

赤道波の特性に関する考察

藤島 美保

神戸大学 理学部 地球惑星科学科
地球および惑星大気科学研究室

2015/03/25

要旨

本論文では、地球の赤道域に存在する大気海洋中の大規模波動に関する Matsuno (1966) のレビューを行った。まず、線形化された浅水方程式系を議論の出発点として、東西方向に伝播する波動解を求めた。波動解は特別な場合を除いて3つ得られ、それらは東進慣性重力波、西進慣性重力波、ロスビー波である。特別な場合、すなわち南北のモードが小さい場合には混合ロスビー重力波や赤道ケルビン波が得られた。次に、速度場と圧力場の関係及び赤道域での波の捕捉の観点から、それぞれの波の特性について考察した。さらに、本論文で用いた方程式系をジオポテンシャルに関する1本の閉じた方程式に書いたとき、その式とラプラスの潮汐方程式が対応していることについても触れた。最後に強制振動問題の一般論を展開した。

目次

第1章 序論	3
第2章 支配方程式系	4
2.1 浅水方程式系	4
2.2 2層モデル	6
第3章 自由振動	9
3.1 分散関係式	9
3.2 固有関数	15
3.3 各モードの空間構造の特徴	16
3.4 結論	24
第4章 波の捕捉	25
4.1 慣性重力波	26
4.2 ロスビー波	27
4.3 赤道ケルビン波	28
4.4 結論	28

赤道波の特性に関する考察	2
第5章 潮汐理論と関連した近似の有効性	29
第6章 強制振動	31
6.1 一般論	31
第7章 まとめ	34
謝辞	36
付録 A : 分散関係式の導出	37
付録 B : 分散関係式の解法	40
付録 C : 各モードの空間構造の図	43
付録 D : 潮汐方程式の導出	48
参考文献	50

第1章 序論

熱帯域は地球上の降水の約3分の2が降っている。この水蒸気の凝結に伴う潜熱の解放による大気加熱が起こっている。この加熱により地球規模の大気循環が駆動されているので、熱帯域は大気循環の駆動源といわれている(新田, 1982)。その熱帯域の大気中では様々な時間・空間スケールの変動が生じており、熱帯で観測される現象にはエルニーニョ・南方振動(El Niño - Southern Oscillation; ENSO)(Philander, 1989) やマッデン・ジュリアン振動(Madden - Julian Oscillation; MJO)(Madden and Julian, 1972), 赤道波などが知られる。その変動の現れが、太平洋域の積雲対流群の分布変化やそれに伴う降水分布, 降水の強さの変化, 海面水温の変動として観測されている。現在に至るまで、そのメカニズムを解明するために多くの研究が行われてきた。

このような熱帯域の現象のなかで、本論文では赤道波に着目した。ENSOの発生に海洋の赤道波が関係しているという研究(升本, 安藤, 2013)があることや、MJOの伝播に赤道波が寄与していると考えられている(Masunaga, 2007)ことから、赤道域での大気海洋現象においてこの大気波動の役割は重要であると考えられる。そこで本論文では、赤道波に関する理論的な研究であるMatsuno(1966)のレビューを行い、赤道域の大気波動の特性について議論する。

本論文の構成を述べる。第2章では、Matsuno(1966)で用いられた方程式系を示す。第3章では赤道波の自由振動について議論をし、各モードの空間構造の特徴について述べる。第4章では波が赤道域に捕捉されることを説明する。第5章では、Matsuno(1966)で扱われた系をジオポテンシャルに関する1本の閉じた方程式に書き下したとき、それがラプラスの潮汐方程式を近似したものと対応していることを示す。第6章では外力が与えられたときに生じる運動について議論する。第7章は本論文のまとめである。

第2章 支配方程式系

2.1 浅水方程式系

地球の大気海洋の大規模循環を考える場合に頻りに用いられる β 平面上の浅水方程式について述べる. 東向きに x 軸を, 北向きに y 軸, 鉛直上方に z 軸をとった直交直線座標系において, 線形化された運動方程式と線形化された連続の式は以下のように書ける:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - fv + g\frac{\partial h}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu + g\frac{\partial h}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= 0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

ここで, u と v はそれぞれ x, y 方向の速度, t は時間, h は平均の深さ H の海に対する自由表面の変位, f はコリオリパラメータ, g は重力加速度である.

コリオリパラメータ f は一般に

$$f = 2\Omega \sin \theta\tag{2.2}$$

である. ここで Ω は地球の自転角速度, θ は緯度である. ある緯度 θ_0 からの南北方向の変位が微小であるとして, f を θ_0 まわりでテイラー展開する. 地球を半径 R の球としたとき, f の展開において $y(\equiv R(\theta - \theta_0))$ の1次の項のみを残す近似を行う:

$$f = 2\Omega \sin \theta\tag{2.3}$$

$$\simeq 2\Omega \sin \theta_0 + 2\Omega(\theta - \theta_0) \cos \theta_0.\tag{2.4}$$

今, 微小変位を考えているので, $\theta - \theta_0 \simeq y/R$ より,

$$f \simeq 2\Omega \sin \theta_0 + \left(\frac{2\Omega}{R} \cos \theta_0\right) y\tag{2.5}$$

$$= f_0 + \beta y\tag{2.6}$$

となる. ここで, $f_0 = 2\Omega \sin \theta_0$, $\beta = \frac{2\Omega}{R} \cos \theta_0$ である. コリオリパラメータ f を (2.6) の形で与える近似を β 平面近似という.

赤道付近の運動を考えると, $\theta_0 = 0$ にとると $f_0 = 0$ なので,

$$f = \beta y \quad (2.7)$$

である. よって, (2.1) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \beta y v + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \beta y u + g \frac{\partial h}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

と書ける.

また, 高度 h の代わりにジオポテンシャル高度 ϕ ($\equiv gh$) を用いると (2.8) は以下のように書き換えられる:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \beta y v + \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \beta y u + \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

ここで $c^2 = gH$ である. 時間と長さの単位をそれぞれ

$$[T] = (1/c\beta)^{1/2} \quad [L] = (c/\beta)^{1/2} \quad (2.10)$$

ととってすべての物理量をスケールし直すと, (2.9) は

$$\frac{\partial u}{\partial t} - yv + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (2.11a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + yu + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad (2.11b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.11c)$$

と無次元化される^{*1}. (2.9) と (2.11a) ~ (2.11c) で同じ記号を用いているが, (2.11a)

^{*1}(2.9) を無次元化する. 無次元量をプライムつきで表すと,

$$\begin{cases} (x, y) = L(x', y') \\ t = Tt' \\ v = uv' \\ \phi = \Phi\phi' \end{cases}$$

~ (2.11c) のすべての変数は無次元であることに注意しておく。以降ではこの方程式を用いて議論を行う。

2.2 2層モデル

前節では順圧モデルを考えていたが、傾圧流体の方程式を (2.1) のように書くこともできる。例として圧力座標系における大気の2層モデルを考える。図 2.2.1 のように、連続に成層した大気を 0, 1, 2, 3, 4 と番号を付けた等圧面で区切り2つの層に分割する。等圧面はそれぞれ 0hPa, 250hPa, 500hPa, 750hPa, 1000hPa であり、レベル1と3には水平速度とジオポテンシャル、レベル0, 2, 4には鉛直速度を与える。ここで、大気上端と下端の境界条件として、鉛直速度は $\omega_0 = 0$, $\omega_4 = 0$ とする。レベル1と3には運動方程式、レベル2には熱力学方程式を適用すると、

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + f \mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_1 + \nabla \phi_1 = 0, \quad (2.12a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_3}{\partial t} + f \mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_3 + \nabla \phi_3 = 0, \quad (2.12b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_3 - \phi_1) + S \Delta p \omega_2 = 0, \quad (2.12c)$$

であるので、(2.9) は

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} - \beta L T y' v' + \frac{T^2}{L^2} \Phi \frac{\partial \phi'}{\partial x'} = 0,$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + \beta L T y' u' + \frac{T^2}{L^2} \Phi \frac{\partial \phi'}{\partial y'} = 0,$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t'} + \frac{c^2}{\Phi} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = 0.$$

と書ける。これに (2.10) を用いて、 $\Phi = c^2$ とする。さらに、以降の議論のためにプライムを取ると (2.11a) ~ (2.11c) となる。

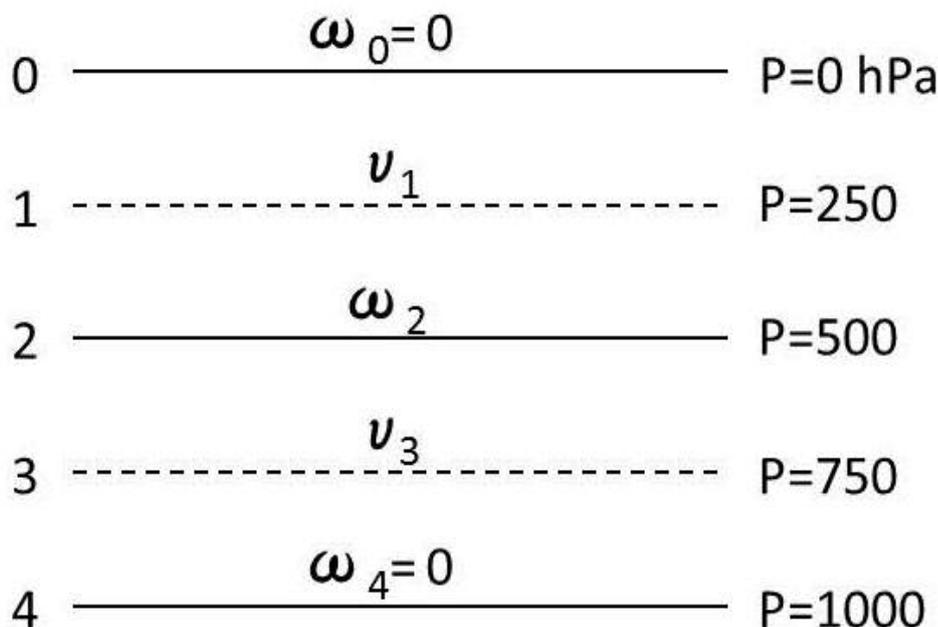


図 2.2.1: 大気の 2 層モデル

となる. ここで, $S \left(= \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial p} \frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial p} \right)$ は定数, e_z は鉛直方向の単位ベクトルである. (2.12a) と (2.12b) の差をとると, (2.12a) ~ (2.12c) は以下のように書き換えられる^{*2}.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_d}{\partial t} + f \mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_d + \nabla \phi_d &= 0, \\ \frac{\partial \phi_d}{\partial t} + \frac{S(\Delta p)^2}{2} \nabla \cdot \mathbf{v}_d &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

^{*2}(2.13) の 2 式目を導出する. 等圧面上の質量保存式,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

より, これをレベル 1 とレベル 3 に適用すると,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{\omega_2 - \omega_0}{\Delta p} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_3 + \frac{\omega_4 - \omega_2}{\Delta p} &= 0, \end{aligned}$$

となる. これらの式から ω_2 を求めると,

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \Delta p \nabla \cdot \mathbf{v}_d$$

ここで, $v_d = v_3 - v_1$, $\phi_d = \phi_3 - \phi_1$ と定義している. (u, v, ϕ) を (u_d, v_d, ϕ_d) に, c^2 を $c_i^2 (= S\Delta p^2/2)$ に, f を βy に置きかえると, (2.9) は (2.13) と等しくなる. c_i は内部重力波の速度である.

このように, 順圧モデル (2.1) は成層流体の場合にも適用することができる. そこで, 以下の章では順圧モデルを用いて議論を行う.

である. よって (2.12c) は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_d}{\partial t} + S\Delta p \frac{1}{2} \Delta p \nabla \cdot \mathbf{v}_d &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \phi_d}{\partial t} + \frac{S(\Delta p)^2}{2} \nabla \cdot \mathbf{v}_d &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

となり, (2.13) の 2 式目が導かれた.

第3章 自由振動

3.1 分散関係式

東西方向に伝播する波を考える. 全ての量が $e^{i(kx+\omega t)}$ の因数を持っているとすると, u, v, ϕ は

$$u = \hat{u}(y)e^{i(kx+\omega t)}, \quad (3.1a)$$

$$v = \hat{v}(y)e^{i(kx+\omega t)}, \quad (3.1b)$$

$$\phi = \hat{\phi}(y)e^{i(kx+\omega t)} \quad (3.1c)$$

となり, (2.11a) ~ (2.11c) に (3.1a) ~ (3.1c) を代入し, y の関数 $\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{\phi}(y)$ を改めて u, v, ϕ と置きなおすと,

$$i\omega u - yv + ik\phi = 0, \quad (3.2a)$$

$$i\omega v + yu + \frac{d\phi}{dy} = 0, \quad (3.2b)$$

$$i\omega\phi + iku + \frac{dv}{dy} = 0 \quad (3.2c)$$

となる. これらを v について整理する. (3.2a) と (3.2c) から, u と ϕ は v を用いて,

$$u = \frac{1}{i(\omega^2 - k^2)} \left(\omega y v + k \frac{dv}{dy} \right) \quad (3.3)$$

$$\phi = -\frac{1}{i(\omega^2 - k^2)} \left(k y v + \omega \frac{dv}{dy} \right) \quad (3.4)$$

と書ける. これらを (3.2b) に代入することで v に関する方程式

$$\frac{d^2v}{dy^2} + \left(\omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} - y^2 \right) v = 0 \quad (3.5)$$

が導かれる.

ここでは赤道付近 ($y = 0$) での波の運動を考えている. 赤道から遠く離れた付近では波が減衰すると考えられるので, 境界条件は

$$y \rightarrow \pm\infty \quad \text{のとき} \quad v \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

とするのが適切である. このとき, (3.5) を級数展開法で解くと, 分散関係式

$$\omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} = 2n + 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.7)$$

が得られる^{*3}. (3.5) の解は

$$v(y) = Ce^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) \quad (3.8)$$

で与えられる. ここで $H_n(y)$ は n 次のエルミート多項式であり, n は波の振動の南北方向のモードを示す. (3.7) は ω についての 3 次式なので, n と k の値が与えられたとき 3 つの解が得られる.

(3.7) に対して, $k \gg \omega$ と近似する. その結果得られる ω の 3 つの解の近似値は

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &\simeq \mp \sqrt{k^2 + 2n + 1} \\ \omega_3 &\simeq \frac{k}{k^2 + 2n + 1} \end{aligned} \quad (3.9)$$

となる. 有次元化したパラメータを用いて (3.9) を表現すると,

$$\begin{aligned} c_{1,2} &\simeq \mp c_g \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \frac{\beta}{c_g} (2n + 1)} \\ c_3 &\simeq \frac{\beta}{k^2 + \frac{\beta}{c_g} (2n + 1)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

となる. 重力波の速度 c は, ここでは混乱を避けるために代わりに c_g と表されている.

k の任意の値に対して 3 次の式 (3.7) を解くことによって 3 つの振動数を得ることが出来る. 添え字の 1, 2, 3 で示す振動数や伝播速度は, 以下の 3 種類の波の振動数や伝播速度をそれぞれ示している.

1. 東に伝播する慣性重力波
2. 西に伝播する慣性重力波
3. 西に伝播するロスビー波

^{*3}導出は付録を参照.

これらは波の振動数によって種類分けされている。

しかし、 $n = 0$ の場合には (3.9) は成立しない。また、 $v \equiv 0$ の場合にも分散関係式が求まる。そこで、 $n \geq 1$, $n = 0$, $v \equiv 0$ に場合分けをして各モードの性質を考える。

I. $v \neq 0$ の場合

(i) $n \geq 1$

Newton 法によって求めた解と上記の近似値を図示すると図 3.1.1 のようになる。Newton 法による解と近似値がほぼ一致しているため、 $n \geq 1$ のとき、任意の k の値に対して明確に異なる 3 つの ω の解が得られ、上記の 3 つの波が存在するといえる。Newton 法を用いた分散関係式の解法については付録 B を参照。

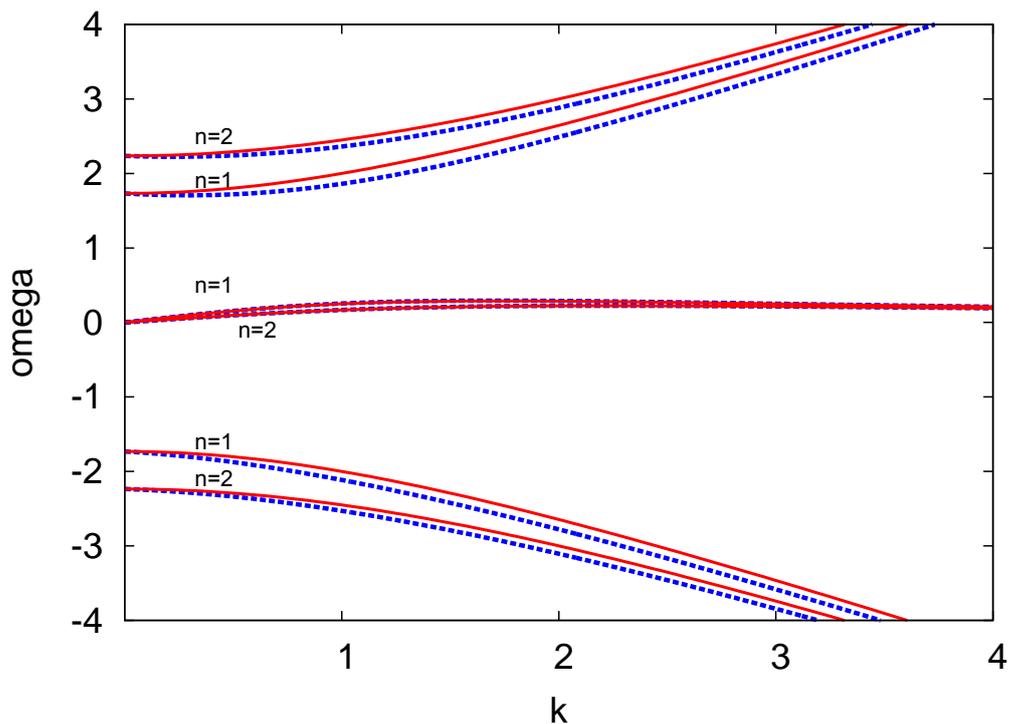


図 3.1.1: Newton 法により求めた解と $k \gg \omega$ としたときの近似値の分散関係
横軸は波数 k 、縦軸は振動数 ω である。青色は Newton 法により求めた解、赤色は近似値の分散曲線である。

(ii) $n = 0$

(3.7) に $n = 0$ を代入すると, 3つの解は以下のように分類される.

$$\omega_1 = -\frac{k}{2} - \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1}$$

$$\omega_2 = \begin{cases} -\frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1} & (k \leq 1/\sqrt{2} \text{ のとき}) \\ k & (k \geq 1/\sqrt{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\omega_3 = \begin{cases} k & (k \leq 1/\sqrt{2} \text{ のとき}) \\ -\frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1} & (k \geq 1/\sqrt{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

しかし, これらの解は3つの異なる波の振動数と1対1で対応していない. ロスビー波の振動数が慣性重力波の振動数よりも常に小さいこと, また (3.3) と (3.4) より $\omega = k$ を解とすると分母がゼロとなり解として不適であることから, $n = 0$ のときの固有値は

$$\omega_1 = -\frac{k}{2} - \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1} \quad (\text{東に伝播する慣性重力波}) \quad (3.11)$$

$$\omega_2 = -\frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1} \quad \begin{cases} k \leq 1/\sqrt{2} & (\text{西に伝播する慣性重力波}) \\ k \geq 1/\sqrt{2} & (\text{西に伝播するロスビー波}) \end{cases} \quad (3.12)$$

と再分類される^{*4}.

^{*4} ω_2 は, ロスビー波の振動数が慣性重力波の振動数よりも常に小さいため, $k = 1/\sqrt{2}$ を境に西進慣性重力波とロスビー波に分けられる.

II. $v = 0$ の場合

(3.7) は, (3.2a) ~ (3.2c) で $v \neq 0$ として得られたものであった. ここでは, $v = 0$ のときの (3.2a) ~ (3.2c) を考える. このとき (3.2a) ~ (3.2c) は,

$$i\omega u + ik\phi = 0, \quad (3.13a)$$

$$yu + \frac{d\phi}{dy} = 0, \quad (3.13b)$$

$$i\omega\phi + iku = 0 \quad (3.13c)$$

となる. (3.13a) と (3.13c) から,

$$(\omega - k)(\omega + k) = 0$$

となるので, $\omega = \pm k$ が得られる. このときの u と ϕ の解は,

$$\phi = u = Ce^{-\frac{1}{2}y^2} \quad (\omega = -k \text{ のとき}) \quad (3.14)$$

$$\phi = -u = Ce^{\frac{1}{2}y^2} \quad (\omega = k \text{ のとき}) \quad (3.15)$$

となる. 境界条件 (3.6) を考えると, 解 (3.15) はこの条件を満たさないため不適である. 一方, 解 (3.14) は (3.7) で $n = -1$ としたときに得られる解の一つであるので, $n = -1$ の解と分類することができる.

$n \geq 1, n = 0, v = 0 (n = -1)$ の振動数と波数の関係を図示すると, 図 3.1.2 のようになる. $n \geq 1$ の場合は $n = 1, 2$ を示している.

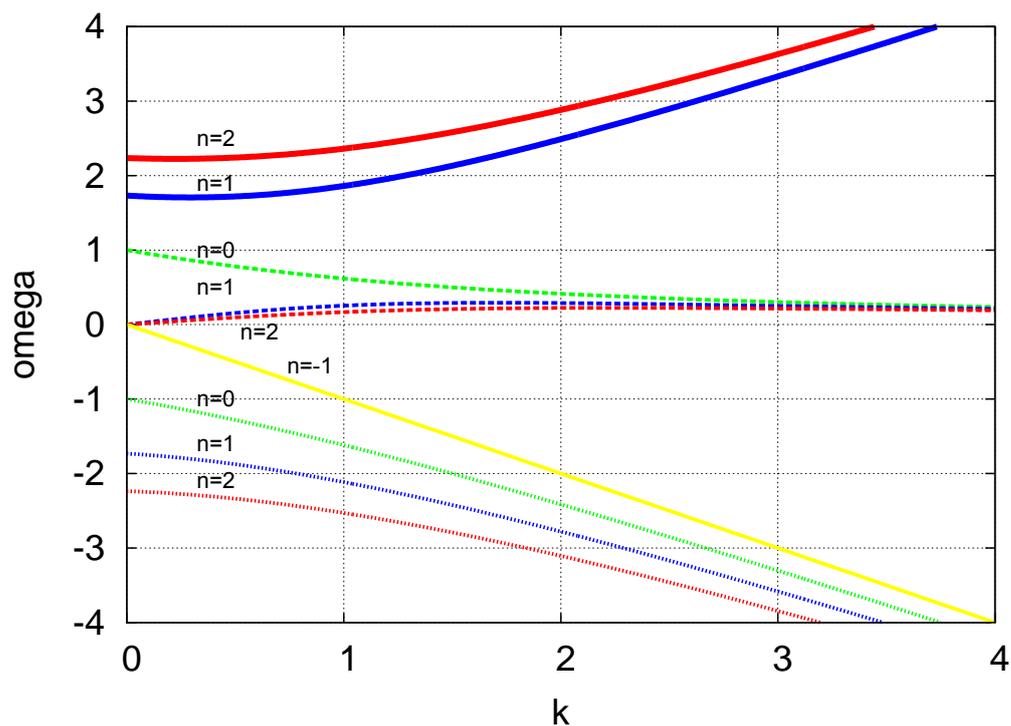


図 3.1.2: 各モードごとの分散関係

横軸は波数 k , 縦軸は振動数 ω である. 黄色は $n = -1$, 緑色は $n = 0$, 青色は $n = 1$, 赤色は $n = 2$ の分散曲線である. 点線は東進慣性重力波, 太い実線は西進慣性重力波, 破線の $n = 1, 2$ はロスビー波, 破線の $n = 0$ は混合ロスビー重力波, 細い実線は赤道ケルビン波を表す.

3.2 固有関数

前節では固有値 ω_{nl} を得た. l は n の値に対する (3.7) の 3 つの解を区別する添え字 1, 2 または 3 である. 前節より, $l = 1$ は東進慣性重力波, $l = 2$ は西進慣性重力波, $l = 3$ は西進ロスビー波である. この節では各固有値に属する固有関数を求める.

- $n \geq 1$ と $n = 0$ の場合

(3.3), (3.4) に (3.8) を代入すると u と ϕ は

$$u = \frac{C e^{-\frac{1}{2}y^2}}{i(\omega^2 - k^2)} \left\{ (\omega - k) y H_n + k \frac{dH_n}{dy} \right\}, \quad (3.16)$$

$$\phi = -\frac{C e^{-\frac{1}{2}y^2}}{i(\omega^2 - k^2)} \left\{ (k - \omega) y H_n + \omega \frac{dH_n}{dy} \right\} \quad (3.17)$$

となる. これにエルミート多項式の漸化式:

$$\frac{dH_n(y)}{dy} = 2nH_{n-1}(y),$$

$$H_{n+1}(y) = 2yH_n(y) - 2nH_{n-1}(y)$$

を用いると, u, v, ϕ を以下のように求めることができる. ここで, u, v, ϕ の表示を元に戻す.

$n \geq 1$ の場合

$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix}_{nl} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\omega_{nl} - k)\psi_{n+1} + n(\omega_{nl} + k)\psi_{n-1} \\ i(\omega_{nl}^2 - k^2)\psi_n \\ \frac{1}{2}(\omega_{nl} - k)\psi_{n+1} - n(\omega_{nl} + k)\psi_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

$n = 0$ の場合 ^{*5}

$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix}_{0l} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 2i(\omega_{0l} + k)\psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

^{*5} $l = 1, 2$

- $n = -1$ の場合 ^{*6}

前節から、解は (3.14) である。上と同様に u, v, ϕ の表示を元に戻すと、

$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix}_{-1} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ 0 \\ \psi_0 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

ここで、

$$\psi_n = e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) \quad (3.21)$$

である。

(3.18) ~ (3.20) の固有関数は完全直交系をつくる。(3.2a) ~ (3.2c) を書き換えると、

$$\Omega \xi + i\omega \xi = 0, \quad (3.22)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -y & ik \\ y & 0 & \frac{d}{dy} \\ ik & \frac{d}{dy} & 0 \end{pmatrix} \quad \xi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

となる。ここで、オペレータ Ω は歪エルミート行列、 ξ は固有関数である。歪エルミート行列とは、転置をとって複素共役をとると符号が反転したことを除いて元の行列と等しくなる行列のことである。このようなオペレータのすべての固有値は純虚数であり、対応する固有関数は互いに直交していることが知られている。そのため、これらの固有関数はエルミート関数の完全性から完全直交系をつくるといえる。

3.3 各モードの空間構造の特徴

ここでは各モードの速度場とジオポテンシャル場を図示し、その特徴について議論する。密度一定、静水圧平衡下の流体を考えているので、ジオポテンシャル場は圧力場に相当する。よって、以下ではジオポテンシャル場を圧力場として考える。

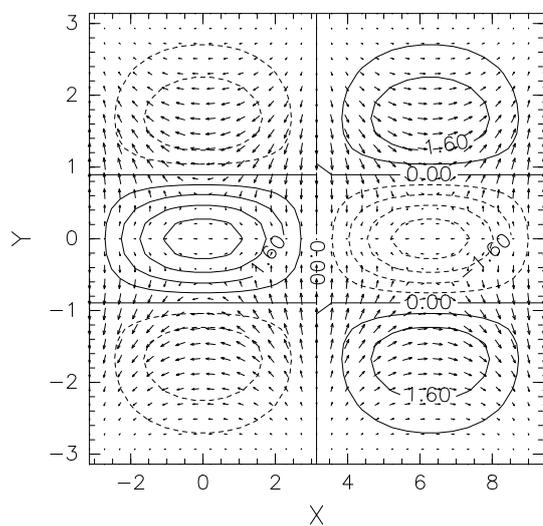
^{*6} $n = -1$ の場合、後に述べるが、この波は慣性重力波にもロスビー波にも分類できないため l は表記していない。

- $n \geq 1$ の場合

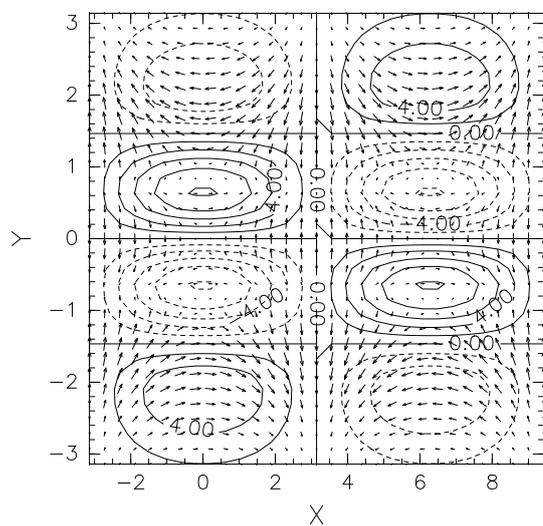
$n \geq 1$ の場合は東進慣性重力波, 西進慣性重力波, ロスビー波の3つの波が存在する. 図 3.3.3, 図 3.3.4, 図 3.3.5 に, $k = 0.5$ で $n = 1$ と 2 の場合の東進慣性重力波, 西進慣性重力波, ロスビー波に関する速度場と圧力場をそれぞれ示す. これらの図から分かるように, 慣性重力波とロスビー波では明らかな違いがある.

慣性重力波 (図 3.3.3, 図 3.3.4 参照) では $(x, y) = (0, -2), (0, 0), (0, 2)$ などの付近で速度ベクトルが南北方向を向いており, 収束・発散が生じている. 収束部では表面が持ち上げられ, 発散部では下降する. この繰り返しによって波が伝播している.

ロスビー波 (図 3.3.5 参照) は高緯度で速度ベクトルが等値線に沿っており, ほぼ地衡流平衡が成立している. 速度ベクトルの大きさは, コリオリ力が低緯度で弱くなるため赤道に近づくにつれ大きくなっている. また, $n = 2$ では $|y| \lesssim 0.5$ における時計回りの渦に対する圧力場が存在していない. これは圧力分布が赤道に対して反対称であるため, 赤道上に分布しないからである.

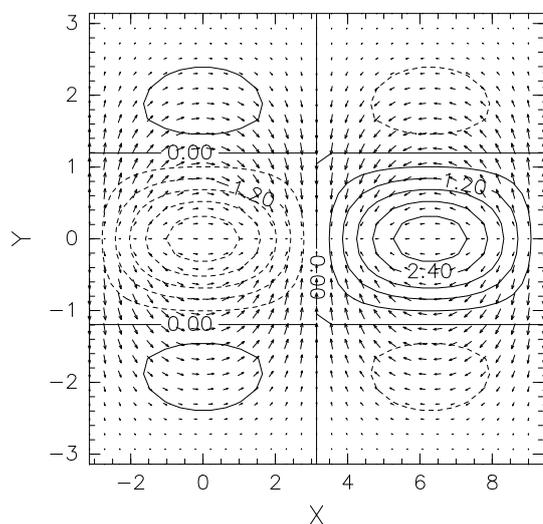


XFACT = 4.000E-03, YFACT = 4.000E-03

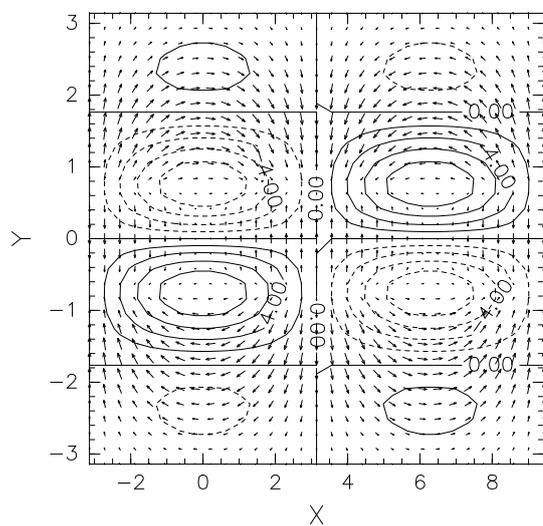


XFACT = 1.500E-03, YFACT = 1.500E-03

図 3.3.3: 東進慣性重力波の空間構造: 上は $n = 1, k = 0.5$, 下は $n = 2, k = 0.5$ のときの図. 図の矢印は水平速度ベクトル, 等値線は圧力を示す.

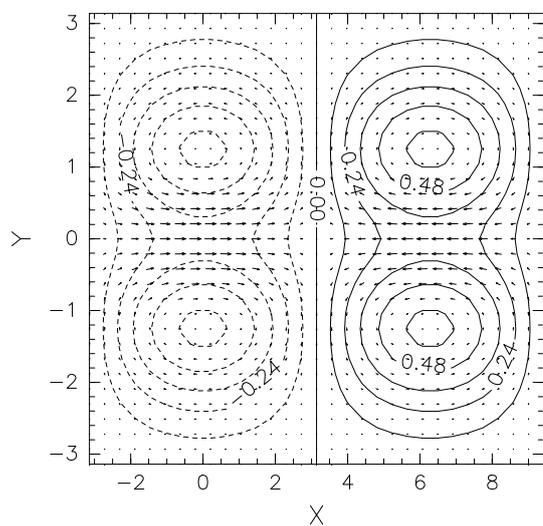


XFACT = 5.000E-03, YFACT = 5.000E-03

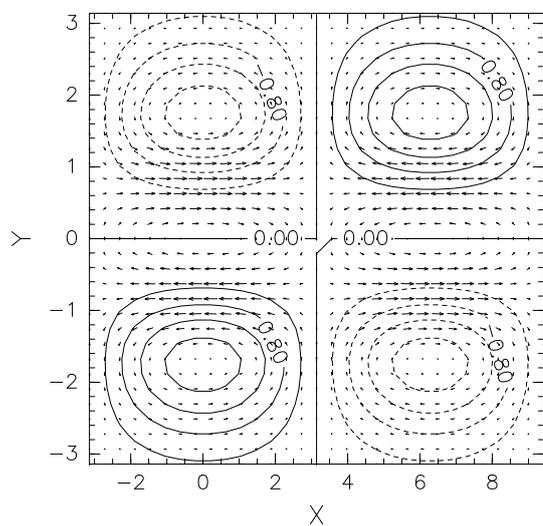


XFACT = 1.500E-03, YFACT = 1.500E-03

図 3.3.4: 西進慣性重力波の空間構造: 上は $n = 1, k = 0.5$, 下は $n = 2, k = 0.5$ のときの図. 図の矢印は水平速度ベクトル, 等値線は圧力を示す.



XFACT = 1.500E-02, YFACT = 1.500E-02



XFACT = 8.000E-03, YFACT = 8.000E-03

図 3.3.5: ロスビー波の空間構造: 上は $n = 1, k = 0.5$, 下は $n = 2, k = 0.5$ のときの図. 図の矢印は水平速度ベクトル, 等値線は圧力を示す.

- $n = 0$ の場合

$n = 0$ の場合は東進慣性重力波と、 $k \leq 1/\sqrt{2}$ のときに西進慣性重力波、 $k \geq 1/\sqrt{2}$ のときにロスビー波として分類される 2 つの波が存在する。図 3.3.6 に $n = 0, k = 0.5$ の場合の東進慣性重力波、図 3.3.7 に $n = 0, k = 0.5$ と $k = 1$ の場合の西進する波の速度場と圧力場を示す。東進慣性重力波 (図 3.3.6 参照) は $n \geq 1$ の場合の特徴とほぼ同じである。

図 3.3.7 に示されているように $k = 0.5 (\leq 1/\sqrt{2})$ のときと $k = 1.0 (\geq 1/\sqrt{2})$ のときの解の形を比較する。これらの波は空間構造に違いがみられない。高緯度では速度場と圧力場の関係が地衡流的であるが、赤道付近では非地衡流的であり慣性重力波のような速度場と圧力場の関係になっており、赤道付近の速度場と圧力場の形状は $n = 2$ の西進慣性重力波によく似ている。以上のことから、この波は慣性重力波とロスビー波の両方の特徴が混在した波であることが分かる。この波を混合ロスビー重力波と呼ぶ。

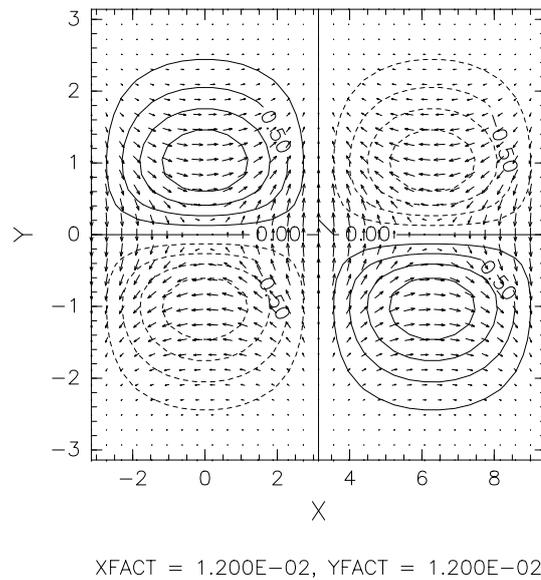
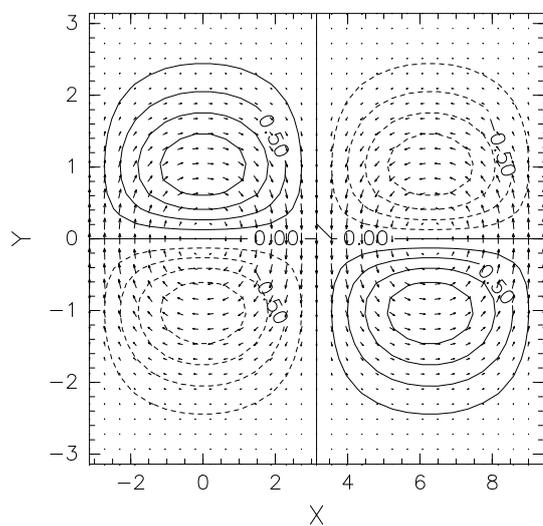
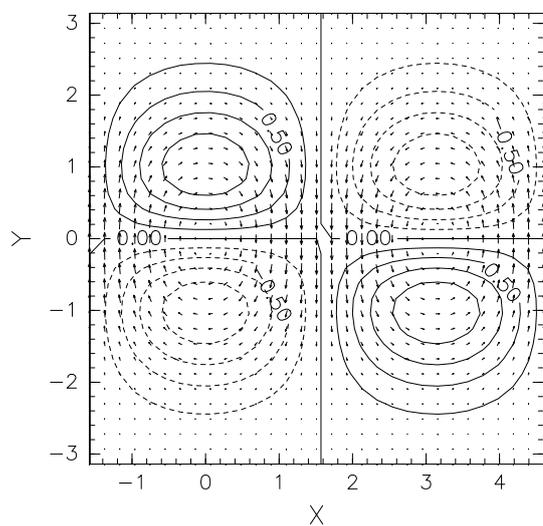


図 3.3.6: 東進慣性重力波の空間構造: $n = 0, k = 0.5$ のときの図。図の矢印は水平速度ベクトル, 等値線は圧力を示す。



XFACT = 6.000E-03, YFACT = 6.000E-03



XFACT = 4.000E-03, YFACT = 4.000E-03

図 3.3.7: 混合ロスビー重力波の空間構造: 上は $n = 0, k = 0.5$, 下は $n = 0, k = 1.0$ のときの図. 図の矢印は水平速度ベクトル, 等値線は圧力を示す.

- $n = -1$ の場合

図 3.3.8 に $n = -1$ の場合の波動の速度場と圧力場を示す. $n = -1$ の場合は慣性重力波にもロスビー波にも分類することができない. この波は赤道ケルビン波と呼ばれる. 東西方向に岸がある場合に存在するケルビン波は, x 方向には重力波のようにふるまい, y 方向には東西方向の速度と南北方向の圧力勾配の間で地衡流的な関係が成り立つことが知られている (小倉, 1978). 図 3.3.8 から分かるように $n = -1$ の波も, 速度ベクトルは赤道に平行であり, 圧力勾配が大きいセルの両端で重力波の特徴が表れている. 一方, 南北方向の圧力勾配が小さく東西方向の速度が大きいセルの中央部では速度場と圧力場の間に地衡風平衡が成立している.

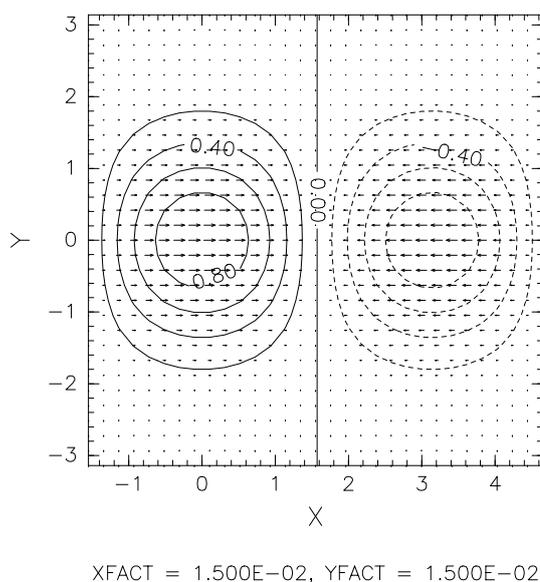


図 3.3.8: 赤道ケルビン波の空間構造: $n = -1, k = 0.5$ のときの図. 図の矢印は水平速度ベクトル, 等値線は圧力を示す.

3.4 結論

線形化された赤道 β 平面上の浅水方程式に東西方向に伝播する波動解を与えて波の振動数に関する固有値問題として定式化し, 固有値及び固有関数を得た. その結果, 南北の節の数 (モード) が $n \geq 1$ の場合には東進慣性重力波, 西進慣性重力波, ロスビー波, $n = 0$ の場合には混合ロスビー重力波, $n = -1$ の場合には赤道ケルビン波が得られた. 東進慣性重力波, 西進慣性重力波, ロスビー波は中緯度でも見られるが, 混合ロスビー重力波と赤道ケルビン波は赤道域に特有の波である. このように, 赤道域には 5 種類の波が存在することが分かった.

第4章 波の捕捉

赤道擾乱に関する特徴的な現象の一つは低い振動数の波の捕捉である。 n が小さい重力波とロスビー波は赤道近くの領域に捕捉されている。

(3.5) から, 解 v は領域

$$y = \frac{y^*}{\sqrt{\frac{c}{\beta}}} < \sqrt{2n+1} \quad (4.1)$$

でのみ, 有意な振幅を持つことが分かる^{*7}。ここで y^* はおよそその南北方向の波の範囲を示す。(3.5) は不均一な媒質中での波の運動を示す式に等しく, 条件 (4.1) は屈折率が正である領域を決定する。以下では波が赤道域に捕捉されることを分散関係式から説明する。

^{*7}(3.5) と (3.7) より,

$$\frac{d^2v}{dy^2} + (2n+1-y^2)v = 0 \quad (*)$$

ここで, $2n+1 = y_c^2$ とし, $y_c^2 - y^2 = \alpha$ と置くと, (*) は

$$\frac{d^2v}{dy^2} = -\alpha v$$

と書ける。

- (i) $\alpha \geq 0$, すなわち $y_c \geq y$ のとき $v = e^{\pm i\sqrt{\alpha}y}$
 (ii) $\alpha < 0$, すなわち $y_c < y$ のとき $v = e^{\pm\sqrt{\alpha}y}$

よって, (i), (ii) より, $y_c (= \sqrt{2n+1})$ の内側でのみ v は有意な振幅を持つ。この領域の外側では v は 0 に近づいていく。

4.1 慣性重力波

コリオリの効果の変化は慣性重力波の伝播速度の変化をもたらす。慣性重力波の位相速度は、

$$c = \pm \sqrt{c_g^2 + \frac{f^2}{k^2}} \quad (4.2)$$

として与えられる^{*8}。

ここで、 k は水平面における波数ベクトルで、 c_g は重力波の速度である。 f は高緯度ほど大きいので、(4.2) から伝播速度は高緯度になるほどより大きくなること分かる。よって、赤道付近で発生した波は屈折して赤道に向かう。つまり、赤道は慣性重力波の伝播のダクト (導波管) の役割をしている。

^{*8}(2.1) で高度 h の代わりにジオポテンシャル高度 ϕ を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - fv + \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu + \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + gH \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (*)$$

と書ける。2.1 節と同様に波型の解:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} e^{i(kx+ly+\omega t)}$$

を仮定し、(*) に代入すると、

$$\begin{aligned} i\omega \hat{u} - f\hat{v} + ik\hat{\phi} &= 0, \\ i\omega \hat{v} + f\hat{u} + il\hat{\phi} &= 0, \\ i\omega \hat{\phi} + gH(ik\hat{u} + il\hat{v}) &= 0 \end{aligned}$$

となる。分散関係式は、

$$\omega^2 = (k^2 + l^2)gH + f^2$$

となり、両辺を波数で割ると、

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{k^2 + l^2} &= gH + \frac{f^2}{k^2 + l^2}, \\ c^2 &= c_g^2 + \frac{f^2}{k^2} \quad \left(\because c_g = \sqrt{gH} \right), \\ c &= \pm \sqrt{c_g^2 + \frac{f^2}{k^2}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

4.2 ロスビー波

ロスビー波の捕捉についても同様の観点から考える。β 平面近似によって、ロスビー波の伝播速度は

$$c_R = \frac{\beta}{k^2 + \frac{f_0^2}{gH}} \quad (4.4)$$

と書ける^{*9}。ロスビー波の位相は x の正の方向、すなわち西向きに伝播する。ここで H は流体の深さである。 f の大きさが大きくなるにつれて c_R はより小さくなる。

^{*9}慣性重力波の位相速度の導出と同様に、(2.1) で高度 h の代わりにジオポテンシャル高度 ϕ を用いた式 (前脚注を参照。) の第一式と第二式から渦度方程式:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} v = 0$$

を得て、 $\partial f / \partial y = \beta$ であることに注意し、第三式を代入すると、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{f}{gH} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \beta v = 0. \quad (*)$$

となる。ここで ζ は相対渦度である。次に、地衡流の近似を行う。中緯度では地衡流近似ができ、 f_0 に比べて βy は小さいので省略できる。

$$\begin{aligned} -f_0 v &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} & \text{から} & \quad v = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ f_0 u &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} & \text{から} & \quad u = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned}$$

を得る。よって、

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{f_0} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \quad (**)$$

$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \nabla^2 \phi$ より、(**) を (*) に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi - \frac{f}{gH} \phi \right) + \beta \frac{1}{f_0} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

両辺に f_0 を掛け、 $f_0(f_0 + \beta y) \approx f_0^2$ と近似すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla^2 \phi - \frac{f_0^2}{gH} \phi \right) + \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

となる。解 $h = \hat{h} e^{i(kx + ly + \omega t)}$ を仮定し代入すると、

$$\omega = \frac{k\beta}{k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{gH}}$$

ロスビー波の速度は高緯度でより小さくなるため、波が屈折して赤道に戻ってくることはない。

第3章によると n が小さいロスビー波は同様に赤道域で束縛される。そこでロスビー波においては赤道域への捕捉は屈折では説明することが出来ない。

4.3 赤道ケルビン波

次に、 $n = -1$ の波の性質について考える。この波は第3章で述べたようにケルビン波とよく似ている。ケルビン波は重力波と同じ速度を持ち、海岸線に沿って伝播する波である。自由表面の変動は波に伴う運動とちょうど地衡流バランスをみたす。粒子の速度は海岸線に平行で、岸に沿う方向成分しか持たない。赤道ケルビン波も同様の性質を持つが、岸の境界という点で異なる。ケルビン波は岸から遠ざかるほど波の振幅が指数関数的に減少するために境界に捕捉されるが、赤道ケルビン波の場合は岸の境界がない。赤道ケルビン波の場合はコリオリパラメータの符号が変化することによって赤道付近で束縛される。

4.4 結論

慣性重力波は屈折の概念で赤道付近で捕捉されることを説明することが出来たが、ロスビー波についてはまだ議論の余地があり、今後さらに詳細に分析する必要がある。赤道ケルビン波はコリオリパラメータの符号の変化によって赤道付近に捕捉される。

が得られる。よって、位相速度は

$$c_R = \frac{\omega}{k} = \frac{\beta}{k^2 + \frac{f_0^2}{gH}} \quad (4.4)$$

である。

第5章 潮汐理論と関連した近似の有効性

これまで地球の回転を受けた静水圧平衡下の一定の深さの流体の運動を扱ってきた。この問題は潮汐理論に含まれる。この章では、今まで扱ってきた式がラプラスの潮汐方程式の近似された形と等価であることを証明する。

第2章で速度の子午面方向の成分 v についての式を扱った。ここでは潮汐理論と比較するためにジオポテンシャル高度 ϕ についての式を扱う。(3.2a) ~ (3.2c) は ϕ についての単一の方程式

$$\frac{d^2\phi}{dy^2} + \frac{2y}{\omega^2 - y^2} \frac{d\phi}{dy} + \left[-\frac{k\omega^2 + y^2}{\omega\omega^2 - y^2} - k^2 + (\omega^2 - y^2) \right] \phi = 0 \quad (5.1)$$

に書き換えられる。ここで、 ω と k はそれぞれ振動数と x 方向の波数である。

潮汐理論によると、ラプラスの潮汐方程式は以下のように書かれる^{*10}：

$$\frac{d}{d\mu} \left(\frac{1 - \mu^2}{f^2 - \mu^2} \frac{d\Theta}{d\mu} \right) - \frac{1}{f^2 - \mu^2} \left[\frac{s f^2 + \mu^2}{f f^2 - \mu^2} + \frac{s^2}{1 - \mu^2} \right] \Theta + \frac{4a^2\Omega^2}{gh} \Theta = 0. \quad (5.2)$$

ここで、 f は $f = \sigma/2\Omega$ で表される振動数、 s は経度方向の波数、 a は地球の半径、 g は重力加速度、 h は等価深度であり、 μ は緯度 θ を用いて $\mu = \sin \theta$ で表される。余緯度 φ を用いた場合も (5.2) となる。このとき $\mu = \cos \varphi$ となることに注意する^{*11}。

^{*10}導出は付録を参照。

^{*11}緯度と余緯度の

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

という関係から、

$$\begin{aligned} \mu &= \sin \theta \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \\ &= \cos \varphi \end{aligned}$$

となる。

潮汐理論では f が潮汐振動の振動数であるので h が固有値であるが、ここでは自由振動を扱っているためその手順は逆転する。つまり、赤道波の問題では流体の深さ h が決められているので、 $\mu = \pm 1$ での境界条件を持つ (5.2) を解くことによって固有値 f を求める。

赤道領域すなわち $\mu = 0$ を考えているので、(5.2) を近似した形は 1 に対して μ を無視することによって以下のように与えられる:

$$\frac{d^2\Theta}{d\mu^2} + \frac{2\mu}{f^2 - \mu^2} \frac{d\Theta}{d\mu} (1 - f^2) + \left[-\frac{s f^2 + \mu^2}{f f^2 - \mu^2} - s^2 + (f^2 - \mu^2) \frac{4a^2\Omega^2}{gh} \right] \Theta = 0. \quad (5.3)$$

$f \rightarrow \omega$, $s \rightarrow k$, $\mu \rightarrow y$ に対応することに注意すると、(5.3) は (5.1) によく似ていることが分かる。(5.3) では第 2 項目に $(1 - f^2)$ のファクター、第 3 項目の角括弧の最後の項に無次元化されたパラメータ (ラムパラメータという)、 $4a^2\Omega^2/gh$ がそれぞれ掛けられている点異なるが、以下の近似とスケールを用いると (5.1) と (5.3) で対応したこれらの項は等しくなる。 f は地球の回転角速度を考慮した値であるので、数日程度の周期のような低い振動数を考える限りでは f は 1 に対して無視してよい。よって $1 - f^2 \simeq 1$ となり、(5.1) と (5.3) とでそれぞれの第 2 項目は等しくなる。また、 $\beta = df/dy = 2\Omega \cos \theta/a$ より、赤道付近では $\theta \simeq 0$ なので $\beta = 2\Omega/a$ と書ける。いま、長さのスケール $[L]$ を地球の半径 a 程度にとると、ラムパラメータは (2.10) から

$$\frac{4a^2\Omega^2}{gh} = \frac{a^4\beta^2}{c^2} = 1$$

となり、二つの項は等しくなる。

以上から、赤道付近でこのような近似を使えば、今まで扱ってきた方程式は潮汐方程式と一致することがいえる。

第6章 強制振動

6.1 一般論

ここまでは赤道域の自由振動について議論してきた。この章では外力等の強制が働いたときにどのような運動が生じるかを調べる。

強制によって生じた運動が散逸によって定常状態に至る運動を考える。まず、運動方程式と連続の式は、(2.1) から以下のように書ける：

$$\begin{aligned} -fv + g\frac{\partial h}{\partial x} &= -\alpha u + F_x \\ fu + g\frac{\partial h}{\partial y} &= -\alpha v + F_y \\ H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= -\alpha h + Q. \end{aligned} \tag{6.1}$$

ここで、 u, v, h, f, g, H は第1章で使われているものと同様である。 F_x, F_y, Q はそれぞれ外力の x, y 成分と質量の湧き出し (または吸い込み) である。これらの強制が与えられて流体が運動を始めると、摩擦力や拡散として復元的な効果が現れる。それらは運動に逆らい、最終的に定常状態に至る。その効果を表す散逸項として (6.1) の右辺に $(-\alpha u, -\alpha v, -\alpha h)$ という項が加えられている。

次に、(6.1) を第2章と同様の方法で無次元化すると、

$$-yv + \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\alpha u + F_x, \tag{6.2a}$$

$$yu + \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\alpha v + F_y, \tag{6.2b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\alpha \phi + Q \tag{6.2c}$$

となる。(3.2a) ~ (3.2c) の導出と同じ手順を踏み、 x 方向の正弦波型の変動をもつ強

制を仮定すると共通の因子 e^{ikx} は省略され、散逸項を左辺に移項すると、

$$\begin{aligned} -yv + ik\phi + \alpha u &= F_x \\ yu + \frac{d\phi}{dy} + \alpha v &= F_y \\ iku + \frac{dv}{dy} + \alpha\phi &= Q. \end{aligned} \quad (6.3)$$

と書ける.

次に境界条件を考える. 赤道から遠く離れた付近では波が減衰すると考えると、境界条件は

$$y \rightarrow \pm\infty \quad \text{のとき} \quad u, v, \phi \rightarrow 0 \quad (6.4)$$

である.

(6.3) を行列の形式で記述する.

$$(\Omega + \alpha I)\chi = \sigma. \quad (6.5)$$

ここで、 Ω は (3.23) と同様で、 χ は解、 σ は (6.3) の非斉次項である.

自由振動の解を振動数が ω_m である ξ_m で表すと、(3.22) から

$$\Omega\xi_m = -i\omega_m\xi_m \quad (6.6)$$

となる. 強制振動問題でも第3章で得られた自由振動の解と同じ境界条件を満たすため、すべての固有関数のセット $\{\xi_m\}$ が完全直交系をつくる. つまり、(6.3) の解 χ と強制項 σ は自由振動の解の重ね合わせで表現することが出来る:

$$\chi = \sum a_m \xi_m \quad \sigma = \sum b_m \xi_m. \quad (6.7)$$

これを (6.5) に代入すると、

$$\sum (\Omega + \alpha I) a_m \xi_m = \sum b_m \xi_m \quad (6.8)$$

を得る. (6.6) を用いると上式は

$$\sum (-i\omega_m + \alpha) a_m \xi_m = \sum b_m \xi_m \quad (6.9)$$

と書ける. ξ_m が互いに直交しているので、二つの式の係数の関係は

$$a_m = \frac{1}{\alpha - i\omega_m} b_m \quad (6.10)$$

である。

ここで, b_m は

$$b_m = \frac{\int \bar{\xi}_m(y) \sigma(y) dy}{\int |\xi_m(y)|^2 dy} \quad (6.11)$$

という式によって得られる^{*12}. ここで, $\bar{\xi}_m$ は ξ_m の複素共役である. b_m が求められたことによって, (6.10) から a_m を求めることが出来る. つまり, (6.10) は強制が与えられたときに大気海洋がどのような応答を示すかを表している. 外力が同量つまり b_m が同じであれば, 低い振動数のモードは大きい振幅を持ち, 高い振動数のモードは振幅が小さく抑圧されることが (6.10) から分かる. このことから, 自由振動の振動数が低いほどより励起に共鳴的であるといえる.

したがって, 強制振動の解は b_m の値から a_m を求めることで得ることができ, その運動の様子は自由振動の振動数の大きさによることが分かった.

^{*12}(6.7) の σ の式で m を n とし, 両辺に $\bar{\xi}_m$ を掛けると,

$$\bar{\xi}_m \sigma = \sum b_n \xi_n \bar{\xi}_m$$

となり, 両辺を積分すると,

$$\begin{aligned} \int \bar{\xi}_m \sigma dy &= \int \sum b_n \xi_n \bar{\xi}_m dy \\ &= b_m \int \xi_m \bar{\xi}_m dy \\ b_m &= \frac{\int \bar{\xi}_m \sigma dy}{\int |\xi_m|^2 dy} \end{aligned} \quad (6.11)$$

となる。

第7章 まとめ

本論文では、赤道域での大気海洋中の大規模波動の論文である Matsuno (1966) のレビューを行った。

まず、線形化された浅水方程式系に対して東西方向に伝播する波動解を与えて固有値を求め、その結果得られた固有関数はエルミート多項式を用いて表された。南北方向のモード n が $n \geq 1$ の場合、振動数の大きい波が2つ、小さい波が1つ得られた。慣性重力波の振動数がロスビー波の振動数よりも大きいことを考えると、振動数の大きい波は東進・西進慣性重力波、小さい波はロスビー波である。しかし、 $n = 0$ の場合はそれぞれ東と西に伝播する2つの波しか得られなかった。そのうち西方向に伝播する波は慣性重力波とロスビー波の特徴を持っている。この波は波数 $1/\sqrt{2}$ 以下の時に慣性重力波の特徴を持ち、波数 $1/\sqrt{2}$ 以上の時にロスビー波の特徴を持つ。また、圧力場と風向場の関係は慣性重力波とロスビー波の2つの種類の混合した特徴を示す。そのため、この波を混合ロスビー重力波と呼ぶ。東方向に伝播する波は東進慣性重力波である。そして、 $v = 0$ である特別な場合には東に伝播する波のみが得られた。この波は $v \neq 0$ で分散関係式で $n = -1$ としたときに得られる波と同じであるため、 $n = -1$ の波と分類することができる。この波は慣性重力波やロスビー波とは異なり、ケルビン波のような x 方向には重力波のようなふるまいが、 y 方向には地衡流的な関係がみられるため、赤道ケルビン波と呼ばれる。

次に、 n が小さい場合に固有関数が領域 $y \leq \sqrt{2n+1}$ でのみ有意な振幅を持つ現象、すなわち赤道付近で波が捕捉される現象について波の位相速度を用いて考察した。慣性重力波は伝播速度が高緯度ほど大きいため、赤道付近で発生した波は屈折して赤道に向かって伝播する。一方、ロスビー波は伝播速度が高緯度ほど小さい。そのため屈折では説明することができない。赤道ケルビン波はコリオリパラメータの符号が変化することによって赤道付近に束縛される。

また、本論文中で考察した系をジオポテンシャル高度に関する単一の閉じた方程式として表現した時、その方程式が回転球面上の流体運動を記述する方程式であるラプラスの潮汐方程式を近似したものと対応していることを示した。さらに Matsuno (1966) では、赤道域における波動解が潮汐方程式の自由波の解であるこ

とも述べている。このことについては、解のふるまいを考える時に潮汐方程式との対応を調べる時に行った近似と異なる仮定をしていたため議論することが出来なかった。この点については今後詳細に分析する必要がある。

最後に、赤道域で外力等の強制が働いたときにどのような運動が生じるか考察した。強制振動の場合も自由振動の解と同じ境界条件を満たすため、すべての固有関数のセットが完全直交系をつくる。そのため強制振動の解は自由振動の解の重ね合わせで表現することが出来る。また、外力が同量であれば低い振動数のモードは大きい振幅を持ち、高い振動数のモードは振幅が小さく抑圧されることが分かった。

謝辞

本論文の作成に際して、多くの方々にご指導とご協力を頂きました。林 祥介教授には研究内容の指針を示して頂き、岩山 隆寛准教授には貴重なお時間を割いていただき、研究全体にわたってご指導頂きました。高橋 芳幸准教授にはプログラム作成に関してご指導頂き、また論文の作成についてご意見を頂きました。大西 将徳博士には論文の構成について助言を頂きました。河合 佑太氏には研究の進め方や発表資料の作成に関して様々な助言を頂きました。同学年である滝口 裕子氏には論文の理論的な理解を助けて頂き、またプログラム作成に関しても多くの助言を頂きました。そして、地球および惑星大気科学研究室の皆さまには多くのお力添えと励ましを頂きました。ここに深く感謝し、心よりお礼申し上げます。

図の作成には、地球流体電脳倶楽部で開発された DCL (電脳倶楽部ライブラリ) を使用させていただきました。開発者の方々にお礼申し上げます。

付録 A : 分散関係式の導出

分散関係式 (3.7) を級数展開法を用いて導出する.

まず, (3.8) を (3.5) に代入する^{*13}.

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dy} &= -yCe^{-\frac{1}{2}y^2} H_n + Ce^{-\frac{1}{2}y^2} \frac{dH_n}{dy}, \\ \frac{d^2v}{dy^2} &= (y^2 - 1) Ce^{-\frac{1}{2}y^2} H_n - 2yCe^{-\frac{1}{2}y^2} \frac{dH_n}{dy} + Ce^{-\frac{1}{2}y^2} \frac{d^2H_n}{dy^2},\end{aligned}$$

より,

$$\frac{d^2H_n}{dy^2} - 2y \frac{dH_n}{dy} + \left(\omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} - 1 \right) H_n = 0 \quad (\text{A1})$$

となる. $\omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} - 1 = A$ とおくと, (A1) は

$$\frac{d^2H_n}{dy^2} - 2y \frac{dH_n}{dy} + AH_n = 0$$

と書ける. $H_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ としてこの式に代入すると,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n y^{n-2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n y^n + A \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n = 0 \quad (\text{A2})$$

となる.

^{*13}(3.5) と (3.8) を再掲する.

$$\frac{d^2v}{dy^2} + \left(\omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} - y^2 \right) v = 0 \quad (\text{3.5})$$

$$v(y) = Ce^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y) \quad (\text{3.8})$$

次に, y の係数を以下のように定義する.

$$y^0 \text{ の係数 : } 2a_2 + Aa_0 = b_0$$

$$y^1 \text{ の係数 : } 6a_3 + (A - 2)a_1 = b_1$$

$$y^2 \text{ の係数 : } 12a_4 + (A - 4)a_2 = b_2$$

$$y^3 \text{ の係数 : } 20a_5 + (A - 6)a_3 = b_3$$

(A2) を b_i を使って書くと,

$$b_0y_0 + b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 + \dots = 0$$

であるので, $b_i = 0$ である. つまり, 各係数はゼロである.

$i = n - 2$ とおくと, i 次の項は

$$\sum_{i=2} y^i (i+2)(i+1)a_{i+2} + Aa_i - 2ia_i$$

である. よって, y^i の係数は

$$(i+2)(i+1)a_{i+2} + (A-2i)a_i = 0$$

となる.

a_i と a_{i+2} の比をとると,

$$\frac{a_{i+2}}{a_i} = \frac{2i - A}{(i+2)(i+1)}$$

より, $i \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{a_{i+2}}{a_i} = \frac{2}{i}$$

である.

ここで,

$$e^{y^2} = 1 + y^2 + \frac{1}{2!}y^2 + \dots + \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)!}y^n + \frac{1}{\left(\frac{n+2}{2}\right)!}y^{n+2} + \dots + \frac{1}{n!}y^{2n} + \frac{1}{(n+1)!}y^{2n+2} + \dots$$

を考えると,

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n+2}{2}\right)!} = \frac{1}{\frac{n}{2} + 1} = \frac{2}{n+2}$$

であり, $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{2}{n}$$

となる。以上から、 y^i の係数が e^{y^2} のふるまいと同じであることが分かる。ゆえに、(3.8) は $y \rightarrow \infty$ のとき $v = Ce^{-\frac{1}{2}y^2}e^{y^2} = Ce^{\frac{1}{2}y^2}$ となり、 $v \rightarrow 0$ を満たさず、発散してしまう。境界条件から、これは無限級数展開ではなく有限級数展開であるといえる。

したがって、 n 次で多項式が切れるためには、

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{2n - A}{(n+2)(n+1)} = 0$$
$$\therefore A = 2n \quad (n \text{ は整数})$$

となればよい。よって、

$$\omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} - 1 = 2n$$
$$\therefore \omega^2 - k^2 + \frac{k}{\omega} = 2n + 1 \quad (3.7)$$

となる。

付録 B : 分散関係式の解法

この付録では, 分散関係式 (3.7) の解法について述べる.

ω の 3 次方程式を解くために, Newton 法を用いた. Newton 法は, 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を利用して, 反復計算によって $f(x) = 0$ の解を求める方法である. 分散関係式を x の関数とすると,

$$f(x) = x^3 - (k^2 + 2n + 1)x + k$$

とかける. $f(x) = 0$ の解を ω とするとき, その近傍にある近似解を x_k とする. テイラー展開の 1 次の項までを用いると, $f(\omega)$ は

$$f(\omega) \approx f(x_k) + f'(x_k)(\omega - x_k)$$

と近似される. $f(\omega = 0)$ であるので, 次の近似解 x_{k+1} が以下のように得られる.

$$\omega \approx x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

この演算を繰り返して, 解 ω に十分近い近似解を求める.

今回は n, l の値によって初期値 ω_i の値が異なるので, プログラム内で n, l を指定し, まずはそれぞれの結果を `omega_nl.dat` という名でファイルとして出力した. 次にそのファイルを読み込み `gnuplot` でグラフを描くためのスクリプトファイルを作成し, `gnuplot` を起動してグラフの表示を行った. 最後に `ps` ファイルへの書き出しを行うスクリプトファイルをロードし, `ps` 形式の画像ファイルとして出力した.

以下に, 図 3.1.2 を出力するプログラムを載せておく.

プログラム: newton.f90

```
program newton
```

```
integer :: i, j, n, i_max, j_max
real(8) :: k, dk, k_min, k_max
real(8) :: omega, omega_i
real(8) :: f, df

!-----
! Select the meridional mode and the initial guess of omega, omega_i
! n=-1 ! meridional mode
! file name -j, omega_nl
!! l=1: eastward Gravity wave
! omega_i=-dsqrt(dble(2*n+1)) ! initial guess
!! l=2: westward Gravity wave
! omega_i=dsqrt(dble(2*n+1)) ! initial guess
!! l=3: Rossby wave
! omega_i=dble(1) ! initial guess for n=0
! omega_i=dble(0) ! initial guess except for n =0
!-----
open(16, file='omega_nl.dat') ! j- change the file name
!-----

i_max = 500
j_max = 30 ! times of the iteration
k_min = 0.0d0 + 0
k_max = 5.0d0 + 0
dk = (k_max - k_min)/dble(i_max)

do i = 1, i_max+1
  k = k_min + dble(i - 1)*dk
  do j = 1, j_max
    omega = omega_i - f(omega_i, k, n)/df(omega_i, k, n)
    omega_i = omega
  end do
  write(16,100) k, omega
end do

100 format (2(1x, e12.5))

stop
```

```
end program

!-----
real(8) function f(omega, k, n)
integer n
real(8) k, omega
f = omega**3 - (k**2 + dble(2*n+1))*omega + k
return
end function f

!-----
real(8) function df(omega, k, n)
integer n
real(8) k, omega
df = dble(3)*omega**2 - (k**2 + dble(2*n+1))
return
end function df

!-----
```

付録C : 各モードの空間構造の図

プログラム: Eigenfunctions.f90

```
PROGRAM Eigenfunctions
implicit none
integer, parameter :: NX=21, NY=21
real, parameter :: XMIN=-3.14, XMAX=3.14, YMIN=-3.14, YMAX=3.14
real :: u(NX,NY), v(NX,NY), p(NX,NY)

real :: x, y, z
real(8) :: omega, omega_i
real :: omega_r
real :: er, er0
real :: u1, n, k, dx, dy
integer :: i, j, j_max, q, r, s, sm

DX=(XMAX-XMIN)/real(NX-1)
DY=(YMAX-YMIN)/real(NY-1)

n = 1.0 !! input the value
k = 0.5 !! input the value

! repetition maximam 最大反復回数
sm = 100.0d0
! tolerance 誤差の許容値
er0 = 1.0d0 - 6.0d0

!-----
! Select the meridional mode and the initial guess of omega, omega_i
```

```

!! l = 1: eastward Gravity wave
omega_i = -dsqrt(dble(2*n+1)) ! initial guess

!! l = 2: westward Gravity wave
! omega_i = dsqrt(dble(2*n+1)) ! initial guess

!! l = 3: Rossby wave
! omega_i = dble(1) ! initial guess for n=0, -1
! omega_i = dble(0) ! initial guess except for n =0, -1
! _____

do s = 1, sm
omega = omega_i - f(omega_i, k, n)/df(omega_i, k, n) ! calculate the approximate
value 近似値を計算
er = abs(omega - omega_i) ! absolute value of the difference (omega - omega_i)
omaga と omega_i の差の絶対値
if (er < er0) exit ! er < er0 なら反復計算終了
omega_i = omega ! 継続するときは omaga を omega_i とする
end do

omega_r = real(omega) ! omega を単精度実数に変換する

write(*,*) 'omega =', omaga ! omaga を出力する

do q=1,NY
do r=1,NX
X = XMIN + real(r-1)*DX
Y = YMIN + real(q-1)*DY
if (n == 0) then ! n が 0 の場合
u(r,q) = psi(n+1.0,y)*cos(omega_r*0.0 + k*x) ! 速度の x 成分
v(r,q) = - 2.0*(omega_r + k)*psi(n,y)*sin(omega_r*0.0 + k*x) ! 速度の y 成分
p(r,q) = psi(n+1.0,y)*cos(omega_r*0.0 + k*x) ! 自由表面高度
else if (n == -1) then ! n が -1 の場合
u(r,q) = psi(n+1.0,y)*cos(omega_r*0.0 + k*x) ! 速度の x 成分
v(r,q) = 0 ! 速度の y 成分
p(r,q) = psi(n+1.0,y)*cos(omega_r*0.0 + k*x) ! 自由表面高度
else ! n が 0, -1 以外の場合
u(r,q) = (0.5*(omega_r - k)*psi(n+1.0,y) + n*(omega_r + k)*psi(n-1.0,y))*cos(omega_r*0.0
+ k*x) ! 速度の x 成分

```

```

v(r,q) = - (omega_r**2 - k**2)*psi(n,y)*sin(omega_r*0.0 + k*x) ! 速度の y 成分
p(r,q) = (0.5*(omega_r - k)*psi(n+1.0,y) - n*(omega_r + k)*psi(n-1.0,y))*cos(omega_r*0.0
+ k*x) ! 自由表面高度
end if
end do
end do

```

```

call draw_graph() ! グラフを描くサブルーチンの呼び出し

```

```

contains

```

```

!-----

```

```

!! 分散関係式

```

```

function f(omega, k, n) result(f1)

```

```

real(8) f1, omega

```

```

real n, k

```

```

f1 = omega**3 - (k**2 + dble(2*n+1))*omega + k ! f1 に分散関係式を代入する

```

```

end function f

```

```

!-----

```

```

!! 分散関係式の微分

```

```

function df(omega, k, n) result(df1)

```

```

real(8) df1, omega

```

```

real n, k

```

```

df1 = 3.0d0 * omega**2 - (k**2 + dble(2*n+1)) ! df1 に分散関係式を微分したも
のを代入する

```

```

end function df

```

```

!-----

```

```

!! エルミート多項式

```

```

function hermite(n,y) result(h)

```

```

implicit none

```

```

real(8) h, h0, h1

```

```

real n, k, y

```

```

if (n == 0) then ! n が 0 の場合

```

```

h = 1.0d0 ! h に 1 を代入する

```

```

else if (n == 1) then ! n が 1 の場合

```

```

h = 2.0d0 * y ! h に 2y を代入する

```

```
else ! n が 0, 1 でない場合
h0 = 1.0d0 ! h0 に 1 を代入する
h1 = 2.0d0 * y ! h1 に 2y を代入する
do k = 2 , n
h = 2.0d0 * y * h1 - 2.0d0 * (k-1) * h0 ! エルミート多項式の漸化式
h0 = h1 ! h0 に h1 を代入する
h1 = h ! h1 に h を代入する
end do
end if
end function hermite

!-----
!! 関数  $\psi$ 
function psi(n,y) result(ps)
implicit none
real(8) ps
real n, y

ps = exp(- y ** 2.0d0 / 2.0d0) * hermite(n,y) !  $\psi = e^{-\frac{1}{2}y^2} H(n, y)$  と定義する
end function psi

!-----

subroutine draw_graph() ! グラフを描くサブルーチン

integer :: IWS

WRITE(*,*) ' WORKSTATION ID (I) ? ;' ! 図形出力装置のリストの書き出し
CALL SGPWSN
READ (*,*) IWS ! 図形出力装置の番号を読み込む

CALL GROPN( IWS ) ! 出力装置のオープン
CALL GRFRM ! 作画領域を設定する

write(*,*) NX, NY
CALL GRSWND( XMIN, XMAX, YMIN, YMAX ) ! ウィンドウの設定
CALL USPFIT ! 正規化変換のパラメータを決める
CALL GRSTRF ! 正規化変換の確定
```

```
CALL USSTTL( 'X', ", 'Y', " ) ! 座標軸のタイトル, 単位の指定  
CALL USDAXS ! 座標軸を描く
```

```
CALL UGVECT( U, NX, V, NX, NX, NY ) ! 2次元ベクトル場を描く  
CALL UDCNTR(P, NX, NX, NY) ! 2次元等高線図を描く
```

```
CALL GRCLS ! 出力装置のクローズ
```

```
end subroutine draw_graph
```

```
end program Eigenfunctions
```

付録 D : 潮汐方程式の導出

この付録では潮汐方程式を導出する.

水平方向に緯度経度座標系, 鉛直方向に対数圧力座標系を張った場合を考える. 線形化した運動方程式, エネルギー保存式, 連続の式は以下の通りである.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega v \sin \theta + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega u \sin \theta + \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \frac{RT}{H} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{H}{R} N^2 w &= 0 \\ \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial (\rho_0 w)}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

これらの式に

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(\theta)G(z) \\ V(\theta)G(z) \\ \Phi(\theta)G(z) \\ W(\theta)G(z) \end{pmatrix} e^{i(s\lambda - \sigma t)}$$

を代入すると, 以下の水平構造方程式が得られる.

$$-iU\sigma - 2\Omega \sin \theta V + \frac{i\Phi_s}{a \cos \theta} = 0, \quad (\text{D1})$$

$$-iV\sigma + 2\Omega \sin \theta U + \frac{1}{a} \frac{d\Phi}{d\theta} = 0, \quad (\text{D2})$$

$$-i\Phi\sigma + \frac{gh}{a \cos \theta} \left\{ isU + \frac{d}{d\theta} (V \cos \theta) \right\} = 0. \quad (\text{D3})$$

U と V を Φ で表すと,

(D1) $\times 2\Omega \sin \theta$ +(D2) $\times i\sigma$ より,

$$V = \frac{i}{a(4\Omega^2 \sin^2 \theta - \sigma^2)} \left(2\Omega \sin \theta \frac{\Phi_s}{\cos \theta} + \sigma \frac{d\Phi}{d\theta} \right), \quad (D4)$$

(D1) $\times i\sigma$ -(D2) $\times 2\Omega \sin \theta$ より,

$$U = \frac{1}{a(\sigma^2 - 4\Omega^2 \sin^2 \theta)} \left(\frac{\Phi_s \sigma}{\cos \theta} + 2\Omega \sin \theta \frac{d\Phi}{d\theta} \right), \quad (D5)$$

である. (D4) と (D5) を (D3) に代入する.

$$\begin{aligned} & -i\Phi\sigma + \frac{gh}{a \cos \theta} \left[\frac{is}{a(\sigma^2 - 4\Omega^2 \sin^2 \theta)} \left(\frac{\Phi_s \sigma}{\cos \theta} + 2\Omega \sin \theta \frac{d\Phi}{d\theta} \right) \right. \\ & \left. + \frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{i \cos \theta}{a(4\Omega^2 \sin^2 \theta - \sigma^2)} \left(2\Omega \sin \theta \frac{\Phi_s}{\cos \theta} + \sigma \frac{d\Phi}{d\theta} \right) \right\} \right] = 0. \end{aligned}$$

ここで, $\mu = \sin \theta$, $\sigma = 2\Omega f$ とおいて式変形すると,

$$\frac{d}{d\mu} \left(\frac{1 - \mu^2}{f^2 - \mu^2} \frac{d\Theta}{d\mu} \right) - \frac{1}{f^2 - \mu^2} \left[\frac{s f^2 + \mu^2}{f f^2 - \mu^2} + \frac{s^2}{1 - \mu^2} \right] \Theta + \frac{4a^2 \Omega^2}{gh} \Theta = 0, \quad (5.2)$$

が得られる.

参考文献

- Madden, R. A., Julian, P. R., 1972: Description of global-scale circulation cells in the tropics with a 40-50 day period. *J. Atmos. Sci.*, **29**, 1109-1123.
- Masunaga, H., 2007: Seasonality and Regionality of the Madden-Julian Oscillation, Kelvin Wave, and Equatorial Rossby Wave. *J. Atmos. Sci.*, **64**, 4400-4416.
- Matsuno, T., 1966: Quasi-geostrophic motion in the equatorial area. *J. Meteor. Soc. Japan*, **44**, 25-42.
- S. George Philander, 1989: El Nino, La Nina, and the Southern Oscillation, Academic Press, 293pp
- 小倉 義光, 1978: 気象力学通論, 東京大学出版会, 249pp
- 新田 勅, 1982: 熱帯の気象 - 熱帯気象学の黎明を迎えて, 東京堂出版, 215pp
- 升本 順夫, 安藤健太郎, 2013: ENSO の観測, 気象研究ノート 第 228 号エルニーニョ・南方振動 (ENSO) 研究の現在, 日本気象学会, 9 - 19.