

# 回転球殻 MHD ダイナモにおける力学的境界条件の影響

## MHD dynamo in a rotating spherical shell: Influence of mechanical boundary conditions

佐々木洋平, 北大・理, 〒060-0810 札幌市北区北十条西 8 丁目, E-mail: uwabami@gfd-dennou.org

竹広真一, 京大・数理研, 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町, E-mail: takepiro@gfd-dennou.org

林祥介, 神大・理, 〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1 E-mail: shosuke@gfd-dennou.org

倉本圭, 北大・理, 〒060-0810 札幌市北区北十条西 8 丁目, E-mail: keikei@ep.sci.hokudai.ac.jp

Youhei SASAKI, Faculty of Science, Hokkaido University, Kita-10 Nishi-8, Kita-ku, Sapporo, Japan

Shin-ichi Takehiro, RIMS, Kyoto University, Kitashirawaka Oiwake-chou, Sakyo-ku, Kyoto, Japan

Yoshi-Yuki Hayashi, Faculty of Sciences, Kobe Univ., Rokkoudai 1-1, Nada-ku, Kobe, Japan

Kiyoshi Kuramoto, Faculty of Science, Hokkaido University, Kita-10 Nishi-8, Kita-ku, Sapporo, Japan

Numerical experiments of magnetohydrodynamic dynamos driven by thermal convection in a rotating spherical shell with a free-slip top boundary and a no-slip bottom boundary are performed. Non-dimensional numbers for the experiments are the modified Rayleigh number  $Ra = 100$ , the Ekman number  $E = 10^{-3}$ , the Prandtl number  $Pr = 1$ , the ratio of inner and outer radii  $\xi = 0.35$ . The magnetic Prandtl number  $Pm$  is varied from 5 to 50. Time integration of non-magnetic thermal convection is carried out until a quasi-steady state is established, and then MHD dynamo calculation is carried out starting from the quasi-steady state with a dipole and toroidal magnetic field. In the non-magnetic thermal convection case, the obtained solution consists of well-organized spiral vortex columns aligned with the rotation axis. A strong prograde zonal flow is produced at the top of the spherical shell in contrast to the simulations with the both no-slip boundaries. In the MHD dynamo cases, calculated magnetic fields fall into decay at all magnetic Prandtl numbers. The strong prograde zonal flow, which is prominent in the case of non-magnetic thermal convection, does not appear, but a slow retrograde zonal flow is produced at the top of spherical shell. As a result, the omega effect expected from the strong zonal flows does not seem to operate effectively.

### 1. はじめに

近年の計算機の発達によって、太陽および惑星固有磁場の生成維持メカニズムを調べることを目指した 3 次元球殻内の力学的ダイナモ計算が行われるようになった。その計算の多くは両端で粘着条件あるいは両端で自由すべり条件を力学的境界条件として用い、 $\alpha^2$  タイプのダイナモ解を得ている。しかしながらこれらの条件は太陽の対流層を考察する条件としては適切でないかもしれない。近年の日震学の結果から、太陽対流層の底部にはタコクラインと呼ばれる、対流層と放射層との間をつなぐ強い成層安定度を持った遷移層が存在することが知られるようになった<sup>(1)</sup>。観測によれば、放射層はほぼ一様に剛体回転しており、タコクラインに強いシアアが集中している。したがって、太陽対流層下端の力学的境界条件としては、放射層上端を境界として想定した粘着条件を用いるのが受け入れやすい。一方で対流層上端は剛体壁ではないので自由すべり条件を用いるのがよさそうである。そこで本研究では、下端に粘着条件、上端に自由滑り条件を課した回転球殻 MHD ダイナモの数値実験を行なった。このような力学的境界条件を用いることで、上層に形成されるであろう強い帯状流による  $\omega$  効果を通して  $\alpha^2$  タイプのダイナモ解とは異なる磁場生成維持機構を持つダイナモ解が得られることを期待した。

### 2. モデルと計算設定

#### 2.1 基礎方程式系

角速度  $\Omega$  で回転する内外半径  $r_i, r_o$  の球殻中に存在するブシネスク磁気流体を考える。座標系として緯度経度動径座標系  $(\lambda, \varphi, r)$  をとる。ここで  $\lambda$  は経度、 $\varphi$  は緯度、 $r$  は球殻中心からの距離である。長さのスケールとして球殻の厚さ  $D = r_o - r_i$ 、時間のスケールとして粘性拡散時間  $D^2/\nu$ 、速度のスケールとして粘性速度  $\nu/D$ 、温度のスケールとして球殻上下端の温度差  $\Delta T$ 、磁束密度のスケールとして  $\sqrt{\rho\mu\eta\Omega}$  を用いる。ここで  $\nu$  は動粘性係数、 $\rho$  は密度、 $\mu$  は透磁率、 $\eta$  は磁気拡散率である。上記スケールを

用いて無次元化された支配方程式系は、

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{B} = 0, \quad (1)$$

$$E \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla^2 \mathbf{u} \right] + 2\mathbf{k} \times \mathbf{u} = -\nabla p + Ra \frac{\mathbf{r}}{r} T + \frac{1}{Pm} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{Pm} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T, \quad (4)$$

ここで  $\mathbf{k}$  は回転軸方向の単位ベクトル、 $\mathbf{r}$  は球殻中心からの位置ベクトル、 $p$  は圧力、 $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $T$  はそれぞれ速度ベクトル、磁束密度ベクトル、温度である。方程式系に現れている無次元数

$$Ra = \frac{\alpha g_o \Delta T D}{\nu \Omega}, \quad E = \frac{\nu}{\Omega D^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad Pm = \frac{\nu}{\eta} \quad (5)$$

はそれぞれ修正レイリー数、エクマン数、プラントル数、磁気プラントル数である。ただし  $\alpha$ 、 $g_o$  は熱膨張率と球殻上端での重力加速度、 $\kappa$  は熱拡散率である。

境界条件は、球殻下端で粘着条件、球殻上端で応力無し条件を課す：

$$\mathbf{u} = 0, \quad \text{at } r = \frac{\xi}{1-\xi},$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{r}}{r^2} \right) = 0, \quad \text{at } r = \frac{1}{1-\xi}.$$

ここで  $\xi = r_i/r_o$  は球殻の内径外径比である。温度境界条件は上下端で温度固定条件とする：

$$T = 0 \quad \text{at } r = \frac{1}{1-\xi}, \quad T = 1 \quad \text{at } r = \frac{\xi}{1-\xi}. \quad (6)$$

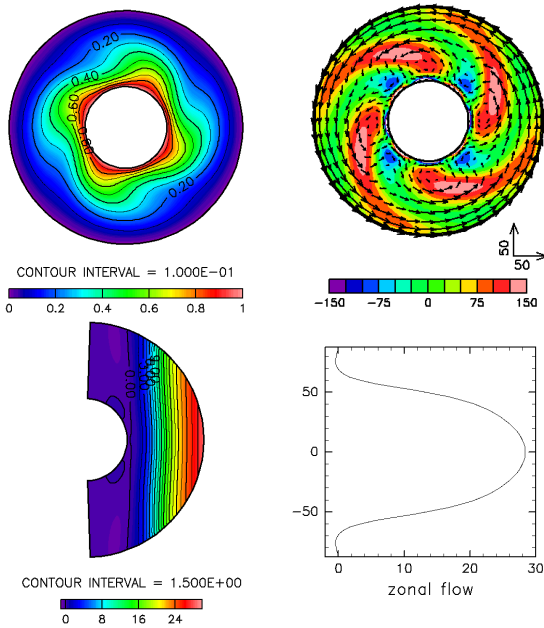


Figure 1 The structure of non-magnetic thermal convection. The top panels show the fields in the equatorial cross section. The left panel is temperature. Arrows in the right panel show velocity and a tone pattern denotes vorticity along rotating axis. Left and right of the bottom panels show mean zonal flows in the meridional cross section, and its latitudinal profile at the top of the spherical shell, respectively.

磁場の境界条件として球殻外部は不導体とする条件を用いる。このとき、磁場は境界において外部のポテンシャル場に接続される。すなわち、外部の磁場を  $B_e$ , そのポテンシャルを  $W$  として

$$\mathbf{B} = B_e, \quad \text{at } r = \frac{\xi}{1-\xi}, \quad \frac{1}{1-\xi}. \quad (7)$$

ただし  $B_e = \nabla W, \quad \nabla^2 W = 0$  である。

### 2.2 実験設定

最初に磁場の存在しない静止場  $\mathbf{u} = 0, \mathbf{B} = 0$  に対して温度擾乱を与えて熱対流計算を実行し、対流構造が準平衡状態に達した後に磁場を付与してダイナモ計算を行い、磁場の発達の様子を観察する。付与する磁場は双極子磁場に赤道対称なトロイダル磁場を重ねた磁場を用いる。この磁場はダイナモベンチマーク<sup>(2)</sup> case1 で初期値に用いられた磁場に同じである。パラメータは、 $\xi = 0.35, Ra = 100, Pr = 1, E = 10^{-3}$  に固定し、磁気プラントル数を  $Pm = 5 \sim 50$  と変化させて計算した。実際の計算は、速度場および磁場をトロイダル・ポロイダルポテンシャルで表わし、水平方向には球面調和関数、動径方向にはチェビシェフ多項式を用いて展開して行なった。解像度は全ての計算において、水平切断波数 42, 鉛直切断波数 32 (経度 128 点, 緯度 64 点, 動径方向 32 点) に設定した。

### 3. 結果

#### 3.1 磁場の存在しない場合の回転球殻熱対流

$Ra = 100, E = 10^{-3}, Pr = 1$  における、統計的平衡状態に達した磁場の存在しない場合の熱対流の構造を Fig.1 に示す。Fig.1(左上) は赤道断面での温度場、Fig.1(右上) は赤道断面における流速ベクトルと回転軸方向の渦度の等値線である。流れ場は回転軸に沿った方向に伸びた規則正しい螺旋状の渦柱構造をしている。これらの渦柱が東向きに伝播する準定常状態が得られた。Fig.1(左

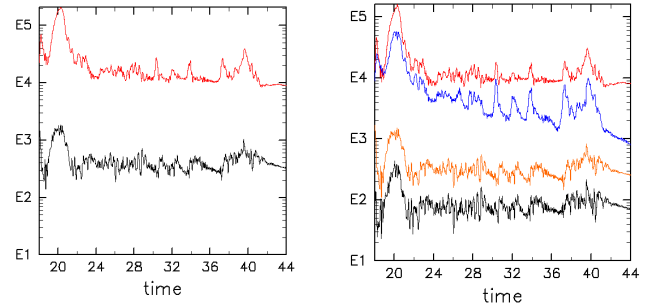


Figure 2 Variation of several kinds of volume-integrated energy versus time. Red and black lines in the left panel show magnetic energy and kinetic energy, respectively. Red, blue, yellow and black lines in the right panel denote toroidal magnetic energy, poloidal magnetic energy, toroidal kinetic energy, and poloidal kinetic energy, respectively.

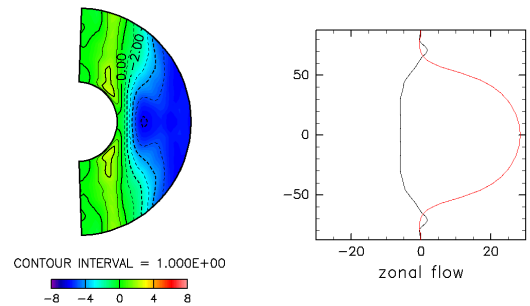


Figure 3 Mean zonal flow fields obtained by the MHZ dynamo calculation in the case of  $Pm = 50$ . The left panel is a meridional cross section, and the right panel shows the profiles at the top of spherical shell. Black and red lines indicate the mean zonal flow of the dynamo calculation and of the non-magnetic thermal convection, respectively.

下) は帯状平均流、Fig.1(右下) は球殻表面での帯状平均流である。両端を粘着条件にした場合に比べて強い東向きの流れが内核接円筒外部で形成された。この流れは赤道で極大となっており、その南北幅はほぼ内核接円筒と球殻上端の接する位置で定まっている。

#### 3.2 ダイナモ計算

3.1 に示した熱対流場に磁場を付加したダイナモ計算での  $Pm = 50$  の場合のエネルギーの時間変化を Fig.2 に示す。Fig.2(左) は全磁気エネルギー (赤), 全運動エネルギー (黒) である。Fig.2(右) はそれぞれ、トロイダル磁気エネルギー (赤), ポロイダル磁気エネルギー (青), トロイダル運動エネルギー (黄), ポロイダル運動エネルギー (黒) である。トロイダル磁場のエネルギーは振動しつつも維持されているが、ポロイダル磁場のエネルギーは振動しつつ徐々に減衰していき、最終的には散逸してしまう。結果として、 $Pm = 5 \sim 50$  の全ての実験において与えた磁場は減衰した。

Fig.3(左) は Fig.2 の無次元時間 40 における平均帯状流、Fig.3(右) は磁場無し球殻対流 (赤) とダイナモ計算 (黒) における球殻表面での帯状流である。上端に応力無し条件を課したにもかかわらず、磁場の無い熱対流場において得られていた強い東向きの帯状流は弱くなっていき、結果として得られた平均帯状流は西向きとなっている。

同じ時刻における流れ場と磁場の構造を Fig.4 に示す。Fig.4(左上) および (右上) はそれぞれ赤道断面における渦度

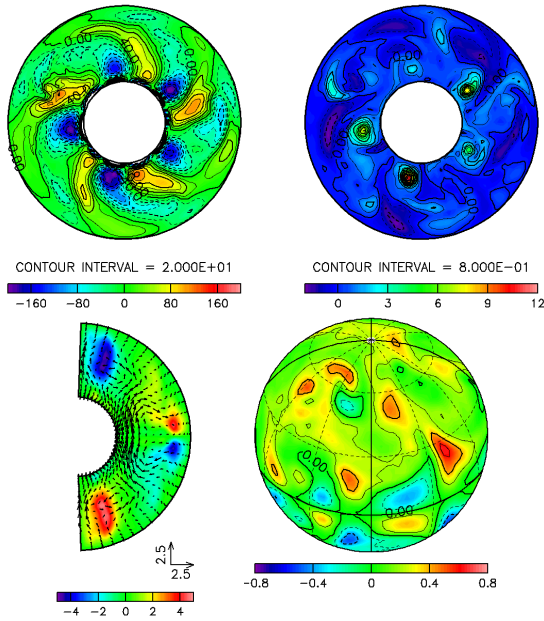


Figure 4 Field structures in MHD dynamo calculation in the case of  $Pm = 50$ . The top panels are vorticity along rotation axis(left), and the poloidal magnetic field (right) in the equatorial plane. The bottom panels are the zonal mean azimuthal component of the magnetic field in the meridional cross section (left) and the poloidal magnetic field at the top of the spherical shell (right).

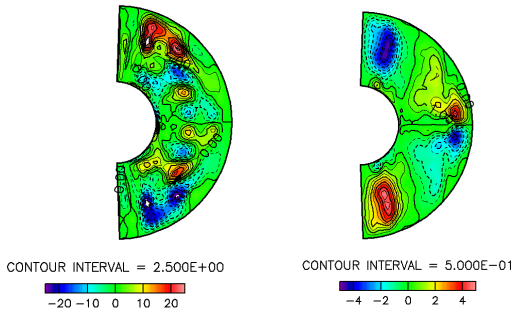


Figure 5 Examination of the  $\omega$  effect. The left panel is the  $\omega$  effect described by (4.). The right panel is the zonal mean toroidal magnetic field.

緯度成分, 磁場緯度成分, Fig.4(左下) は帯状平均したトロイダル磁場, Fig.4(右下) は球殻表面におけるポロイダル磁場である。磁場は高気圧性の渦に集中しているものの, 内核接円筒の外側中低緯度領域および内核接円筒内部の中高緯度領域に集中しており, 球殻表面へは殆んど出ていっていない。

4. 議論

Olson *et al.*<sup>(3)</sup> に従い,  $\omega$  効果によるトロイダル磁場生成, および  $\alpha$  効果によるポロイダル磁場生成について吟味してみた。

$\omega$  効果は帯状流によるトロイダル磁場 (磁場経度成分) の生成機構であり

$$rB_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\lambda}{r} \right) + B_\varphi \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{u_\lambda}{\cos \varphi} \right) \quad (8)$$

と表わされる。ここで  $B_r, B_\varphi$  は磁束密度の動径成分と緯度成分,  $u_\lambda$  は速度の経度成分である。Fig.5 に  $\omega$  効果 (4.), および磁場の経度成分を示す。  $\omega$  効果 (左) と磁場の経度成分 (右) のパターンは内核接円筒外部では相関が殆ど見られない。このことから内核

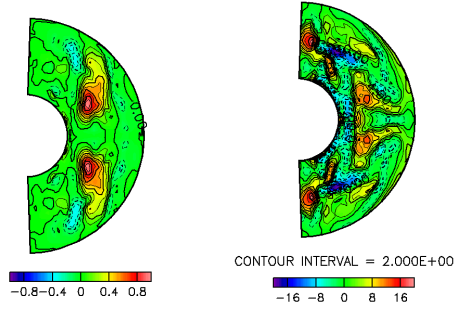


Figure 6 Examination of the  $\alpha$  effect. The left panel is the product of helicity and the azimuthal component of the magnetic field, The right panel is the zonal mean azimuthal component of electric current.

接円筒外部では  $\omega$  効果による磁場生成はほとんど寄与していないことがわかる。また, 内核接円筒内部では, パターンに負の相関が見られている。すなわち  $\omega$  効果はトロイダル磁場を弱める方向に働いている。

また,  $\alpha$  効果による磁場生成を調べるために, トロイダル磁場とヘリシティの積の相対強度, および帯状平均した電流の経度成分を Fig.6 に示す。内核接円筒外部の低緯度における東向きの帯状電流および高緯度における西向きの電流とは相関が見られるため, ある程度は  $\alpha$  効果が効いているのかもしれない。

5. まとめ

力学的境界条件として, 球殻上端に応力無し条件・下端に粘着条件を課した MHD ダイナモの数値実験を行なった。その結果  $Ra = 100, E = 10^{-3}, Pr = 1, Pm = 5 \sim 50$  のパラメータ領域では, 期待された強い帯状流が生成されず, 自励的なダイナモ解は得られなかった。講演では  $Ra$  をより大きくした実験結果を合わせて報告する。

謝辞

作図は電脳 Ruby プロジェクト (<http://ruby.gfd-dennou.org/>) において開発されたソフトウェアを用いて行なった。数値計算は, 宇宙航空研究開発機構 宇宙化学研究本部 宇宙科学企画情報解析センターの NEC SX6 を用いて行なった。

参考文献

- (1) Howe, R., Christensen-Dalgaard, J., Hill, F., Komm, R.W., Larsen, R.M., Schou, J., Tompson, M.J., Toomre, J., "Dynamic Variation at the Base of the Solar Convection Zone", Science 287(2000), pp. 2456–2460.
- (2) Christensen, U. R., Aubert, J., Cardin, P., Dormy, E., Gibbons, S., Glatzmaier, G. A., Grote, E., Honkura, Y., Jones, C., Kono, M., Matsushima, M., Sakuraba, A., Takahashi, F., Tilgner, A., Wicht, J., Zhang, K., 2001 : "A numerical dynamo benchmark.", Phys. Earth Planet. Inter.128(2001), pp. 25–34.
- (3) Olson, P., Christensen, U., Glatzmaier, G.A., "Numerical modeling of geodynamo: Mechanisms of field generation and equilibration", J. Geophys. Res.104(1999), pp. 10,383–10,404.