^{sat} + \frac{1}{R_d T} \left(\frac{M_v - M_d}{M_d} \right) \left(\frac{\partial p_v^{sat}}{\partial T} \right) \\ &= -\frac{1}{R_d T^2} \left\{ p + \left(\frac{M_v - M_d}{M_d} \right) p_v^{sat} - \left(\frac{M_v - M_d}{M_d} \right) \left(T \frac{\partial p_v^{sat}}{\partial T} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{R_d T^2} \left\{ p - \left(\frac{M_v - M_d}{M_d} \right) \left(-p_v^{sat} + T \frac{\partial p_v^{sat}}{\partial T} \right) \right\}\end{aligned}\quad (E.2)$$

である。この式にクラウジウス・クラペイロンの式、

$$\frac{\partial p_v^{sat}}{\partial T} = \frac{L p_v^{sat}}{R T^2} \quad (E.3)$$

を代入すると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = -\frac{1}{R_d T^2} \left\{ p - \left(\frac{M_v - M_d}{M_d} \right) \left(\frac{L}{R T} - 1 \right) p_v^{sat} \right\} \quad (E.4)$$

である。さらに飽和混合比、

$$q_v^{sat} = \frac{\rho_v^{sat}}{\rho_d} = \frac{p_v^{sat}}{R_v T} \frac{R_d T}{p_d} = \frac{M_v}{M_d} \frac{p_v^{sat}}{p - p_v^{sat}} \quad (E.5)$$

を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial T} &= -\frac{p - p_v^{sat}}{R_d T^2} \left\{ \frac{p}{p - p_v^{sat}} - \left(\frac{M_v - M_d}{M_d} \right) \left(\frac{L}{R T} - 1 \right) \frac{p_v^{sat}}{p - p_v^{sat}} \right\} \\ &= -\frac{p - p_v^{sat}}{R_d T^2} \left\{ 1 + \frac{p_v^{sat}}{p - p_v^{sat}} - \left(\frac{M_v - M_d}{M_d} \right) \left(\frac{L}{R T} - 1 \right) \frac{p_v^{sat}}{p - p_v^{sat}} \right\} \\ &= -\frac{p - p_v^{sat}}{R_d T^2} \left\{ 1 + \frac{p_v^{sat}}{p - p_v^{sat}} \left(1 + \frac{M_v - M_d}{M_d} \right) - \frac{L}{R T} \left(\frac{M_v - M_d}{M_d} \right) \frac{p_v^{sat}}{p - p_v^{sat}} \right\} \\ &= -\frac{p - p_v^{sat}}{R_d T^2} \left\{ 1 + \frac{M_v}{M_d} \frac{p_v^{sat}}{p - p_v^{sat}} - \frac{L}{R T} \left(\frac{M_v - M_d}{M_v} \right) \left(\frac{M_v}{M_d} \frac{p_v^{sat}}{p - p_v^{sat}} \right) \right\} \\ &= -\frac{p - p_v^{sat}}{R_d T^2} \left\{ (1 + q_v^{sat}) - \frac{L}{R T} \left(1 - \frac{M_d}{M_v} \right) q_v^{sat} \right\}\end{aligned}\quad (E.6)$$

である。浮力が負になる場合は、 $\partial \rho / \partial T < 0$ の場合であり、浮力が正になる場合は、 $\partial \rho / \partial T > 0$ の場合である。 $M_d > M_v$ の場合には必ず浮力は正となる。

(E.6) 式において、 $1 + q_v^{sat} \approx 1$ とみなせば、浮力が負になる条件は、

$$q_v^{sat} > \frac{1}{\frac{L}{R T} \left(1 - \frac{M_d}{M_v} \right)} \quad (E.7)$$

である。各凝結成分の潜熱を用いると、浮力の符号が変化する臨界値は

$$q_{\text{H}_2\text{O}}^c = 0.057, \quad q_{\text{NH}_3}^c = 0.104, \quad q_{\text{CH}_4}^c = 0.112, \quad (E.8)$$

となる。

参考文献

Achterberg, R. K. and Ingersoll, A. P. (1989), A Normal-Mode Approach to Jovian Atmosphere Dynamics, *J. Atmos. Sci.*, **46**, 2448–2462.

Anders, E. and Grevesse, N. (1989), Abundances of the elements: Meteoritic and solar, *Geochim. Cosmochim. Acta*, **53**, 197–214.

Asplund, M., Grevesse, N., and A. J. Sauval (2005), The solar chemical composition, in *Cosmic Abundances as Records of Stellar Evolution and Nucleosynthesis in honor of David L. Lambert*, ASP Conference Series, **336**, edited by T. G. Barnes and F. N. Bash., pp. 25–38 Astronomical Society of the Pacific, San Francisco.

Asselin, R. A., (1972): Frequency filter for time integrations. *Mon. Wea. Rev.*, **100**, 487–490.

Atreya, S. K. and Romani, P. N. (1985), Photochemistry and clouds of Jupiter, Saturn and Uranus, in *Recent Advances in Planetary Meteorology*, edited by G. E. Hunt, pp. 17–68, Cambridge Univ. Press, London.

Atreya S. K., Wong, M. H., Owen, T. C., Mahaffy, P. R., Neimann, H. B., de Pater, I., Drossart, P., and Encrenaz, T. (1999), A comparison of the atmosphere of Jupiter and Saturn: deep atmospheric composition, cloud structure, vertical mixing and origin, *Planet. Space Sci.*, **47**, 1243–1262.

Baines, K. H., Carlson, R. W., and Kamp, L. W. (2002), Fresh Ammonia Ice Clouds in Jupiter. Spectroscopic Identification, Spatial Distribution, and Dynamical Implications, *Icarus*, **159**, 74–94.

Banfield, D., Gierasch, P. J., Bell, M., Ustinov, E., Ingersoll, A. P., Vasavada, A. R.,

West, R. A., and Belton, M. J. S. (1998), Jupiter ' s cloud structure from Galileo imaging data, *Icarus*, **135**, 230–250.

Bar-Nun, A., Kleinfeld, I., and Ganor, E (1998), Shape and optical properties of aerosols formed by photolysis of acetylene, ethylene, and hydrogen cyanide, *J. Geophys. Res.*, **93**, 8,383–8,387.

Bergstralh, J. T. and Miner, E. D. (1991), The Uranian system: an overview, In *Uranus*, edited by J. B. Bergstralh, E. D. Miner, and M. S. Matthews, pp. 3–25, The University of Arizona Press, Tucson.

Briggs, F. H. and Sackett, P. D. (1989), Radio observations of Saturn as a probe of its atmosphere and cloud structure, *Icarus*, **80**, 77–103.

Chase, M. W. (Eds.) (1989), *NIST-JANAF Thermochemical Tables*, 4th ed., AIP Press, New York.

de Pater, I., Romani, P. N., and Atreya, S. K. (1991), Possible Microwave Absorption by H₂S Gas in Uranus' and Neptune's Atmosphere, *Icarus*, **91**, 220–233.

de Pater, I., Dunn, D., Romani, P., and Zahnle, K. (2001), Reconciling Galileo Probe Data and Ground-Based Radio Observations of Ammonia on Jupiter, *Icarus*, **149**, 66–78.

Eshleman, V. R., Tayler, G. L., Wood, G. E., Lindal, G. F., Anderson, J. D., Levy, G. S., and Croft, T. A. (1979), Radio science with Voyager 1 at Jupiter: preliminary profiles of the atmosphere and ionosphere, *Science*, **204**, 976–978.

Gibson, J., Welch, W.J., and de Pater, I. (2005), Accurate Jovian radio flux density measurements show ammonia to be subsaturated in the upper troposphere *Icarus*, **173**, 439–446.

Gierasch, P. J., Ingersoll, A. P., Banfield, D., Ewald, S. P., Helfenstein, P., Simon-Miller, A. A., Vasavada, A. R., Breneman, H. H., Senske, D. A., and the Galileo Imaging Team (2000), Observation of moist convection in Jupiter's atmosphere, *Nature*, **403**, 628–630.

Gill, A. E., (1982), *Atmosphere-Ocean Dynamics*, Academic Press, San Diego.

Harrington, J., Lebeau, R. P., Jr., Backes, K. A., and Dowling, T. E. (1994), Dynamic Response of Jupiter's Atmosphere to the Impact of Comet Shoemaker-Levy-9, *Nature*, **369**, 78.

Hueso, R. and Sanchez-Lavega, A., (2001), A three-dimensional model of moist convection for the giant planets: the Jupiter case, *Icarus*, **151**, 257–274.

Hunt, G.E., Conrath, B.J. and Pirraglia, J.A. (1981), *J. Geophys. Res.*, **86**, 8777–8781.

Ingersoll, A. P., Kanamori, H., and Dowling, T. E. (1994), Atmospheric gravity waves from the impact of comet Shoemaker-Levy 9 with Jupiter, *Geophys. Res. Lett.*, **21**, 1083–1086.

Ingersoll, A. P. and Kanamori, H. (1995), Wave from the collisions of comet Shoemaker-Levy 9 with Jupiter, *Nature*, **374**, 706–708.

Ingersoll, A.P., Gierasch, P.J., Banfield, D., Vasavada, A.R., and Galileo Imaging Team (2000) Moist convection as an energy source for the large-scale motions in Jupiter's atmosphere *Nature*, **403**, 630–632

Irwin, P. G. J., Sihra, K., Bowles, N., Taylor, F. W., and Calcutt, S. B. (2005), Methane absorption in the atmosphere of Jupiter from 1800 to 9500 cm^{-1} and implications for vertical cloud structure, *Icarus*, **176**, 255–271.

Kanamori, H. (1993), Excitation of Jovian normal modes by an impact source, *Geophys. Res. Lett.*, **20**, 2921–2924.

Kessler, E. (1969), On the Distribution and Continuity of Water Substance in Atmospheric Circulation. *Meteor. Monogr.*, **32**, 84.

Klemp J. B. and Wilhelmson, R. B. (1978), The simulation of three-dimensional convective storm dynamics, *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1070–1096.

Lewis, J. S. (1969), The Clouds of Jupiter and the $\text{NH}_3\text{-H}_2\text{O}$ and $\text{NH}_3\text{-H}_2\text{S}$ Systems, *Icarus*, **10**, 365–378.

Nakajima, K., Takehiro, S., Ishiwatari, M., and Hayashi, Y.-Y. (2000), Numerical modeling of Jupiter's moist convection layer, *Geophys. Res. Lett.*, **27**, 3129–3133.

Niemann. H. B., Atreya. S. K., Carignan. G. R., Donahue, T. M., Haberman, J. A., Harpoid, D. N., Hartle. R. E., Hunten, D. M., Kasprzak, W. T., Mahaffy, P. R., Owen, T. C., and Way, S. H. (1998), The composition of the Jovian atmosphere as determined by the Galileo probe mass spectrometer. *J. Geophys. Res.*, **103**, 22,831–22,846.

日本化学会編 (1993), 化学便覧 改訂第 4 版, 丸善.

Planetary Photojournal, Jet Propulsion Laboratory, California Inst. Technology, <http://photojournal.jpl.nasa.gov>

Ragent, B., Rages, K. A., Knight, T. C. D., Arvin, P., and Orton, G. S. (1998), The clouds of Jupiter: results of the Galileo Jupiter mission probe nephelometer experiment, *J. Geophys. Res.*, **103**, 22,891–22,909.

Reid, R. C., Prausnitz, J. M., and Poling, B. E. (1987), *The Properties of Gases and Liquids*, 4th ed., McGraw-Hill Companies.

Sagan, C. and Salpeter, E. E. (1976), Particles, environments and possible ecologies in the Jovian atmosphere, *Astrophys. J. Suppl. Series*, **32**, 735–755.

Showman, A.P. and Ingersoll, A.P. (1998), Interpretation of Galileo probe data and implications for Jupiter's dry downdrafts, *Icarus*, **132**, 205–220.

Showman, A.P. and de Pater, I. (2005), Dynamical implications of Jupiter's tropospheric ammonia abundance, *Icarus*, **174**, 192–204.

Skamarock, W. C. and Klemp, J. B. (1992), The stability of time-split numerical methods for the hydrostatic and the nonhydrostatic elastic equations, *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 2109–2127.

Sromovsky, L. A., Collard, A. D., Fry, P. M., Orton, G. S., Lemmon, M. T., Tomasko, M. G., and Freedman, R. S. (1998), Galileo probe measurements of thermal and solar radiation fluxes in the Jovian atmosphere, *J. Geophys. Res.*, **103**, 22,929–22,978.

Sugiyama, K., M. Odaka, K. Kuramoto, and Y.-Y. Hayashi (2001), Thermodynamic calculation of the atmosphere of the Jovian Planets, *Proceedings of the 34 th ISAS Lunar and Planetary symposium*, 53–56.

Sugiyama, K., Odaka, M., Kuramoto, K., and Hayashi, Y.-Y., (2005), Static stability of the cloud layers of the Jovian atmospheres estimated from the moist adiabatic profiles, *Proceedings of the 38 th ISAS Lunar and Planetary symposium*, 135–138.

Sugiyama, K., Odaka, M., Kuramoto, K., and Hayashi, Y.-Y. (2006), Static stability of the Jovian atmospheres estimated from moist adiabatic profiles, *Geophys. Res. Lett.*, **33**, L03201, doi:10.1029/2005GL024554

坪木和久, 榊原篤志 (2001), CReSS ユーザーズガイド 第 2 版.
http://www.tokyo.rist.or.jp/CReSS_Fujin/CReSS.top.html

Van Zeggeren, F. and Storey, S. H. (1970), *The Computation of Chemical Equilibria*, Cambridge Univ. Press, London.

Weidenschilling, S. J. and Lewis, J. S. (1973), Atmospheric and cloud structure of the Jovian planet, *Icarus*, **20**, 465–476.

West, R. A. and Smith, R. A. (1991), Evidence for aggregate particles in the atmospheres of Titan and Jupiter, *Icarus*, **90**, 330–333.

White W. B., Johnson, S. M., and Dantxig, G. B. (1953), Chemical Equilibrium in Complex Mixture, *J. Chem. Phys.*, **28**, 751–755.

Wood, J.A. and Hashimoto, A. (1993), Mineral equilibrium in fractionated nebular systems, *Geochimica et Cosmochimica Acta*, **57**, 2377–2388

Yair, Y., Levin, Z., and Tzivion, S. (1992), Water-cumulus in Jupiter’s atmosphere: Numerical experiments with an axisymmetric cloud model, *Icarus*, **98**, 72–81.

Yair, Y., Levin, Z., and Tzivion, S. (1995), Microphysical processes and dynamics of a Jovian thundercloud, *Icarus*, **114**, 278–299.

Yair, Y., Levin, Z., and Tzivion, S. (1998), Model interpretation of Jovian lightning activity and the Galileo probe results, *J. Geophys. Res.*, **103**, 14157–14166.