

地球大気の放射場に関する
放射伝達方程式についての考察

神戸大学理学部地球惑星科学科
地球および惑星大気科学研究室
関友也

2012/02/29

要旨

本研究では、地球放射及び太陽放射についての放射伝達方程式をそれぞれ導出し考察を行った。まず地球放射の放射伝達方程式について、非散乱という条件のもとで平行平面大気という概念を導入して導出を行った。次いで散乱過程も考慮したうえで太陽放射の放射伝達方程式を導出し、Eddington 近似を用いて解析解を求めた。またその過程において必要となる特殊関数の級数展開法についても知識の整理を行った。

目次

第1章	はじめに	3
第2章	放射の定義と基本法則	4
2.1	放射の定義	4
2.2	放射の基本量	4
2.2.1	立体角	4
2.2.2	放射輝度・放射フラックス	5
2.2.3	黒体放射	6
2.3	放射伝達	6
2.3.1	放射伝達方程式	6
2.3.2	シュバルツシルトの式	8
2.3.3	光学的厚さ	8
2.4	散乱のサイズパラメータ	8
第3章	地球放射の放射伝達方程式	10
3.1	平行平面大気	10
3.2	放射伝達方程式と放射フラックス	12

第 4 章 太陽放射の放射伝達方程式	14
4.1 散乱位相関数	14
4.2 放射源関数	15
4.3 散乱を考慮した太陽放射の放射伝達方程式	16
4.4 放射伝達方程式の級数展開	17
4.5 Eddington 近似を用いた近似解	21
第 5 章 まとめ	26
付録	27
謝辞	38
参考文献	39

第1章 はじめに

放射とは電磁波の総称であり,ここでは太陽からやってくる放射(太陽放射)と地球が射出する放射(地球放射)のことをいう。太陽放射と地球放射では,放射輝度の最大値をもつ波長が異なるため前者を短波放射,後者を長波放射とも呼ぶ。地球は太陽放射と地球放射が釣り合った状態(放射平衡)にあり,この釣り合いの状態が主に地球の温度構造を定めている。

しかしながら,地球には水蒸気,二酸化炭素,オゾン,そのほかの物質による大気が存在し,放射はそれらの大気による吸収,散乱の影響を受けるが,それら全てを考慮して放射過程を定式化するのは困難である。

本研究ではその複雑な放射過程について,近似を用いることで放射伝達方程式およびその解析解を求めた。本論文の構成は以下の通りである。第2章では,まず放射の概念や基本的な物理量について知識の整理を行う。第3章では,平行平面大気という概念を用いて地球放射についての放射伝達方程式を導出する。地球放射は長波放射であり,散乱の影響は小さいと考え,散乱を無視している。第4章では,さらに太陽放射の放射伝達方程式を,下端から入射した放射輝度の減衰,多重散乱される散乱光による放射輝度の増加,太陽光の直達成分の一次散乱,の3つの成分に分けて導出し,特殊関数の級数展開を用いて変形した後,Eddington 近似を用いて解析解を求めた。

第2章 放射の定義と基本法則

2.1 放射の定義

放射とは電磁波の総称であり、波長によって紫外線、可視光線、赤外線などと呼ばれる。放射の記述には波長 λ 、振動数 ν 、波数 κ 、が用いられ、この三者の間には電磁波伝播の位相速度（光速度）を c として

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (2.1.1)$$

$$\kappa = \frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda} \quad (2.1.2)$$

という関係がある。

2.2 放射の基本量

2.2.1 立体角

放射の強さを定量的に記述するために単位立体角あたりの放射エネルギーの大きさをを用いるので、立体角を定義する。

立体角は図 (2.2.1) より、半径 r の球面上に円錐体で張られる面積 σ を半径の2乗で割った値

$$\omega = \frac{\sigma}{r^2} \quad (2.2.3)$$

として定義され、単位は sr (ステラジアン) である。よって図 (2.2.2) のように極座標系で表される天頂角 θ と方位角 ϕ で規定される方向において微小立体角 $d\omega$ は

$$d\omega = \frac{d\sigma}{r^2} = \sin\theta d\theta d\phi \quad (2.2.4)$$

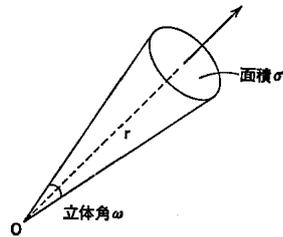


図 2.2.1: 立体角の定義 (会田勝, 1954: 大気と放射過程)

となる. これを半球全体に対して積分すると 2π となる.

2.2.2 放射輝度・放射フラックス

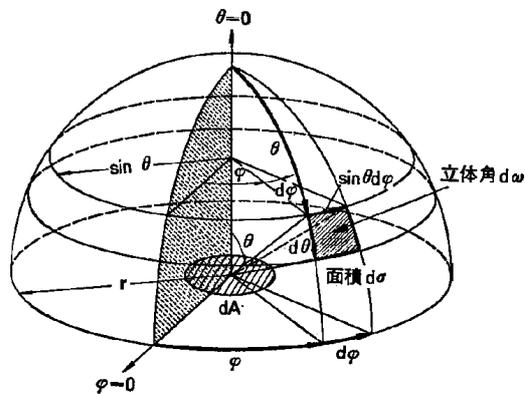


図 2.2.2: 立体角 $d\omega$ の定義と面 dA からの放射フラックスの概念 (会田勝, 1954: 大気と放射過程)

図 (2.2.2) において, 面 dA を通して半球側へ流れ込む放射エネルギーの大きさ

を放射束密度, または放射フラックスと呼ぶ. 放射束密度は次式で定義される.

$$F_\nu = \int_{\Omega} I_\nu \cos \theta d\omega \quad (2.2.5)$$

ここで I_ν は波数 ν の放射の強さを表す比例定数であり, 放射輝度と呼ばれる. 極座標表示では,

$$F_\nu = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_\nu(\theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.2.6)$$

と書ける. 特に等方的な放射の場合には

$$F_\nu = \pi I_\nu \quad (2.2.7)$$

となる.

2.2.3 黒体放射

黒体とは入射するすべての波長の放射を完全に吸収する理想的な物体をいい, 黒体から射出される放射を黒体放射と呼ぶ. プランクの法則によると, 波数 κ に対する黒体放射は,

$$B_\kappa(T) = \frac{2hc^2\kappa^3}{e^{hc\kappa/kT} - 1} \quad (2.2.8)$$

と書ける, ここで h はプランク定数, k はボルツマン定数である. また, 波長 λ に対して,

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5(e^{hc/k\lambda T} - 1)} \quad (2.2.9)$$

と書ける. さらに, 黒体放射は等方的であることから, 全波長で積分した放射フラックスは,

$$F = \pi B(T) = \sigma T^4 \quad (2.2.10)$$

で与えられる. ここで, σ はステファン・ボルツマン定数である

2.3 放射伝達

2.3.1 放射伝達方程式

ある方向 s に進む放射が, 吸収や散乱などの相互作用によってどのように増減するのかを記述するものが放射伝達方程式である. 放射伝達方程式を導出するため

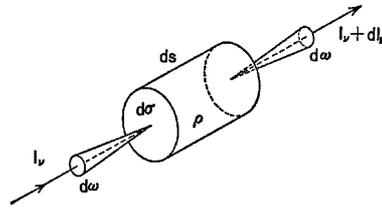


図 2.3.3: 放射伝達の概念 (会田勝, 1954: 大気と放射過程)

に, 図 (2.3.3) のような放射伝達過程を考える. 断面積 $d\sigma$, 長さ ds の微小な気柱に振動数が ν から $\nu + d\nu$ の間にある放射輝度 I_ν の放射が入射し, 気柱を通過する間に強度が $I_\nu + dI_\nu$ に変わるとすると, 微小気柱による放射輝度の減衰は,

$$dI_\nu = -k_\nu \rho I_\nu ds \quad (2.3.11)$$

と表される. ここで, k_ν は振動数 ν の放射に対する質量消散係数, ρ は気柱の密度である. 一方放射強度の増大は,

$$dI_\nu = j_\nu \rho ds \quad (2.3.12)$$

と表される. ここで, j_ν は振動数 ν の放射に対する質量射出係数である. これらふたつの過程が同時に起こっていると考えると, 放射の変化は,

$$dI_\nu = -k_\nu \rho I_\nu ds + j_\nu \rho ds \quad (2.3.13)$$

となる. さらに, 放射源関数を

$$J_\nu = \frac{j_\nu}{k_\nu} \quad (2.3.14)$$

と定義すると, 放射伝達方程式は

$$\frac{dI_\nu}{k_\nu \rho ds} = -I_\nu + J_\nu \quad (2.3.15)$$

となる.

2.3.2 シュバルツシルトの式

散乱のない気体で、かつ局所熱力学平衡^{*1}の近似が成り立つ場合には放射源関数 J_ν はプランク関数を用いて、

$$J_\nu = B_\nu(T) \quad (2.3.16)$$

と書けるので、放射伝達方程式は、

$$\frac{dI_\nu}{k_\nu \rho ds} = -I_\nu + B_\nu(T) \quad (2.3.17)$$

となる。これをシュバルツシルトの式と呼ぶ。右辺第1項は吸収による減衰を、第2項は黒体放射による射出を意味する。

2.3.3 光学的厚さ

気体の射出が無い場合を考えると、放射伝達方程式は、

$$\frac{dI_\nu}{k_\nu \rho ds} = -I_\nu \quad (2.3.18)$$

となる。この式を積分し、 $s = 0$ で気柱に入射する放射輝度を $I_\nu(0)$ とすると $s = s_1$ における放射輝度は

$$I_\nu(s_1) = I_\nu(0) \exp\left(-\int_0^{s_1} k_\nu \rho ds\right) \quad (2.3.19)$$

となる。以後

$$\tau_\nu(0, s) = \int_0^s k_\nu \rho ds' \quad (2.3.20)$$

を光学的厚さとして定義する。

2.4 散乱のサイズパラメータ

これから、地球放射・太陽放射の放射伝達方程式を議論を行うにあたって、散乱の効果を考慮すべきかどうかを判断するためのパラメータを導入する。

^{*1}熱力学的平衡状態にある物質は、放射を吸収する性質があるならば、吸収率と同じ値の射出率で同じ波長の放射を射出している。地球大気は厳密には熱力学平衡の状態ではないが、局所的には熱力学平衡の状態であるとみなす近似を局所熱力学平衡 (LTE : local thermodynamic equilibrium) 近似という。

散乱とは大気中に存在する空気分子、雲粒、氷晶などの物質によって、放射があらゆる方向に拡散する現象である。散乱の程度や効果については、入射する放射の波長、粒子の大きさやその形状に依存する。ここでは粒子が半径 r の球形であるとして、無次元量

$$x \equiv \frac{2\pi r}{\lambda} \tag{2.4.21}$$

をサイズパラメータと定義する。図 (2.4.4) はサイズパラメータと適用できる散乱理論を示している。サイズパラメータ x は厳密な値ではなくオーダーである。サイズパラメータが ($x \leq 0.001$) の場合には散乱が無視できる。また $0.001 \leq x \leq 0.1$ の場合にはレイリー散乱理論、 $0.1 \leq x \leq 1000$ の場合にはミー散乱理論、 $x \geq 1000$ の場合には幾何光学近似がそれぞれ適用出来る。

なお、ここでは散乱理論に関する詳細な解説は行わない。

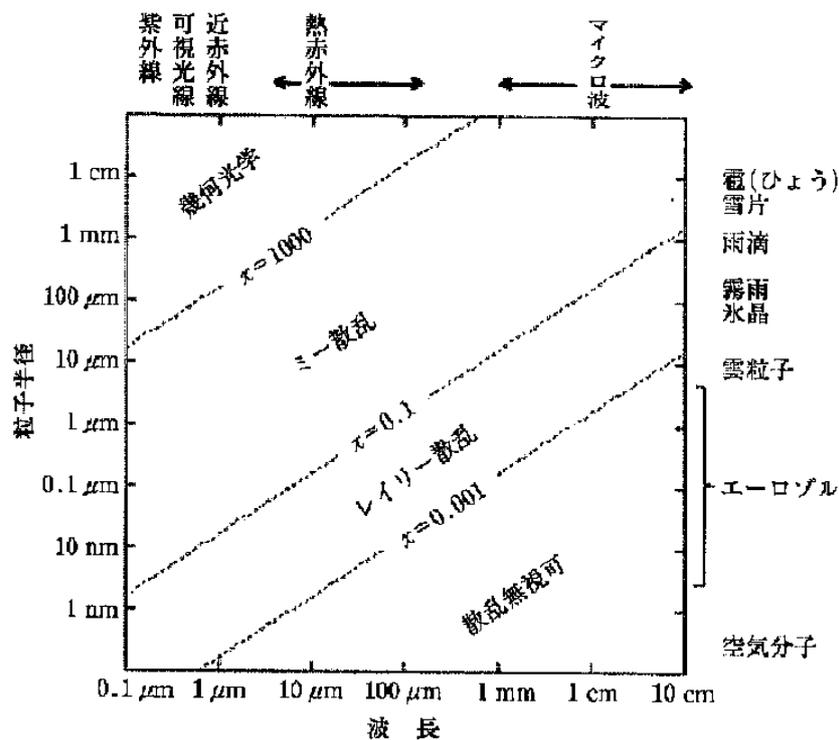


図 2.4.4: 大気粒子のサイズと入射波長による散乱パターンの違い (浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎)

第3章 地球放射の放射伝達方程式

ここでは平行平面大気概念を導入し、地球放射の放射伝達方程式を導出する。

3.1 平行平面大気

実際の大気は鉛直方向よりも水平方向の広がりの方が大きいので、平板状の気層とみなすことができる。これを平行平面大気と呼ぶ。平行平面大気では、放射伝達の特性や境界条件などは水平方向に一様である。この近似の上での放射伝達方程式の定式化を行う。(2.3.16)を高さ z について書き換えると、3次元空間では、

$$-\cos\theta \frac{dI_\nu(z, \theta, \phi)}{k_\nu \rho dz} = I_\nu(z, \theta, \phi) - J_\nu(z, \theta, \phi) \quad (3.1.1)$$

となる。ここで θ は天頂角であり、 $dz = \cos\theta ds$ である。さらに光学的厚さを

$$\tau = \int_z^\infty k_\nu \rho dz' \quad (3.1.2)$$

と定義する。ここで光学的厚さは高さ z とは逆に大気の上端から鉛直下向きに座標をとっている。つまり、

$$d\tau = -k_\nu \rho dz \quad (3.1.3)$$

である。さらに

$$\mu = \cos\theta \quad (3.1.4)$$

とおくと(3.1.1)式は、

$$\mu \frac{dI_\nu(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = I_\nu(\tau, \mu, \phi) - J_\nu(\tau, \mu, \phi) \quad (3.1.5)$$

となる。

(3.1.5) の形式解は, 上向き放射輝度に対して

$$I_{\nu}(\tau, \mu, \phi) = I_{\nu}(\tau_1, \mu, \phi)e^{-(\tau_1-\tau)/\mu} + \int_{\tau}^{\tau_1} J_{\nu}(t, \mu, \phi)e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu} \quad (3.1.6)$$

である*1, ここで, 右辺第一項は, 大気下端に上向きに入射する放射輝度が $\tau = \tau$ まで減衰しながら到達した量を表し, 右辺第二項は途中の各高度 $\tau = t$ で上向きに射出された放射が $\tau = \tau$ まで減衰しながら到達した量を表す.

また下向き放射輝度に対して,

$$I_{\nu}(\tau, -\mu, \phi) = I_{\nu}(0, -\mu, \phi)e^{-\tau/\mu} + \int_0^{\tau} J_{\nu}(t, -\mu, \phi)e^{-(\tau-t)/\mu} \frac{dt}{\mu} \quad (3.1.7)$$

である, ここで, 右辺第一項は, 大気上端に下向きに入射する放射輝度が $\tau = \tau$ まで減衰しながら到達した分を表し, 右辺第二項は途中の各高度 $\tau = t$ で下向きに射出された放射が $\tau = \tau$ まで減衰しながら到達した分を表す.

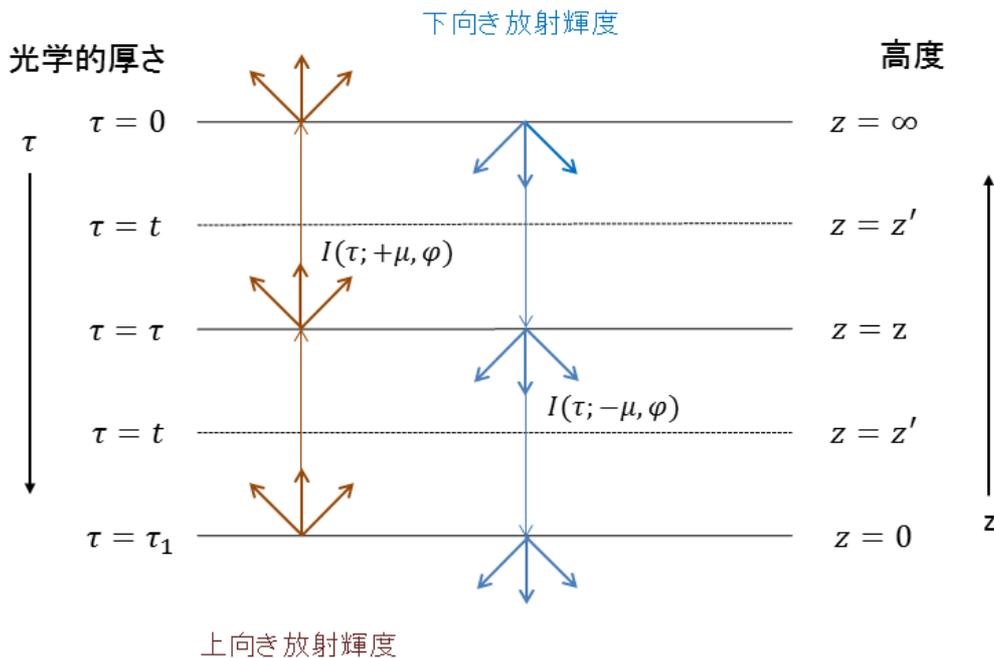


図 3.1.1: 平行平面大気における地球放射の放射輝度のイメージ

*1(3.1.6), (3.1.7) の導出は付録 A を参照.

3.2 放射伝達方程式と放射フラックス

地球大気における地球放射の伝達を考えるため、放射伝達方程式 (3.1.5) を局所熱力学的平衡にある熱放射に適用する。また大気放射では気体による散乱の効果は小さいので無視している。この場合の放射源関数はプランク関数で与えられる。また等方性放射を考えるので、方位角 ϕ には依存しない。

このとき各高度 τ における上向き、下向き放射輝度はそれぞれ

$$I_{\kappa}(\tau, \mu) = I_{\kappa}(\tau_1, \mu)e^{-(\tau_1-\tau)/\mu} + \int_{\tau}^{\tau_1} B_{\kappa}(T(t))e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu} \quad (3.2.8)$$

$$I_{\kappa}(\tau, -\mu) = I_{\kappa}(0, -\mu)e^{-(\tau_1-\tau)/\mu} + \int_0^{\tau} B_{\kappa}(T(t))e^{-\tau/\mu} \frac{dt}{\mu} \quad (3.2.9)$$

で与えられる。ここで方程式を波数 κ について書き換えている点に注意されたい。

ここで大気下端に入射する放射は地表面が射出する黒体放射なので (3.2.8) 式の右辺第1項は

$$I_{\kappa}(\tau_1, \mu) = B_{\kappa}(T_s(\tau_1)) \quad (3.2.10)$$

とおける。ただし T_s は地表面温度である。さらに大気上端に入射する赤外放射は存在しないので、(3.2.9) 式の右辺第1項は、

$$I_{\kappa}(0, -\mu) = 0 \quad (3.2.11)$$

となる。よって (3.2.8), (3.2.9) 式はそれぞれ

$$I_{\kappa}(\tau, \mu) = B_{\kappa}(T_s(\tau_1))e^{-(\tau_1-\tau)/\mu} + \int_{\tau}^{\tau_1} B_{\kappa}(T(t))e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu} \quad (3.2.12)$$

$$I_{\kappa}(\tau, -\mu) = \int_0^{\tau} B_{\kappa}(T(t))e^{-(\tau-t)/\mu} \frac{dt}{\mu} \quad (3.2.13)$$

と書ける。

放射の大気に与える影響は放射フラックスの発散、収束による加熱という形で表れる。放射輝度 (3.2.12), (3.2.13) について (2.2.6) の定義から放射フラックスを求める。 $\mu = \cos\theta$ の変数変換を行うと上向き放射フラックスは、

$$F_{\kappa} = 2\pi B_{\kappa}(T_s(\tau_1)) \int_0^1 e^{-(\tau_1-\tau)/\mu} \mu d\mu + 2 \int_0^1 \int_{\tau}^{\tau_1} \pi B_{\kappa}(T(t))e^{-(t-\tau)/\mu} dt d\mu \quad (3.2.14)$$

となり, 下向き放射フラックスは,

$$F_{\kappa} = 2 \int_0^1 \int_0^{\tau} \pi B_{\kappa}(T(t)) e^{-(\tau-t)/\mu} dt d\mu \quad (3.2.15)$$

となる.

第4章 太陽放射の放射伝達方程式

本章では太陽放射の放射伝達方程式を導出する。太陽放射は地球放射と違い散乱の効果を強く受けるので、その点を議論する必要がある。さらにその放射伝達方程式を級数を用いて展開し、Eddington 近似を用いて近似解を求めた。

4.1 散乱位相関数

放射伝達方程式 (2.3.11)

$$dI_\nu = -k_\nu \rho I_\nu ds \quad (4.1.1)$$

における質量消散係数 k_ν には吸収、散乱の両方の過程を含んでいる。まずはじめに、2.3.1 節と同様に、断面積 $d\sigma$ 、長さ ds の微小な気柱を考える。立体角 $d\omega'$ 、強度 I_ν の入射光が微小体積によって散乱されるとすると、1回の散乱で消散される放射エネルギーは、

$$k_\nu I_\nu \rho d\sigma ds d\nu d\omega' = k_\nu I_\nu dm d\nu d\omega' \quad (4.1.2)$$

と書ける。ここで dm は微小体積の質量である。以後、入射側の方角や立体角に (') を付けて表記する。消散された放射エネルギーのうち、入射光の進行方向と角 Θ を成す方向の立体角 $d\omega$ に散乱される割合は、散乱位相関数 $P(\cos \Theta)$ を用いて、

$$P(\cos \Theta) \left(\frac{d\omega}{4\pi} \right) k_\nu I_\nu dm d\nu d\omega' \quad (4.1.3)$$

と書き表される。

散乱位相関数の性質について考察する。上式を全立体角で積分すると、

$$\int_{\Omega} P(\cos \Theta) \left(\frac{d\omega}{4\pi} \right) k_\nu I_\nu dm d\nu d\omega' \quad (4.1.4)$$

となり、全エネルギーの割合が求まる ここで、

$$\tilde{\omega} = \int_{\Omega} P(\cos \Theta) \left(\frac{d\omega}{4\pi} \right) \quad (4.1.5)$$

を単一散乱アルベドとして定義する。もし $\tilde{\omega} = 1$ ならば気層は完全に散乱過程だけの媒質で、エネルギーの実質的な損失は無いことになる。吸収を伴うような一般的な過程では $\tilde{\omega} < 1$ である。また、等方性散乱の場合、 $\tilde{\omega} = \text{一定}$ となる。単一散乱アルベドは次式でも定義できる。

$$\tilde{\omega} = \frac{k_{\nu}^s}{k_{\nu}} = \frac{k_{\nu}^s}{k_{\nu}^s + k_{\nu}^a} \quad (4.1.6)$$

ここで、 k_{ν}^s は質量散乱係数、 k_{ν}^a は質量吸収係数である。

4.2 放射源関数

散乱大気における放射源関数を定義する。なお、ここでは吸収のない散乱大気を考える。吸収がないので、立体角 $d\omega$ 方向への射出は $d\omega'$ 方向からの散乱を全立体角について積分したものになるので、射出係数は

$$j_{\nu} = k_{\nu}^s \int_{\Omega} I_{\nu} P(\cos \Theta) \left(\frac{d\omega'}{4\pi} \right) \quad (4.2.7)$$

と書けるので、放射源関数は

$$J_{\nu} = J_{\nu}^s = \frac{j_{\nu}}{k_{\nu}^s} = \int_{\Omega} I_{\nu} P(\cos \Theta) \left(\frac{d\omega'}{4\pi} \right) \quad (4.2.8)$$

となる。球面三角の余弦定理

$$\cos \Theta = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') \quad (4.2.9)$$

を用いて極座標系で表すと、

$$J_{\nu}^s(\theta, \phi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P(\theta, \phi; \theta', \phi') I_{\nu}(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' \quad (4.2.10)$$

と書き表せる。

散乱と吸収の過程が共存する大気の場合、散乱と吸収は独立の過程なので、放射源関数はそれぞれの効果の和として、

$$J_{\nu} = (1 - \tilde{\omega}) J_{\nu}^a + \tilde{\omega} J_{\nu}^s = (1 - \tilde{\omega}) B_{\nu}(T) + \tilde{\omega} J_{\nu}^s \quad (4.2.11)$$

で与えられる。 J_{ν}^a は吸収の放射源関数であり、温度 T の黒体放射 $B_{\nu}(T)$ である。ここで単一散乱アルベドは吸収の放射源関数と、散乱の放射源関数の寄与の割合を決定づけている。

4.3 散乱を考慮した太陽放射の放射伝達方程式

散乱過程における太陽放射の放射伝達方程式を求める。まず図のような平行平面大気を考える。この平行平面大気では、 $(-\mu_0, \phi_0)$ の方向から太陽放射が入射している。このときの (μ, ϕ) 放射輝度の変化を、下端から入射した放射輝度の減衰、多重散乱による散乱光、太陽光の直達成分の3つの要素に分けて考える。

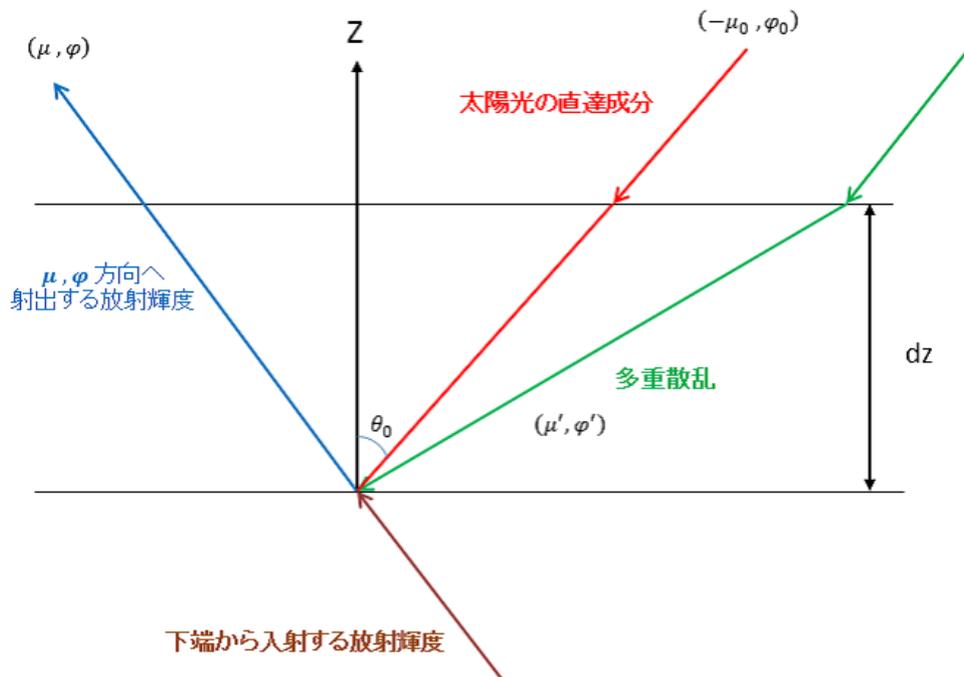


図 4.3.1: 平行平面大気における太陽放射の散乱

まず、一次散乱や吸収によって減衰を受ける、下端から入射する放射輝度は、

$$dI(z, \mu, \phi) = -\sigma_e NI(z, \mu, \phi) \frac{dz}{\cos \theta} \tag{4.3.12}$$

と表される。ここで、 $dz / \cos \theta$ は微小通過光路、 σ_e は気層内粒子の平均消散断面積^{*1}

^{*1}消散断面積とは、

$$\frac{\text{消散粒子数}}{\text{単位面積当たりの入射粒子数}}$$

のことである。

N は単位体積中の全粒子数, (μ, ϕ) は放射進行方向の方向成分を示す.

次に, (μ', ϕ') 方向から (μ, ϕ) 方向に多重散乱で散乱されるすべての散乱光は

$$dI(z, \mu, \phi) = \sigma_s N \frac{dz}{\cos \theta} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I(z, \mu', \phi') \frac{P(\mu, \phi; \mu', \phi')}{4\pi} d\mu' d\phi' \quad (4.3.13)$$

と表される. ここで, σ_s は気層内粒子の平均散乱断面積, $P(\mu, \phi; \mu', \phi')/4\pi$ は (μ', ϕ') 方向から (μ, ϕ) 方向への散乱を示す散乱分布関数である.

さらに, 太陽光の直達成分 $F(z)$ の一次散乱による (μ, ϕ) 方向への散乱は

$$dI(z, \mu, \phi) = \sigma_s N \frac{dz}{\cos \theta} F(z) \frac{P(\mu, \phi; -\mu_0, \phi_0)}{4\pi} \quad (4.3.14)$$

と書ける.

(4.3.12), (4.3.13), (4.3.14) から放射伝達方程式は

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = I(\tau, \mu, \phi) - J(\tau, \mu, \phi) \quad (4.3.15)$$

となる. ただし放射源関数は

$$J(\tau, \mu, \phi) = \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', \phi') P(\mu, \phi; \mu', \phi') d\mu' d\phi' + \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \pi F_0 P(\mu, \phi; -\mu_0, \phi_0) e^{-\tau/\mu_0} \quad (4.3.16)$$

である*2.

4.4 放射伝達方程式の級数展開

さきほどの放射伝達方程式をもとに, 放射伝達方程式の近似解および放射フラックスを求めるための準備として放射伝達方程式の級数展開を行う.

まず散乱位相関数を, ルジャンドル関数を用いて展開すると,

$$P(\cos \Theta) = \sum_{l=0}^N \omega_l P_l(\cos \Theta) \quad (4.4.17)$$

*2導出は付録 B を参照.

ここで ω_l は展開係数であり, ルジャンドル関数の直交性から,

$$\omega_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 P(\cos \Theta) P_l(\cos \Theta) d(\cos \Theta) \quad (4.4.18)$$

と書ける^{*3}.

展開係数の値は位相関数によるが, $l=0$ の場合にはあらかじめ定められている. 散乱位相関数 $P(\cos \Theta)$ は, 位相関数を全立体角で積分すると, 4π に等しいという条件から,

$$2\pi \int_0^\pi \frac{P_l(\cos \Theta)}{4\pi} \sin \Theta d\Theta = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{P_l(\cos \Theta)}{4\pi} d(\cos \Theta) = 1 \quad (4.4.19)$$

となるように規格化されている. これと先程の展開係数の式から,

$$\omega_0 = 1 \quad (4.4.20)$$

となる.

さらに $l=1$ の場合には, (4.4.18) より

$$\omega_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 P(\cos \Theta) \cos \Theta d(\cos \Theta) \quad (4.4.21)$$

となるが, ここで非対称因子 g を

$$g = 2\pi \int_0^\pi \frac{P(\cos \Theta)}{4\pi} \cos \Theta \sin \Theta d\Theta = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(\cos \Theta) \cos \Theta d(\cos \Theta) \quad (4.4.22)$$

と定義すると,

$$\omega_1 = 3g \quad (4.4.23)$$

となる. これらは次節にて使用する.

ここから天頂角, 方位角を用いた表現に書き換える. $\cos \Theta$ は球面三角の余弦定理より,

$$\cos \Theta = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi' - \phi) \quad (4.4.24)$$

とかけ, $\mu = \cos \theta$, $\mu' = \cos \theta'$ より

$$\cos \Theta = \mu\mu' + (1 - \mu^2)^{1/2}(1 - \mu'^2)^{1/2} \cos(\phi' - \phi) \quad (4.4.25)$$

^{*3}導出は付録 C を参照.

となる。これより、

$$P(\cos \Theta) = \sum_{l=0}^N \omega_l P_l(\mu\mu' + (1 - \mu^2)^{1/2}(1 - \mu'^2)^{1/2} \cos(\phi' - \phi)) \quad (4.4.26)$$

と書ける。これを (4.4.17) に代入すると、

$$P(\mu, \phi; \mu', \phi') = \sum_{l=0}^N \omega_l P_l(\mu\mu' + (1 - \mu^2)^{1/2}(1 - \mu'^2)^{1/2} \cos(\phi' - \phi)) \quad (4.4.27)$$

となる。ここでルジャンドル多項式の加法定理から、

$$\begin{aligned} & P_l(\mu\mu' + (1 - \mu^2)^{1/2}(1 - \mu'^2)^{1/2} \cos(\phi' - \phi)) \\ &= P_l(\mu)P_l(\mu') + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu)P_l^m(\mu') \cos m(\phi' - \phi) \end{aligned} \quad (4.4.28)$$

ただし P_l^m はルジャンドル陪多項式

$$P_l^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(\mu)}{d\mu^m} \quad (4.4.29)$$

である^{*4}。またこれらは、

$$\int_{-1}^1 P_l^m(\mu)P_k^m(\mu)d\mu = \begin{cases} 0 & l \neq k \\ \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} & l = k \end{cases} \quad (4.4.30)$$

のように規格化されている。展開係数を

$$\omega_l^m = \begin{cases} \omega_l & m = 0 \\ 2\omega_l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} & m \neq 0 \end{cases} \quad (4.4.31)$$

と定めると、

$$P(\mu, \phi; \mu', \phi') = \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^l \omega_l^m P_l^m(\mu)P_l^m(\mu') \cos m(\phi' - \phi) \quad (4.4.32)$$

と書ける。

放射輝度は太陽の入射方向 $(-\mu_0, \phi_0)$ からみて対称なので

$$I(\tau, \mu, \phi) = \sum_{m=0}^N I^m(\tau, \mu) \cos m(\phi_0 - \phi) \quad (4.4.33)$$

^{*4}導出は付録 D を参照。

というように方位角でフーリエ級数展開する. ただし I^m は展開係数である. (4.3.15), (4.3.16), (4.4.32), (4.4.33) より, 放射伝達方程式は,

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI^m(\tau, \mu)}{d\tau} = & I^m(\tau, \mu) - (1 + \delta_{0,m}) \frac{\tilde{\omega}}{4} \sum_{l=m}^N \omega_l^m P_l^m(\mu) \int_{-1}^1 P_l^m(\mu') I^m(\tau, \mu') d\mu' \\ & - \frac{\tilde{\omega}}{4} \sum_{l=m}^N \omega_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(-\mu_0) \pi F_0 e^{-\tau/\mu_0} \end{aligned} \quad (4.4.34)$$

と書ける^{*5}. 放射角依存が含まれた一般的な放射伝達方程式はこのように書けるが, 複雑であるため, 取扱いを簡単にする目的で, 放射場が方位角 ϕ によらない $m = 0$ の場合を考えると,

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = & I(\tau, \mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \sum_{l=0}^N \omega_l P_l(\mu) \int_{-1}^1 P_l(\mu') I(\tau, \mu') d\mu' \\ & - \frac{\tilde{\omega}}{4} \sum_{l=0}^N \omega_l P_l(\mu) P_l(-\mu_0) \pi F_0 e^{-\tau/\mu_0} \end{aligned} \quad (4.4.35)$$

となる. なお添え字の $m = 0$ は省略している.

散乱大気における上向き, 下向き放射フラックスは, 放射フラックスの定義からそれぞれ

$$F^+(\tau) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 I(\tau, \mu, \phi) \mu d\mu d\phi \quad (4.4.36)$$

$$F^-(\tau) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^0 I(\tau, -\mu, \phi) \mu d\mu d\phi \quad (4.4.37)$$

と書ける. ここで,

$$\int_0^{2\pi} \cos m(\phi_0 - \phi) d\phi = 0 \quad (4.4.38)$$

であることから,

$$F^+(\tau) = 2\pi \int_0^1 I(\tau, \mu) \mu d\mu \quad (4.4.39)$$

$$F^-(\tau) = 2\pi \int_{-1}^0 I(\tau, -\mu) \mu d\mu \quad (4.4.40)$$

^{*5}導出は付録 E を参照.

と書ける. よって放射フラックスの計算では放射輝度の方位角分布の展開は不要である. さらに, 気層を直接通過する直達光の放射フラックスを考慮すると,

$$F(\tau) = 2\pi \int_0^1 I(\tau, \mu) \mu d\mu \quad (4.4.41)$$

$$F(\tau) = 2\pi \int_{-1}^0 I(\tau, -\mu) \mu d\mu + \mu_0 \pi F_0 e^{-\tau/\mu_0} \quad (4.4.42)$$

と書ける.

4.5 Eddington 近似を用いた近似解

(4.4.35) の微分方程式には積分が含まれており, 非常に複雑である. 本節では Eddington 近似を用いることで (4.4.35) を解析的に解く.

Eddington 近似では, 放射輝度は方位角 ϕ に依存しないと考える. また放射輝度をルジャンドル多項式で展開したときの第 2 項までを考える. すなわち,

$$I^0(\tau, \mu) = I_0^0(\tau) + I_1^0(\tau)\mu \quad (4.5.43)$$

と考える. (4.5.43) を (4.4.35) に代入すると,

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI_0^0(\tau) + I_1^0(\tau)\mu}{d\tau} &= I_0^0(\tau) + I_1^0(\tau)\mu \\ &\quad - \frac{\tilde{\omega}}{2} \sum_{l=0}^1 \omega_l P_l(\mu) \int_{-1}^1 P_l(\mu') \{I_0^0(\tau) + I_1^0(\tau)\mu'\} d\mu' \\ &\quad - \frac{\tilde{\omega}}{4} \sum_{l=0}^1 \omega_l P_l(\mu) P_l(-\mu_0) F_0 e^{-\tau/\mu_0} \end{aligned} \quad (4.5.44)$$

ここで低次のルジャンドル多項式について,

$$P_0(\mu) = 1 \quad P_1(\mu) = \mu \quad (4.5.45)$$

なので,

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI_0^0(\tau) + I_1^0(\tau)\mu}{d\tau} &= I_0^0(\tau) + I_1^0(\tau)\mu \\ &\quad - \frac{\tilde{\omega}}{2} \omega_0 \int_{-1}^1 \{I_0^0(\tau)\} d\mu' - \frac{\tilde{\omega}}{2} \omega_1 \mu \int_{-1}^1 \mu' \{I_1^0(\tau)\mu'\} d\mu' \\ &\quad - \frac{\tilde{\omega}}{4} (\omega_0 - \omega_1 \mu \mu_0) F_0 e^{-\tau/\mu_0} \end{aligned} \quad (4.5.46)$$

となる。さらに積分を実行することで、

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI_0^0(\tau) + I_1^0(\tau)\mu}{d\tau} = & I_0^0(\tau) + I_1^0(\tau)\mu - \tilde{\omega}(\omega_0^0 I_0^0 + \frac{\omega_1^0}{3} \mu I_1^0) \\ & - \frac{\tilde{\omega}}{4}(\omega_0 - \omega_1 \mu \mu_0) F_0 e^{-\tau/\mu_0} \end{aligned} \quad (4.5.47)$$

を得る。

ここで ω_0, ω_1 について、

$$\omega_0 = 1 \quad \omega_1 = 3g \quad (4.5.48)$$

であることを用いると、

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI_0^0(\tau) + I_1^0(\tau)\mu}{d\tau} = & I_0^0(\tau) + I_1^0(\tau)\mu - \tilde{\omega}(I_0^0 + \mu g I_1^0) \\ & - \frac{\tilde{\omega}}{4}(1 - 3g\mu\mu_0) F_0 e^{-\tau/\mu_0} \end{aligned} \quad (4.5.49)$$

である。ただし g は非対称因子であり

$$g = 2\pi \int_0^\pi \frac{P(\cos \Theta)}{4\pi} \cos \Theta \sin \Theta d\Theta = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P(\cos \Theta) \cos \Theta d \cos \Theta \quad (4.5.50)$$

で定義される。

(4.5.49) を解析的に解くことを考える。

(4.5.49) を μ について -1 から 1 まで積分することで、

$$\frac{dI_1^0}{d\tau} = 3(1 - \tilde{\omega})I_0^0 - \frac{3}{4}\tilde{\omega}F_0 e^{-\tau/\mu_0} \quad (4.5.51a)$$

を得る。さらに、(4.5.49) の両辺に μ を掛けて、 μ について -1 から 1 まで積分することで

$$\frac{dI_0^0}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega}g)I_1^0 + \frac{3}{4}\tilde{\omega}g\mu_0 F_0 e^{-\tau/\mu_0} \quad (4.5.51b)$$

を得る。

(4.5.51b) の両辺を τ で微分し、(4.5.51a) を代入することで、

$$\frac{d^2 I_0}{d\tau^2} = k^2 I_0 - \chi e^{-\tau/\mu_0} \quad (4.5.52)$$

を得る. ここで

$$k^2 = 3(1 - \tilde{\omega}g)(1 - \tilde{\omega}) \quad (4.5.53)$$

$$\chi = \frac{3}{4}\tilde{\omega}F_0(1 + g - \tilde{\omega}g) \quad (4.5.54)$$

である. この2階常微分方程式の解は,

$$I_0 = Ke^{k\tau} + He^{-k\tau} + \Psi e^{-\tau/\mu_0} \quad (4.5.55)$$

である. ただし Ψ は,

$$\Psi = \frac{3\tilde{\omega}}{4}F_0[1 + g(1 - \tilde{\omega})]/(k^2 - 1/\mu_0^2) \quad (4.5.56)$$

である.

同様に, (4.5.51a) の両辺を τ で微分し, (4.5.51b) を代入することで,

$$\frac{d^2I_1}{d\tau^2} = a^2I_0 - \Upsilon e^{-\tau/\mu_0} \quad (4.5.57)$$

を得る. ここで,

$$a^2 = 3(1 - \tilde{\omega})/(1 - \tilde{\omega}g) \quad (4.5.58)$$

$$\Upsilon = \frac{3\tilde{\omega}}{4}\frac{F_0}{\mu_0}[3(1 - \tilde{\omega})g\mu_0^2 + 1] \quad (4.5.59)$$

である. この2階常微分方程式の解は,

$$I_1 = aKe^{k\tau} - aHe^{-k\tau} - \xi e^{-\tau/\mu_0} \quad (4.5.60)$$

である. ただし ξ は,

$$\xi = \frac{3\tilde{\omega}}{4}\frac{F_0}{\mu_0}[1 + 3g(1 - \tilde{\omega})\mu_0^2]/(k^2 - 1/\mu_0^2) \quad (4.5.61)$$

である. (4.5.55), (4.5.60) の K, H は境界条件を与えることによって定まる.

いま境界条件として, 大気上端での下向き散乱光はなく, 大気下端での上向き散乱光もないものとする,

$$I(0 : -\mu) = I_0(0) - \mu I_1(0) = 0 \quad (4.5.62)$$

$$I(\tau_1 : \mu) = I_0(\tau_1) + \mu I_1(\tau_1) = 0 \quad (4.5.63)$$

となる。この境界条件を用いて K と H を求める。境界条件に I_0 と I_1 をそれぞれ代入すると、

$$\begin{aligned} I(0 : -\mu) &= K + H + \Psi - \mu(aK - aH - \xi) \\ &= (1 - \mu a)K + (1 + \mu a)H + \Psi + \mu\xi \end{aligned} \quad (4.5.64)$$

$$\begin{aligned} I(\tau_1 : \mu) &= Ke^{k\tau_1} + He^{-k\tau_1} + \Psi e^{-\tau_1/\mu_0} + \mu(aKe^{k\tau_1} - aHe^{-k\tau_1} - \xi e^{-\tau_1/\mu_0}) \\ &= (1 + \mu a)Ke^{k\tau_1} + (1 - \mu a)He^{-k\tau_1} + (\Psi - \mu\xi)e^{-\tau_1/\mu_0} \end{aligned} \quad (4.5.65)$$

ここで、見やすくするため

$$u = 1 - \mu a, \quad v = 1 + \mu a, \quad \gamma = \Psi + \mu\xi, \quad \varepsilon = \Psi - \mu\xi \quad (4.5.66)$$

と置き換えると

$$uK + vH + \gamma = 0 \quad (4.5.67)$$

$$vKe^{k\tau_1} + uHe^{-k\tau_1} + \varepsilon e^{-\tau_1/\mu_0} \quad (4.5.68)$$

となる。これら2式を連立させて解くと、

$$K = -\frac{\varepsilon v e^{-\tau_1/\mu_0} - u\gamma e^{k\tau_1}}{v^2 e^{k\tau_1} - u^2 e^{-k\tau_1}} \quad (4.5.69)$$

$$H = \frac{\varepsilon u e^{-\tau_1/\mu_0} - v\gamma e^{k\tau_1}}{v^2 e^{k\tau_1} - u^2 e^{-k\tau_1}} \quad (4.5.70)$$

となり K, H が得られる。

これらの結果から、上向き、下向き放射フラックスはそれぞれ、

$$F^+(\tau) = 2\pi \int_0^1 (I_0 + \mu I_1) \mu d\mu = \pi(I_0 + \frac{2}{3}I_1) \quad (4.5.71)$$

$$F^-(\tau) = 2\pi \int_0^{-1} (I_0 + \mu I_1) \mu d\mu = \pi(I_0 - \frac{2}{3}I_1) \quad (4.5.72)$$

となる。

Eddington 近似ではある程度等方的な放射場を仮定しており、多重散乱が卓越するような光学的に厚い層に対しては有用な近似であるが、前方散乱が卓越するような光学的に薄い層に対しては精度が低くなる。前方散乱が強いような場合、散乱位相関数は $\Theta = 0$ の方向にピークをもつため、ルジャンドル級数で散乱位相関数を展開する際には、より高次の項まで考慮しなければならない。したがって $l = 1$ の項で打ち切るような Eddington 近似は成り立たなくなるためである。^{*6}

^{*6}Eddington 近似の精度に関する詳細な考察は本研究では行っていない。また、本研究では扱っていないが、この問題について改良を行った近似に δ -Eddington 近似がある。 δ -Eddington 近似では、精度を上げるために散乱位相関数から前方散乱のピークを除去して散乱を受けない直達光として扱う。

第5章 まとめ

本研究では、地球放射と太陽放射の放射伝達方程式を導出し、その解析解を Eddington 近似を用いて求めた。前者については波長と大気分子の半径との関係から散乱の影響は小さいと判断し、散乱を無視して議論を行った。後者については散乱も考慮して議論を行った。

地球放射の放射伝達方程式や解析解は散乱を考慮した場合と比べて平易な形で表せた。対して太陽放射の放射伝達方程式は形が複雑で、そのままでは解析解を求めることができない。また解析解を求める際に用いた Eddington 近似は、比較的対称性が良く、ほぼ等方的な散乱についてはよく再現できるものの、位相関数が極端に非対称な場合などでは精度が低くなり近似として有効でない。

今回の研究では、近似の精度に関する議論までは踏み込めなかったため、今後は Eddington 近似の精度や、その問題を解消するような別の近似 (δ -Eddington 近似など) についても考察していきたい。

付録

付録 A: (3.1.6) の導出

有限大気内における上向き, 下向き放射輝度を求める.

まず上向き放射輝度を求める.

平行平面大気における放射伝達方程式は,

$$\mu \frac{dI_\nu(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = I_\nu(\tau, \mu, \phi) - J_\nu(\tau, \mu, \phi)$$

である. この式の両辺に $e^{-\tau/\mu}$ を掛けると,

$$\mu e^{-\tau/\mu} \frac{dI_\nu(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = I_\nu(\tau, \mu, \phi) e^{-\tau/\mu} - J_\nu(\tau, \mu, \phi) e^{-\tau/\mu}$$

整理すると,

$$\frac{d}{d\tau} \{ I_\nu(\tau, \mu, \phi) e^{-\tau/\mu} \} = -\frac{1}{\mu} J_\nu(\tau, \mu, \phi) e^{-\tau/\mu}$$

両辺を $\tau = \tau$ から $\tau = \tau_1$ まで積分すると,

$$\int_\tau^{\tau_1} \frac{d}{d\tau} \{ I_\nu(\tau, \mu, \phi) e^{-\tau/\mu} \} = \int_\tau^{\tau_1} -\frac{1}{\mu} J_\nu(\tau, \mu, \phi) e^{-\tau/\mu}$$

$$[e^{\tau/\mu} I_\nu(\tau, \mu, \phi)]_\tau^{\tau_1} = \int_\tau^{\tau_1} -\frac{1}{\mu} J_\nu(\tau, \mu, \phi) e^{-\tau/\mu} d\tau$$

$$e^{\tau_1/\mu} I_\nu(\tau_1, \mu, \phi) - e^{\tau/\mu} I_\nu(\tau, \mu, \phi) = \int_\tau^{\tau_1} -\frac{1}{\mu} J_\nu(\tau, \mu, \phi) e^{-\tau/\mu} d\tau$$

両辺に $e^{\tau/\mu}$ を掛けると

$$I_\nu(\tau, \mu, \phi) = I_\nu(\tau_1, \mu, \phi) e^{-(\tau_1-\tau)/\mu} + \int_\tau^{\tau_1} J_\nu(t, \mu, \phi) e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu}$$

となり, $\tau = \tau$ における上向き放射輝度が求まる. 同様の操作を行うことによって, 下向き放射輝度は,

$$I_{\nu}(\tau, -\mu, \phi) = I_{\nu}(0, -\mu, \phi)e^{-(t-\tau)/\mu} + \int_0^{\tau} J_{\nu}(t, -\mu, \phi)e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu}$$

と求まる.

付録 B: (4.3.15) の導出

まず下端から入射した放射輝度の一次散乱や吸収などによる減衰

$$dI(z, \mu, \phi) = -\sigma_e N I(z, \mu, \phi) \frac{dz}{\cos \theta} \quad (4.3.12)$$

を考える。光学的厚さを

$$\tau = \int_z^\infty \sigma_e N dz$$

と定義すると,

$$d\tau = -\sigma_e N dz$$

である。この変換を適用し, さらに $\mu = \cos \theta$ とおくと

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = I(\tau, \mu, \phi)$$

となる。

次に (μ', ϕ') 方向から (μ, ϕ) 方向に多重散乱される散乱光による (μ, ϕ) 方向への放射輝度の増加

$$dI(z, \mu, \phi) = \sigma_s N \frac{dz}{\cos \theta} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I(z, \mu', \phi') \frac{P(\mu, \phi; \mu', \phi')}{4\pi} d\mu' d\phi'$$

を考える。先程と同様に

$$d\tau = -\sigma_e N dz$$

の変換を適用し, さらに $\mu = \cos \theta$ とおくと

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\sigma_s}{\sigma_e} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I(z, \mu', \phi') P(\mu, \phi; \mu', \phi') d\mu' d\phi'$$

となる。ここで, 一次散乱による散乱成分の割合を示す単一散乱アルベドは

$$\tilde{\omega} = \frac{k_s}{k_e} = \frac{\sigma_s}{\sigma_e}$$

と書けるので, これを用いると,

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = -\frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I(z, \mu', \phi') P(\mu, \phi; \mu', \phi') d\mu' d\phi'$$

と書ける.

さらに, 入射太陽光の直達成分が一次散乱を受けることによる (μ, ϕ) 方向への放射輝度の増加

$$dI(z, \mu, \phi) = \sigma_s N \frac{dz}{\cos \theta} F(z) \frac{P(\mu, \phi; -\mu_0, \phi_0)}{4\pi}$$

について考える.

ビーク・ブーゲー・ランバートの法則より,

$$F(z) = \pi F_0 \exp \left\{ -\frac{1}{\cos \theta_0} \int_z^\infty \sigma_e(z') N(z') dz' \right\} = \pi F_0 e^{-\tau/\mu_0}$$

と書けることに加えて, 先程と同様に

$$d\tau = -\sigma_e N dz$$

の変換を適用し, さらに $\mu = \cos \theta$, $\omega_0 = k_s/k_e = \sigma_s/\sigma_e$ を適用することで,

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = -\frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \pi F_0 P(\mu, \phi; -\mu_0, \phi_0) e^{-\tau/\mu_0}$$

と書ける.

これら3つのことが同時に起こっていると考え. 多重散乱による散乱光と, 太陽光の直達成分の一次散乱は放射輝度の増加として働くので, 放射源関数 $J(\tau, \mu, \phi)$ と表現することができ, 放射伝達方程式は,

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = I(\tau, \mu, \phi) - J(\tau, \mu, \phi)$$

放射源関数は

$$J(\tau, \mu, \phi) = \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', \phi') P(\mu, \phi; \mu', \phi') d\mu' d\phi' + \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \pi F_0 P(\mu, \phi; -\mu_0, \phi_0) e^{-\tau/\mu_0}$$

となり, 導出できた.

付録 C: (4.4.18), (4.4.19) の導出

散乱位相関数を, ルジャンドル関数を用いて展開する際の展開係数を求める

まず散乱位相関数が,

$$P(\cos \Theta) = \sum_{l=0}^N \omega_l P_l(\cos \Theta)$$

と展開できるとする. 両辺に $p_l(\cos \Theta)$ をかけて -1 から 1 まで積分すると,

$$\int_{-1}^1 P(\cos \Theta) P_l(\cos \Theta) d(\cos \Theta) = \sum_{l'=0}^N \omega_{l'} \int_{-1}^1 P_l(\cos \Theta) P_{l'}(\cos \Theta) d(\cos \Theta)$$

ここでルジャンドル多項式の直交性から,

$$\int_{-1}^1 P_l(\cos \Theta) P_{l'}(\cos \Theta) d(\cos \Theta) = \begin{cases} 0 & l \neq l' \\ \frac{2}{2l+1} & l = l' \end{cases}$$

が成り立つので, $l = l'$ のとき,

$$\int_{-1}^1 P(\cos \Theta) P_l(\cos \Theta) d(\cos \Theta) = \omega_l \frac{2}{2l+1}$$

$$\omega_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 P(\cos \Theta) P_l(\cos \Theta) d(\cos \Theta)$$

となり, 展開係数が求まった.

付録 D: ルジャンドル多項式の加法定理

球座標での 3 次元ラプラス方程式

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f_n}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f_n}{\partial \phi^2} + n(n+1)f_n = 0 \quad (\text{D.1})$$

の解 $f_n(\theta, \phi)$ を球面調和関数とよぶ。球面調和関数は級数を用いて

$$f_n(\theta, \phi) = \sum_{m=0}^n (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta) \quad (\text{D.2})$$

と展開することができる。ただし $P_n^m(\cos \theta)$ はルジャンドル陪関数

$$P_l^m(\cos \theta) = (1 - \cos^2 \theta)^{m/2} \frac{d^m P_l(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m} \quad (\text{D.3})$$

である。

ここで、二つの球面調和関数

$$f_n(\theta, \phi) = \sum_{m=0}^n (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta) \quad (\text{D.4.a})$$

$$g_n(\theta, \phi) = \sum_{m=0}^n (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta) \quad (\text{D.4.b})$$

について、その積を ϕ について 0 から 2π まで積分すると、

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} f_n(\theta, \phi) g_n(\theta, \phi) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \sum_{m=0}^n (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi)(C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi) [P_n^m(\cos \theta)]^2 \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

三角関数の直交性^{*1}から

$$= 2\pi A_0 C_0 [P_n(\cos \theta)]^2 + \pi \sum_{m=1}^n (A_m C_m + B_m D_m) [P_n^m(\cos \theta)]^2 \quad (\text{D.6})$$

^{*1}三角関数の直交性

$$\int_0^{2\pi} \cos m\phi \sin m\phi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos m\phi \cos m\phi = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin m\phi \sin m\phi = \pi.$$

となる. さらに両辺に $\sin\theta$ をかけて, θ について 0 から π まで積分すると,

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi f_n(\theta, \phi) g_n(\theta, \phi) \sin\theta d\theta \\ &= \int_{-1}^1 \left[2\pi A_0 C_0 [P_n(\cos\theta)]^2 + \pi \sum_{m=1}^n (A_m C_m + B_m D_m) [P_n(\cos\theta)]^2 \right] d\cos\theta \\ &= \frac{4\pi}{2n+1} \left\{ A_0 C_0 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \frac{(n+m)!}{(n-m)!} (A_m C_m + B_m D_m) \right\} \end{aligned} \quad (D.7)$$

ここで, ルジャンドル関数の直交性^{*2}を用いた.

さらに $f_n(\theta, \phi)$ を (Θ, α) を用いて表したものを $\bar{f}_n(\Theta, \alpha)$ として積分

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \bar{f}_n(\Theta, \alpha) P_n(\cos\Theta) \sin\Theta d\Theta \quad (D.8)$$

を考える. $\bar{f}_n(\Theta, \alpha)$ は n 次の球面関数なので,

$$\bar{f}_n(\Theta, \alpha) = A_0 P_n(\cos\Theta) \sum_{m=1}^n (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) P_n^m(\cos\Theta) \quad (D.9)$$

と展開できる. $\cos\Theta = 1$ とおくと, $P_n^m(1) = 0$ なので

$$A_0 P_n(1) = A_0 = \bar{f}_n(\Theta = 0, \alpha) = f_n(\theta', \phi') \quad (D.10)$$

ここで, (D.7) において $g_n(\theta, \phi) = P_n(\cos\Theta)$ すなわち $C_0 = 1$ で他の係数を 0 とすることで

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \bar{f}_n(\Theta, \alpha) P_n(\cos\Theta) \sin\Theta d\Theta \\ &= \frac{4\pi}{2n+1} A_0 = \frac{4\pi}{2n+1} f_n(\theta', \phi') \end{aligned} \quad (D.11)$$

となるので,

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi f_n(\theta, \phi) P_n(\cos\Theta) \sin\theta d\theta = \frac{4\pi}{2n+1} f_n(\theta', \phi') \quad (D.12)$$

^{*2}ルジャンドル関数の直交性

$$\int_{-1}^1 [P_n(\cos\theta)]^2 d\cos\theta = \frac{2}{2n+1}$$

ルジャンドル陪関数の直交性

$$\int_{-1}^1 [P_n^m(\cos\theta)]^2 d\cos\theta = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

なる関係が得られる. さらに左辺において $f_n(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi$ とおいて計算すると,

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi P_n(\cos \Theta) \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \sum_{k=0}^n (A_k \cos k\phi + B_k \sin k\phi) P_n^k(\cos \theta) \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

三角関数の直交性を用いると,

$$\int_0^\pi \pi A_m [P_n^m(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta \quad (\text{D.14})$$

ルジャンドル関数の直交性を用いると,

$$\frac{2\pi(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} A_m \quad (\text{D.15})$$

となる.

$$\frac{2\pi(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} A_m = \frac{4\pi}{2n+1} f_n(\theta', \phi') = \frac{4\pi}{2n+1} P_n^m(\cos \theta') \cos m\phi' \quad (\text{D.16})$$

なので,

$$A_m = \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta') \cos m\phi' \quad (\text{D.17})$$

となる. $f_n(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi$ とおき同様の操作をすることで,

$$B_m = \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta') \sin m\phi' \quad (\text{D.18})$$

となる.

$P_n(\cos \Theta)$ は,

$$\begin{aligned} P_n(\cos \Theta) &= \sum_{m=0}^n (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) P_n^m(\mu) \\ &= \frac{A_0}{2} P_n(\mu) + \sum_{m=1}^n (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) P_n^m(\mu) \end{aligned}$$

というように展開できるので, この式に A_m, B_m をそれぞれ代入することで,

$$P_n(\cos \Theta) = P_l(\mu) P_l(\mu') + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos m(\phi' - \phi) \quad (\text{D.19})$$

を得る.

付録 E: (4.4.31) の導出

まず必要な式を再掲する.

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = I(\tau, \mu, \phi) - J(\tau, \mu, \phi) \quad (4.3.15)$$

$$\begin{aligned} J(\tau, \mu, \phi) &= \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', \phi') P(\mu, \phi; \mu', \phi') d\mu' d\phi' \\ &+ \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \pi F_0 P(\mu, \phi; -\mu_0, \phi_0) e^{-\tau/\mu_0} \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

$$P(\mu, \phi; \mu', \phi') = \sum_{l=m}^N \sum_{m=0}^N \omega_l^m(\mu) P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos m(\phi' - \phi) \quad (4.4.32)$$

$$I(\tau, \mu, \phi) = \sum_{m=0}^N I^m(\tau, \mu) \cos m(\phi_0 - \phi) \quad (4.4.33)$$

(4.3.15) の左辺は, (4.4.33) を用いて,

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = \mu \frac{d}{d\tau} \sum_{m=0}^N I^m(\tau, \mu) \cos m(\phi_0 - \phi) \quad (E.1)$$

と書ける.

また, (4.3.16) の右辺第一項に, (4.4.32), (4.4.33) を代入することで,

$$\begin{aligned} &\frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', \phi') P(\mu, \phi; \mu', \phi') d\mu' d\phi' \\ &= \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^N I^m(\tau, \mu') \cos m(\phi_0 - \phi') \sum_{l=m}^N \sum_{m=0}^N \omega_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos m(\phi' - \phi) d\mu' d\phi' \\ &= \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^N \left[I^m(\tau, \mu') \cos m(\phi_0 - \phi') \sum_{l=m}^N \omega_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos m(\phi' - \phi) d\mu' d\phi' \right] \\ &= \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^N \left[I^m(\tau, \mu') \cos m(\phi_0 - \phi') \cos m(\phi' - \phi) \sum_{l=m}^N \omega_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') d\mu' d\phi' \right] \end{aligned}$$

積分を分けて書くと,

$$= \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \sum_{m=0}^N \int_0^{2\pi} \left[\cos m(\phi_0 - \phi') \cos m(\phi' - \phi) d\phi' \sum_{l=m}^N \omega_l^m \int_{-1}^1 P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') I^m(\tau, \mu) d\mu' \right] \quad (\text{E.2})$$

ここで, コサイン級数の直交性から,

$$\int_0^{2\pi} \cos m_1(\phi_0 - \phi') \cos m_2(\phi' - \phi) d\phi' = \begin{cases} 0 & m_1 \neq m_2 \\ \pi \cos m(\phi_0 - \phi) & m_1 = m_2 \neq 0 \\ 2\pi & m_1 = m_2 = 0 \end{cases}$$

と書けるので, (E.2) は

$$\begin{aligned} &= \frac{\tilde{\omega}}{2} \sum_{l=0}^N \omega_l^0 P_l^0(\mu) \int_{-1}^1 P_l^0(\mu') I^0(\tau, \mu') d\mu' \\ &+ \frac{\tilde{\omega}}{4} \sum_{m=1}^N \left[\cos m(\phi_0 - \phi) d\phi' \sum_{l=m}^N \omega_l^m P_l^m(\mu) \int_{-1}^1 P_l^m(\mu') I^m(\tau, \mu) d\mu' \right] \\ &= (1 + \delta_{0,m}) \frac{\tilde{\omega}}{4} \sum_{l=m}^N \sum_{m=0}^N \cos m(\phi_0 - \phi) \omega_l^m P_l^m(\mu) \int_{-1}^1 P_l^m(\mu') I^m(\tau, \mu') d\mu' \end{aligned}$$

となる.

また, (4.3.16) の右辺第二項に, (4.4.32) を代入することで,

$$\begin{aligned} &\frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \pi F_0 p(\mu, \phi; -\mu_0, \phi_0) e^{-\tau/\mu_0} \\ &= \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \pi F_0 e^{-\tau/\mu_0} \sum_{l=m}^N \sum_{m=0}^N \omega_l^m(\mu) P_l^m(\mu) P_l^m(-\mu_0) \cos m(\phi_0 - \phi) \end{aligned}$$

と書ける.

よって放射伝達方程式は,

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{d\tau} \sum_{m=0}^N I^m(\tau, \mu) \cos m(\phi_0 - \phi) &= \sum_{m=0}^N I^m(\tau, \mu) \cos m(\phi_0 - \phi) \\ &- (1 + \delta_{0,m}) \frac{\tilde{\omega}}{4} \sum_{l=m}^N \sum_{m=0}^N \cos m(\phi_0 - \phi) \omega_l^m P_l^m(\mu) \int_{-1}^1 P_l^m(\mu') I^m(\tau, \mu') d\mu' \\ &- \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \pi F_0 e^{-\tau/\mu_0} \sum_{l=m}^N \sum_{m=0}^N \omega_l^m(\mu) P_l^m(\mu) P_l^m(-\mu_0) \cos m(\phi_0 - \phi) \end{aligned}$$

と書ける. よって $m = 0$ から N までの $N + 1$ 個の独立した形に分解すると,

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI^m(\tau, \mu)}{d\tau} = & I^m(\tau, \mu) - (1 + \delta_{0,m}) \frac{\tilde{\omega}}{4} \sum_{l=m}^N \omega_l^m P_l^m(\mu) \int_{-1}^1 P_l^m(\mu') I^m(\tau, \mu') d\mu' \\ & - \frac{\tilde{\omega}}{4} \sum_{l=m}^N \omega_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(-\mu_0) \pi F_0 e^{-\tau/\mu_0} \end{aligned}$$

と書ける.

謝辞

本研究に関して、指導教官である林祥介教授、岩山隆寛准教授には研究内容の指針を示していただきました。

また博士課程前期課程の皆様をはじめ、地球および惑星大気科学研究室の皆様には、論文のテーマに関する相談から内容、発表に関する相談まで数多くの助言をいただきました。

ここで改めて深く感謝し、心よりお礼申し上げます。

参考文献

1. Goody and Yung, 1989: Atmospheric Radiation Theoretical Basis Second Edition, 519pp.
2. Liou, K. N, 2002: An Introduction to Atmospheric Radiation SECOND EDITION, 583pp.
3. 会田 勝, 1954: 気象学のプロムナード 8 大気と放射過程 -大気の熱源と放射収支を語る-, 東京堂出版, 280pp.
4. 浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎, 朝倉書店, 267pp.
5. 井谷優花, 2010: 大気の射出限界と鉛直温度分布の関係についての考察, 神戸大学卒業論文
6. 小倉義光, 1999: 一般気象学 [第2版], 東京大学出版会, 308pp.
7. 國政弘行, 2000: 特殊関数とその応用について, 兵庫教育大学大学院修士論文
8. 小杉田 圭之, 2002: 火星大気の散乱温室効果: δ -エディントン近似および二方向近似による検討, 北海道大学修士論文
9. 柴田清孝, 1999: 応用気象学シリーズ 1 光の気象学, 朝倉書店, 182pp.
10. 力武常次, 佐藤良輔, 萩原幸男, 1980: 物理数学 1 地球科学を主体として (基礎編), 学会出版センター, 163pp.