

# 1 次元放射平衡モデルによる 大気の鉛直温度構造の考察

小林 英貴

神戸大学理学部地球惑星科学科  
地球および惑星大気科学研究室

2012/02/29



## 要旨

地球大気の鉛直温度構造を決定する要因として、気体による放射の吸収に注目した。Manabe and Strickler (1964) に従い、1次元放射平衡モデルを用いて、数値計算により大気の温度構造を求め、大気が放射平衡状態にあるときの鉛直温度構造の考察を行った。吸収気体の吸収係数と大気鉛直温度構造との関係について調べた。その結果、吸収係数が大きく気層の光学的厚さが大きい場合ほど温度は高くなった。特に  $0 \sim 50\mu\text{m}$  の波長範囲の吸収帯が地球大気温度構造にとって重要であることが分かった。

# 目次

第1章 序論	3
第2章 放射の基礎法則	4
2.1 放射とは	4
2.2 基本的な物理量	4
2.3 黒体放射	6
2.4 放射伝達方程式	8
第3章 放射平衡	15
3.1 放射平衡温度	15
3.2 灰色大気	16
3.3 平行平面大気	18
第4章 数値計算	21
4.1 概要	21
4.2 設定	21
4.3 実験 1	25
4.4 実験 2	31

---

4.5 実験 3 . . . . .	34
第 5 章 結論	38
付録	39
謝辞	43
参考文献	44

# 第1章 序論

地球は大気による温室効果があるため、平均気温は大気のない場合の放射平衡温度である 255 K と比べて高温になっていることが知られている。そこで、大気の温室効果と、それを含めた鉛直温度構造について考える。Manabe and Strickler (1964) では鉛直 1 次元放射対流モデルを用いて、気体の吸収の効果を検討した地球大気の鉛直温度構造を再現している。本研究では、それを単純化したモデルを用いて、太陽放射に対して透明で、地球放射の吸収気体として水蒸気のみを考えた、対流の起こらない大気が放射平衡状態にあるときの温度構造がどのように決まるかを検証する。

予備実験として解析的に解ける灰色大気の温度構造を求めて解析値と計算値の比較を行い、モデルの信頼度を測る。その後、大気を二つの層に分けた実験や簡単な吸収帯を考えた実験を行い、吸収気体の吸収係数と大気の鉛直温度構造との関係を探ることを目的とする。

本論文の構成を説明する。2 章では放射に関連する基本的な物理量や基礎となる法則を示す。3 章では放射平衡について説明し、温度構造を決定する方法について説明する。4 章は温度を決定していく過程で行う計算の概要および結果を示し、それについての考察を行う。5 章はまとめと今後の展望を示している。

## 第2章 放射の基礎法則

### 2.1 放射とは

放射とは電磁波の総称である。電磁波には波長が短い方から、紫外線 (約 10 ~ 400nm), 可視光線 (約 400 ~ 800nm), 赤外線 (約 800nm ~ 1000 $\mu$ m), マイクロ波 (約 100 $\mu$ m ~ 1m) などがある。

電磁波の識別には, 真空中における波長  $\lambda$ , 振動数  $\nu$ , または波数  $\kappa$  を用いる。電磁波伝播の位相速度 (つまり光速)  $c$  を用いると, これらの関係は

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \quad \kappa = \frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda} \quad (2.1)$$

となる。ここで, 真空中の光速  $c = 2.99792458 \text{ ms}^{-1}$  である\*1。

気象分野において, 放射は太陽放射と地球放射に大別される。太陽放射のエネルギーの 99 % 以上は 4 $\mu$ m より短い波長域にあり, 地球放射のエネルギーのほとんどは 3 $\mu$ m より長い波長域にあるので, 太陽放射を短波放射, 地球放射を長波放射とも呼ぶ。

### 2.2 基本的な物理量

#### (1) 立体角

立体角  $\omega$  は半径  $r$  の球面上に円錐体で張られる面積  $\sigma$  を半径の 2 乗で割った値で,

$$\omega \equiv \sigma / r^2 \quad (2.2)$$

\*1浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎 より引用。

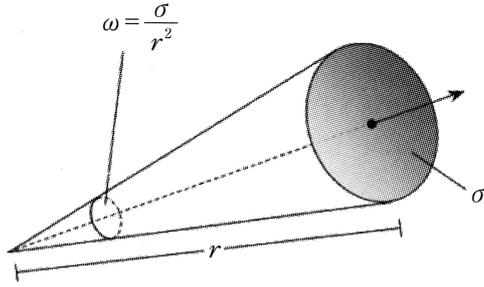


図 2.1: 立体角  $\omega$  の定義.  
(浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎)

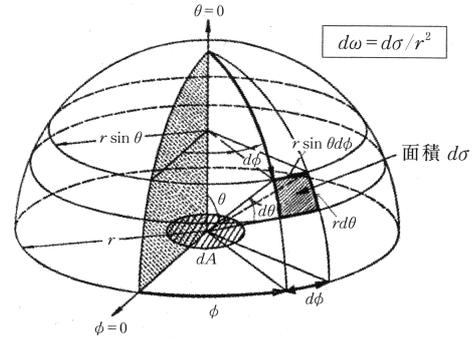


図 2.2: 極座標系における微小立体角  $d\omega$  の定義.  
(浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎)

で定義される。単位はステラジアン sr で表す。極座標系において、半径  $r$  の球面上の天頂角  $\theta$ 、方位角  $\phi$  で規定される方向を考えると、この微小角度  $d\theta$ 、 $d\phi$  で張られる微小面積  $d\sigma$  をみるときの立体角  $d\omega$  は、

$$d\omega = \frac{d\sigma}{r^2} = \frac{(r \sin \theta d\phi)(r d\theta)}{r^2} = \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.3)$$

と表される。

## (2) 放射輝度

ある面  $dA$  を通って、その面と角  $\theta$  をなす方向の、立体角  $d\omega$  の錐体内を進む放射を考える。振動数が  $\nu \sim \nu + d\nu$  にある放射が時間  $dt$  の間に面  $dA$  を通過するとき、放射が運ぶ放射エネルギー  $dE_\nu$  は、

$$dE_\nu = I_\nu \cos \theta dA d\omega d\nu dt \quad (2.4)$$

である。ここで  $I_\nu$  は放射輝度と呼ばれ、振動数  $\nu$  の放射の強さを表す比例定数である。よって、ある単一の振動数  $\nu$  の放射 (単色光) の放射輝度は、

$$I_\nu \equiv \frac{dE_\nu}{\cos \theta dA d\omega d\nu dt} \quad (2.5)$$

で定義される。放射輝度は場所と進行方向に依存する。ある地点で放射輝度が方向に依らず一定の場合に、放射場のことを等方的な放射場という。放射が平行光線ならば、 $d\omega \rightarrow 0$  なので、放射輝度の概念は成り立たず、その場合は、次の放射フラックスで光線の強さを記述する。例としては太陽放射の大気上端での入射がある。

### (3) 放射フラックス

面  $dA$  を通して半球側へ流れる放射エネルギーの大きさを放射フラックスと呼ぶ。振動数  $\nu$  の放射フラックス  $F_\nu$  は、面  $dA$  を通過する放射輝度  $I_\nu$  のうち面に垂直な成分を半球の全立体角  $\Omega$  で積分したもので、

$$F_\nu \equiv \int_{\Omega} I_\nu \cos \theta d\omega \quad (2.6)$$

で定義される。極座標表示では (2.3) より、

$$F_\nu = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_\nu(\theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.7)$$

となる。等方的な放射場の場合は、 $F_\nu = \pi I_\nu$  となる<sup>\*2</sup>。

積算した放射フラックス  $F$  は、

$$F = \int_0^{\infty} F_\nu d\nu \quad (2.8)$$

である。

### (4) 大気中の放射過程

放射は、大気中を伝播する間に吸収、射出、(他の方向からの) 散乱を受けて変化する。放射が大気中の物質などにより吸収や散乱を受けて減衰することを消散と呼ぶ。また、考えている方向の放射に地表面や大気物質から射出された放射が加わることもある。波長  $10 \sim 12\mu\text{m}$  の領域には強い吸収帯がなく、地球大気はこの波長域に対して比較的透明なので、この波長域を大気の窓領域と呼ぶ。ただし、この波長域からの大気放射は弱い<sup>が</sup>ゼロではない。

## 2.3 黒体放射

### プランクの法則

黒体は、入射する全ての波長の放射を完全に吸収・放出できる理想的な物体で、黒体から射出される放射のことを黒体放射と呼ぶ。黒体放射は等方的で、理想的な

<sup>\*2</sup> $I_\nu(\theta, \phi)$  が角度の依らないとして積分を実行すると、ただちに確かめられる。

ものであるが、等温で不透明な熱平衡状態にある壁面で囲まれた空洞内の放射で再現される。

全ての温度領域での黒体放射スペクトルを統一的に表した法則をプランクの法則という。プランクの法則によると、絶対温度  $T$  の黒体放射輝度  $B_\lambda(T)$  を波長  $\lambda$  で表したスペクトル分布は、プランク関数と呼ばれ、

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5 [\exp(hc/\kappa_B\lambda T) - 1]} \quad (2.9)$$

である。ここで、 $h = 6.62607 \times 10^{-34} \text{ Js}$  はプランク定数、 $\kappa_B = 1.38065 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$  はボルツマン定数である<sup>\*3</sup>。プランク関数は、振動数  $\nu$  を用いて表すと

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2 [\exp(h\nu/\kappa_B T) - 1]} \quad (2.10)$$

であり、波数  $\kappa$  を用いて表すと

$$B_\kappa(T) = \frac{2hc^2\kappa^3}{\exp(hc\kappa/\kappa_B T) - 1} \quad (2.11)$$

である。プランク関数は、低温・高振動数の領域ではウィーンの変位則に、高温・低振動数の領域ではレイリー・ジーンズの放射則にそれぞれ近似される<sup>\*4</sup>。

## ウィーンの変位則

ある温度  $T$  でのプランク関数は、特定の波長で極大値をとり、その波長  $\lambda_{\max}$  と黒体温度  $T$  との間には、

$$\lambda_{\max} = \frac{C}{T}, \quad C = 2897 \text{ } \mu\text{mK} \quad (2.12)$$

の関係がある<sup>\*5</sup>。これをウィーンの変位則という。

## ステファン・ボルツマンの法則

全波長にわたる黒体放射輝度を  $B(T)$  とすると、黒体放射は等方的なので、全波長にわたる放射フラックス  $F$  は、

$$\begin{aligned} F &= \pi B(T) \\ &= \sigma T^4 \end{aligned} \quad (2.13)$$

<sup>\*3</sup>浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎 より引用。

<sup>\*4</sup>元々は二つの法則を統一して表すものとして導かれた。

<sup>\*5</sup>付録 A 参照。

となる<sup>\*6</sup>. ここで,  $\sigma$  はステファン・ボルツマン定数で,  $\sigma = 5.66961 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$  である<sup>\*7</sup>. つまり, 黒体から射出される放射フラックスを全波長にわたって積分したものは, 絶対温度の 4 乗に比例し, この関係のことをステファン・ボルツマンの放射則と呼ぶ,

## キルヒホッフの法則

キルヒホッフの法則は熱平衡状態にある物質の放射の授受を記述する. これによると, 物質の吸収係数  $k_\nu^a$  と射出係数  $j_\nu^a$  の比は物質の種類や性質に関係なく, 物質の温度と放射の振動数にのみに依存する. 壁面-空洞系の熱平衡状態において, 壁面は吸収する放射量 ( $k_\nu^a B_\nu$ ) と等しい放射量 ( $j_\nu^a$ ) を射出するので,

$$\begin{aligned} j_\nu^a &= k_\nu^a B_\nu, \\ \frac{j_\nu^a}{k_\nu^a} &= B_\nu \end{aligned} \quad (2.14)$$

が成り立つ.

熱平衡状態の物質の振動数  $\nu$  に対する吸収率  $a_\nu$  と射出率  $\varepsilon_\nu$  を, それぞれプランク関数  $B_\nu$  に対する吸収された放射輝度の比, 射出された放射輝度  $j_\nu^a$  の比として定義すると, (2.14) より

$$a_\nu = \varepsilon_\nu \quad (2.15)$$

である.  $a_\nu = \varepsilon_\nu = 1$  のとき, 物体は黒体である. また,  $0 < a_\nu = \varepsilon_\nu < 1$  のとき, 物体は灰色体という. 地表面は赤外放射に対してほぼ黒体あるいは灰色体として近似できる.

## 2.4 放射伝達方程式

### 放射伝達方程式の導出

大気中に断面積  $d\sigma$ , 長さ  $ds$  の微小な気柱があるとし, 振動数  $\nu \sim \nu + d\nu$  の放射輝度  $I_\nu$  の放射が時間  $dt$  の間に, 立体角  $d\omega$  で入射する場合を考える. 放

<sup>\*6</sup>付録 B 参照.

<sup>\*7</sup>浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎 より引用.

射が気柱を通過する間に散乱や吸収を受けて、 $I_\nu + dI_\nu$  に変わるとする。気柱の密度を  $\rho$ 、消散係数を  $k_\nu^e$  とすると、入射した放射が気柱を通過する間に消散されるエネルギーは  $k_\nu^e I_\nu \rho ds d\sigma d\omega d\nu dt$  である。ここで、 $k_\nu^e$  は質量消散係数 (または質量消散断面積) と呼ばれる。消散されるエネルギーは放射エネルギーの変化量  $I_\nu d\sigma d\omega d\nu dt - (I_\nu + dI_\nu) d\sigma d\omega d\nu dt$  に等しいので、放射の減衰は

$$\begin{aligned} dI_\nu d\sigma d\omega d\nu dt &= -k_\nu^e I_\nu \rho ds d\sigma d\omega d\nu dt \\ dI_\nu(\text{減衰}) &= -k_\nu^e I_\nu \rho ds \end{aligned} \quad (2.16)$$

と表せる。

一方で、気柱内で生じる射出や、他の方向から考えている方向に散乱光が加わることによって、放射は強められる。射出と散乱により増強する放射  $dI_\nu$  を表す係数  $j_\nu^e$  を導入する。 $j_\nu^e$  は、質量射出係数 (または放射源係数) と呼ばれる。減衰の場合と同様に考えると、放射の増強分は

$$dI_\nu(\text{増強}) = +j_\nu^e \rho ds \quad (2.17)$$

と表せる。

減衰と増強の二つの過程を同時に考えると、正味の放射輝度の変化は、

$$dI_\nu = -k_\nu^e I_\nu \rho ds + j_\nu^e \rho ds \quad (2.18)$$

である。ここで、放射源関数  $J_\nu$  を、

$$J_\nu \equiv \frac{j_\nu^e}{k_\nu^e} \quad (2.19)$$

と定義して導入すると、

$$\frac{dI_\nu}{k_\nu^e \rho ds} = -I_\nu + J_\nu \quad (2.20)$$

となる。(2.20) を放射伝達方程式と呼ぶ。放射伝達方程式は、大気中を伝播する間に吸収、射出、(他の方向からの) 散乱を受けて変化する放射エネルギーの保存則を表す。

## 散乱位相関数

本研究のモデルでは扱わないが、散乱がある場合の放射輝度の変化も考えてみる。立体角  $d\omega'$  内の放射輝度  $I_\nu$  の入射光が体積  $d\sigma ds$  の微小気柱を通過する間に

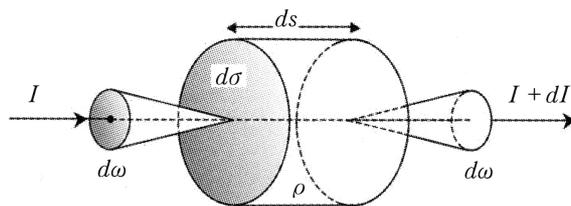


図 2.3: 放射伝達過程の概念図(浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎)

散乱されるとすると, 一度の散乱で消散される放射エネルギーは, 微小気柱の質量を  $dm = \rho d\sigma ds$  とすると,

$$k_{\nu}^e I_{\nu} \rho d\sigma ds d\omega' d\nu dt = k_{\nu}^e I_{\nu} dm d\omega' d\nu dt \quad (2.21)$$

である. これ以降, 入射光側の方角や立体角は  $(\iota)$  をつけて表す. 消散されたエネルギーのうち, 入射光に対して散乱角  $\Theta$  をなす方向の立体角  $d\omega$  内に散乱される割合は, 散乱の強さの角度分布を表す散乱位相関数  $P(\cos \Theta)$  を導入すると,

$$k_{\nu}^e dm d\omega' d\nu dt P(\cos \Theta) \left( \frac{d\omega}{4\pi} \right) \quad (2.22)$$

である. ここで, 散乱角は入射光の進行方向前方から測った角度である. つまり, 入射方向と同じ方向への散乱の場合は  $\Theta = 0^\circ$  で, 逆方向への散乱の場合は,  $\Theta = 180^\circ$  である. 等方的散乱の場合には,  $P(\cos \Theta)$  は一定値となる.

全方向へ散乱されるエネルギーの割合は, 全立体角  $\Omega$  について積分したものな

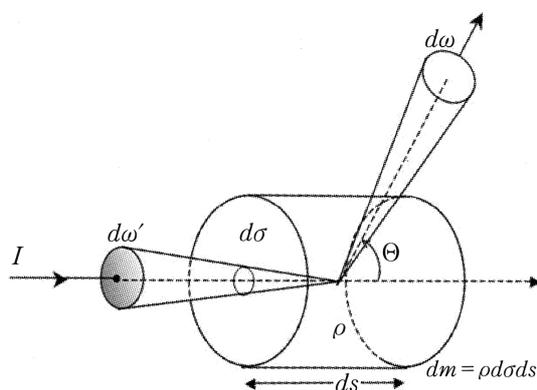


図 2.4: 散乱過程の概念図(浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎)

ので,

$$k_\nu^e I_\nu d\omega d\omega' d\nu dt \int_\Omega P(\cos \Theta) \left( \frac{d\omega}{4\pi} \right) \quad (2.23)$$

である. このとき,

$$\int_\Omega P(\cos \Theta) \left( \frac{d\omega}{4\pi} \right) = 1 \quad (2.24)$$

ならば, 散乱位相関数は 1 に規格化されているので, 放射エネルギーの消散は散乱によってのみ生じているということになり, エネルギーの実質的な損失である吸収がない. 一般的な散乱過程の場合は, 1 に規格化されず,

$$\int_\Omega P(\cos \Theta) \left( \frac{d\omega}{4\pi} \right) = \varpi \leq 1 \quad (2.25)$$

である. ここで,  $\varpi$  は単散乱アルベドである. 単散乱アルベドの他の定義には,

$$\varpi = \frac{k_\nu^s}{k_\nu^e} = \frac{k_\nu^s}{k_\nu^s + k_\nu^a} \quad (2.26)$$

がある. ここで,  $k_\nu^s$  は質量散乱係数,  $k_\nu^a$  は質量吸収係数である.

以上をまとめると, 吸収のない純粋な散乱 ( $k_\nu^s = 1, k_\nu^a = 0$ ) の場合,  $\varpi = 1$  で保存性散乱と呼ばれ, 散乱光は拡散するが, 散乱の前後で放射エネルギーは保存される. 散乱のない純粋な吸収 ( $k_\nu^s = 0, k_\nu^a = 1$ ) の場合,  $\varpi = 0$  で放射エネルギーは熱エネルギーに変換される. それ以外の場合には, 微小気柱内で散乱と吸収があり,  $0 < \varpi < 1$  である.

## 放射源関数

微小気柱を通過する放射輝度を増強する効果として, 射出と散乱の二つの効果を含めた広義の射出係数  $j_\nu^e$  を用いると, 微小気柱から時間  $dt$  の間に立体角  $d\omega$  内に射出されるエネルギーは  $j_\nu^e d\omega d\nu dt$  である.

散乱のない吸収大気 ( $\varpi = 0, k_\nu^e = k_\nu^a$ ) で, LTE(局所熱力学平衡) 近似が成り立つ場合, (2.14) のキルヒホッフの法則を用いると, (2.19) で定義された放射源関数は,

$$J_\nu = J_\nu^{(a)} \equiv \frac{j_\nu^a}{k_\nu^a} = B_\nu(T) \quad (2.27)$$

となり, 吸収大気の放射源関数は LTE 近似が成り立つ大気ではプランク関数で与えられる.

一方吸収のない散乱大気 ( $\varpi = 1, k_\nu^e = k_\nu^s$ ) の場合, (2.23) より,

$$j_\nu^s = k_\nu^s \int_{\Omega} I_\nu P(\cos \Theta) \left( \frac{d\omega'}{4\pi} \right) \quad (2.28)$$

なので, 放射源関数は,

$$J_\nu = J_\nu^{(s)} \equiv \frac{j_\nu^s}{k_\nu^s} = \int_{\Omega} I_\nu P(\cos \Theta) \left( \frac{d\omega'}{4\pi} \right) \quad (2.29)$$

となる.

大気中での散乱を考える場合は, 極座標系で放射の進行方向を天頂角と方位角で表示すると分かりやすい. 入射光の進行方向を  $(\theta', \phi')$ , 散乱光の進行方向を  $(\theta, \phi)$  と表すと, その間の散乱角  $\Theta$  の余弦  $\cos \Theta$  は, 球面三角法の余弦定理より,

$$\cos \Theta = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') \quad (2.30)$$

で与えられる. 散乱位相関数と放射輝度の角度変数を天頂角と方位角で表すと,

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P(\theta, \phi; \theta', \phi') I_\nu(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' \quad (2.31)$$

である. 吸収と散乱が同時にある大気の場合には, 微小気柱における散乱と吸収はそれぞれ独立で, 散乱された放射が微小気柱内で吸収されることはない. つまりこの場合の放射源関数は,

$$\begin{aligned} J_\nu &= (1 - \varpi) J_\nu^{(a)} + \varpi J_\nu^{(s)} \\ &= (1 - \varpi) B_\nu + \varpi J_\nu^{(s)} \end{aligned} \quad (2.32)$$

と表せる.

## ビーア・ブーゲ・ランベルトの法則

放射の射出がない ( $J_\nu = 0$ ) の場合, (2.20) の放射伝達方程式は,

$$\frac{dI_\nu}{k_\nu^e \rho ds} = -I_\nu \quad (2.33)$$

となる. ここで, 気柱の  $s = 0$  の点に入射する放射輝度を  $I_\nu(0)$  としたときに,  $s = s^*$  の点を通る放射輝度  $I_\nu(s^*)$  は, (2.33) を  $s$  について積分すると,

$$I_\nu(s^*) = I_\nu(0) \exp \left[ - \int_0^{s^*} k_\nu^e \rho ds \right] \quad (2.34)$$

である。ここで、大気中で吸収係数  $k_\nu^e$  が場所によらず一定の大気が均質な場合を考える。路程長  $u^*$  として、

$$u^* = \int_0^{s^*} \rho ds \quad (2.35)$$

を導入すると、(2.34) は

$$I_\nu(s^*) = I_\nu(0) \exp[-k_\nu^e u^*] \quad (2.36)$$

となる。この式より、射出のない均質な吸収層を透過する放射輝度は、指数関数的に減少することがわかる。この関係をビーア・ブーゲ・ランベルトの法則と呼ぶ。

ある振動数  $\nu$  の単色光が、距離  $0 \sim s^*$  間の気柱を通過される場合の透過率  $t_\nu$  は、

$$t_\nu(0, s^*) \equiv \frac{I_\nu(s^*)}{I_\nu(0)} \quad (2.37)$$

で定義される。これはビーア・ブーゲ・ランベルトの法則より、

$$t_\nu(0, s^*) = \exp[-k_\nu^e u^*] \quad (2.38)$$

である。

## 光学的厚さ

一般的な不均質な大気における放射伝達を考える。光路上の点  $s_a$  と  $s_b$  の間の光学的距離  $\tau_\nu(s_a, s_b)$  は、

$$\tau_\nu(s_a, s_b) \equiv \int_{s_a}^{s_b} k_\nu^e \rho ds \quad (2.39)$$

で定義される。大気上端から計測した光学的距離のことを光学的厚さという。光学的に厚い(光学的距離が大き)と、同じ距離を進んだとしても吸収・散乱される放射量が大きく、透過する放射量が小さい。逆に薄い(光学的距離が小さい)と、吸収・散乱される放射量が小さく、透過する放射量が大きい。光学的厚さを用いて (2.37) のビーア・ブーゲ・ランベルトの法則を書き換えると、

$$I_\nu(s^*) = I_\nu(0) \exp[-\tau_\nu(0, s^*)] \quad (2.40)$$

となる。同様に (2.38) の透過率  $t_\nu(0, s^*)$  は、

$$t_\nu(0, s^*) = \exp[-\tau_\nu(0, s^*)] \quad (2.41)$$

となる。つまり、ある気層が光学的に厚いほど、その気層の透過率は小さくなる。

大気を  $N$  個の気層に分け、各気層の光学的厚さを、 $\tau_\nu(0, s_1), \tau_\nu(s_1, s_2), \dots, \tau_\nu(s_{N-1}, s_N)$  としたとき、全層の光学的厚さ  $\tau_\nu(0, s_N)$  はそれぞれの光学的厚さの和で、

$$\tau_\nu(0, s_N) = \tau_\nu(0, s_1) + \tau_\nu(s_1, s_2) + \dots + \tau_\nu(s_{N-1}, s_N) \quad (2.42)$$

となる。よって全層の透過率  $t_\nu(0, s_N)$  はそれぞれの透過率の積で、

$$\begin{aligned} t_\nu(0, s_N) &= \exp[-\tau_\nu(0, s_N)] \\ &= t_\nu(0, s_1) \cdot t_\nu(s_1, s_2) \cdot \dots \cdot t_\nu(s_{N-1}, s_N) \end{aligned} \quad (2.43)$$

である。

可視光線域では大気全体の透過率はほぼ 1 であり、大気はほとんど吸収がなく透明である。また、紫外線域では、オゾンにより放射はほとんど完全に吸収され、透過率はほぼ 0 である。赤外線域では、水蒸気や二酸化炭素、オゾン、メタンなどの気体による吸収がある。それぞれの気体分子の吸収帯は、気体分子ごとに決まった位置に現れる。

## 第3章 放射平衡

### 3.1 放射平衡温度

物体が射出する観測された放射輝度  $I_\nu$  を黒体放射による放射輝度とみなしたとき,

$$T_B = B_\nu^{-1}(I_\nu) \quad (3.1)$$

の関係式で決まる物体の温度  $T_B$  のことを黒体相当の放射平衡温度 (輝度温度) という.

ここで, 地球放射を黒体放射と仮定して, 放射平衡温度を見積もる. 面積当たりの放射のエネルギーは,

$$\begin{aligned} (S/4) \times (1.0 - \alpha) &= (1370/4) \times (1.0 - 0.3) \\ &\simeq 240 \text{W/m}^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

である. ここで, 太陽定数  $S$  は  $1370 \text{ W/m}^2$ , 地球のアルベド  $\alpha$  は  $0.3$  とした. 地球の平均温度を  $T$  とすると,

$$\begin{aligned} \sigma T^4 &= 239.4, \\ T &\simeq 255 \text{K} \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる. ここで,  $\sigma$  はステファン・ボルツマン定数で,  $\sigma = 5.66961 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$  である<sup>\*1</sup>. ここで見積もられた温度は現実の地球表面の平均温度  $288 \text{ K}$  に比べるとかなり低い. これは地球大気の温室効果を考慮していないためである.

<sup>\*1</sup>浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎 より引用.

## 3.2 灰色大気

大気がある場合の温度構造を考える。まず、大気の吸収係数は  $k_\nu$  で波数に依らず一定とする。つまり、どの波長も同じように吸収する灰色大気を仮定する。さらに、短波に関して透明であるとする、大気の放射伝達方程式は、

$$\mu \frac{dI_\nu(\tau)}{d\tau} = I_\nu(\tau) - B(T) \quad (3.4)$$

である。

さらに、上向きと下向きに等方的に長波を放射しているとする。その場合、放射の出入りする断面積  $\cos \theta$  をかけて上下各半球の立体角で積分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_0^1 I(\tau; +\mu) 2\pi \mu^2 &= \frac{2}{3} \frac{d\pi I(\tau; +\mu)}{d\tau} = \frac{2}{3} \frac{dF^\uparrow}{d\tau} = F^\uparrow - \pi B \\ -\frac{2}{3} \frac{d\pi I(\tau; -\mu)}{d\tau} &= -\frac{2}{3} \frac{dF^\downarrow}{d\tau} = F^\downarrow - \pi B \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる。

このような大気の放射平衡温度構造を求める。(3.5) より

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \frac{d}{d\tau} (F^\uparrow + F^\downarrow) &= F^\uparrow - F^\downarrow \\ \frac{2}{3} \frac{d}{d\tau} (F^\uparrow - F^\downarrow) &= F^\uparrow + F^\downarrow - 2\pi B \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる。平衡状態にある大気は放射エネルギーのたまりがないので、

$$\begin{aligned} \frac{dF^{\text{net}}}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau} (F^\uparrow - F^\downarrow) = 0, \\ \therefore F^\uparrow - F^\downarrow &= F^{\text{net}} = \text{const.} \end{aligned} \quad (3.7)$$

である。(3.7) を用いると、(3.6) は

$$\begin{aligned} F^\uparrow + F^\downarrow &= \frac{3}{2} F^{\text{net}} \tau + C \\ F^\uparrow + F^\downarrow &= 2\pi B \end{aligned} \quad (3.8)$$

となる。

大気上端では下向きの長波放射はなく、地球全体で入ってくる短波放射 ( $J_0$ ) と出て行く上向き長波放射 ( $F^\uparrow(0)$ ) がバランスするので、

$$F^\uparrow(0) = F^{\text{net}} = C = J_0 \quad (3.9)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} F^\uparrow + F^\downarrow &= J_0 \left( \frac{3}{2} \tau + 1 \right) \\ \pi B &= \frac{J_0}{2} \left( \frac{3}{2} \tau + 1 \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

となる。これより、灰色大気が放射平衡状態にあるとき、プランク関数は光学的厚さの一次関数になるような温度構造になり。上向きおよび下向きのフラックスは、

$$\begin{aligned} F^\uparrow &= \frac{J_0}{2} \left( \frac{3}{2} \tau + 2 \right) \\ F^\downarrow &= \frac{3}{4} J_0 \tau \end{aligned} \quad (3.11)$$

である。地面は長波放射に関して黒体として考えると、地面からの上向き放射は大気下端への上向き放射になるので、

$$\pi B^{(g)}(T_g) = \frac{J_0}{2} \left( \frac{3}{2} \tau + 2 \right) = \pi B^{(a)}(T_a) + \frac{J_0}{2} \quad (3.12)$$

となる。ここで  $B^{(g)}, B^{(a)}$  は地面および大気下端からの黒体放射、 $T_g, T_a$  は地面および大気下端の温度である。(3.12) から地面の温度は地面直上の大気よりも温度が高いことがわかる。吸収物質が静水圧平衡にある大気の密度と同様に指数関数的に分布していると仮定すると、

$$\rho(z) = \rho_g e^{-z/H^{(a)}} \quad (3.13)$$

である。ここで  $H^{(a)}$  は吸収物質のスケールハイトである。この場合の光学的厚さは

$$\tau = \int_z^\infty k_\nu \rho(z) dz = k_\nu \rho_g H^{(a)} e^{-z/H^{(a)}} = \tau_g e^{-z/H^{(a)}} \quad (3.14)$$

となるので、

$$\pi B = \frac{J_0}{2} \left( \frac{3}{2} \tau_g e^{-z/H^{(a)}} + 1 \right) \quad (3.15)$$

となる。 $\tau_g$  は全層の光学的厚さである。全波長と立体角で積分したプランク関数は温度の 4 乗の関数なので、(3.15) よりある高度  $z$  における温度は

$$T(z) = \left[ \frac{1}{\sigma} \frac{J_0}{2} \left( \frac{3}{2} \tau_g e^{-z/H^{(a)}} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{4}} \quad (3.16)$$

となる。

### 3.3 平行平面大気

#### 放射伝達方程式

地球大気は、長さの水平スケールに比べて長さの鉛直スケールは小さいので、平板状の気層であるとみなせる。特に晴天大気の場合には、鉛直方向に比べて水平方向に温度や大気物質は比較的一様に分布しているので、大気層は放射伝達特性や境界条件が水平方向に一様であり、薄い平板状の気層の重なりと近似できる。この近似を平行平面大気近似と呼ぶ。水平方向に均質な平行平面大気での放射伝達を考える。大気層に垂直な天頂方向  $z$  軸の向きを基準にして、極座標  $(\theta, \phi)$  を用いて放射の進行方向を表すことにする。極座標系において  $\theta$  方向の微小距離  $ds$  は、 $ds = dz / \cos \theta$  であるので、(2.20) の放射伝達方程式は、

$$\cos \theta \frac{dI_\nu(z; \theta, \phi)}{k_\nu^e \rho dz} = -I_\nu(z; \theta, \phi) + J_\nu(z; \theta, \phi) \quad (3.17)$$

と書き換えられる。ここで、方向余弦  $\mu$  を

$$\mu \equiv \cos \theta \quad (3.18)$$

で定義し、また微小光学的厚さ  $d\tau_\nu$  を

$$d\tau_\nu \equiv -k_\nu^e \rho dz \quad (3.19)$$

で定義する。光学的厚さ  $\tau_\nu$  と鉛直座標  $z$  とは座標のとり方が逆方向である。これにより、(3.17) は、

$$\mu \frac{dI_\nu(\tau; \theta, \phi)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\tau; \theta, \phi) - J_\nu(\tau; \theta, \phi) \quad (3.20)$$

となる。これが平行平面大気の放射伝達方程式である。また、下向き方向 ( $\pi/2 < \theta \leq \pi$ ) について、方向余弦  $\mu$  の値を  $0 < \mu \leq 1$  の正值に限定するため  $\mu$  を  $-\mu$  と表す。よって、上向きおよび下向きの放射輝度はそれぞれ  $I_\nu(\tau; +\mu, \phi)$ 、 $I_\nu(\tau; -\mu, \phi)$  と表される。

#### 放射伝達方程式の一般解

(3.20) の放射伝達方程式の一般解は、上向き放射輝度については、

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau; +\mu, \phi) &= I_\nu(\tau^*; +\mu, \phi) \exp\left[-\frac{(\tau^* - \tau)}{\mu}\right] \\ &+ \int_\tau^{\tau^*} J_\nu(\tau'; +\mu, \phi) \exp\left[-\frac{(\tau' - \tau)}{\mu}\right] \frac{d\tau'}{\mu} \quad (0 < \mu \leq 1) \end{aligned} \quad (3.21)$$

である\*2. ここで,  $I_\nu(\tau^*; +\mu, \phi)$  は大気層の下端から上向きに  $(\mu, \phi)$  方向に入射する放射輝度である. 右辺第 1 項は, 入射光  $I_\nu(\tau^*; +\mu, \phi)$  のうち考えている高度まで達した分を表す. 右辺第 2 項は途中の各高度で  $(\mu, \phi)$  方向に射出された放射が大気の光学的距離に応じて減衰を受けて考えている高度まで達した分の総和を表す.

同様に, 下向き放射輝度は

$$I_\nu(\tau; -\mu, \phi) = I_\nu(0; -\mu, \phi) \exp\left[-\frac{\tau}{\mu}\right] + \int_0^\tau J_\nu(\tau'; -\mu, \phi) \exp\left[-\frac{(\tau - \tau')}{\mu}\right] \frac{d\tau'}{\mu} \quad (0 < \mu \leq 1) \quad (3.22)$$

である\*3. ここで,  $I_\nu(0; -\mu, \phi)$  は大気層の上端から下向きに  $(-\mu, \phi)$  方向に入射する放射輝度で, 大気層の上端として実際の大気の上端をとる場合にはゼロになる.

現実の大気では, (3.21), (3.22) の右辺の放射源関数を含む積分は, 一般的に解析的には解けない. 特に散乱過程を含む場合は, 任意の高度の放射輝度に対して大気全層が影響を及ぼすことになる. そのため, これらの解を求めるには数値計算による積分を行う必要がある.

## 放射による気層の加熱・冷却

ある高度における上向きおよび下向きフラックス  $F_\nu^\uparrow(z), F_\nu^\downarrow(z)$  は, それぞれ, 上向き, 下向きの放射輝度の積分で求まり,

$$F_\nu^\uparrow(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 I_\nu(\tau(z); +\mu, \phi) \mu d\mu d\phi$$

$$F_\nu^\downarrow(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 I_\nu(\tau(z); -\mu, \phi) \mu d\mu d\phi \quad (3.23)$$

である. ここで, 正味放射フラックス  $F_\nu^{\text{net}}(z)$  は,

$$F_\nu^{\text{net}}(z) = F_\nu^\uparrow(z) - F_\nu^\downarrow(z) \quad (3.24)$$

と定義される.  $F_\nu^{\text{net}}(z) > 0$  の場合はある高度  $z$  の面を通して正味の上向き放射エネルギーの流量がある. ある高度  $z$  と  $z + dz$  の間にある厚さ  $dz$  の気層について放射エネルギーの出入りを考える. 気層の上面および下面を通した放射エネルギーの収支  $dF_\nu^{\text{net}}(z)$  は,

$$dF_\nu^{\text{net}}(z) = F_\nu^{\text{net}}(z + dz) - F_\nu^{\text{net}}(z) \quad (3.25)$$

\*2付録 C 参照.

\*3付録 C 参照.

である。  $dF_{\nu}^{\text{net}}(z)$  が正 (負) の場合は、気層内で正味の上向き放射エネルギーの発散 (収束) がある。放射エネルギーの発散があると、気層から熱エネルギーが放射によって失われるので気層は冷却され、収束があると、放射エネルギーが熱エネルギーに変換されるので気層は加熱される。

波長範囲  $\lambda \sim \lambda + d\lambda$  の放射の発散 (収束) に伴う気層の温度の時間変化率  $\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{d\lambda}$  は、放射冷却 (加熱) 率と呼ばれ、

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{d\lambda} = -\frac{1}{C_p \rho_a} \cdot \left. \frac{\partial F_{\lambda}^{\text{net}}(z)}{\partial z} \right|_{d\lambda} \quad (3.26)$$

である。ここで、 $C_p$  は気層の定圧比熱、 $\rho_a$  は気層の密度である。右辺が正の場合が加熱、負の場合が冷却を表す。放射冷却 (加熱) 率を用いることで、温度の時間発展を求めることができる。

## 第4章 数値計算

### 4.1 概要

鉛直 1 次元放射平衡モデルを用いて大気の鉛直温度構造を求める。方法としては、まず大気を平行平面大気と仮定し、気層に分割する。そして、(3.20), (3.21) の積分を数値計算によって解き、ある時間におけるそれぞれの層における放射輝度を求める。入射・射出する放射輝度から放射フラックス、気層の冷却・加熱率が求められるので、それを用いて初期の温度場を時間発展させて放射平衡温度を求める。

初期条件の設定を変えて、温度構造の決定に役割を果たす要素を検証していく。

### 4.2 設定

#### 仮定・境界条件

今回の計算は、以下のような仮定・境界条件のもとで行う。

#### 大気

- 平行平面大気
- 非散乱大気
- 局所熱力学平衡近似

## 大気成分

- 密度を指数関数的に鉛直分布 (スケールハイト 8.0 km )
- 吸収気体は水蒸気のみ
- 上端の光学的厚さが 0.0
- 下端の大気圧が 1000 hPa

## 放射伝達

- 太陽放射に対して大気は透明.
- 大気の上端から赤外放射は入射しない.

## その他

- 大気層全体の高さ  $h = 50,000$  m
- 大気層の間隔  $dz = 1,000$  m
- 時間ステップの間隔  $dt = 8$  h
- 積分で考慮する波長範囲  $4\mu\text{m} \sim 100\mu\text{m}$
- 平衡条件 : 大気上下端での正味の放射輝度の差が  $\delta = 0.01$  以下

以上である.

## 方程式

### 放射伝達方程式

$$\mu \frac{dI_\nu(\tau; \theta, \phi)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\tau; \theta, \phi) - J_\nu(\tau; \theta, \phi) \quad (3.20)$$

の一般解として求まる, ある光学的厚さ  $\tau$  における上向きおよび下向き放射輝度は, 仮定を適用すると,

$$I_\nu(\tau; +\mu, \phi) = I_\nu(\tau^*; +\mu, \phi) \exp\left[-\frac{(\tau^* - \tau)}{\mu}\right] + \int_\tau^{\tau^*} J_\nu(\tau'; +\mu, \phi) \exp\left[-\frac{(\tau' - \tau)}{\mu}\right] \frac{d\tau'}{\mu}, \quad (3.21)$$

$$I_\nu(\tau; -\mu, \phi) = \int_0^\tau J_\nu(\tau'; -\mu, \phi) \exp\left[-\frac{(\tau - t)}{\mu}\right] \frac{d\tau'}{\mu} \quad (3.22')$$

となる. ここで, ある高度  $z$  における大気的光学的厚さは

$$\tau(z) = \int_z^\infty k\rho dz' \quad (4.1)$$

である. また, ある高度  $z$  における大気圧は

$$p(z) = \int_0^z \rho g dz' \quad (4.2)$$

である. 等方的な放射を仮定しているので, 光学的厚さ  $\tau$  である気層の正味の放射フラックスは

$$F_\nu^{\text{net}} = \pi[I_\nu(\tau; +\mu) - I_\nu(\tau; -\mu)] \quad (4.3)$$

で求まる. 放射冷却・加熱率は

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{C_p \rho_a} \cdot \frac{\partial F^{\text{net}}(z)}{\partial z} \quad (4.4)$$

である. それぞれの時間ステップでの気層の温度変化は

$$T_{n+1} = T_n + \frac{\partial T}{\partial t} dt \quad (4.5)$$

を用いて求める.  $n$  は任意の時間ステップである. 以上の過程を繰り返すことにより, 放射平衡状態の温度構造を求める.

表 4.1: 本研究で用いた物理定数と変数表

---

重力加速度	$g$	$9.8 \text{ m/s}^2$
太陽定数	$S$	$1370 \text{ W/m}^2$
地球のアルベド	$\alpha$	0.3
大気のスケールハイト	$H$	8.0 km
ステファン・ボルツマン定数	$\sigma$	$5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$
プランク定数	$h$	$6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}$
ボルツマン定数	$\kappa_B$	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
大気の定圧比熱	$c_p$	$1.0 \times 10^3 \text{ J/kgK}$
大気の花表面における密度	$\rho_s$	$1.3 \text{ kg/m}^3$
水蒸気の花表面における密度	$\rho_s^{ab}$	$1.0 \times 10^{-2} \text{ kg/m}^3$

---

## 4.3 実験 1

### 設定

まず初めに、解析的に気層の温度構造を求めることができる、吸収係数が全層で一定である灰色大気の実験を行い、モデルの計算が解析値の鉛直温度構造を再現できていることを確認する。モデルに与える初期条件は以下を組み合わせた六つのパターンを考える。大気の初期温度として低温と高温の等温大気を与えて、最終的に平衡温度が一意に求まることを確認する。

地表面の光学的厚さと吸収気体の吸収係数の値の対応を示す。  $\tau_g = 0.1$  のときは  $k = 1.25 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{kg}$ ,  $\tau_g = 1.0$  のときは  $k = 1.25 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{kg}$ ,  $\tau_g = 3.0$  のときは  $k = 3.75 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{kg}$  となっている。ここで、それぞれの吸収係数の値を  $k_a, k_b, k_c$  とおく。以降の実験でもこれらの表示を用いる。

まず、灰色大気の実験の温度構造の解析値は

$$T(z) = \left[ \frac{1}{\sigma} \frac{J_0}{2} \left( \frac{3}{2} \tau_g e^{-z/H^{(a)}} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{4}} \quad (3.16)$$

に  $\tau_g$  の値を代入することで、 $z$  の関数として求められる。大気上端から入射する短波放射  $J_0$  は、 $J_0 = 240 \text{ Wm}^{-2}$  とする。

- 大気の初期の温度  $T_0$ 
  - 160 K の等温大気
  - 300 K の等温大気
- 地表面の光学的厚さ  $\tau_g$ 
  - 0.1 (吸収係数  $k : 1.25 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{kg} (\equiv k_a)$  )
  - 1.0 (吸収係数  $k : 1.25 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{kg} (\equiv k_b)$  )
  - 3.0 (吸収係数  $k : 3.75 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{kg} (\equiv k_c)$  )

### 結果

それぞれの計算において気層が平衡状態に到達するまでの時間を平衡到達時間として示す。灰色大気における大気上端の温度と地表面温度の解析解を、表 4.2 お

よび図 4.1 に示す. 地表面の光学的厚さ  $\tau_g$  の値 (つまり吸収気体の吸収係数  $k$  の値) が大きくなるほど地表面温度が高くなることがわかる. 大気上端の温度は全ての場合で一致している.

計算値については, 初期温度 160 K の場合を表 4.3 に, 360 K の場合を表 4.4 に示す. また, 図 4.2, 図 4.3 には時間発展する様子を描いた. 計算開始から 0 日目, 10 日目, 20 日目, 40 日目, 80 日目, 160 日目, そして平衡状態における温度構造を表している.

平衡状態に達したときに初期の大気温度が 160 K の場合と 360 K の場合とで温度構造は一致している. 大気上端の温度については, 解析値と計算値の差はそれぞれ 0.3 K であり, ほぼ一致しているとみなせる. 地表面温度については, 解析値と計算値の差が大気上端の温度の場合よりも大きく, それぞれ  $\tau_g = 0.1$  の場合には 0.2 K,  $\tau_g = 1.0$  の場合には 14.8 K,  $\tau_g = 3.0$  の場合には 26.4 K となっている.  $\tau_g$  の値が大きくなればなるほどこの誤差は大きくなる.

平衡状態になるまでの到達時間は  $\tau_g$  が小さいときほど長く,  $\tau_g = 0.1$  の場合には約 2,000 日である. ただ, Manabe and Strickler (1964) で示されている到達時間は 320 日であることから, 妥当な時間だと考えた.

地表面の光学的厚さ  $\tau_g = 0.1$  の場合の温度構造は図 4.4 に,  $\tau_g = 1.0$  の場合の温度構造は図 4.5 に,  $\tau_g = 3.0$  の場合の温度構造は図 4.6 に示す.

表 4.2: 解析値

条件	$\tau_g : 0.1$	$\tau_g : 1.0$	$\tau_g : 3.0$
大気上端の温度 [K]	214.4	214.4	214.4
地表面温度 [K]	222.0	269.7	328.5

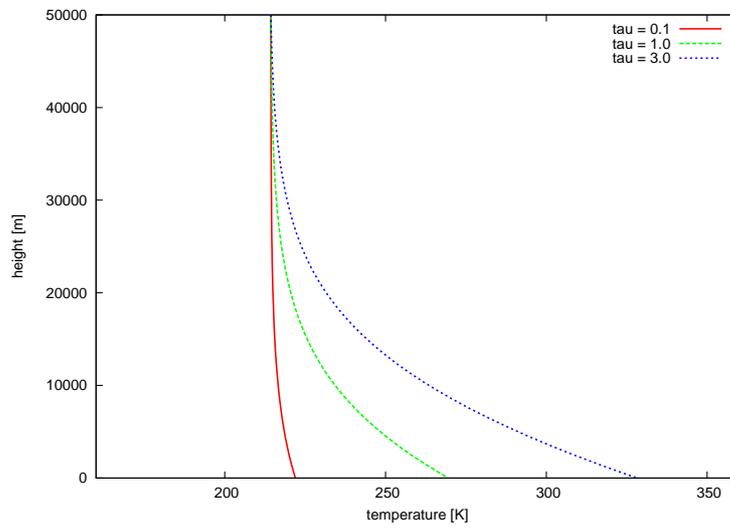


図 4.1: 解析値の温度構造.

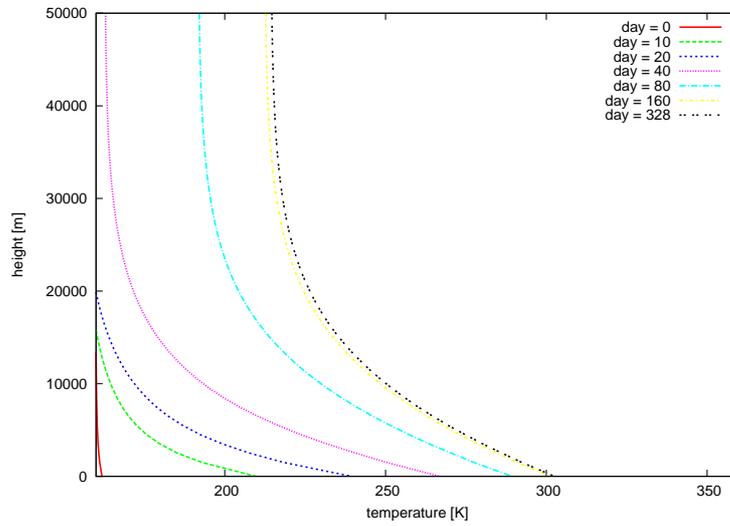


図 4.2:  $\tau_g = 3.0$ , 初期温度 160 K の時間発展.

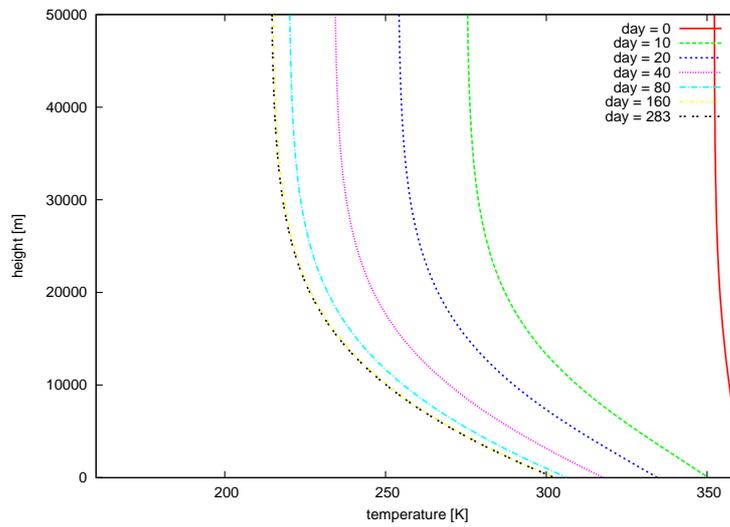


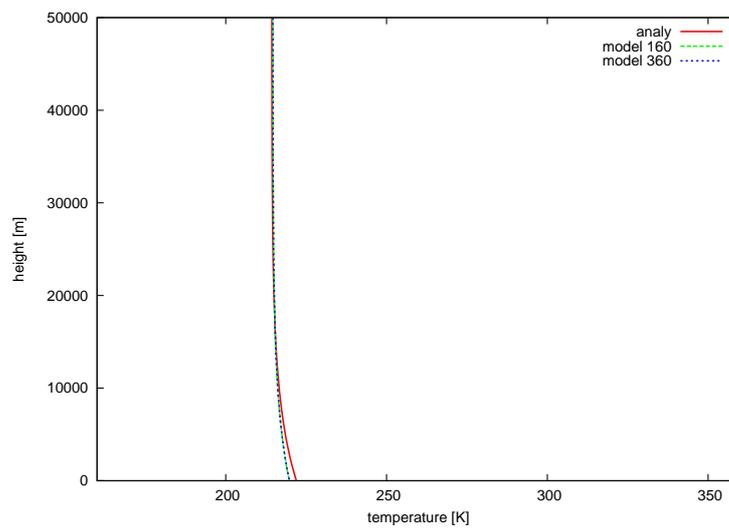
図 4.3:  $\tau_g = 3.0$ , 初期温度 360 K の時間発展.

表 4.3: 計算値 (160 K)

条件	$\tau_g : 0.1$	$\tau_g : 1.0$	$\tau_g : 3.0$
大気上端の温度 [K]	214.7	214.7	214.7
地表面温度 [K]	219.8	254.9	302.6
平衡到達時間 [day]	2000.7	435.3	328.7

表 4.4: 計算値 (360 K)

条件	$\tau_g : 0.1$	$\tau_g : 1.0$	$\tau_g : 3.0$
大気上端の温度 [K]	214.7	214.7	214.7
地表面温度 [K]	219.8	254.9	302.6
平衡到達時間 [day]	1922.0	400.3	283.0

図 4.4:  $\tau_g = 0.1$  の場合の計算値と解析値.

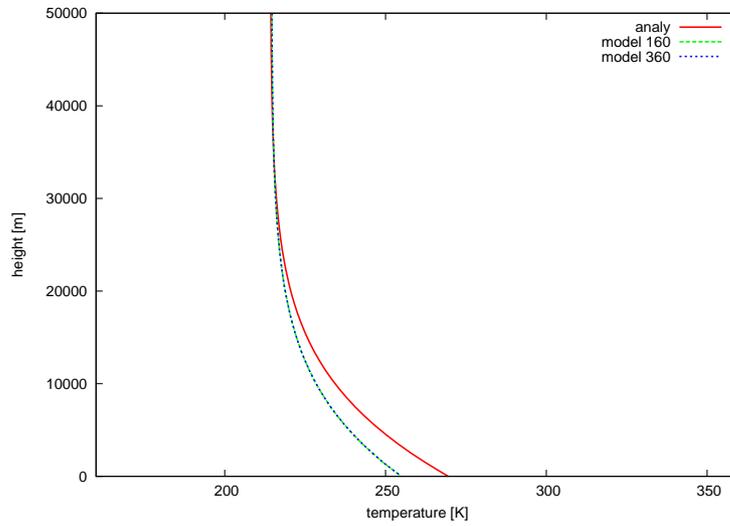


図 4.5:  $\tau_g = 1.0$  の場合の計算値と解析値.

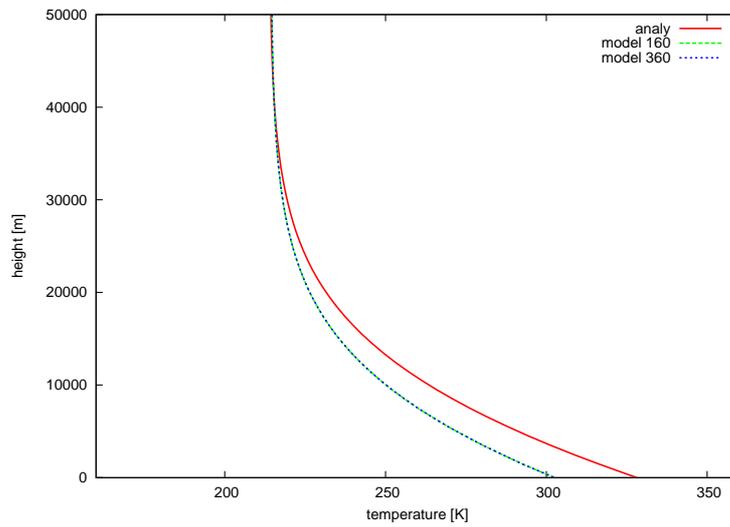


図 4.6:  $\tau_g = 3.0$  の場合の計算値と解析値.

## 考察

まず、解析値も計算値も地表面の光学的厚さの値が大きくなるほど、地表面温度は高くなっている。これは光学的に厚くなればなるほど放射が気層に吸収され、上端から抜ける放射エネルギーが小さくなるためである。また、光学的に薄い場合ほど平衡到達時間が長くなるが、これは各層からの放射フラックスが小さくなり、時間ステップ当たりの温度変化が小さくなるからだと考えられる。

次に、初期の大気温度を 160 K, 360 K の等温大気として計算した結果は一致していることから、平衡温度へ正しく収束しているようである。したがって、平衡温度を求めるといった目的は達成されている。その後、さらに温度の初期条件のみを変えて計算してみたところ、0.01~600 K の温度を初期条件とした場合は、温度が発散することなく計算することができた。初期温度をこれよりも高温にしてしまうと、放射フラックスの変化量が大きくなり、温度変化率が大きくなり過ぎて計算が不安定になる。

モデルによって求めたの地表面温度は解析値のそれに比べてどの場合でも低くなっている。そのため、地表面温度については正しく再現できているとはいえない。これは、積分を行う際にまず高度の幅を一定の気層を考え、与えた密度をもとに光学的厚さを計算したため、光学的厚さが厚くなるほど、実際の値とのずれが大きくなったものと考えられる。

そして、大気構造をみると、15~20 km 付近より上の層では温度がほとんど変化せずに一定値となっている。これは成層圏の存在を示唆しているものと考えられる。

地表面温度のずれがあるが、大気の大まかな鉛直温度構造はつかめたものとして、モデルを用いた実験を行う。

## 4.4 実験 2

### 設定

吸収係数を高度によって変化させて、層の光学的厚さと温度構造の関係を調べる。大気を二層に分けて(上層: 高度 25~50 km と下層: 高度 0~25 km), それぞれで別の吸収係数を設定する。前者の波長範囲の吸収係数を  $k_1$ , 後者を  $k_2$  とする。用いる吸収係数は実験 1 で用いた  $k_a, k_b, k_c$  のうち二つを選ぶ。その他の実験設定は

実験 1 と同様のものを用いたが、先に挙げた放射輝度の平衡条件によって達した平衡状態では、温度構造が不安定で収束しなかったため、さらに時間積分を行い、それぞれ 3,000 日の時間ステップ分の積分を行った。積分を行った後の平衡状態は初期温度によらなかったため、初期温度を 160 K とした場合の結果のみを示す。

- 大気の初期の温度  $T_0$ 
  - 160 K の等温大気
- 吸収係数  $k_1, k_2$ 
  - $1.25 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{kg}(= k_a), 1.25 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{kg}(= k_b)$
  - $1.25 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{kg}(= k_b), 1.25 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{kg}(= k_a)$
  - $1.25 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{kg}(= k_b), 3.75 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{kg}(= k_c)$
  - $3.75 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{kg}(= k_c), 1.25 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{kg}(= k_b)$

## 結果

$k_1, k_2 = k_a, k_b$  としたときは表 4.5 および図 4.7 で、 $k_1, k_2 = k_b, k_c$  としたときは表 4.6 および図 4.8 で示す。灰色大気の温度に漸近するような構造になっている。

表 4.5:  $k_1, k_2 = k_a, k_b$

条件 (吸収係数)	$k_1 : k_a, k_2 : k_b$	$k_1 : k_b, k_2 : k_a$	$k : k_a$	$k : k_b$
大気上端の温度 [K]	214.7	214.7	214.7	214.7
地表面温度 [K]	254.8	220.1	219.8	254.9

表 4.6:  $k_1, k_2 = k_b, k_c$

条件 (吸収係数)	$k_1 : k_b, k_2 : k_c$	$k_1 : k_c, k_2 : k_b$	$k : k_b$	$k : k_c$
大気上端の温度 [K]	214.7	214.7	214.7	214.7
地表面温度 [K]	301.9	255.4	254.9	302.6

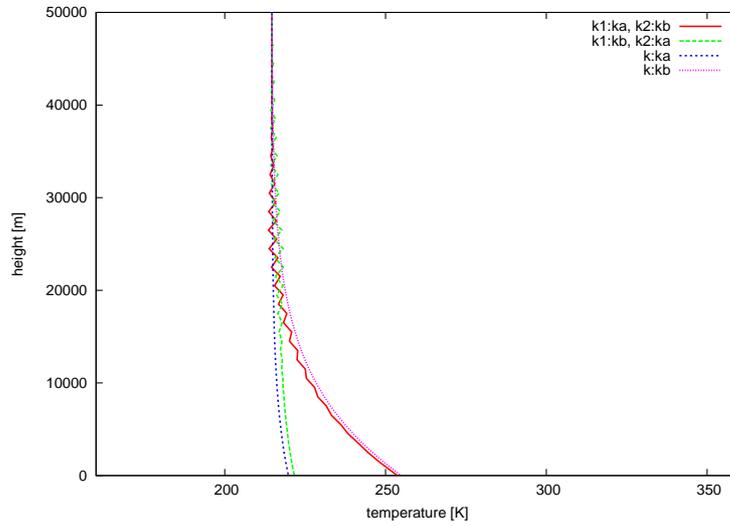


図 4.7:  $k_1, k_2 = k_a, k_b$  の場合の計算値.

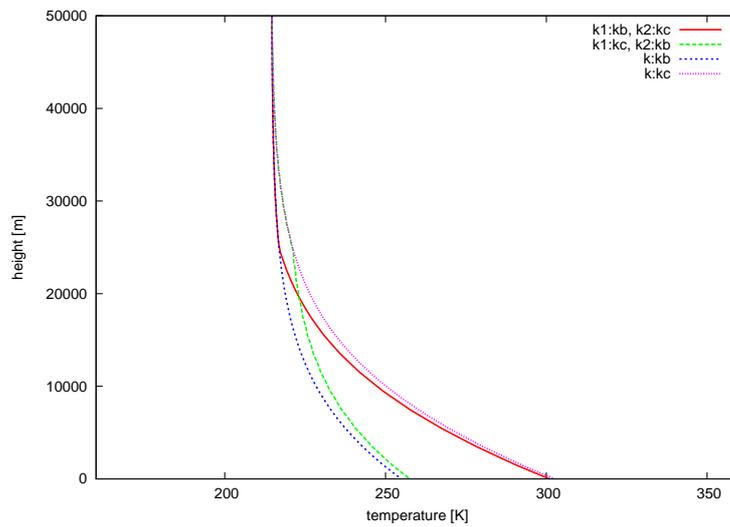


図 4.8:  $k_1, k_2 = k_b, k_c$  の場合の計算値.

## 考察

図 4.7, 4.8 より, 上層と下層とで異なる灰色大気の場合に漸近していることから, 吸収係数の値に強く依存していることがわかる. 地表面温度は二つの灰色大気の地表面温度の中間に位置すると予測していたが, 下層の吸収係数にかなり依存している. これは, 気体の密度は指数関数的な分布をしていると仮定しているためだと考えられる.

温度構造として灰色大気の場合との変化はあまり見られなかったので, もう少し層の分け方を細かくしたり, 分ける位置を変えるべきであった.

吸収係数の値をある層を境に急に变化させると, その境界となる層で温度構造が不安定となったが, これはその境界層においてフラックスが大きくなり温度が大きく変化するためだと考えられる. 吸収係数の値を徐々に変えていくような工夫が必要であると思う.

## 4.5 実験 3

### 設定

吸収係数を波長により変化させた場合を考える. 地球大気には吸収帯があり, 吸収気体ごと, そして波長ごとに細かな吸収線構造がある. しかし, ここでは簡単のため吸収線を細かく設定するのではなく, 実験で考えている地球放射の波長範囲を大まかに二つに分けて ( $4\sim 50\ \mu\text{m}$  と  $50\sim 100\ \mu\text{m}$ ), それぞれで別の吸収係数を設定することにする. 前者の波長範囲の吸収係数を  $k_3$ , 後者を  $k_4$  とする. 平衡状態は初期温度によらなかったため,  $160\ \text{K}$  とした場合のみを示す.

- 大気の初期の温度  $T_0$ 
  - $160\ \text{K}$  の等温大気
- 吸収係数  $k_3, k_4$ 
  - $1.25 \times 10^{-3}\ \text{m}^2/\text{kg}(= k_a)$ ,  $1.25 \times 10^{-2}\ \text{m}^2/\text{kg}(= k_b)$
  - $1.25 \times 10^{-2}\ \text{m}^2/\text{kg}(= k_b)$ ,  $1.25 \times 10^{-3}\ \text{m}^2/\text{kg}(= k_a)$
  - $1.25 \times 10^{-3}\ \text{m}^2/\text{kg}(= k_a)$ ,  $3.75 \times 10^{-2}\ \text{m}^2/\text{kg}(= k_c)$

- $3.75 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{kg}(= k_c), 1.25 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{kg}(= k_a)$
- $1.25 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{kg}(= k_b), 3.75 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{kg}(= k_c)$
- $3.75 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{kg}(= k_c), 1.25 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{kg}(= k_b)$

## 結果

$k_3, k_4 = k_a, k_b$  としたときは表 4.7 および図 4.9 に,  $k_3, k_4 = k_a, k_c$  としたときは表 4.8 および図 4.10 に, また  $k_3, k_4 = k_b, k_c$  としたときを表 4.9 および図 4.11 に示す.  $k_3 < k_4$  の場合は, 大気上端の温度が灰色大気の場合に比べて小さくなった. 地表面温度については,  $k_3 > k_4$  の場合の温度の方が  $k_3 < k_4$  の場合の温度よりも高くなっている.

表 4.7:  $k_3, k_4 = k_a, k_b$

条件 (吸収係数)	$k_3 : k_a, k_4 : k_b$	$k_3 : k_b, k_4 : k_a$	$k : k_a$	$k : k_b$
大気上端の温度 [K]	206.8	215.5	214.7	214.7
地表面温度 [K]	226.8	254.7	219.8	254.9

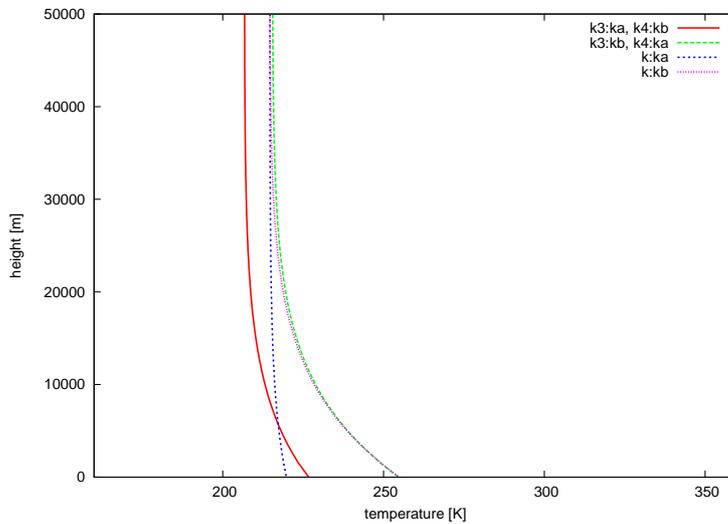


図 4.9:  $k_3, k_4 = k_a, k_b$  の場合の計算値.

表 4.8:  $k_3, k_4 = k_a, k_c$

条件 (吸収係数)	$k_3 : k_a, k_4 : k_c$	$k_3 : k_c, k_4 : k_a$	$k : k_a$	$k : k_c$
大気上端の温度 [K]	184.3	215.6	214.7	214.7
地表面温度 [K]	252.3	300.8	219.8	302.1

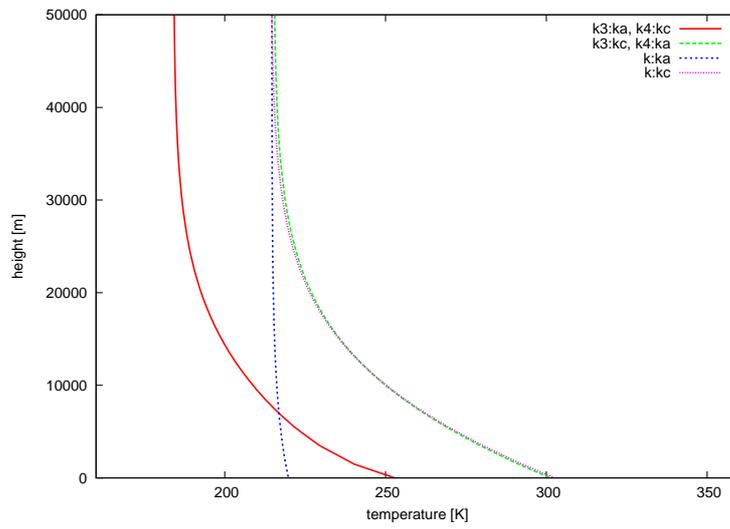


図 4.10:  $k_3, k_4 = k_a, k_c$  の場合の計算値.

表 4.9:  $k_3, k_4 = k_b, k_c$

条件 (吸収係数)	$k_3 : k_b, k_4 : k_c$	$k_3 : k_c, k_4 : k_b$	$k : k_b$	$k : k_c$
大気上端の温度 [K]	212.1	215.0	214.7	214.7
地表面温度 [K]	258.2	300.6	254.9	302.1

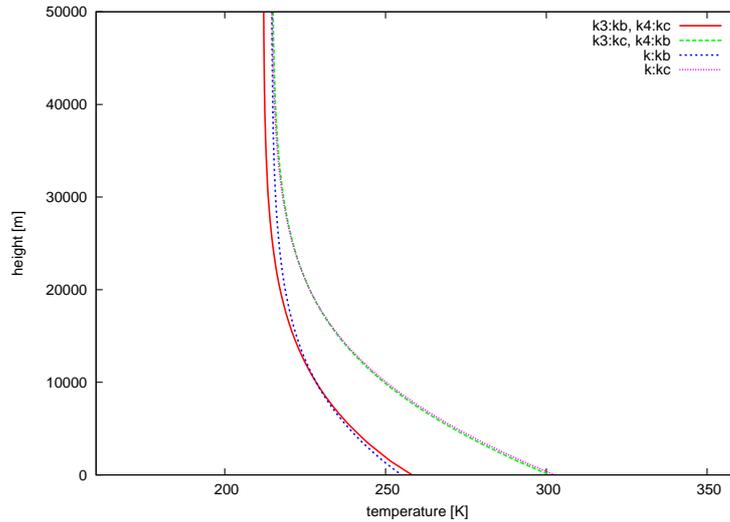


図 4.11:  $k_3, k_4 = k_b, k_c$  の場合の計算値.

### 考察

まず、大気上端の温度が灰色大気の場合より低くなるのは想定していなかった。原因として、大気の温度が 200 K ~ 300 K であるので、ウィーンの変位則より、短波長側 (4~50  $\mu\text{m}$ ) の波長範囲の放射による放射輝度の方が、長波長側 (50~100  $\mu\text{m}$ ) の波長範囲の放射による放射輝度に比べてかなり大きい。そのため、前半の波長範囲の放射が温度構造の決定に大きく寄与していると考えられる。つまり、 $k_3 < k_4$  の場合に大気上端の温度が灰色大気の場合に比べて小さくなるのは、放射輝度が大きい波長範囲で十分な吸収が行われなかったためだと考えられる。短波長側の波長範囲の吸収係数が大きいと、そうでないときに比べて地表面温度が高くなっているのも同じように説明できると考えられる。

この実験では波長帯を大きく二つに分けたが、もう少し細かく分割して吸収を考えれば、どの波長域に含まれる放射の吸収が大気の鉛直温度構造に大きく寄与してくるかが詳しくわかるだろう。

## 第5章 結論

吸収気体が大気中に存在することにより、存在しない場合に比べて大気の平均温度は高くなることは知られているが、その鉛直温度構造はどのような形になるのかを初期に与える温度構造と吸収係数を変えながら検証した。

Manabe and Strickler (1964) を単純化した、鉛直 1 次元放射平衡モデルを用いて大気の放射平衡温度を求めることを考えた。まず灰色大気について考え、温度構造の解析値と計算値の比較を行い、モデルが灰色大気の温度構造がある程度正しく表現できていることを確認した。大気の 20~50 km の領域では温度変化がほとんどなく、成層圏の存在が示唆された。

次に大気を二層に分割し、上層と下層とで吸収係数が異なる場合を考えた。吸収気体を指数関数的に分布していると仮定したため、地表面温度は下層の吸収係数に依存していた。

そして、波長によって吸収係数を変化させた場合を考えた。温度構造は、ウィーンの変位則より放射輝度が大きくなると考えられる波長範囲の吸収係数に依存していて、この範囲の吸収係数を小さくすると、大気上端の温度が小さくなった。

以上のことから、気体が吸収の効果により、地表面温度が高くなることが示され、密度分布を固定した場合には吸収係数が大きい、つまり光学的に厚い大気ほど温度が高くなることがわかった。そして、ウィーンの変位則より、地球大気中で放射輝度が大きくなると考えられる波長範囲  $0 \sim 50 \mu\text{m}$  の吸収帯が地球大気の温度構造にとって重要であると考えられた。

吸収帯の計算を行うのは難しいため、今回は吸収気体として水蒸気のみを仮定し、高度や波長ごとの細かな吸収係数設定は行わずに計算したが、水蒸気以外の吸収気体である二酸化炭素やオゾンを考慮することにより現実の大気温度構造に近いものが得られることが期待される。

# 付録

## 付録 A: ウィーンの変位則の導出

ウィーンの変位則を導く. プランク関数

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5 [\exp(hc/\kappa_B\lambda T) - 1]} \quad (2.9)$$

を波長に関して積分して,

$$\begin{aligned} \frac{dB_\lambda(T)}{d\lambda} &= 2hc^2 \left( \frac{hc}{\kappa_B T \lambda^7} \frac{\exp(hc/\kappa_B\lambda T)}{[\exp(hc/\kappa_B\lambda T) - 1]^2} - \frac{1}{\lambda^6} \frac{5}{\exp(hc/\kappa_B\lambda T) - 1} \right) \\ &= \frac{2hc^2}{\lambda^6 [\exp(hc/\lambda\kappa_B\lambda T) - 1]} \left( \frac{hc}{\kappa_B \lambda T} \frac{1}{1 - \exp(-hc/\kappa_B\lambda T)} - 5 \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (A.1)$$

となる  $\lambda$  を求めればよい. ここで,

$$x_m = \frac{hc}{\kappa_B \lambda_{\max} T} \quad (A.2)$$

とおくと, (A.1) より

$$\begin{aligned} \frac{x_m}{1 - e^{-x_m}} &= 5, \\ x_m &= 5 - 5e^{-x_m}, \\ e^{x_m} &= \frac{5}{5 - x_m} \end{aligned} \quad (A.3)$$

となる. この根は

$$x_m = 4.9651 \quad (A.4)$$

である. ここから,

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} &= \frac{hc}{x_m \kappa_B T} \\ &= \frac{2897}{T} \mu\text{m} \end{aligned} \quad (A.5)$$

となりウィーンの変位則が導ける.

## 付録 B: ステファン・ボルツマンの法則の導出

黒体から射出される放射輝度を全波長にわたって積算した値  $B(T)$  は,

$$\begin{aligned} B(T) &= \int_0^{\infty} B_{\lambda}(T) d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} \frac{2hc^2}{\lambda^5 \{\exp(hc/\kappa_B \lambda T) - 1\}} d\lambda \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

と書ける. ここで,  $x = hc/\kappa_B \lambda T$  とおくと,

$$B(T) = \frac{2\kappa_B^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (\text{B.2})$$

となる. 右辺の積分は,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx &= \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x(1 - e^{-x})} dx \\ &= \int_0^{\infty} x^3 [e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-nx} + \dots] dx \\ &= 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \\ &= \frac{\pi^4}{15} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

となるので,  $b = 2\pi^4 \kappa_B^4 / 15c^2 h^3$  とおくと,

$$B(T) = bT^4 \quad (\text{B.4})$$

となりステファン・ボルツマンの法則が導ける.

## 付録 C: 放射輝度の導出

平行平面大気の放射伝達方程式の基本形である,

$$\mu \frac{dI_\nu(\tau; \theta, \phi)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\tau; \theta, \phi) - J_\nu(\tau; \theta, \phi) \quad (3.20)$$

の一般解が

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau; +\mu, \phi) &= I_\nu(\tau^*; +\mu, \phi) \exp\left[-\frac{(\tau^* - \tau)}{\mu}\right] \\ &+ \int_\tau^{\tau^*} J_\nu(\tau'; +\mu, \phi) \exp\left[-\frac{(\tau' - \tau)}{\mu}\right] \frac{d\tau'}{\mu} \quad (0 < \mu \leq 1) \end{aligned} \quad (3.21)$$

および,

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau; -\mu, \phi) &= I_\nu(0; -\mu, \phi) \exp\left[-\frac{\tau}{\mu}\right] \\ &+ \int_0^\tau J_\nu(\tau'; -\mu, \phi) \exp\left[-\frac{(\tau - \tau')}{\mu}\right] \frac{dt}{\mu} \quad (0 < \mu \leq 1) \end{aligned} \quad (3.22)$$

となることを確かめる. (3.20) の両辺に  $e^{-\tau/\mu}$  をかけて, 大気層の下端 ( $\tau = \tau^*$ ) から考慮している高度 ( $\tau = \tau$ ) まで光学的厚さについて積分すると,

$$\begin{aligned} e^{-\tau/\mu} \mu \frac{dI_\nu(\tau; \theta, \phi)}{d\tau_\nu} &= e^{-\tau/\mu} I_\nu(\tau; \theta, \phi) - e^{-\tau/\mu} J_\nu(\tau; \theta, \phi) \\ \frac{dI_\nu(\tau; \theta, \phi) e^{-\tau/\mu}}{d\tau_\nu} &= -\frac{1}{\mu} e^{-\tau/\mu} J_\nu(\tau; \theta, \phi) \\ \left[ I_\nu(\tau'; \theta, \phi) e^{-t/\mu} \right]_{\tau^*}^\tau &= - \int_{\tau^*}^\tau \left[ \frac{1}{\mu} e^{-t/\mu} J_\nu(\tau'; \theta, \phi) \right] dt \\ I_\nu(\tau; \theta, \phi) e^{-\tau/\mu} &= I_\nu(\tau^*; \theta, \phi) e^{-\tau^*/\mu} \\ &+ \int_\tau^{\tau^*} \left[ \frac{1}{\mu} e^{-t/\mu} J_\nu(\tau'; \theta, \phi) \right] dt \\ I_\nu(\tau; +\mu, \phi) &= I_\nu(\tau^*; +\mu, \phi) \exp\left[-\frac{(\tau^* - \tau)}{\mu}\right] \\ &+ \int_\tau^{\tau^*} J_\nu(\tau'; +\mu, \phi) \exp\left[-\frac{(\tau' - \tau)}{\mu}\right] \frac{d\tau'}{\mu} \end{aligned} \quad (C.1)$$

となり, これは (3.21) である. 同様に, 大気層の下端 ( $\tau = \tau^*$ ) から考慮している高度 ( $\tau = \tau$ ) まで光学的厚さについて積分すると,

$$\begin{aligned}
\left[ I_\nu(\tau'; \theta, \phi) e^{-t/\mu} \right]_0^\tau &= - \int_0^\tau \left[ \frac{1}{\mu} e^{-t/\mu} J_\nu(\tau'; \theta, \phi) \right] dt \\
I_\nu(\tau; \theta, \phi) e^{-\tau/\mu} &= I_\nu(0; \theta, \phi) \\
&\quad - \int_0^\tau \left[ \frac{1}{\mu} e^{-t/\mu} J_\nu(\tau'; \theta, \phi) \right] dt \\
I_\nu(\tau; \theta, \phi) &= I_\nu(0; \theta, \phi) \exp \left[ \frac{\tau}{\mu} \right] \\
&\quad - \int_0^\tau J_\nu(\tau'; \theta, \phi) \exp \left[ \frac{(\tau - t)}{\mu} \right] \frac{d\tau'}{\mu} \\
I_\nu(\tau; -\mu, \phi) &= I_\nu(0; -\mu, \phi) \exp \left[ -\frac{\tau}{\mu} \right] \\
&\quad + \int_0^\tau J_\nu(\tau'; -\mu, \phi) \exp \left[ -\frac{(\tau - t)}{\mu} \right] \frac{d\tau'}{\mu}
\end{aligned} \tag{C.2}$$

となり, これは (3.22) である. よって, 平行平面大気放射伝達方程式の放射輝度は (3.21), (3.22) の形で書けることが確認できた.

## 謝辞

本研究に関して, 指導教員である林祥介教授および岩山准教授には研究内容についての方針を示して頂いた.

また様々なお指導と協力を頂いた地球および惑星大気科学研究室の皆様に, ここに感謝の意を表する.

## 参考文献

- 会田勝, 1954: 気象学のプロムナード 8 大気と放射過程-大気の熱源と放射収支を探る-, 東京堂出版, 280pp.
- 浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎, 朝倉書店, 267pp.
- 柴田清孝, 1999: 応用気象学シリーズ (1) 光の気象学, 朝倉書店, 182pp.
- 松野太郎, 島崎達夫, 1981: 大気科学講座 3 成層圏と中間圏の大気, 東京大学出版会, 290pp.
- Manabe, S., Strickler, R. F., 1964: Thermal Equilibrium of the Atmosphere with a Convective Adjustment, *J. Atmos. Sci.*, **21**, 361-385.
- Nakajima, S., Y.-Y. Hayashi and Abe, Y., 1992: A study on the 'runaway greenhouse effect' with a one-dimensional radiative-convective equilibrium model, *J. Atmos. Sci.*, **49**, 2256-2266.
- Liou, K. N., 2002: An Introduction to Atmospheric Radiation, Volume 84, Second Edition (International Geophysics), Academic Press, 583pp.