

非粘性非圧縮2次元順圧流体に対する波数 空間内のエネルギー変換過程に関する考察

神戸大学理学部数学科
地球および惑星大気科学研究室
(学籍番号：1193009s)

岡崎 正悟

2015年3月25日

論文要旨

本研究では, Fjørtoft (1953) において行われた議論をもとに, 非粘性非圧縮 2 次元流体の波数空間における, エネルギーの輸送と定常流に擾乱を与えた場合の安定性について考察する. Fjørtoft (1953) では球面上で議論が行われているが, これを二重周期境界条件が課された 2 次元平面になおして整理をしている. また, Fjørtoft (1953) には誤りがある箇所があるため, その訂正も行っている.

目次

論文要旨	i
第 1 章 はじめに	1
第 2 章 準備	3
2.1 基礎方程式: 非粘性非圧縮 2 次元の場合	3
2.2 保存則	6
2.3 スペクトル空間における方程式系	7
第 3 章 エネルギー変換過程に関する議論	12
3.1 非粘性流体の場合	12
3.2 粘性流体の場合	18
第 4 章 2 次元流の安定性	22
第 5 章 考察	25
5.1 Fjørtoft の考察	25
5.2 波数ベクトル間関係	26
第 6 章 結論	27
付録 A Fjørtoft (1953) の全訳と修正	29
1 球面上の 2 次元非粘性流体の流れ	30
2 粘性流体の 2 次元流	45
3 結論	49
付録 B 球座標系における微分演算	50
B.1 幾何学的を利用した直観的な方法による導出	50
B.2 ベクトル解析を用いて計算で求める	56

B.3	まとめ	64
付録 C	(A.9) の導出	65
C.1	問題設定	65
C.2	方程式の球座標での表示と変数分離	65
C.3	ルジャンドルの微分方程式の級数解法	67
参考文献		69

第 1 章

はじめに

地球の大気や海洋の大規模な運動を扱う「地球流体力学」では、以下のようにしばしば扱う空間を 2 次元であるとして議論する;

- 「大気や海洋は、球面上の薄い流体層であり、それらの厚さや深さが水平方向の広がり比べてとても小さい。さらに、大気や海洋の運動は 2 つの効果、回転と成層による影響を強く受ける: 後者は、しばしば水平方向の密度勾配に比べて鉛直方向の密度勾配が大きくなることを意味する。」 (Vallis(2006)[3], p.51)
- 「テイラー・プラウドマンの定理によれば、次の条件が満足されているときには、回転流体中の運動は回転軸の方向の座標によらない 2 次元の流れとなる。その条件というのは a) 流体の密度が一様で、b) 運動は定常で、c) 運動方程式を線形化してもいっくらく運動が遅く、d) 摩擦力が無視できる、の 4 つである。」 (小倉 (1978)[4], p.64)

また、観測によって地球大気の運動で 2 次元乱流的な性質が現れている例もある。例えば、図 1.1 である。この図は 1975 年から 1979 年にかけて航空機観測によって得られた対流圏界面付近の東西風速と南北風速のエネルギースペクトルである。スケールの大きな領域 (波数の小さな領域、図の左側) に 2 次元乱流のエンストロフィー慣性領域のスペクトルに見られる k^{-3} の傾きが現れている (岩山 (2013)[?, iwayama]。以上のことから、2 次元乱流の基本的な性質を理論的に扱うことは地球流体力学を学ぶ上で有用である。

本論文では、2 次元流体の基本的な性質を調べた Fjørtoft (1953) のレビューである。本論文の目的と構成は以下の通りである。

- 周期境界条件を課した 2 次元平面内における非粘性非圧縮順圧流体の運動方程式から出発し、渦度方程式の導出、流れ関数の導入、エネルギーとエンストロフィーの保存則を導くことにより、2 次元流体における基本的な方程式の理解を目指す (2.1

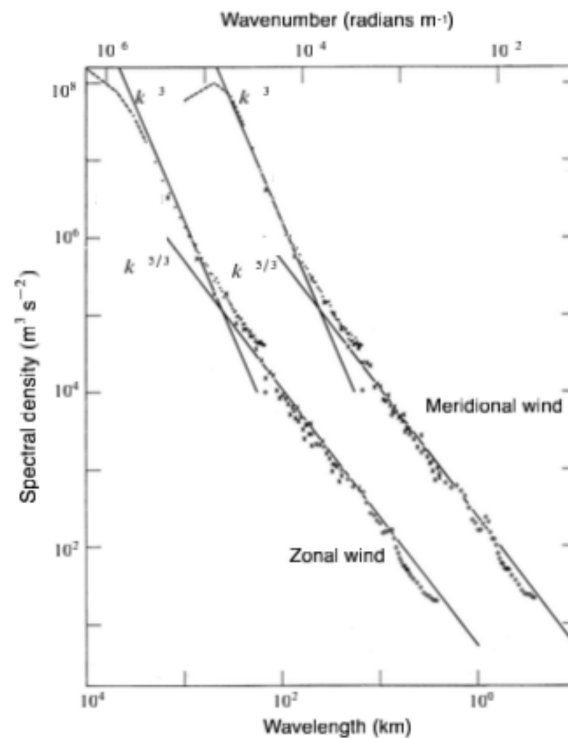


図 1.1 1975 年から 1979 年にかけて航空機観測によって得られた対流圏界面付近の東西風速と南北風速のエネルギースペクトル (Naston & Gage(1985)[5]). 南北風速のスペクトルは右にずらしている.

節・2.2 節).

- 上記で導いた方程式や物理量をスペクトル空間 (波数空間) における表現に直すことで, その計算方法を理解する (2.3 節).
- 2 で導いたエネルギー保存則とエンストロフィー保存則のスペクトル表源を用いて, 異なる波数間でのエネルギー変換はどのようになるかを議論する (3).
- 基本場が与えられた 2 次元流体の流れに対して擾乱を付加したとき, その擾乱が成長するか否かは擾乱の与え方に依存することを議論する (第 4 章).
- Fjørtoft (1953) では球面上の非圧縮非粘性順圧流体について議論されていたため, 球面上の微分演算について導出も含め確認し (付録 B), 球面上の固有値問題について学ぶ (付録 C).

第 2 章

準備

Fjørtoft (1953) の論文内で述べられているいくつかの結論について、現代的な表記や用語を用いて整理するために必要な方程式や物理量をまずここで導入する。Fjørtoft (1953) では球面上で物理量を定義して議論されているが、本論文では 2 次元平面上のデカルト座標系で議論をし、その上で定義される場の量は 2 次元領域 Ω の境界で二重周期条件が課されているとして議論する；

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L\}, \quad (2.1)$$

$$\forall \psi(x, y, t) \in \Omega, \psi(x, y, t) = \psi(x + L, y, t) = \psi(x, y + L, t). \quad (2.2)$$

2.1 基礎方程式: 非粘性非圧縮 2 次元の場合

まずは、2 次元における非粘性非圧縮順圧流体について考える。

2.1.1 運動方程式

2 次元平面上の非粘性非圧縮流体の運動方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.4)$$

と書ける。ここで、

- $u(x, y, t), v(x, y, t)$: x 方向, y 方向の速さ
- ρ : 密度 (均質流体を考えているので, 定数)
- $p = p(x, y, t)$: 圧力

である。以下、場の独立変数は省略するとしておく。今回は、強制と散逸は無視する。また、非圧縮の仮定より、連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.5)$$

である。以上をまとめて、 x 方向、 y 方向、 z 方向の単位ベクトルをそれぞれ e_x, e_y, e_z とし、ベクトル形式で記述すると、

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.7)$$

となる。ここで、

- $\mathbf{v} = (u, v)$: 2次元平面上の速度ベクトル
- ∇ : 2次元平面上の勾配演算子

で、 $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ は平面上の移流の加速度を表す。

2.1.2 渦度方程式

定義 1 (渦度の定義)

流体の3次元速度ベクトル $\mathbf{u} = (u, v, w)$ から

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla_3 \times \mathbf{u} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = (\xi, \eta, \zeta) \quad (2.8)$$

で定義される量を**渦度**という。ここで、 ∇_3 は3次元空間における勾配演算子である。

渦度は、流体粒子の回転角速度の2倍である。ここでは、2次元平面で考えているので、(2.8) は鉛直方向成分のみ、すなわち

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.9)$$

のみを考えるだけで良い。

補題 2

2次元平面内における渦度の時間発展変化は次の**渦度方程式**によって記述される；

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \zeta. \quad (2.10)$$

(証明) まずは、一般的な3次元空間における渦度方程式を導く。 $\boldsymbol{\omega} = \nabla_3 \times \mathbf{u}$, $p/\rho = \gamma$ として、運動方程式 (2.6) を書き換えた式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \gamma \right) + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \quad (2.6')$$

を用いる^{†1}. (2.6') の両辺に $\nabla \times$ を掛けると,

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}, \\
(\text{右辺}) &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \\
&= \mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})_k \\
&= \mathbf{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} u_l \omega_m \\
&= \mathbf{e}_i \partial_j (u_i \omega_j) - \mathbf{e}_i \partial_j (u_j \omega_i) \\
&= \mathbf{e}_i \omega_j \partial_j u_i + \mathbf{e}_i u_i \partial_j \omega_j - \mathbf{e}_i \omega_i \partial_j u_j - \mathbf{e}_i u_j \partial_j \omega_i \\
&= (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \underbrace{\mathbf{u} \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}}_{=\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u})=0} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}
\end{aligned}$$

となる. 途中で, Eddington のイプシロンの性質 $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$ と $\varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$ を用いた. これより, 一般的な渦度方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = \underbrace{(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}}_{\text{tilting term}} - \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\omega}}_{\text{divergence term}}$$

を得る. いま, 非圧縮流体では $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ より,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (\text{VE})$$

となる. ここで, (VE) の z 成分のみを考えると,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \zeta &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) w \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる. 最後の等号は, 流体が 2次元平面に束縛される状況 ($w = 0$) を考えているためである. よって, (2.10) が導かれた. \square

2.1.3 流れ関数の導入

2次元流体における非圧縮性条件 (2.7) を満たすように, 次のようなスカラー関数 ψ を定める導入することが可能である;

定義 3 (流れ関数の定義)

2次元平面上の関数 $\psi(x, y, t)$ について,

$$u = \frac{Dx}{Dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{Dy}{Dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.11)$$

を満たすものを**流れ関数** (または, 流線関数) という.

^{†1} ここで, $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla(u^2/2) - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$ を用いた.

流れ関数によって、渦度は

$$\zeta = \nabla^2 \psi \quad (2.12)$$

と表される. これとヤコビアン $J(a, b) = \partial a / \partial x - \partial b / \partial y$ を用いれば, (2.10) の右辺は,

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \zeta = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x}, \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} = J(\psi, \nabla^2 \psi)$$

と書けるので, (2.10) は

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = -J(\psi, \nabla^2 \psi) \quad (2.13)$$

である.

2.2 保存則

定義 4 (エネルギーとエンストロフィー)

$$E = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 d\Omega \quad (2.14)$$

で表される量 E を**エネルギー**と呼び,

$$Q = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla^2 \psi)^2 d\Omega \quad (2.15)$$

で定義される量 Q を**エンストロフィー**と呼ぶ.

(注) 一般の流体の場合, エネルギー密度としては $\rho |\mathbf{v}|^2 / 2$ を用いるが, ここで考えているのは均質流体, すなわち密度一定であるため, エネルギー密度は $|\mathbf{v}|^2 / 2$ としている.

定理 5 (エネルギー保存則)

領域 Ω 内において, エネルギーの総和は保存する. すなわち,

$$\int_{\Omega} (\nabla \psi)^2 d\Omega = \text{const} \quad (2.16)$$

が成立する.

(証明) $\mathbf{v} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y$ より,

$$\int_{\Omega} (\nabla \psi)^2 d\Omega = \int_{\Omega} (u^2 + v^2) d\Omega = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u^2 + v^2) d\Omega = 0$$

を示せば良い. (2.3) と (2.4) にそれぞれに u, v を掛けた式の辺々を足すと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) &= -\frac{1}{\rho} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla (u^2 + v^2) \\ &= -\frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \nabla p - \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla (u^2 + v^2) \\ &= - \left\{ (\mathbf{v} \cdot \nabla) \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right) \right\} \\ &= -\nabla \cdot \left\{ \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right) \mathbf{v} \right\} + \left\{ \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right) \right\} \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

となる. この式を領域内で積分すると, 右辺第 1 項はガウスの発散定理と周期境界条件よりゼロとなり, 右辺第 2 項は連続の式からゼロである. よって, (2.16) が導かれた. □

定理 6 (エンストロフィー保存則)

領域 Ω 内において, エンストロフィーの総和は保存する. すなわち,

$$\int_{\Omega} \zeta^2 d\Omega = \text{const} \quad (2.17)$$

が成立する.

(証明) (2.13) の両辺に $\omega = \nabla^2 \psi / 2$ を掛けると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \omega^2 \right) &= -\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} \omega^2 \right) \\ &= -\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \omega^2 \mathbf{v} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

となり, 両辺を Ω で積分すると, 定理 5 の証明と同様の理由から成立する. □

2.3 スペクトル空間における方程式系

2.3.1 スペクトル空間の定義

2 重周期境界が定義されている領域 Ω において, 物理量 ψ は Fourier 級数展開することができて,

$$\psi(x, y, t) = \sum_{n_x=-\infty}^{\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(n_x, n_y, t) \exp \left\{ i \left(\frac{2\pi}{L} n_x x + \frac{2\pi}{L} n_y y \right) \right\} \quad (2.18)$$

となる. ここで, $k_x = 2\pi n_x / L$, $k_y = 2\pi n_y / L$ とすると,

$$\psi(x, y, t) = \sum_{k_x=-\infty}^{\infty} \sum_{k_y=-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(k_x, k_y, t) \exp \{ i(k_x x + k_y y) \} \quad (2.19)$$

となる. 実空間での物理量 $\psi(x, y, t)$ の Fourier 係数 $\hat{\psi}$ に注目する空間を **スペクトル空間** と呼ぶ. k_x, k_y をそれぞれ x 方向と y 方向の **波数** と呼び, $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ を **波数ベクトル** と呼ぶ. $\hat{\psi}(k_x, k_y, t) = \hat{\psi}_{\mathbf{k}}(t)$ と書くと, (2.19) は

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (2.20)$$

と書き直せる. ここで, $\psi(x, y, t) \in \mathbb{R}$ であるから, $\hat{\psi}_{\mathbf{k}}^*(t) = \hat{\psi}_{-\mathbf{k}}(t)$ を満たす (* は複素共役を表す).

渦度のスペクトル表現

$\zeta = \nabla^2 \psi$ の両辺を Fourier 級数展開すると,

$$\begin{aligned} \zeta &= \sum_{\mathbf{k}} \hat{\zeta}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ \nabla^2 \psi &= \sum_{\mathbf{k}} \nabla^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = - \sum_{\mathbf{k}} (k_x^2 + k_y^2) \hat{\psi}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \end{aligned}$$

となる. ここで, Fourier 級数の性質として, $\partial/\partial x \rightarrow ik_x, \partial/\partial y \rightarrow ik_y$ より, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 \rightarrow -(k_x^2 + k_y^2)$ と演算が読み替えられることを用いた. これより, 渦度のスペクトル表現

$$\hat{\zeta}_{\mathbf{k}}(t) = -k^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}}(t) \quad (2.21)$$

を得る. ここで, $k_x^2 + k_y^2 \equiv k^2$ とした.

2.3.2 渦度方程式のスペクトル表現

渦度方程式 (2.10) のスペクトル表現を得るために, (2.13) の両辺に $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ を掛け, Ω で積分すると,

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= -\frac{d\hat{\zeta}_{\mathbf{k}}(t)}{dt}, \\ (\text{右辺}) &= \frac{1}{L^2} \int_{\Omega} J(\psi, \nabla^2 \psi) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\Omega \\ &= \frac{1}{L^2} \int_{\Omega} J(\psi, \zeta) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\Omega \\ &= \frac{1}{L^2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\Omega \\ &= \frac{1}{L^2} \sum_{\mathbf{l}+\mathbf{m}=\mathbf{k}} (-l_x m_y \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\zeta}_{\mathbf{m}} + l_y m_x \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\zeta}_{\mathbf{m}}) \int_{\Omega} e^{i(\mathbf{l}+\mathbf{m}-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} d\Omega \\ &= \sum_{\mathbf{l}+\mathbf{m}-\mathbf{k}=0} -m^2 (-l_x m_y + l_y m_x) \hat{\psi}_{\mathbf{l}} \hat{\psi}_{\mathbf{m}} \quad (*) \end{aligned}$$

となる. (*) は l と m を入れ替えても成立するので,

$$(\text{右辺}) = \sum_{l+m-k=0} -l^2(-m_x l_y + m_y l_x) \hat{\psi}_l \hat{\psi}_m \quad (**)$$

である. (*) と (**) を足して, 2 で割ると,

$$(\text{右辺}) = \sum_{l+m-k=0} \frac{1}{2}(m^2 - l^2)(l_x m_y + l_y m_x) \hat{\psi}_l \hat{\psi}_m$$

ここで, l を $-l$, m を $-m$ と置き換えると,

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{1}{2} \sum_{l+m+k=0} (l_x m_y + l_y m_x)(m^2 - l^2) \hat{\psi}_l \hat{\psi}_m^* \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l+m+k=0} \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{m})(m^2 - l^2) \hat{\psi}_l \hat{\psi}_m^* \end{aligned}$$

となる. よって, (2.10) のスペクトル表示は

$$\frac{d\hat{\zeta}_k(t)}{dt} = -\frac{1}{2} \sum_{l+m+k=0} \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{m})(m^2 - l^2) \hat{\psi}_l \hat{\psi}_m^* \quad (2.22)$$

である. (2.21) を用いれば,

$$\frac{d\hat{\psi}_k(t)}{dt} = \frac{1}{2k^2} \sum_{l+m+k=0} \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{m})(m^2 - l^2) \hat{\psi}_l \hat{\psi}_m^* \quad (2.23)$$

となる.

2.3.3 スペクトル空間における保存則

補題 7 (エネルギー保存則のスペクトル表現)

波数 \mathbf{k} をもつ 2 次元エネルギースペクトルは全空間内で保存する. すなわち, (2.16) は

$$\frac{1}{L^2} \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 d\Omega = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} k^2 |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 = \text{const} \quad (2.24)$$

と表せる.

(証明)

$$\int_{\Omega} (\nabla \psi)^2 d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\psi \nabla \psi) d\Omega - \int_{\Omega} \psi \nabla^2 \psi d\Omega = - \int_{\Omega} \psi \nabla^2 \psi d\Omega$$

と複素指数関数の直交性

$$\int_{\Omega} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{il\cdot\mathbf{x}} d\Omega = L^2 \delta_{\mathbf{k}, -l}$$

を用いると,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla\psi)^2 d\Omega &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \psi \nabla^2 \psi d\Omega \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_l \hat{\psi}_l e^{il\cdot\mathbf{x}} \left(-\sum_{\mathbf{k}} k^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_l k^2 \int_{\Omega} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_l e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{il\cdot\mathbf{x}} d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_l k^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_l L^2 \delta_{\mathbf{k}, -l} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} L^2 k^2 |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 \end{aligned}$$

となり, この表現を得る. \square

補題 8 (エンストロフィー保存則のスペクトル表現)

波数 \mathbf{k} をもつ 2次元エンストロフィースペクトルは全空間内で保存する. すなわち, (2.17) は

$$\frac{1}{L^2} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \zeta^2 d\Omega = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} k^4 |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 = \text{const} \quad (2.25)$$

と表せる.

(証明) 先程と同様に,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla^2 \psi)^2 d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left(-\sum_{\mathbf{k}} k^2 \psi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) \left(-\sum_l l^2 \psi_l e^{il\cdot\mathbf{x}} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\sum_{\mathbf{k}} \sum_l k^2 l^2 \psi_{\mathbf{k}} \psi_l e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{il\cdot\mathbf{x}} \right) d\Omega \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_l k^2 l^2 \frac{1}{2} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_l L^2 \delta_{\mathbf{k}, -l} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} L^2 k^4 |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 \end{aligned}$$

となり, この表現を得る. \square

今後の議論の便利のために、波数 \mathbf{k} をもつエネルギースペクトルとエンストロフィースペクトルをそれぞれ

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{2}k^2|\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2, \quad (2.26)$$

$$\mathcal{Q}(\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{2}k^4|\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 \quad (2.27)$$

とする。ここで注意すべきことは、空間内の全エネルギーやエンストロフィーは保存するが、スペクトル毎のエネルギーやエンストロフィーは保存しないことである；

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}(\mathbf{k}) &= 0, & \frac{d}{dt} \mathcal{E}(\mathbf{k}) &\neq 0 \\ \frac{d}{dt} \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{Q}(\mathbf{k}) &= 0, & \frac{d}{dt} \mathcal{Q}(\mathbf{k}) &\neq 0 \end{aligned}$$

またここで、流れ函数 $\psi_{\mathbf{k}}$ のスケール (波長) を $l_{\mathbf{k}} (= |\mathbf{k}|^{-1})$ とおく。波数が大きいほど「スケールは小さい」といい、波数が小さいほど「スケールは大きい」ということにする。与えられた速度場に対して、運動エネルギーは対応するスケール $l_{\mathbf{k}}$ をもつ異なる成分 $\psi_{\mathbf{k}}$ に分布する。

第 3 章

エネルギー変換過程に関する議論

ここでは、前章で導いたエネルギー保存則とエンストロフィー保存則のスペクトル表現を用いて、異なるスケールの中でエネルギーがどのように変換されるかについて議論する。

3.1 非粘性流体の場合

定理 9 (三波相互作用の議論に基づくエネルギー変換)

流体の運動が定常でないとき、運動エネルギーは異なる 3 つのスケールの中で変換されており、その変換は

- 大きいスケールと小さいスケールから、中間のスケールに向けて
- 中間のスケールから、大きなスケールと小さなスケールに向けて

のいずれかである。

(証明) 任意の時刻 t と $t + \Delta t$ (Δt は微小時間) とのエネルギースペクトル, エンストロフィースペクトルの変化量をそれぞれ

$$\Delta \mathcal{E}(\mathbf{k}) \equiv \mathcal{E}(\mathbf{k})|_{t+\Delta t} - \mathcal{E}(\mathbf{k})|_t \quad (3.1)$$

$$\Delta Q(\mathbf{k}) \equiv Q(\mathbf{k})|_{t+\Delta t} - Q(\mathbf{k})|_t \quad (3.2)$$

とおく。これらを (2.24) と (2.25) に代入すると、時間に関わらずエネルギーとエンストロフィーの総量は一定であるから、

$$\sum_{\mathbf{k}} \Delta \mathcal{E}(\mathbf{k}) = 0, \quad (3.3)$$

$$\sum_{\mathbf{k}} \Delta Q(\mathbf{k}) = 0 \quad (3.4)$$

である。以下、異なるスケール間でのエネルギーの変換は、3 つのスケール間でしか起こらない (つまり、2 つのスケールの間では起こらず、4 つ以上のスケール場合も 3 つのスケール

ルの場合に帰着される) ことを示す;

1. 異なる 2 つのスケールでのエネルギー変換

(3.3) と (3.4) を $l > m$ (ただし, $l \equiv |\mathbf{l}|, m \equiv |\mathbf{m}|$) なる 2 つの波数ベクトル \mathbf{l}, \mathbf{m} についてのみ考えると,

$$\Delta\mathcal{E}(\mathbf{l}) + \Delta\mathcal{E}(\mathbf{m}) = 0, \quad (3.5)$$

$$\Delta Q(\mathbf{l}) + \Delta Q(\mathbf{m}) = 0$$

$$\Leftrightarrow l^2 \Delta\mathcal{E}(\mathbf{l}) + m^2 \Delta\mathcal{E}(\mathbf{m}) = 0 \quad (3.6)$$

となる. (3.5) と (3.6) を連立して解くと, この系の行列式が $m^2 - l^2 \neq 0$ より, 逆行列が存在するので,

$$\Delta\mathcal{E}(\mathbf{l}) = \Delta\mathcal{E}(\mathbf{m}) = 0$$

である. つまり, 異なる 2 つのスケール間では, エネルギーの変換はない.

2. 異なる 3 つのスケールでのエネルギー変換

先ほどと同様に (3.3) と (3.4) を $|\mathbf{k}| > |\mathbf{l}| > |\mathbf{m}| \Leftrightarrow k > l > m$ なる 3 つの波数ベクトル $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}$ についてのみ考えると,

$$\Delta\mathcal{E}(\mathbf{k}) + \Delta\mathcal{E}(\mathbf{l}) + \Delta\mathcal{E}(\mathbf{m}) = 0, \quad (3.7)$$

$$k^2 \Delta\mathcal{E}(\mathbf{k}) + l^2 \Delta\mathcal{E}(\mathbf{l}) + m^2 \Delta\mathcal{E}(\mathbf{m}) = 0 \quad (3.8)$$

となる. $\Delta\mathcal{E}(\mathbf{m}), \Delta\mathcal{E}(\mathbf{k})$ をそれぞれ $\Delta\mathcal{E}(\mathbf{l})$ のみで表現すると,

$$\Delta\mathcal{E}(\mathbf{k}) = -\frac{l^2 - m^2}{k^2 - m^2} \Delta\mathcal{E}(\mathbf{l}), \quad (3.9)$$

$$\Delta\mathcal{E}(\mathbf{m}) = -\frac{k^2 - l^2}{k^2 - m^2} \Delta\mathcal{E}(\mathbf{l}) \quad (3.10)$$

となる. (3.9) と (3.10) の右辺の $\Delta\mathcal{E}(\mathbf{l})$ の係数はどちらも負であるから, この結果からわかることは, 以下の通りである (図 3.1);

- (i) 中間のスケール (つまりここでは, 波数 \mathbf{l} のスケール) の運動エネルギーの変化は他の 2 つのスケールの運動エネルギーの変化とは逆の変化である.
- (ii) 最大スケールと中間, 最小のスケールとのやりとりは実現しない
- (iii) 最小スケールと中間, 最大のスケールとのやりとりは実現しない

3. 任意の数 N 個のスケールでのエネルギー変換

(3.3) と (3.4) を次のように書き換える; $N > 3, N > M, \Delta\mathcal{E}(\mathbf{l}) \leq 0, \Delta\mathcal{E}(\mathbf{m}) \geq 0$

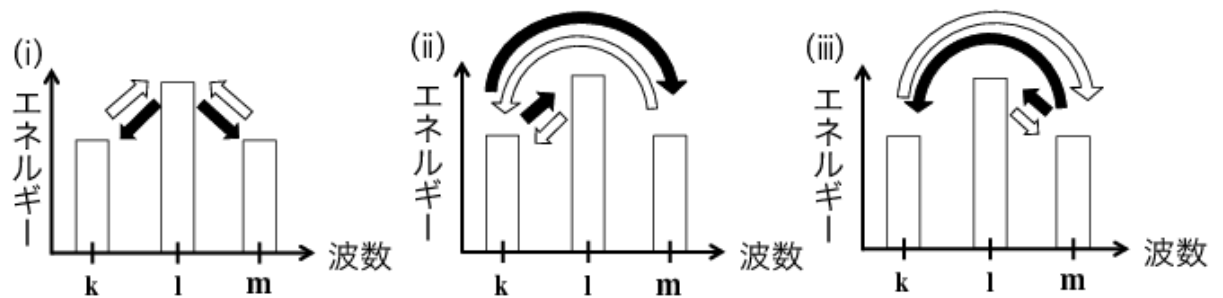


図 3.1 $k < p < q$ を満たすモード間でのエネルギーやエンストロフィーの変換. 定理 9 からわかったことは, (i) は起こりうるが, (ii) と (iii) は起こりえないことである. 白色の矢印は注目している波数に向けてエネルギーが輸送される場合で, 黒色の矢印は注目している波数から他の 2 つの波数へエネルギーが輸送される場合を表す.

として,

$$\sum_{|l|=1}^M \Delta \mathcal{E}(l) + \sum_{|m|=M+1}^N \Delta \mathcal{E}(m) = 0, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \sum_{|l|=1}^M \Delta \mathcal{Q}(l) + \sum_{|m|=M+1}^N \Delta \mathcal{Q}(m) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{|l|=1}^M l^2 \Delta \mathcal{E}(l) + \sum_{|m|=M+1}^N m^2 \Delta \mathcal{E}(m) &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

いま, 波数 M 以下のスケールではエネルギースペクトルは時間発展とともに減少し, 波数 $M+1$ 以上ではエネルギースペクトルは時間発展とともに増加していると

する. ここで,

$$\sum_{|\mathbf{k}|=1}^M Q(\mathbf{k}) = \sum_{|\mathbf{k}|=1}^M k^2 \mathcal{E}(\mathbf{k}) \equiv k^{*2} \sum_{|\mathbf{k}|=1}^M \mathcal{E}(\mathbf{k}) \Leftrightarrow k^{*2} \equiv \frac{\sum_{|\mathbf{k}|=1}^M Q(\mathbf{k})}{\sum_{|\mathbf{k}|=1}^M \mathcal{E}(\mathbf{k})} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \sum_{|\mathbf{k}|=M+1}^N Q(\mathbf{k}) &= \sum_{|\mathbf{k}|=M+1}^N k^2 \mathcal{E}(\mathbf{k}) \equiv k^{**2} \sum_{|\mathbf{k}|=M+1}^N \mathcal{E}(\mathbf{k}) \\ \Leftrightarrow k^{**2} &\equiv \frac{\sum_{|\mathbf{k}|=M+1}^N Q(\mathbf{k})}{\sum_{|\mathbf{k}|=M+1}^N \mathcal{E}(\mathbf{k})} \end{aligned} \quad (3.14)$$

とする. つまり, k^{*2} は時間発展したあとの波数 M 以下のエネルギースペクトルで平均された波数の 2 乗の平均, k^{**2} は時間発展したあとの波数 $M+1$ 以上のエネルギースペクトルで平均された波数の 2 乗の平均である^{†1};

$$1 \leq k^{*2} \leq M^2, \quad (3.15)$$

$$(M+1)^2 \leq k^{**2} \leq N^2. \quad (3.16)$$

これらを用いれば, (3.12) は

$$k^{*2} \sum_{|\mathbf{l}|=1}^M \Delta \mathcal{E}(\mathbf{l}) + k^{**2} \sum_{|\mathbf{m}|=M+1}^N \Delta \mathcal{E}(\mathbf{m}) = 0 \quad (3.17)$$

となる. (3.11) と (3.17) の系を解くと, 行列式は $k^{**2} - k^{*2} > 0$ であるから, 逆行列が存在するので, $\sum_{|\mathbf{l}|=1}^M \Delta \mathcal{E}(\mathbf{l}) = \sum_{|\mathbf{m}|=M+1}^N \Delta \mathcal{E}(\mathbf{m}) = 0$ となる. つまり, 4 つ以上の異なるスケールがある場合では, 3 つの場合に帰着される.

以上により, 定理が示された. □

3.1.1 初期状態からのエネルギー変換の上限

次に, ある与えられたスケールと等しい, もしくはそれよりも小さいスケールをもつ成分へのエネルギーの変換の上限について議論する. まず, (3.13), (3.14) と同様の記号を定

^{†1} 定義から, $1 \leq k^* \leq M$ なので, (3.15), $M+1 \leq k^{**} \leq N$ なので, (3.16) を容易に示せる.

義する; $\mathcal{E}(\mathbf{k})|_{t=0} = \mathcal{E}_0(\mathbf{k})$, $\mathcal{Q}(\mathbf{k})|_{t=0} = \mathcal{Q}_0(\mathbf{k})$ とし,

$$k_0^2 \equiv \frac{\sum_{\mathbf{k}} \mathcal{Q}_0(\mathbf{k})}{\sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_0(\mathbf{k})}, \quad k^{*2} \equiv \frac{\sum_{|\mathbf{k}|=1}^M \mathcal{Q}(\mathbf{k})}{\sum_{|\mathbf{k}|=1}^M \mathcal{E}(\mathbf{k})}, \quad k^{**2} \equiv \frac{\sum_{|\mathbf{k}|=M+1}^{\infty} \mathcal{Q}(\mathbf{k})}{\sum_{|\mathbf{k}|=M+1}^{\infty} \mathcal{E}(\mathbf{k})} \quad (3.18)$$

とする. つまり, k_0^2 は初期の全空間の波数の 2 乗の平均, k^{*2} は時間発展したあとの波数 M 以下のエネルギースペクトルで平均された波数の 2 乗の平均, k^{**2} は時間発展したあとの波数 $M+1$ 以上のエネルギースペクトルで平均された波数の 2 乗の平均である. 先ほどと異なり, 波数の上限は ∞ とした. 定義より,

$$1 \leq k_0^2 < \infty \quad (3.19)$$

$$1 \leq k^{*2} \leq M^2 \quad (3.20)$$

$$(M+1)^2 \leq k^{**2} < \infty \quad (3.21)$$

$$k^{*2} < k^{**2} \quad (3.22)$$

これらを用いて (3.1) から (3.4) より, 系

$$\sum_{|\mathbf{k}|=1}^M \mathcal{E}(\mathbf{k}) + \sum_{|\mathbf{k}|=M+1}^{\infty} \mathcal{E}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_0(\mathbf{k}) \quad (3.23)$$

$$k^{*2} \sum_{|\mathbf{k}|=1}^M \mathcal{E}(\mathbf{k}) + k^{**2} \sum_{|\mathbf{k}|=M+1}^{\infty} \mathcal{E}(\mathbf{k}) = k_0^2 \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_0(\mathbf{k}) \quad (3.24)$$

を得る. (3.23) の両辺に k_0^2 を掛け, 辺々を引き, $\sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_0(\mathbf{k})$ を消去すると,

$$\frac{\sum_{|\mathbf{k}|=M+1}^{\infty} \mathcal{E}(\mathbf{k})}{\sum_{|\mathbf{k}|=1}^M \mathcal{E}(\mathbf{k})} = \frac{k_0^2 - k^{*2}}{k^{**2} - k_0^2} \quad (3.25)$$

となる. この式の左辺はゼロまたは正であるから,

$$k^{*2} \leq k_0^2 \leq k^{**2} \quad (\text{ただし, } k^{*2} \neq k^{**2}) \quad (3.26)$$

でなくてはならない. 次に, (3.23) の両辺に k^{*2} を掛け, 辺々を引き, $\sum_{|\mathbf{k}|=1}^M \mathcal{E}(\mathbf{k})$ を消去すると,

$$\frac{\sum_{|\mathbf{k}|=M+1}^{\infty} \mathcal{E}(\mathbf{k})}{\sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_0(\mathbf{k})} = \frac{k_0^2 - k^{*2}}{k^{**2} - k^{*2}} \quad (3.27)$$

となる. これより, 初期のエネルギーからあるスケールよりも小さなスケールへのエネルギーの変換の上限がわかる. (3.27) の右辺の比の最大値は, $k^{**2} = k_0^2$ のとき 1 である. これは,

$$k_0^2 \geq (M+1)^2 \quad (3.28)$$

のときのみ可能である.

3.1.2 初期エネルギーのスケールが大きい場合

(3.27) は k^{*2} と k^{**2} がとりうる最小値の場合, すなわち (3.20) と (3.21) より, $k^* = 1$, $k^{**2} = (M+1)^2$ の場合に,

$$\frac{\sum_{|\mathbf{k}|=M+1}^{\infty} \mathcal{E}(\mathbf{k})}{\sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_0(\mathbf{k})} \leq \frac{k_0^2 - 1}{(M+1)^2 - 1} = \frac{k_0^2}{(M+1)^2} \frac{1 - \frac{1}{k_0^2}}{1 - \frac{1}{(M+1)^2}} < \frac{k_0^2}{(M+1)^2} \quad (3.29)$$

となる.

いま, (3.28) でない場合, つまり,

$$k_0^2 < (M+1)^2 \quad (3.30)$$

の場合を考えよう. これは, 初期エネルギーの波数の 2 乗の平均がある波数 $M+1$ の 2 乗よりも小さい場合, すなわち, 初期エネルギーのスケールがあるスケールよりも大きい場合である. この場合を考えるために, 初期エネルギースペクトルの成分は, $L < M+1$ なる波数 L 以下の成分しかないとする. (3.19), (3.20), (3.21) より

$$1 \leq k_0^2 \leq L^2 < (M+1)^2 \quad (3.31)$$

となり, L は条件を満たす. この場合を (3.29) に適用すると,

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{|\mathbf{k}|=M+1}^{\infty} \mathcal{E}(\mathbf{k})}{\sum_{|\mathbf{k}|=1}^L \mathcal{E}_0(\mathbf{k})} &\leq \frac{k_0^2 - 1}{(M+1)^2 - 1} \leq \frac{L^2 - 1}{(M+1)^2 - 1} = \frac{L^2}{(M+1)^2} \frac{1 - \frac{1}{L^2}}{1 - \frac{1}{(M+1)^2}} \\ &< \left(\frac{L}{M+1} \right)^2 = \left(\frac{l_{M+1}}{l_L} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

となる. よって, 時間発展したあと, スケール l_{M+1} よりも大きなスケールに流れ得るエネルギーは初期の全エネルギーの $(l_{M+1}/l_L)^2$ 未満である. つまり, 初期の流れが大きなスケールの速度場によって表されるとき, より小さいスケールの運動エネルギーは重要視して考える必要はなくなる.

3.2 粘性流体の場合

ここまでの非粘性流体におけるエネルギー変換の議論を粘性流体に対しても適用してみる。

3.2.1 運動方程式と渦度方程式

動粘性係数を ν とすると、非圧縮性 2 次元順圧流体運動方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.33)$$

となる。両辺に $\nabla \times$ を作用させ、鉛直方向成分のみ考えると、渦度方程式

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = -J(\psi, \nabla^2 \psi) + \nu \nabla^4 \psi \quad (3.34)$$

を得る。

3.2.2 エネルギーとエントロフィーの時間変化

(3.34) から直ちに次の結果が得られる；

補題 10

非発散の粘性流体における空間内のエネルギーとエントロフィーの単位時間あたりの変化量はそれぞれ次のように表せる；

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\nabla \psi)^2 d\Omega = -\nu \int_{\Omega} \zeta^2 d\Omega, \quad (3.35)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \zeta^2 d\Omega = \nu \int_{\Omega} \zeta \nabla^4 \psi d\Omega = -\nu \int_{\Omega} (\nabla \zeta)^2 d\Omega. \quad (3.36)$$

(証明) (3.34) に ψ を掛け、考えている空間内で積分する。(2.13) から新たに加わった鴻海に注目して計算する；

$$\nu \int_{\Omega} \psi \nabla^2 \nabla^2 \psi d\Omega = \nu \int_{\Omega} \{ \nabla^2 (\psi \nabla^2 \psi) - (\nabla^2 \psi)^2 \} d\Omega = -\nu \int_{\Omega} (\nabla^2 \psi)^2 d\Omega$$

となるので、最終的に (3.35) を得る。また、(3.34) に $\nabla^2 \psi$ を掛け、空間内で積分をすると、右辺第 1 項はゼロとなるので、(3.36) を得る。□

ここで,

$$\sum_{\mathbf{k}} k^2 \mathcal{E}(\mathbf{k}) \equiv \bar{k}^{2\mathcal{E}} \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}(\mathbf{k}), \quad (3.37)$$

$$\sum_{\mathbf{k}} k^4 \mathcal{E}(\mathbf{k}) \equiv \bar{k}^{2\mathcal{Q}} \sum_{\mathbf{k}} k^2 \mathcal{E}(\mathbf{k}) \quad (3.38)$$

なる $\bar{k}^{2\mathcal{E}}, \bar{k}^{2\mathcal{Q}}$ を定義する. これを用いれば, (3.35) の右辺の積分箇所を

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \zeta^2 d\Omega &= \int_{\Omega} \left(- \sum_{\mathbf{k}} k^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) \left(- \sum_{\mathbf{l}} l^2 \hat{\psi}_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{l}} k^2 l^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} d\Omega \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{l}} k^2 l^2 \hat{\psi}_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{l}} L^2 \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{l}} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} k^2 k^2 L^2 |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 \\ &= 2L^2 \sum_{\mathbf{k}} k^2 \mathcal{E}(\mathbf{k}) \\ &= 2L^2 \bar{k}^{2\mathcal{E}} \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}(\mathbf{k}) \\ &= 2L^2 \bar{k}^{2\mathcal{E}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} k^2 |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 \\ &= \bar{k}^{2\mathcal{E}} \int_{\Omega} \left(\sum_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) \left(\sum_{\mathbf{l}} l^2 \hat{\psi}_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} \right) d\Omega \\ &= \bar{k}^{2\mathcal{E}} \int_{\Omega} \psi (-\nabla^2 \psi) d\Omega \\ &= \bar{k}^{2\mathcal{E}} \int_{\Omega} (\nabla \psi)^2 d\Omega \end{aligned}$$

と書き直せる. さらに, (3.36) の右辺の積分箇所も同様に

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \psi \cdot \nabla^4 \psi d\Omega = -\bar{k}^{2\mathcal{Q}} \int_{\Omega} (\nabla^2 \psi)^2 d\Omega$$

と書けるので, (3.35) と (3.36) は

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\nabla \psi)^2 d\Omega = -\nu \bar{k}^{2\mathcal{E}} \int_{\Omega} (\nabla \psi)^2 d\Omega, \quad (3.39)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \zeta^2 d\Omega = -\nu \bar{k}^{2\mathcal{Q}} \int_{\Omega} \zeta^2 d\Omega. \quad (3.40)$$

と書ける. (3.37) と (3.38) から,

$$\begin{aligned} \bar{k}^2 \mathcal{Q} - \bar{k}^2 \mathcal{E} &= \frac{\sum_{\mathbf{k}} k^4 \mathcal{E}(\mathbf{k})}{\sum_{\mathbf{k}} k^2 \mathcal{E}(\mathbf{k})} - \frac{\sum_{\mathbf{k}} k^2 \mathcal{E}(\mathbf{k})}{\sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}(\mathbf{k})} \\ &= \frac{\sum_{\mathbf{k}} k^4 \mathcal{E}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}(\mathbf{k}) - \left(\sum_{\mathbf{k}} k^2 \mathcal{E}(\mathbf{k}) \right)^2}{\sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{k}} k^2 \mathcal{E}(\mathbf{k})} \geq 0 \end{aligned}$$

となる. 最後の不等号については, 分母は正であることは明らかであるから分子について計算すると,

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}} k^4 \mathcal{E}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}(\mathbf{k}) - \left(\sum_{\mathbf{k}} k^2 \mathcal{E}(\mathbf{k}) \right)^2 &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{l}} (l^4 - k^2 l^2) \mathcal{E}(\mathbf{m}) \mathcal{E}(\mathbf{l}) \\ &= \sum_{\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{k}} (k^4 - k^2 l^2) \mathcal{E}(\mathbf{m}) \mathcal{E}(\mathbf{l}) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{l}} \frac{1}{2} (k^4 + l^4 - 2k^2 l^2) \mathcal{E}(\mathbf{m}) \mathcal{E}(\mathbf{l}) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{l}} \frac{1}{2} (k^2 - l^2)^2 \mathcal{E}(\mathbf{m}) \mathcal{E}(\mathbf{l}) \end{aligned}$$

よりわかる. よって,

$$\bar{k}^2 \mathcal{Q} \geq \bar{k}^2 \mathcal{E} \quad (3.41)$$

となる. 等号は ψ が単一の波数成分のみで表されているときに成立する. また, 粘性流体の場合, $\sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}(\mathbf{k}) \leq \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_0(\mathbf{k}), \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{Q}(\mathbf{k}) \leq \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{Q}_0(\mathbf{k})$ であるから, $\sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}(\mathbf{k}) = n_1 \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_0(\mathbf{k}), \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{Q}(\mathbf{k}) = n_2 \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{Q}_0(\mathbf{k})$ なる $0 < n_1, n_2 \leq 1$ をとると,

$$\frac{\sum_{\mathbf{k}} \mathcal{Q}(\mathbf{k})}{\sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}(\mathbf{k})} = \frac{n_2 \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{Q}_0(\mathbf{k})}{n_1 \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_0(\mathbf{k})} = \frac{n_2 \sum_{\mathbf{k}} k^2 \mathcal{E}_0(\mathbf{k})}{n_1 \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_0(\mathbf{k})} = \frac{k_0^2 n_2 \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_0(\mathbf{k})}{n_1 \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_0(\mathbf{k})} = k_0^2 \frac{n_2}{n_1}$$

を得る. これを用いると, 粘性流体の場合は (3.25) の右辺に相当する式は

$$\frac{\sum_{|\mathbf{k}|=M+1}^{\infty} \mathcal{E}(\mathbf{k})}{\sum_{|\mathbf{k}|=1}^M \mathcal{E}(\mathbf{k})} = \frac{k_0^2 \frac{n_2}{n_1} - k^{*2}}{k^{**2} - k_0^2 \frac{n_2}{n_1}} \quad (3.42)$$

と書き直せる. また, 同様に (3.27) に相当する式は

$$\frac{\sum_{|\mathbf{k}|=M+1}^{\infty} \mathcal{E}(\mathbf{k})}{\sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_0(\mathbf{k})} = \frac{k_0^2 \frac{n_2}{n_1} - k^{*2}}{k^{**2} - k^{*2}} \quad (3.43)$$

と書き直される. 以上から分かることは, 次のようにまとめられる;

- 流体の粘性によって運動エネルギーと渦度が同じ率で減っていく場合 (つまり, $n_1 = n_2$)

時間発展したあとのより大きなスケールから時間発展したあとのより小さなスケールへのエネルギーの変換と初期の全エネルギーから時間発展したあとのより小さなスケールへのエネルギーの変換は, 非粘性流体の場合と同様に起こる.
- 流体の粘性によって運動エネルギーの方がエンストロフィーよりも低い率で減少する場合 (つまり, $n_1 < n_2$)

時間発展したあとのより大きなスケールから時間発展したあとのより小さなスケールへのエネルギーの変換と初期の全エネルギーから時間発展したあとのより小さなスケールへのエネルギーの変換は, 非粘性流体の場合より多く起こる.
- 流体の粘性によって運動エネルギーの方がエンストロフィーよりも高い率で減少する場合 (つまり, $n_1 > n_2$)

時間発展したあとのより大きなスケールから時間発展したあとのより小さなスケールへのエネルギーの変換と初期の全エネルギーから時間発展したあとのより小さなスケールへのエネルギーの変換は, 非粘性流体の場合よりあまり起こらない.

第 4 章

2 次元流の安定性

ここでは, 基本場 (流れ函数を用いて $\bar{\Psi}$ と表現する) が最もスケールが大きい流れ函数で表される場合

$$\bar{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} \delta_{|\mathbf{k}|, 1} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (c_{\mathbf{k}} : \text{const}, t \leq 0)$$

の安定性について議論する. $t = 0$ の流れ函数を

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = \bar{\Psi}(\mathbf{x}, 0) + \sum_{|\mathbf{k}|=2}^{\infty} \hat{\psi}'_{\mathbf{k}}(0) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

とする. つまり, 初期の流れ函数を基本場の流れと基本場よりも小さなスケールの擾乱とに分解する. このとき, 初期の全エネルギーと後の時刻における擾乱のエネルギーの比を考えよう. 初期のエネルギーとエンストロフィーはこのとき

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_0(\mathbf{k}) &= \mathcal{E}_0(|\mathbf{k}|=1) + \sum_{|\mathbf{k}|=2}^{\infty} \mathcal{E}'_0(\mathbf{k}) \\ \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{Q}_0(\mathbf{k}) &= \mathcal{Q}_0(|\mathbf{k}|=1) + \sum_{|\mathbf{k}|=2}^{\infty} \mathcal{Q}'_0(\mathbf{k}) \\ &= \mathcal{E}_0(|\mathbf{k}|=1) + \sum_{|\mathbf{k}|=2}^{\infty} \mathcal{Q}'_0(\mathbf{k}) \quad (\because \mathcal{Q}_0(\mathbf{k}) = k^2 \mathcal{E}_0(\mathbf{k}) \text{ より}) \end{aligned}$$

と書けるから,

$$k_0^2 = \frac{\mathcal{E}_0(|\mathbf{k}|=1) + \sum_{|\mathbf{k}|=2}^{\infty} \mathcal{Q}'_0(\mathbf{k})}{\mathcal{E}_0(|\mathbf{k}|=1) + \sum_{|\mathbf{k}|=2}^{\infty} \mathcal{E}'_0(\mathbf{k})} \quad (4.1)$$

である. 時間発展した後の擾乱と初期の全エネルギーとの比については, (3.27) で $M = 1$ として

$$\frac{\sum_{|\mathbf{k}|=2}^{\infty} \mathcal{E}'(\mathbf{k})}{\sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_0(\mathbf{k})} = \frac{k_0^2 - k^{*2}}{k^{**2} - k^{*2}} \quad (4.2)$$

である. $M = 1$ のとき, (3.20) と (3.21) は

$$k^{*2} = 1, k^{**2} \geq 4 \quad (4.3)$$

となる. よって,

$$\frac{\sum_{|\mathbf{k}|=2}^{\infty} \mathcal{E}'(\mathbf{k})}{\sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_0(\mathbf{k})} = \frac{k_0^2 - 1}{k^{**2} - 1} \quad (4.4)$$

を得る. ここまで整理すると, 以下のことがすぐに証明できる.

定理 11 (2次元流の初期エネルギー, エンストロフィーと安定性)

初期の運動として波数が最も小さな流れを基本流としたとき, その流れに与えた擾乱のエンストロフィーが小さい場合, 流れの波数は基本場の波数に収束する, つまり, 流体の運動は安定である. 一方, 初期に与えた擾乱のエネルギーが小さいからといって, 流体の運動は安定であるとは限らない.

(証明) 仮定より, 任意の小さな数 $\varepsilon \geq 0$ をとり,

$$\sum_{|\mathbf{k}|=2}^{\infty} \mathcal{Q}'_0(\mathbf{k}) = \varepsilon \quad (4.5)$$

とする (つまり, 初期の擾乱のエンストロフィーが小さいとする). $\mathcal{Q}'_0 = k^2 \mathcal{E}'_0$ なので,

$$\sum_{|\mathbf{k}|=2}^{\infty} \mathcal{E}'_0(\mathbf{k}) < \sum_{\mathbf{k}} k^2 \mathcal{E}'_0(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{Q}'_0(\mathbf{k}) = \varepsilon \quad (4.6)$$

より, 初期エネルギーの擾乱は上限 ε で抑えられる. $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると, $\sum_{|\mathbf{k}|=2}^{\infty} \mathcal{E}'_0(\mathbf{k}) \rightarrow 0$ となる. よって, (4.1) で $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると, $k_0^2 \rightarrow 1$ となる. これを (4.4) に適用すると,

$$\frac{\sum_{|\mathbf{k}|=2}^{\infty} \mathcal{E}'(\mathbf{k})}{\sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_0(\mathbf{k})} \rightarrow 0 \quad (4.7)$$

とわかる. この式から, 定常流において, 初期エンストロフィーが小さいとき, 任意の時間における擾乱の全運動エネルギーは初期の全運動エネルギーに比べて小さくなることがわかる. つまり, 流れは安定である.

一方, 同様の ε で

$$\sum_{|\mathbf{k}|=2}^{\infty} \mathcal{E}'_0(\mathbf{k}) = \varepsilon \quad (4.8)$$

とする (つまり, 初期の擾乱のエネルギーが小さいとする). しかしこのとき,

$$\sum_{|\mathbf{k}|=2}^{\infty} \mathcal{Q}'_0(\mathbf{k}) > \varepsilon \quad (4.9)$$

であるから, $\varepsilon \rightarrow 0$ としても, $\mathcal{Q}'_0 \rightarrow 0$ とならない ε をとることは可能である. つまり, (4.1) より k_0^2 は任意に大きくとることが可能である. つまり, 流れは安定であるとは限らない. \square

初期のエネルギーが小さい場合, (4.3) から $k_0^2 = k^{**2} \geq 4$ なる K をとることができ, このとき (4.4) から

$$\frac{\sum_{|\mathbf{k}|=2}^{\infty} \mathcal{E}'(\mathbf{k})}{\sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_0(\mathbf{k})} = 1 \quad (4.10)$$

となる. つまり, 初期のエネルギー (基本場のエネルギー) は全て擾乱のエネルギーに変換されることを表している.

基本場の流れ Ψ はとりうる値の中では最大のスケールの成分を表しているため, 以上のことは次のように言い換えることができる; 2次元流の定常運動のが不安定であるためには, 擾乱が基本場の流れのスケールよりも大きなスケールをもつ成分によって表されることが必要である. この必要条件はエネルギースペクトルの擾乱の変化が見られるより一般的な結果にも関連付けられる.

第 5 章

考察

ここまで, Fjørtoft(1953) に基づいて, 非粘性非圧縮 2 次元順圧流体の性質について考察した. 特に, 第 3 章で考察した異なる波数間でのエネルギー変換過程については Fjørtoft は具体的な波数の値を与えて考察をしているが, これは誤りであることが後の論文で指摘されている. 本章ではこれらについて考察を加える.

5.1 Fjørtoft の考察

Fjørtoft は (3.7), (3.8) と (3.9), (3.10) から得られる

$$\frac{\Delta\mathcal{E}(m)}{\Delta\mathcal{E}(k)} = \frac{k^2 - l^2}{l^2 - m^2} > 0 \quad (5.1)$$

を満たすように,

$$\frac{k^2}{l^2} = 4, \frac{l^2}{m^2} = 4$$

と定めることができるとしている. これより,

$$\frac{k}{l} = 2, \frac{l}{m} = 2 \quad (5.2)$$

とできるはずなので, 以下, $m = 1/2, l = 1, k = 2$ として議論を進めてみる. すると, (5.1) から,

$$\frac{\Delta\mathcal{E}(m)}{\Delta\mathcal{E}(k)} = 4 \quad (5.3)$$

となる. Fjørtoft はこれより「あるスケール (上では l) の運動エネルギーの変化は, 2 倍のスケール (上では m) と半分のスケール (上では k) に 4 : 1 の比で分配される」と結論づけている.

5.2 波数ベクトル間の関係

以上の Fjørtoft の考察が間違っていると指摘される理由は, Fjørtoft の考察が波数空間における渦度方程式を参照していないからである. 実際, (2.22) を参照すると, 右辺より, 和を取る 3 つの波数ベクトルは $l + m + k = 0$, つまり, l と m と k が三角形を形成するような関係である必要がある. しかしながら, (5.2) を満たす 3 つの波数ベクトルでは三角形を形成することができない. よって, エネルギー変換の概念図は先ほど示した図 3.1 ではなく, 以下に示す図 5.1 のように考えるのが正しい.

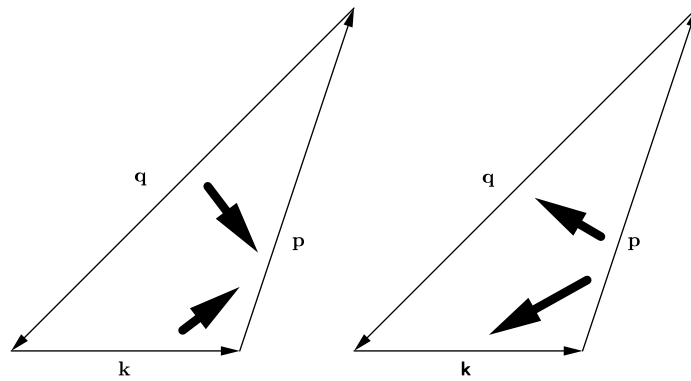


図 5.1 $k < p < q$ を満たすモード間でのエネルギーやエンストロフィーの輸送. k, p, q の 3 つの波数ベクトルが相対的な大きさのみならず, その形の条件として図のように三角形を形成しなければならないことは後の時代の論文によって証明されている.

第6章

結論

2次元非圧縮非粘性順圧流体の波数空間における性質として、異なる波数の間でのエネルギー輸送と擾乱を与えた時の安定性について議論してきた。この議論の特徴は、運動方程式を参照せずにエネルギー保存則とエントロフィー保存則のスペクトル表現

$$\frac{d}{dt} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} k^2 |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{d}{dt} \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}(\mathbf{k}) = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} k^4 |\hat{\psi}_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{d}{dt} \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{Q}(\mathbf{k}) = 0 \quad (6.2)$$

からエネルギー輸送と安定性について議論している点である。

エネルギーの輸送については定理9にまとめられたとおり、運動エネルギーは異なる3つのスケールのみの中で輸送されており、その輸送は

- 大きいスケールと小さいスケールから、中間のスケールに向けて
- 中間のスケールから、大きなスケールと小さなスケールに向けて

のいずれかである。エントロフィーの輸送についても同様の議論により同じ結論が得られる。輸送の様子は図5.1のように表される。Fjørtoft (1953)では、波数ベクトルの相対的な大きさを指定して、エネルギーやエントロフィーの交換率を議論しているが、これは誤りであることが後に指摘されている。また、粘性流体におけるエネルギーとエントロフィーの時間変化についても非粘性の場合と同様に議論したが、決定的な結論は得られなかった。

波数が最も小さい、つまり、スケールが最も大きい流れを基本場としたときに、与える擾乱のエネルギーやエントロフィーの大きさによって擾乱が成長するか否かが変わることも示した(定理11)。それは次のようにまとめられる；

- 与えた擾乱のエントロフィーが小さい場合、擾乱は成長せず、流れは基本場に収

束する.

- 与えた擾乱のエネルギーが小さい場合, 擾乱は成長する可能性があり, 流れが基本場に収束するとは限らない.
- 逆に, 流れが不安定になるためには, 擾乱のスケールが基本場のスケールよりも大きなスケールでなければならない.

付録 A

Fjørtoft (1953) の全訳と修正

Fjørtoft (1953) の全訳と論文内に出てくる式の導出, 論文内の誤りを訂正して述べる.

概要

流体が周囲から分離されているとき, 均質な非発散非粘性流体の 2 次元流の時間発展において, 2 乗された全渦度だけでなく, 全運動エネルギーは変化しない積分量である. その場合, 流体は球面上全体の領域で定義されていると考える. 運動エネルギースペクトルの分布の時間変化の特徴は, 上で言及されている 2 つの保存量を基に議論される. 初期状態のエネルギーの少量が小さなスケールに流れることができ, 同時に, 多くのエネルギーはより大きなスケール成分に流れていくことがわかる. あるスケールよりも小さなスケールの運動エネルギーの成分に向けての運動エネルギーの流れの上限を発見する. 保存則はまた 2 次元運動 (球面上である必要はない) の定常な流れの安定性を議論するのに用いられる. 安定性の証明のために擾乱の運動エネルギーが小さいことを考えるだけでなく, その渦度の小ささも考えることがどれほど重要かが示される.

第 II 章においては, 分子粘性を球面上の流れの計算に考慮する. 最終的に, 2 次元の流れと 3 次元の流れの根本的な違いに関して結論的注意を述べる.

1 球面上の 2 次元非粘性流体の流れ

球面の全表面上で定義される均質流体の 2 次元非発散の流れを考える^{†1}. まずは粘性を無視する. 慣性系における流体の純粋な運動は方程式,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla_s \gamma - (\mathbf{v} \cdot \nabla_s \mathbf{v})_s, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{v} = -\nabla_s \psi \times \mathbf{k}, \quad (\text{A.2})$$

で支配される. ここで,

- \mathbf{v} : 速度
 - ∇_s : 球面上の微分作用素 (勾配演算子)
 - γ : (圧力)÷(密度)
 - $-(\mathbf{v} \cdot \nabla_s \mathbf{v})_s$: 球面上に沿った移流の加速度
 - \mathbf{k} : 球面に垂直な単位ベクトル,
 - ψ : 球面座標における一価二階微分可能な函数
- (1.3)

である^{†2}.

全運動エネルギーは今考えている流体において明らかに保存される. それゆえ, 球面上のすべての領域 F で,

$$\int_F (\nabla_s \psi)^2 dF = \text{const} \quad (\text{A.4})$$

^{†1} 球面上における微分演算については, 付録にてまとめる.

^{†2} (A.1) を付録の球座標系における微分演算を用いて, 球座標系 (r, θ, ϕ) で成分表示する; まず, (A.2) を成分表示すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\nabla_s \psi \times \mathbf{k} \\ &= -\nabla_s \psi \times \mathbf{e}_r \\ &= \left(-\mathbf{e}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \mathbf{e}_\phi \frac{1}{R \cos \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) \times \mathbf{e}_r \\ &= -\mathbf{e}_\phi \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{R \cos \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\ &= \mathbf{e}_\phi v_\phi + \mathbf{e}_\theta v_\theta \end{aligned}$$

となる。これより,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_\phi \mathbf{e}_\phi) \\
&= \frac{\partial v_\theta}{\partial t} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial v_\phi}{\partial t} \mathbf{e}_\phi, \\
-\nabla_s \gamma &= -\mathbf{e}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} - \mathbf{e}_\phi \frac{1}{R \cos \theta} \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} \\
\mathbf{v} \cdot \nabla_s &= (v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_\phi \mathbf{e}_\phi) \left(\mathbf{e}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{R \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\
&= v_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{R \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \\
(\mathbf{v} \cdot \nabla_s \mathbf{v})_s &= \left(v_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{R \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) (v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_\phi \mathbf{e}_\phi) \\
&= \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta - \frac{v_\theta^2}{R} \mathbf{e}_r + \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\phi + \frac{v_\phi}{R \cos \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\theta \\
&\quad - \frac{v_\phi v_\theta}{2} \tan \theta \mathbf{e}_\phi + \frac{v_\phi}{R \cos \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi - \frac{v_\phi}{R} \mathbf{e}_r + \frac{v_\phi^2}{R} \tan \theta \mathbf{e}_\theta \\
&= \mathbf{e}_\theta \left(\frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{R \cos \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_\phi^2}{R} \tan \theta \right) \\
&\quad + \mathbf{e}_\phi \left(\frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{v_\phi v_\theta}{R} \tan \theta + \frac{v_\theta}{R \cos \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) \\
&\quad + \mathbf{e}_r \left(-\frac{v_\theta^2}{R} - \frac{v_\phi^2}{R} \right)
\end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_\theta}{\partial t} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_\phi}{R \cos \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{R} \tan \theta \\
&= -\frac{1}{R} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} - \mathbf{v} \cdot \nabla_s v_\theta - \frac{v_\phi^2}{R} \tan \theta, \\
\frac{\partial v_\phi}{\partial t} &= -\frac{1}{R \cos \theta} \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} - \frac{v_\theta}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{R \cos \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_\theta}{R} \tan \theta \\
&= -\frac{1}{R \cos \theta} \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} - \mathbf{v} \cdot \nabla_s v_\phi + \frac{v_\phi v_\theta}{R} \tan \theta
\end{aligned}$$

となる^{†3}. (A.1) から $\nabla_s \gamma$ を消去し, (A.2) を用いると,

$$\frac{\partial \nabla_s^2 \psi}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla_s \nabla_s^2 \psi \quad (\text{A.5})$$

^{†3} エネルギー保存則 (A.4) を導出する; $\mathbf{v} = \mathbf{e}_\phi v_\phi + \mathbf{e}_\theta v_\theta$ より,

$$\int_F (\nabla_s \psi)^2 dF = \int_F (v_\theta^2 + v_\phi^2) dF = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \int_F (v_\theta^2 + v_\phi^2) dF = 0$$

を示せば良い. $\partial v_\theta / \partial t, \partial v_\phi / \partial t$ にそれぞれ v_θ, v_ϕ を掛けた式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} v_\theta^2 \right) &= -\frac{v_\theta}{R} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} - \mathbf{v} \cdot \nabla_s \frac{1}{2} v_\theta^2 - \frac{v_\phi^2 v_\theta}{R} \tan \theta, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} v_\phi^2 \right) &= -\frac{v_\phi}{R \cos \theta} \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} - \mathbf{v} \cdot \nabla_s \frac{1}{2} v_\phi^2 + \frac{v_\phi^2 v_\theta}{R} \tan \theta \end{aligned}$$

の辺々を足すと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{2} \right) &= -\frac{v_\theta}{R} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} - \frac{v_\phi}{R \cos \theta} \frac{\partial \gamma}{\partial \phi} - \mathbf{v} \cdot \nabla_s \frac{1}{2} v_\theta^2 - \mathbf{v} \cdot \nabla_s \frac{1}{2} v_\phi^2 \\ &= \left\{ (\mathbf{v} \cdot \nabla_s) \left(\gamma + \frac{1}{2} (v_\theta^2 + v_\phi^2) \right) \right\} \\ &= -\nabla_s \cdot \left[\left\{ \gamma + \frac{1}{2} (v_\theta^2 + v_\phi^2) \right\} \mathbf{v} \right] + \underbrace{\left\{ \gamma + \frac{1}{2} (v_\theta^2 + v_\phi^2) \right\} \nabla_s \cdot \mathbf{v}}_{=0} \end{aligned}$$

ここで, 一般に 2次元球面上のベクトル場 \mathbf{A} について,

$$\begin{aligned} \int_{\text{球面上}} \nabla_s \cdot \mathbf{A} dF &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} R^2 \cos \theta \frac{1}{R \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta A_\theta) + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right] d\phi d\theta \\ &= R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \cos \theta) + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right\} d\phi d\theta \\ &= R \left[\int d\phi [A_\theta \cos \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int d\theta [A_\phi]_0^{2\pi} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから, 辺々を足した式を F 上で積分すると,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_F \left(\frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{2} \right) dF = 0 \Leftrightarrow \int_F (v_\theta^2 + v_\phi^2) dF = 0$$

を得る.

を得る^{†4}. ここで, $\nabla_s^2 \psi$ は球面に垂直な渦度成分を表す. (A.5) の両辺に $\frac{1}{2} \nabla_s^2 \psi$ を掛け, F 上で積分すると,

$$\int_F (\nabla_s^2 \psi)^2 dF = \text{const} \quad (\text{A.6})$$

を得る^{†5}. (A.4) と (A.6) は2つの保存則を表現している^{†6}. 以下では, 初期条件がわかっているときの (A.1) と (A.2) の解の性質としてこれらの保存則から得られる少なからぬ情報を引き出すことができることを示そう.

^{†4} (A.5) を導出する; (VE) を球面上の式に書き換える. 左辺第2項を球面座標で計算すると,

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} &= \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (\omega_r \mathbf{e}_r + \omega_\theta \mathbf{e}_\theta + \omega_\varphi \mathbf{e}_\varphi) \\ &= \mathbf{e}_r \left[\left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \omega_r - \frac{v_\theta \omega_\theta}{r} - \frac{v_\varphi \omega_\varphi}{r} \right] \\ &\quad + \mathbf{e}_\theta \left[\left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \omega_\theta + \frac{v_\theta \omega_r}{r} + \frac{v_\varphi \omega_\varphi}{r} \tan \theta \right] \\ &\quad + \mathbf{e}_\varphi \left[\left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \omega_\varphi + \frac{v_\varphi \omega_r}{r} - \frac{v_\varphi \omega_\theta}{r} \tan \theta \right] \end{aligned}$$

となる. また, 右辺の r 成分は

$$[(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}]_r = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)_s v_r - \frac{\omega_\theta v_\theta}{r} - \frac{\omega_\varphi v_\varphi}{r} = -\frac{\omega_\theta v_\theta}{r} - \frac{\omega_\varphi v_\varphi}{r}$$

である, ここで, 球面に束縛されているので, v_r はゼロとなることを用いると, 渦度方程式の r 成分は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_r}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)_s \omega_r - \frac{1}{r} (v_\theta \omega_\theta + v_\varphi \omega_\varphi) &= -\frac{1}{r} (v_\theta \omega_\theta + v_\varphi \omega_\varphi) \\ \therefore \frac{\partial \omega_r}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)_s \omega_r &= 0 \end{aligned}$$

となり, (A.5) が導かれた. ここで,

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)_s \equiv \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

である.

^{†5} (A.6) を確かめる; (A.5) の両辺に $\boldsymbol{\omega} = \nabla_s^2 \psi / 2$ を掛け, F で積分すると,

$$\begin{aligned} \int_F \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \omega^2 \right) dF &= - \int_F \mathbf{v} \cdot \nabla_s \left(\frac{1}{2} \omega^2 \right) dF \\ &= - \int_F \nabla_s \left(\frac{1}{2} \omega^2 \mathbf{v} \right) dF \\ &= - \int_{\partial F} \frac{1}{2} \omega^2 \mathbf{v} d\mathbf{r} \quad (\because \text{ガウスの発散定理より}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

最後の等号は, 無限周期境界条件・球面の周期境界条件のいずれにせよ, 境界上での値はゼロより成立. これより,

$$\frac{d}{dt} \int_F \frac{1}{2} \omega^2 dF = 0$$

が成立.

^{†6} (A.4) はエネルギー保存則, (A.6) はエンストロフィー保存則である.

よく知られている通り, ψ は一般に函数の無限級数で書かれる:

$$\psi = \sum_{q=1}^{\infty} \psi_q. \quad (\text{A.7})$$

ここで, ψ_q は

$$\nabla_s^2 \psi_q + a_q \psi_q = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$a_q = \frac{q(q+1)}{R^2}; \quad q = 1, 2, \dots \quad R = \text{球の半径} \quad (\text{A.9})$$

を満たす^{†7}.

演算子 ∇_s^2 を (A.7) の両辺に掛けて, (A.8) を用いると,

$$\nabla_s^2 \psi = - \sum_{q=1}^{\infty} a_q \psi_q \quad (\text{A.10})$$

を得る. ここで,

$$\int (\nabla_s \psi)^2 dF = \int \nabla_s \cdot (\psi \nabla_s \psi) dF - \int \psi \nabla_s^2 \psi dF$$

と

$$\int_F \nabla_s \cdot (\psi \nabla_s \psi) dF = 0$$

を用いると,

$$\int_F (\nabla_s \psi)^2 dF = - \int_F \psi \nabla_s^2 \psi dF$$

を得る. この式の右辺に (A.7) と (A.10) を代入し, 直交性

$$\int_F \psi_q \psi_p dF = 0, \quad (q \neq p)$$

を用いる^{†8}と,

$$\int_F (\nabla_s \psi)^2 dF = \sum_{q=1}^{\infty} \int_F a_q \psi_q^2 dF \quad (\text{A.11})$$

^{†7} (A.9) の導出については, 付録にて行う.

^{†8} ψ_q の直交性を証明する; (A.8) の両辺に ψ_p, ψ_q をそれぞれ掛け, F で積分した式

$$\begin{aligned} \int_F \psi_p \nabla^2 \psi_q dF &= -a_q \int_F \psi_p \psi_q dF, \\ \int_F \psi_q \nabla^2 \psi_p dF &= -a_p \int_F \psi_p \psi_q dF \end{aligned}$$

を得る^{†9}. 一方で, 容易に

$$\int_F (\nabla_s^2 \psi)^2 dF = \sum_{q=1}^{\infty} \int_F a_q^2 \psi_q^2 dF \quad (\text{A.12})$$

もわかる^{†10}. H_q を

$$H_q \equiv \int_F a_q \psi_q^2 dF$$

の辺々を引くと,

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \int_F (\psi_p \nabla^2 \psi_q - \psi_q \nabla^2 \psi_p) dF = -(a_q - a_p) \int_F \psi_p \psi_q dF, \\ &= \int_F \{ \nabla \cdot (\psi_p \nabla \psi_q) - (\nabla \psi_p \cdot \nabla \psi_q) - \nabla \cdot (\psi_q \nabla \psi_p) + (\nabla \psi_q) \cdot (\nabla \psi_p) \} dF \\ &= 0 \quad (\because \text{Gauss の発散定理より}), \end{aligned}$$

$$(\text{右辺}) = (a_q - a_p) \int_F \psi_p \psi_q dF.$$

$p \neq q$ のとき, $a_p \neq a_q$ より, 直交性

$$\int_F \psi_p \psi_q dF = 0$$

を得る.

^{†9} (A.11) を導出する; 本文にある通り, 右辺を変形すると,

$$\begin{aligned} - \int_F \psi \nabla_s^2 \psi dF &= - \int_F \sum_{q=1}^{\infty} \psi_q \sum_{q=1}^{\infty} \nabla_s^2 \psi_p dF \\ &= - \int_F \sum_{q=1}^{\infty} \psi_q \left(- \sum_{p=1}^{\infty} a_p \psi_p \right) dF \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_p \int_F \psi_p \psi_q dF \delta_{p,q} \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \int_F a_q \psi_q^2 dF. \end{aligned}$$

^{†10} (A.12) を導出する; (A.11) の導出と同様に変形すると,

$$\begin{aligned} \int_F (\nabla_s^2 \psi)^2 dF &= \int_F \left(- \sum_{q=1}^{\infty} a_q \psi_q \right) \left(- \sum_{p=1}^{\infty} a_p \psi_p \right) dF \\ &= \int_F \left(\sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_q a_p \psi_q \psi_p \right) dF \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_q a_p \int_F \psi_q \psi_p dF \delta_{p,q} \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \int_F a_q^2 \psi_q^2 dF. \end{aligned}$$

と定義する^{†11}と, (A.4) と (A.6) を用いて, (A.11) と (A.12) を合わせると,

$$\sum_{q=1}^{\infty} H_q = \text{const} \quad (\text{A.13})$$

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_q H_q = \text{const} \quad (\text{A.14})$$

を得る^{†12}.

関数列 ψ_q は領域 F を ψ_q がいたるところで正か負の符号を持つような領域 F_q に分割する. すぐに分かることは,

$$F_q \rightarrow 0 \quad (q \rightarrow \infty \text{ のとき})$$

である.

ここで,

$$l_q \sim \frac{1}{\sqrt{a_q}} \quad (\text{A.15})$$

で定義される量 l_q は, F_q の直径の平均に等しく, 流れ関数 ψ_q から決定される運動の典型的なスケールを表している^{†13}.

それゆえ, もし, H_q が $1/\sqrt{a_q}$ ごとに描かれたとすると, 与えられた速度場に対して, 運動エネルギーは, 対応するスケール l_q をもつ異なる成分 ψ_q 上に分布する. 次に取り組む問題は, 保存則 (A.13) と (A.14) を用いることによって, 与えられた初期のエネルギースペクトル分布が時間についてどのように変化するかということと, 特にある与えられたスケールと等しいかそれよりも小さなスケールの成分へ向けてのエネルギーの流れに関するより正確な上限を求めることである.

与えられる最初の結果は, 運動が定常でないとき, 運動エネルギーは少なくとも3つの異なる成分間で変化しなければならない, 言い換えると, 3つの異なるスケールに変化しなければならない, ということである.

このことを証明するために, ΔH_q を

$$\Delta H_q \equiv (H_q)_t - (H_q)_{t=0}$$

と定義する. (A.13) と (A.14) における定数に代入すると, 明らかに,

$$\sum_{q=1}^{\infty} (H_q)_{t=0} \quad \text{and} \quad \sum_{q=1}^{\infty} a_q (H_q)_{t=0}$$

^{†11} 現代的な表記では, H_q は「波数 q をもつ一次元エネルギースペクトル」を表す.

^{†12} (A.13) は空間の全エネルギーが保存すること, (A.14) は空間の全エンストロフィーが保存することを示す.

^{†13} 現代的な表記で言えば, q は波数, $\frac{1}{\sqrt{a_q}}$ は波長を表す.

のこれらの式は,

$$\sum_{q=1}^{\infty} \Delta H_q = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_q \Delta H_q = 0 \quad (\text{A.17})$$

と書けるだろう. ここで, $r > p$ であるように, $q = p, q = r$ と番号付けられた成分についてのみ取り替えて議論しても差し支えはない. (A.16) と (A.17) を

$$\begin{aligned} \Delta H_p + \Delta H_r &= 0, \\ a_p \Delta H_p + a_r \Delta H_r &= 0 \end{aligned}$$

と書き換える. $r > p$ ととると, (A.9) からこの系の行列式が $a_r - a_p > 0$ とわかる. 従って, $\Delta H_p = \Delta H_r = 0$ である. しかしながら, 運動エネルギーの変化は, $s > r > p$ であるような $q = p, p = r, q = s$ と番号付けられた異なる3つのスケールに変換される. 保存則の要請 (A.13), (A.14) は次に述べることから考えると, いつも満たされている. この場合, (A.16), (A.17) は

$$\begin{aligned} \Delta H_p + \Delta H_r + \Delta H_s &= 0, \\ a_p \Delta H_p + a_r \Delta H_r + a_s \Delta H_s &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

と書き換える. つまり,

$$\begin{aligned} \Delta H_p &= -\frac{a_s - a_r}{a_s - a_p} \Delta H_r, \\ \Delta H_s &= -\frac{a_r - a_p}{a_s - a_p} \Delta H_r \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

である^{†14}. $r > p, s > r$ と (A.9) より,

$$\frac{a_s - a_r}{a_s - a_p} > 0, \quad \frac{a_r - a_p}{a_s - a_p} > 0$$

^{†14} (A.19) を導出する; H_s を消去するために, (A.18) の上の式に a_s を掛けた式

$$a_s \Delta H_p + a_s \Delta H_r + a_s \Delta H_s = 0$$

から, (A.18) の下の式を引くと,

$$\begin{aligned} (a_s - a_p) \Delta H_p + (a_s - a_r) \Delta H_s &= 0, \\ \Delta H_p &= \frac{a_s - a_r}{a_s - a_p} \Delta H_r = -\frac{a_r - a_s}{a_s - a_p} \Delta H_r \end{aligned}$$

を得る. 同様に, H_p を消去するために, (A.18) の下の式に a_p を掛けた式

$$a_p \Delta H_p + a_p \Delta H_r + a_p \Delta H_s = 0$$

を得る. 従って, (A.19) の結果において, 中間スケールの成分の運動エネルギーの変化は, 他の 2 つの成分の運動エネルギーとは逆の変化をする. さらに, 第二の結果は, 次のようにまとめられる: 3 つの成分のうち, ある 1 つの成分が他の 2 つの成分のスケールの中間スケールの成分となっていないとき, その成分単独では, 他の 2 つのスケールのエネルギーの源や受け皿になることはない.

ここでさらに, (A.18) と

$$\frac{\Delta H_p}{\Delta H_s} = \frac{a_s - a_r}{a_r - a_p} > 0 \quad (\text{A.20})$$

の式^{†15}から, 運動エネルギーの変化量の値は, 中間スケールの成分に対して大きくなり, 最も小さなスケールの成分に対して小さくなる.

例として,

$$a_s/a_r = 4, a_r/a_p = 4$$

の場合^{†16}を考えると, 異なるスケール間の比は,

$$l_s/l_r \sim 2, l_r/l_p \sim 2$$

である^{†17}. さらに, (A.20) から,

$$\Delta H_p/\Delta H_s = 4$$

である. 従って, エネルギーの輸送において他の成分に対して影響されないとする, あるスケールの運動エネルギーの変化は 2 倍のスケールと半分のスケールの成分に対して 4/1 の比で分配される.

上記の 2 次元流に対するスペクトルの変化の状態についての結果は, 任意の数の成分がエネルギーの輸送に関わっている場合に簡単に拡張できる.

から, (A.18) の下の式を引くと,

$$(a_p - a_r)\Delta H_r + (a_p - a_s)\Delta_s = 0,$$

$$\Delta H_s = \frac{a_p - a_r}{a_p - a_s} \Delta H_r = -\frac{a_r - a_p}{a_s - a_p} \Delta H_r$$

を得る.

^{†15} 原文では, 右辺が 1 となっていたが, 間違い; 実際に $\Delta H_p/\Delta H_s$ を計算してみると,

$$\frac{\Delta H_p}{\Delta H_s} = \frac{a_s - a_r}{a_r - a_p} = \frac{(a_r - a_p) - 2a_r + a_p + a_s}{a_r - a_p} = 1 + \frac{(a_p - a_r) + (a_s - a_r)}{a_r - a_p}$$

となる. $a_p - a_r < 0, a_s - a_r < 0$ より, 右辺は 1 よりも小さくなるのが分かる.

^{†16} これは, 例としては不適切. その理由は後の論文によって証明されているが, 空間内の全波数について和を取る際, 3 波の相対的な大きさだけでなく, その形にも注目しなくてはならないからである.

^{†17} 原文では, \sim が $=$ になっていたので, 訂正した.

(A.16) と (A.17) を

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^N \Delta H_p + \sum_{r=N+1}^{N+1+P} \Delta H_r &= 0, \\ \sum_{q=1}^N a_p \Delta H_p + \sum_{r=N+1}^{N+1+P} a_r \Delta H_r &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

と書き換え,

$$\begin{aligned} \Delta H_q &\leq 0; \quad q = 1, 2, \dots, N \\ \Delta H_r &\geq 0; \quad r = N + 1, \dots, N + 1 + P \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

と仮定すると, (A.21) は

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^N \Delta H_p + \sum_{q=N+1}^{N+1+P} \Delta H_r &= 0, \\ a^* \sum_{q=1}^N \Delta H_p + a^{**} \sum_{r=N+1}^{N+1+P} \Delta H_r &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

と書ける^{†18}. ここで, (A.9) と (A.22) より,

$$\begin{aligned} a_1 &\leq a^* \leq a_N, \\ a_{N+1} &\leq a^{**} \leq a_{N+1+P} \end{aligned}$$

である. ゆえに, (A.9) を調べると, 系 (A.23) の行列式は $a^{**} - a^* > 0$ である.

よって, 仮定 (A.22) は不可能である.

いま, 非常に興味深い流れの問題は, ある与えられたスケールと等しいかそれよりも小さなスケールをもつ成分へのエネルギーの流れの上限を決定することと関連した問題を提示する.

まず,

$$(H_q)_{t=0} = h_q; \quad h = \sum_{q=1}^{\infty} h_q$$

^{†18} a^* と a^{**} は第2式で定義されているように見えるが, これだけでは不十分である. 正確な定義は後の (A.25), (A.26) である.

で定義される量 h, h_q を導入^{†19}し, a, a^*, a^{**} は次の式で定義されるとする:

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_q h_q = a \sum_{q=1}^{\infty} h_q, \quad (\text{A.24})$$

$$\sum_{q=1}^N a_q H_q = a^* \sum_{q=1}^N H_q, \quad (\text{A.25})$$

$$\sum_{q=N+1}^{\infty} a_q H_q = a^{**} \sum_{q=N+1}^{\infty} H_q. \quad (\text{A.26})$$

(A.23) は形式的に方程式の系

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^N H_q + \sum_{q=N+1}^{\infty} H_q &= \sum_{q=1}^{\infty} h_q, \\ a^* \sum_{q=1}^N H_q + a^{**} \sum_{q=N+1}^{\infty} H_q &= a \sum_{q=1}^{\infty} h_q \end{aligned} \quad (1.23')$$

と書ける^{†20}. これらの方程式の形式的な解から,

$$\frac{\sum_{q=N+1}^{\infty} H_q}{\sum_{q=1}^N H_q} = \frac{a - a^{**}}{a^{**} - a} \quad (\text{A.27})$$

を得る^{†21†22}. H_q と h_q は, 全て正かゼロの量で, a_q は q について単調増大する量で, (A.24) と (A.25), (A.26) から,

$$a_1 \leq a < \infty, \quad (\text{A.28})$$

$$a_1 \leq a^* \leq a_N, \quad (\text{A.29})$$

$$a_{N+1} \leq a^{**} < \infty \quad (\text{A.30})$$

^{†19} h_q は初期エネルギースペクトルを表し, h は初期のエネルギーの総量を表す.

^{†20} 原文には, この式に式番号はついていなかったが, 今後の議論の助けのためにここでは付けている.

^{†21} 原文では, 左辺は : を用いて比の形で書かれていたが, 見にくいので分数の形に書き直した. 以下同様.

^{†22} (A.27) を導出する; (1.23') の上の式の両辺に a を掛けた式

$$a \sum_{q=1}^N H_q + a \sum_{q=N+1}^{\infty} H_q = a \sum_{q=1}^{\infty} h_q$$

から, 下の式を引くと,

$$(a - a^*) \sum_{q=1}^N H_q + (a - a^{**}) \sum_{q=N+1}^{\infty} H_q = 0$$

となるので, (A.27) を得る.

となる^{†23}. さらに,

$$a^{**} > a^*$$

である. このことは, (A.27) の左辺は正またはゼロであることと関連付けることにおいて, a^* と a^{**} は

$$a^* \leq a \leq a^{**} \quad (\text{A.31})$$

の関係^{†24}で与えられる値に固定している.

$q \geq N + 1$ の範囲内で含まれている運動エネルギーと全エネルギーとの比について,

$$\frac{\sum_{q=N+1}^{\infty} H_q}{h} = \frac{a - a^*}{a^{**} - a^*} \quad (\text{A.32})$$

を得る^{†25}.

この比の最大値は, $a^{**} = a$ のときである. このことは, (A.30), (A.31) から

$$a_{N+1} \leq a \quad (\text{A.33})$$

のときのみ可能である.

最も興味深い

$$a_{N+1} > a \quad (\text{A.34})$$

の場合に進む前に, 定常運動^{†26}の安定性の問題に関連付けられた場合, つまり,

$$\psi = \psi_1 \quad (\text{A.35})$$

の場合をまず議論しよう. ψ_1 は**球面上の固有値問題**に対して, 最低固有値をもつ固有函数である必要はない. しかし, ψ_q は, 最も一般的な2次元固有値問題:

$$\begin{cases} a_{q+1} > a_q, a_q > 0; q = 1, 2, \dots \\ a_q \rightarrow \infty, q \rightarrow \infty \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

^{†23} 原文では, (A.28) と (A.30) に $< \infty$ は書いていないが, 今後の議論の助けのために書き加えた.

^{†24} ただし, $a^* = a^{**}$ にはならないことが必要.

^{†25} (A.32) を導出する; (1.23') の上の式に a^* を掛けた式から下の式を引くと,

$$(a^* - a^{**}) \sum_{q=N+1}^{\infty} H_q = (a^* - a) \sum_{q=1}^{\infty} h_q$$

となり, $\sum_{q=1}^{\infty} h_q = h$ より, (A.32) を得る.

^{†26} (原文脚注) 定常な場合とは, $\psi = \psi_1$ が (A.5) を $\frac{\partial \nabla_s^2 \psi}{\partial t} = 0$ で満たす場合をいう.

に従うとき,

$$\begin{aligned}\nabla_2^2 \psi_q + a_q \psi_q &= 0, \\ \text{境界 } L \text{ で } \psi_q &= 0\end{aligned}$$

の最低固有値をもつ固有函数になるだろう^{†27}. (A.35) の代わりに,

$$\psi_{t=0} = \psi_1 + \sum_{q=2}^{\infty} \psi'_q$$

のとき,

$$\begin{aligned}h &= h_1 + \sum_{q=2}^{\infty} h'_q, \\ ah &= a_1 h_1 + \sum_{q=2}^{\infty} a_q h'_q\end{aligned}$$

とすると,

$$a = \frac{a_1 h_1 + \sum_{q=2}^{\infty} a_q h'_q}{h_1 + \sum_{q=2}^{\infty} h'_q} \quad (\text{A.37})$$

である. 任意の後の時間において, $N = 1$ としたとき, (A.32) から

$$\frac{\sum_{q=2}^{\infty} H'_q}{h} = \frac{a - a^*}{a^{**} - a^*}$$

を得る^{†28}. いま, $N = 1$ として, 方程式 (A.29)^{†29} と (A.30) は

$$\begin{aligned}a_1 &= a^* \\ a_2 &\leq a^{**}\end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

となる. よって,

$$\frac{\sum_{q=2}^{\infty} H'_q}{h} = \frac{a - a_1}{a^{**} - a_1} \quad (\text{A.39})$$

^{†27} 上の式の左辺の勾配演算子 ∇_2^2 の下添字の「2」は「一般的な 2 次元平面での勾配演算子」の意味である (と思われる).

^{†28} つまり, (A.32) の $q \geq 2$ の場合は, 擾乱 (ずれ) だと考える, ということである.

^{†29} 原文では (A.28) となっていたが, 間違い.

である.

$\sum_{q=2}^{\infty} a_q h'_q$ は初期の擾乱の渦度の2乗の和を表している^{†30}. ここで,

$$\sum_{q=2}^{\infty} a_q h'_q \rightarrow 0 \quad (\text{A.40})$$

が成り立っている^{†31}としよう. (A.36) から, このことは

$$\sum_{q=2}^{\infty} h'_q \rightarrow 0 \quad (\text{A.41})$$

となる必要がある^{†32}. (A.37) に (A.40) と (A.41) を用いると,

$$\sum_{q=2}^{\infty} a_q h'_q \rightarrow 0 \text{ のとき, } a \rightarrow a_1$$

を得る. さらに, (A.39) より, (A.38) と関連付けることにより,

$$\sum_{q=2}^{\infty} a_q h'_q \rightarrow 0 \text{ のとき, } \frac{\sum_{q=2}^{\infty} H'_q}{h} \rightarrow 0 \quad (\text{A.42})$$

とわかる. これは, 定常流 $\psi = \psi_1$ は, 初期の擾乱の渦度の二乗の和がゼロに収束するならば, 擾乱の全運動エネルギー $\sum_{q=2}^{\infty} H_q$ は全ての時間においてゼロに向かうある極限值より小さな値にとどまるという意味で, 安定であることを表している.

一方, いま,

$$\sum_{q=2}^{\infty} h'_q = \varepsilon$$

としよう. 十分小さなスケールのこのエネルギーを考えることにより, (A.36) から

$$\sum_{q=2}^{\infty} a_q h'_q > P$$

とすることは可能である. ここで, P は任意に大きく取れるが, ε は小さくとる. (A.37) における a についての表現を考えると, このことはいつでも可能であることがわかるが, 小

^{†30} つまり, 初期擾乱のエンストロフィーを表す.

^{†31} つまり, エンストロフィーが小さい場合

^{†32} (A.40) の左辺は, 初期擾乱のエネルギーである.

小さな ε は a を任意に大きくするようにとられる。特に, a は (A.38) より $a^{**} = a$ とすることが出来る状態であるような a_2 と等しいかより大きな値をとれ, さらに

$$\frac{\sum_{q=2}^{\infty} H'_q}{h} = 1$$

を得る。しかしながら, 擾乱の初期運動エネルギーに対しては小さな値しか取れない。

この例から, エネルギーだけでなく, 渦度が小さいとされている擾乱の安定性の証明がどれほど重要かがわかったが, この場合でない時は定常流が不安定であるかどうかについては疑問が残る点である。

基本流 $\psi = \psi_1$ は可能な最大のスケールの成分を表す。それゆえ, この流れの安定性は次のように理解される: 2次元流の定常運動の不安定性に対する必要条件是, 擾乱が基本流のスケールよりも大きなスケールをもつ成分によって表されることである。従って, 不安定性の必要条件是, エネルギースペクトルの擾乱における変化に対して見られるより一般的な結果と直接関連付けられる。さらに, 境界条件が ψ が一定である必要のない場合, 例えば, 平行な壁の間の流れに簡単に拡張できる。条件をこのようにとると, 流れ函数 (定数) $\times \cos(2\pi\gamma/L^*)$ ($0 \leq \gamma \leq H$) によって表される線型流に対してこの結果に適用する。この基本流のスケールは, 対応する固有値 $(4\pi^2)/(L^{*2})$ から決定されるのに対して, 壁に沿った方向に対して波長 L の擾乱が重ね合わさったとき, 擾乱の成分のスケールは固有値 $(4\pi^2/L^2) + (4\pi^2q^2)/(2H)^2$ から決定される。従って, 考えている線型流は

$$\frac{4\pi^2}{L^2} + \frac{4\pi^2q^2}{(2H)^2} < \frac{4\pi^2}{L^{*2}} \quad (\text{A.43})$$

のときのみ不安定になり得るだろう。

(A.34) の場合に考えを進めよう。 a^* と a^{**} が可能な最小値のとき, (A.32) における比は上限に達する。その最小値とは, (A.29) と (A.30) より, それぞれ a_1 と a_{N+1} である。よって,

$$\frac{\sum_{q=N+1}^{\infty} H_q}{h} \leq \frac{a - a_1}{a_{N+1} - a_1} = \frac{a}{a_{N+1}} \frac{1 - \frac{a_1}{a}}{1 - \frac{a_1}{a_{N+1}}} < \frac{a}{a_{N+1}} \quad (\text{A.44})$$

である^{†33}。(A.44) を重要な場合に適用するために,

$$h = \sum_{q=1}^L h_q$$

^{†33} 最後の不等号は, (A.34) から, $a_1/a > a_1 > a_{N+1}$ より導ける。

とする. (A.24) から定義される a はいま,

$$a_1 \leq a \leq a_L \quad (\text{A.45})$$

であるだろう. (A.34) を保証するために, $L < N + 1$ を仮定すれば十分である. ここで, (A.44) を (A.15) で定義されるスケールを導入することで,

$$\frac{\sum_{q=N+1}^{\infty} H_q}{h} \leq \frac{a - a_1}{a_{N+1} - a_1} \leq \frac{a_L - a_1}{a_{N+1} - a_1} = \left(\frac{l_{N+1}}{l_L}\right)^2 \frac{1 - \left(\frac{l_L}{l_1}\right)^2}{1 - \left(\frac{l_{N+1}}{l_L}\right)^2} < \left(\frac{l_{N+1}}{l_L}\right)^2$$

と書く^{†34}. よって, この場合, 一定のスケール l_{N+1} をもつ成分に流れ得る少量の全エネルギーは, はじめに表された最小のスケール l_L と l_{N+1} の比の二乗より小さいか等しい. それゆえ, もし, 初期の流れが典型的な大スケールの速度場 (L が相対的に小さい) によって表されるなら, より小さな渦の内部の運動エネルギーの流れは, すみやかに重要でなくなる.

明らかに, この結果を得るためには, 任意の $q > L$ に対して $h_q = 0$ である必要はない.

$$a \leq a_L$$

と L が対応する場を「典型的な」大きなスケールの場として特徴づけるのに十分小さくすれば, 十分である.

2 粘性流体の2次元流

分子の粘性を伴う運動の支配方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla_s \gamma - (\mathbf{v} \cdot \nabla_s \mathbf{v})_s + \nu \nabla_s^2 \mathbf{v}, \\ \mathbf{v} &= -\nabla_s \psi \times \mathbf{k} \end{aligned}$$

である. $\nabla_s \gamma$ を消去すると, 渦度方程式

$$\frac{\partial \nabla_s^2 \psi}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla_s \nabla_s^2 \psi + \nu \nabla_s^4 \psi$$

^{†34} 原文には, ミスが多くあったので訂正した. さらに, この後に述べられる主張で必要なので, 最後の不等式を追記した.

を得る. 全運動エネルギーと渦度の 2 乗の全量の単位時間あたりの変化は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_F (\nabla_s \psi)^2 dF &= -\nu \int_F (\nabla_s^2 \psi)^2 dF, \\ \frac{d}{dt} \int_F (\nabla_s^2 \psi)^2 dF &= \nu \int_F \nabla_s^2 \psi \cdot \nabla_s^4 \psi dF\end{aligned}$$

となる^{†35}. (A.8) と (A.9) を用いると, これらの方程式は

$$\frac{d}{dt} \int_F (\nabla_s \psi)^2 dF = -\nu A \int_F (\nabla_s \psi)^2 dF; A > 0, \quad (\text{A.46})$$

$$\frac{d}{dt} \int_F (\nabla_s^2 \psi)^2 dF = -\nu B \int_F (\nabla_s^2 \psi)^2 dF; B > 0 \quad (\text{A.47})$$

^{†35} この 2 式を導出する; すぐ上の渦度方程式に ψ を掛け, F 上で積分すると,

$$(\text{左辺}) = \frac{d}{dt} \int_F \psi (\nabla_s^2 \psi) dF = \frac{d}{dt} \int_F \{ \nabla_s \cdot (\psi \nabla_s \psi) - (\nabla_s \psi)^2 \} dF = -\frac{d}{dt} \int_F (\nabla_s \psi)^2 dF.$$

ここで, ガウスの発散定理を用いて, 第一項は境界線上の積分となり, 境界条件よりゼロとなる事を用いた. 右辺第一項については $\mathbf{v} \cdot \nabla_s \nabla_s^2 \psi = \nabla_s \psi \cdot \nabla_s \nabla_s^2 \psi = J(\psi, \nabla_s^2 \psi)$ と書けるので,

$$(\text{右辺第一項}) = \int_F \psi J(\psi, \nabla_s^2 \psi) dF = \int_F J\left(\frac{1}{2}\psi^2, \nabla_s^2 \psi\right) dF.$$

ここで, 一般にヤコビアンについて,

$$J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial b}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a \frac{\partial b}{\partial x} \right) = \nabla_s \cdot a \left(\frac{\partial b}{\partial y} \mathbf{e}_x - \frac{\partial b}{\partial x} \mathbf{e}_y \right)$$

と発散の形に書けるので, ガウスの発散定理と境界条件により, この積分はゼロとなる. また,

$$\begin{aligned}(\text{右辺第二項}) &= \nu \int_F \psi \nabla_s^4 \psi dF = \nu \int_F (\psi \nabla_s^2 \nabla_s^2 \psi) dF \\ &= \nu \int_F \{ \nabla_s^2 (\psi \nabla_s^2 \psi) - (\nabla_s^2 \psi)^2 \} dF = -\nu \int_F (\nabla_s^2 \psi)^2 dF\end{aligned}$$

である (ここでも, ガウスの発散定理と境界条件を用いた) ので, 最終的に,

$$\frac{d}{dt} \int_F (\nabla_s \psi)^2 dF = -\nu \int_F (\nabla_s^2 \psi)^2 dF$$

を得る. 下の式を得るには, 渦度方程式に $\nabla_s^2 \psi$ を掛け, F 上で積分すると,

$$\begin{aligned}(\text{右辺第一項}) &= \int_F \nabla_s^2 \psi \mathbf{v} \cdot \nabla_s^2 \nabla_s^2 \psi dF = \int_F \mathbf{v} \cdot \nabla_s \frac{1}{2} (\nabla_s^2 \psi) dF \\ &= \int_F \nabla_s \cdot \left(\frac{1}{2} (\nabla_s^2 \psi) \mathbf{v} \right) dF = 0,\end{aligned}$$

より,

$$\frac{d}{dt} \int_F (\nabla_s^2 \psi)^2 dF = \nu \int_F \nabla_s^2 \psi \cdot \nabla_s^4 \psi dF$$

も得られる.

となる^{†36}. ここで,

$$B(t) \geq A \quad (\text{A.48})$$

^{†36} 原文では, (47) の左辺に dF が抜けていたので訂正した. (A.46) を導出する; 右辺の $-\nu$ 以外の部分を変形すると,

$$\begin{aligned} \int_F (\nabla_s^2 \psi)^2 dF &= \int_F \nabla_s^2 \psi \cdot \nabla_s^2 \psi dF = \int_F \left(-\sum_{q=1}^{\infty} a_q \psi_q \right) \left(-\sum_{p=1}^{\infty} a_p \psi_p \right) dF \\ &= \int_F \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_q a_p \psi_q \psi_p dF = \int_F \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_q a_p \psi_q \psi_p \delta_{p,q} dF \\ &= \int_F \sum_{q=1}^{\infty} a_q a_p \psi_q^2 dF \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} a_q H_q \quad (\because (A.13) \text{ 直前の } H_q \text{ の定義より}) \\ &= A \sum_{q=1}^{\infty} H_q \quad (\because \text{後に出てくる } A \text{ の定義式より}) \\ &= A \int_F \sum_{q=1}^{\infty} a_q \psi_q^2 dF = A \int_F \left(\sum_{p=1}^{\infty} \psi_p \right) \left(\sum_{q=1}^{\infty} a_q \psi_q \right) dF \\ &= A \int_F \psi (-\nabla_s^2 \psi) dF = A \int_F (\nabla_s \psi)^2 dF \end{aligned}$$

より得られる. (A.47) も同様に, 右辺の積分している部分を変形すると,

$$\begin{aligned} \int_F \nabla_s^2 \psi \cdot \nabla_s^4 \psi dF &= \int_F \left(-\sum_{q=1}^{\infty} a_q \psi_q \right) \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_p^2 \psi_p \right) dF = - \int_F \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_q a_p \psi_q \psi_p \delta_{p,q} dF \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \int_F a_q^3 \psi_q^2 dF = -B \int_F \sum_{q=1}^{\infty} a_q^2 \psi_q^2 dF \quad (\because B \text{ の定義より}) \\ &= -B \int_F \left(\sum_{q=1}^{\infty} a_q \psi_q \right) \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_p \psi_p \right) dF = -B \int_F (-\nabla_s^2 \psi)(-\nabla_s^2 \psi) dF \\ &= -B \int_F (\nabla_s^2 \psi)^2 dF \end{aligned}$$

より得られる.

で^{†37}, 等号は ψ が単一の成分で表されている ($\psi = \psi_q$) のときのみ成立. このことは, A と B の定義式

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_q H_q \equiv A \sum_{q=1}^{\infty} H_q,$$

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_q^2 H_q \equiv B a_q \sum_{q=1}^{\infty} H_q$$

と (A.9) から容易にわかる^{†38}. (A.46), (A.47), (A.48) から,

$$\frac{\sum_{q=1}^{\infty} H_q}{\sum_{q=1}^{\infty} a_q H_q} = \frac{n}{a}$$

を得る^{†39}. ここで,

$$B \geq A \text{ に従って, } n \leq 1 \quad (\text{A.49})$$

^{†37} 原文では, 不等号が逆になっていたが, 誤りであるため訂正した.

実際, $A = (\sum_{q=1}^{\infty} a_q H_q) / (\sum_{q=1}^{\infty} H_q)$, $B = (\sum_{q=1}^{\infty} a_q^2 H_q) / (\sum_{q=1}^{\infty} a_q H_q)$ より,

$$A - B = \frac{(\sum a_q H_q)^2 - \sum H_q \sum a_q^2 H_q}{\sum H_q \sum a_q H_q}$$

の分母は正であるが, 分子については,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{q=1}^{\infty} a_q H_q \right)^2 - \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_p^2 H_p H_q &= \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} (a_p a_q - a_p^2) H_p H_q \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (a_q a_p - a_q^2) H_p H_q \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (2a_q a_p - a_q^2 - a_p^2) H_p H_q \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (a_p - a_q)^2 H_p H_q \end{aligned}$$

より, 負であることが分かる. よって, $B \leq A$ は誤りである.

^{†38} (A.13) より $\sum_{q=1}^{\infty} H_q$ は定数, (A.14) より $\sum_{q=1}^{\infty} a_q H_q$ も定数なので, A も定数である. 一方, $\sum_{q=1}^{\infty} a_q^2 H_q$ は定数ではなく t の関数なので, B は t の関数である.

^{†39} 原文には中辺に nh/nah が書かれていたが, 誤りであるから削除した.

である. (A.27) を

$$\frac{\sum_{q=N+1}^{\infty} H_q}{\sum_{q=1}^N H_q} = \frac{\frac{a}{n} - a^*}{a^{**} - \frac{a}{n}}$$

と書き直される. この比の上限は, a/n が減少するのとともに減少していくので, 粘性のために運動エネルギーと渦度が一様に減っていくのは別にして, より小さなスケールへのエネルギーの流れは従来 ($n > 1$ より^{†40}), a/n が $a < a/n$ である非粘性流体^{†41}に対してよりも少ない確率でしか起こりえないであろう^{†42}.

3 結論

2次元流の運動エネルギーのスペクトルの分散における変化の性質は, 実際の乱流が発展する場合の変化とは根本的に異なる. この不一致は実際の乱流が渦度の2乗に関しては保存しないというよく知られた性質をもつ3次元における運動を考えていることによると考えるのが自然であろう.

(A.43) の包含関係と著者と他の人々の以前の研究との関係は後の時代に現れる論文においてより完全に議論されることであろう.

^{†40} (A.49) と符号が逆になっているが... 謎.

^{†41} つまり, $n = 1$ の場合

^{†42} 以上のことは, (A.32) に対応する式

$$\frac{\sum_{q=N+1}^{\infty} H_q}{h} = m \left(\frac{\frac{a}{n} - a^*}{a^{**} - a^*} \right)$$

が導けてはじめて言えることである.

付録 B

球座標系における微分演算

この論文では, 2次元球座標系を用いて議論を進めているので, より一般的に 3次元球座標系における微分演算の公式 ($\nabla f, \nabla \cdot \mathbf{A}, \nabla \times \mathbf{A}, \nabla \cdot \nabla f, (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$) を導出しておく.

B.1 幾何学的を利用した直観的な方法による導出

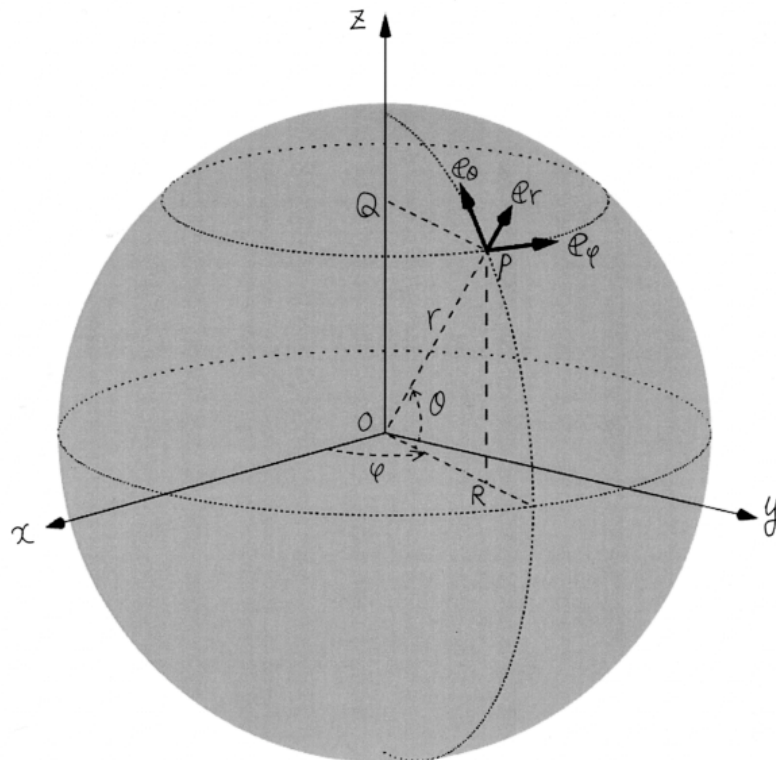


図 B.1 球座標系の定義

球座標系では、単位ベクトルの方向は位置によって変わる。そのため、単位ベクトルの微分も一定ではない。はじめに、図を利用して単位ベクトルの空間微分を導出しておく。

単位ベクトルの r 微分 r 方向に微小距離 δr だけずれた点における単位ベクトルは、元の場所での単位ベクトルと方向は変わらない。つまり、どの単位ベクトルも r には依存せず、 r による偏微分はゼロである。

単位ベクトルの θ 微分 図 B.1 において、点 P から θ 方向に $r\delta\theta$ だけ変化させた点における単位ベクトルを考える (図 B.2)。まず、 e_φ は点 P からずれても方向は変わらないので、偏微分はゼロである。点 P における残り 2 つの単位ベクトルをそれぞれ $e_r(\theta, \varphi), e_\theta(\theta, \varphi)$ とし、変化した点における単位ベクトルをそれぞれ $e_r(\theta + \delta\theta, \varphi), e_\theta(\theta + \delta\theta, \varphi)$ とする。

e_r の変化は、 e_θ の向きで大きさは単位ベクトルの大きさ (= 1) と $e_r(\theta, \varphi)$ と $e_r(\theta + \delta\theta, \varphi)$ の間の角度 (= $\delta\theta$) の積 (つまり、弧の長さ) になることから、

$$\begin{aligned}\frac{\partial e_r}{\partial \theta} &= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{e_r(\theta + \delta\theta, \varphi) - e_r(\theta, \varphi)}{\delta\theta} \\ &= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\delta\theta e_\theta}{\delta\theta} = e_\theta\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

となる。同様にして、

$$\begin{aligned}\frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} &= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{e_\theta(\theta + \delta\theta, \varphi) - e_\theta(\theta, \varphi)}{\delta\theta} \\ &= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\delta\theta(-e_r)}{\delta\theta} = -e_r\end{aligned}\quad (\text{B.2})$$

とわかる。

単位ベクトルの φ 微分 図 B.3 の点 P における単位ベクトル $e_r(\theta, \varphi), e_\theta(\theta, \varphi), e_\varphi(\theta, \varphi)$ とそこから φ 方向に $r \cos\theta \delta\varphi$ だけ移動した点における単位ベクトル $e_r(\theta, \varphi + \delta\varphi), e_\theta(\theta, \varphi), e_\varphi(\theta, \varphi + \delta\varphi)$ を考える。ここで、 e_θ の射影の大きさは 1 ではなく、 $\sin\theta$ 、 e_r の射影の大きさは $\cos\theta$ であることに注意する。 θ 微分の時と同様に、 φ の微分を求める。 e_r の φ 微分は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial e_r}{\partial \varphi} &= \lim_{\delta\varphi \rightarrow 0} \frac{e_r(\theta, \varphi + \delta\varphi) - e_r(\theta, \varphi)}{\delta\varphi} \\ &= \lim_{\delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\delta\varphi \cos\theta e_\varphi}{\delta\varphi} = \cos\theta e_\varphi\end{aligned}\quad (\text{B.3})$$

となる。 e_θ の φ 微分も同様に、

$$\begin{aligned}\frac{\partial e_\theta}{\partial \varphi} &= \lim_{\delta\varphi \rightarrow 0} \frac{e_\theta(\theta, \varphi + \delta\varphi) - e_\theta(\theta, \varphi)}{\delta\varphi} \\ &= \lim_{\delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\delta\varphi(-\sin\theta e_\varphi)}{\delta\varphi} = -\sin\theta e_\varphi\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

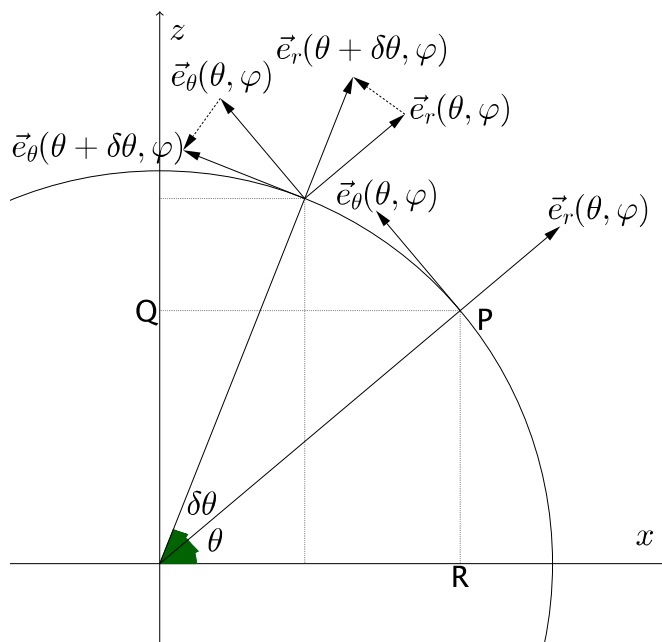


図 B.2 球座標系の定義の子午線面. 緯度 θ に依存して単位ベクトルの方向が変わっている. e_φ の方向は, 紙面手前から奥に向かう方向

と求まる. e_φ の φ 微分は, 図 B.2 を利用すると, 点 P から点 Q へと向かうベクトルは, $-e_r + e_\theta$ とわかり, これを緯度円上で表すと $\cos \theta e_r - \sin \theta e_\theta$ となることより,

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_\varphi}{\partial \varphi} &= \lim_{\delta\varphi \rightarrow 0} \frac{e_\varphi(\theta, \varphi + \delta\varphi) - e_\varphi(\theta, \varphi)}{\delta\varphi} \\ &= \lim_{\delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\delta\varphi(-\cos \theta e_r + \sin \theta e_\theta)}{\delta\varphi} = -\cos \theta e_r + \sin \theta e_\theta \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

となる.

次に, 単位ベクトル e_r, e_θ, e_φ の各方向の微小距離を考えると, それぞれ $\delta r, r\delta\theta, r\cos\theta\delta\varphi$ であると図からわかるので, 勾配演算子 ∇ は

$$\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + e_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + e_\varphi \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (\text{B.6})$$

と表される. ここで, ある 3次元ベクトル $\mathbf{A} = e_r A_r + e_\theta A_\theta + e_\varphi A_\varphi$ に $\nabla \cdot$ を作用させ

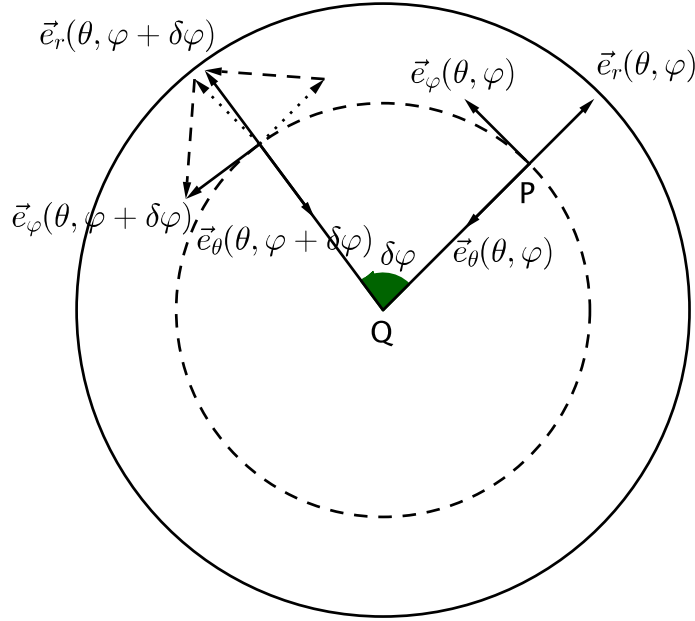


図 B.3 球座標系の定義を極軸の正の方向から眺めた図. 単位ベクトル \mathbf{e}_r と \mathbf{e}_θ の緯度円上への射影はそれぞれ QP 方向と PQ 方向で, 大きさはそれぞれ $\cos \theta$, $\sin \theta$ である.

る. このとき, 先ほど求めた単位ベクトル微分に注意する. 微分の連鎖律を適用して,

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot (\mathbf{e}_r A_r + \mathbf{e}_\theta A_\theta + \mathbf{e}_\varphi A_\varphi) \\
 &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\
 &\quad + A_r \left(\mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cos \theta} \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} \right) \\
 &\quad + A_\theta \left(\mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cos \theta} \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} \right) \\
 &\quad + A_\varphi \left(\mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cos \theta} \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\
 &= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} A_r + \frac{1}{r} \tan \theta A_\theta \\
 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta A_\theta) + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \tag{B.7}
 \end{aligned}$$

を得る. スカラー関数 $V(r, \theta, \varphi)$ のラプラシアンは, (B.7) で,

$$A_r = \frac{\partial V}{\partial r}, A_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, A_\varphi = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

を代入すると求まる:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \quad (\text{B.8})$$

また, \mathbf{A} に $\nabla \times$ を作用させると,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \times (\mathbf{e}_r A_r + \mathbf{e}_\theta A_\theta + \mathbf{e}_\varphi A_\varphi) \\ &= \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \mathbf{e}_\theta \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{A_\theta}{r} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \mathbf{e}_r \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{r \cos \theta} \mathbf{e}_\theta \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r \cos \theta} \mathbf{e}_r \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} + \frac{A_\varphi}{r \cos \theta} (-\cos \theta \mathbf{e}_\theta - \sin \theta \mathbf{e}_r) \\ &= \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\sin \theta}{r \cos \theta} A_\varphi \right) + \mathbf{e}_\theta \left(-\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{\cos \theta} - \frac{A_\varphi}{r} \right) \\ &+ \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{A_\theta}{r} \right) \\ &= \mathbf{e}_r \left\{ \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta A_\varphi) - \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right\} \\ &+ \mathbf{e}_\theta \left\{ \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \right\} \\ &+ \mathbf{e}_\varphi \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

ここで, $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta$ を用いた.

これらを用いて, $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_\varphi)$ について, $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ を計算して成分表示すると,

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \\
&= \left\{ (\mathbf{e}_r v_r + \mathbf{e}_\theta v_\theta + \mathbf{e}_\varphi v_\varphi) \cdot \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right\} \mathbf{v} \\
&= \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (\mathbf{e}_r v_r + \mathbf{e}_\theta v_\theta + \mathbf{e}_\varphi v_\varphi) \\
&= v_r^2 \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} + \mathbf{e}_r v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r v_\theta \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_r v_\varphi \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \\
&\quad + \frac{1}{r} \left(v_\theta v_r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} + \mathbf{e}_r v_\theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_\theta^2 \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\theta v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_\theta v_\varphi \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi v_\theta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi^2}{r} \right) \\
&\quad + \frac{1}{r \cos \theta} \left(v_\varphi v_r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_r v_\varphi \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_\varphi v_\theta \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_\theta v_\varphi \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + v_\varphi^2 \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_\varphi v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\
&= \mathbf{e}_r \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{v_\theta v_\varphi}{r} \right) \\
&\quad + \mathbf{e}_\theta \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta v_r}{r} - \frac{v_\theta v_\varphi \sin \theta}{r \cos \theta} \right) \\
&\quad + \mathbf{e}_\varphi \left(v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \cos \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta v_r}{r} - \frac{v_\theta v_\varphi r \sin \theta}{r \cos \theta} + \frac{v_\varphi^2 \sin \theta}{r \cos \theta} \right)
\end{aligned}$$

B.2 ベクトル解析を用いて計算で求める

以上は図を利用して直感的に球面座標系における微分演算子を計算したが、ここからはベクトル解析を用いて、座標変換の考えを用いて計算で同じ結果を得られることを確かめる。

B.2.1 一般論: 曲線座標系について

デカルト座標系の点 (x, y, z) から、ある点 (u, v, w) が C^k 級 ($k \geq 1$) の函数 u, v, w によって

$$x = X(u, v, w), \quad y = Y(u, v, w), \quad z = Z(u, v, w) \quad (\text{B.11})$$

と関係付けられるとする。この点 (x, y, z) に点 (u, v, w) を対応させる関係が一对一で、かつ、ヤコビアン

$$J = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial w} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial w} \\ \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

が空間の領域 R でゼロでないとすると、 R で (B.11) は一意的に u, v, w について x, y, z で解くことができ、

$$u = U(x, y, z), \quad v = V(x, y, z), \quad w = W(x, y, z)$$

と表される。このとき、函数の組 (u, v, w) を領域 R 上で定義された C^k 級の**曲線座標系**と呼ぶ。

ここで、デカルト座標系の点 (x, y, z) の位置ベクトルを

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = (X(u, v, w), Y(u, v, w), Z(u, v, w))$$

と表すことにする。このとき、次のような言葉を定義する:

u -曲線 u がパラメータで、 v, w が一定の曲線:

$$\mathbf{r}(u) = (X(u, v_0, w_0), Y(u, v_0, w_0), Z(u, v_0, w_0))$$

v -曲線 v がパラメータで、 u, w が一定の曲線:

$$\mathbf{r}(v) = (X(u_0, v, w_0), Y(u_0, v, w_0), Z(u_0, v, w_0))$$

w -曲線 w がパラメータで、 u, v が一定の曲線:

$$\mathbf{r}(w) = (X(u_0, v_0, w), Y(u_0, v_0, w), Z(u_0, v_0, w))$$

これら 3 つを総称して**座標曲線**という。座標曲線が互いに直交しているとき、 (u, v, w) を**直交曲線座標系**と呼ぶ。また、

u -曲面 u が一定で、 v, w がパラメータの曲面: $U(x, y, z) = u_0$

v -曲面 v が一定で、 u, w がパラメータの曲面: $V(x, y, z) = v_0$

w -曲面 w が一定で、 u, v がパラメータの曲面: $W(x, y, z) = w_0$

の 3 つを**座標曲面**と呼ぶ。

直交曲線座標系における基底は点 $P(u, v, w)$ を通る座標曲線の単位接ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ である^{†1}。 u -曲線の接ベクトルはデカルト座標系では $\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$ と表されるので、その長さは

$$g_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}$$

であるから、 \mathbf{u} はデカルト座標系で成分表示をすると、

$$\mathbf{u} = \frac{1}{g_1} \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

と書ける。 \mathbf{v}, \mathbf{w} についても同様に、

$$\mathbf{v} = \frac{1}{g_2} \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) \quad \text{ただし, } g_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2},$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{g_3} \left(\frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial w}\right) \quad \text{ただし, } g_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2}$$

となる。この g_1, g_2, g_3 を**第一基本量**、または、**計量係数**と呼ぶ。これらの式を書き換えると、

$$\begin{cases} \nabla u = \frac{1}{g_1} \mathbf{u} & \text{(B.12a)} \\ \nabla v = \frac{1}{g_2} \mathbf{v} & \text{(B.12b)} \\ \nabla w = \frac{1}{g_3} \mathbf{w} & \text{(B.12c)} \end{cases}$$

^{†1} この $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ が一次独立であることは、合成函数の微分を用いて

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

となることより、

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \neq 0$$

からわかる。

となる^{†2}.

B.2.2 ∇ の (u, v, w) 成分

u, v, w の成分表示の式から、直交座標系の単位ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ と直行曲線座標系の単位ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ との間には

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \frac{1}{g_1} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{x} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{y} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{z} \right) \\ \mathbf{v} &= \frac{1}{g_2} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{x} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{y} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{z} \right) \\ \mathbf{w} &= \frac{1}{g_3} \left(\frac{\partial x}{\partial w} \mathbf{x} + \frac{\partial y}{\partial w} \mathbf{y} + \frac{\partial z}{\partial w} \mathbf{z} \right)\end{aligned}$$

の関係があることがわかる。行列で表すと、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{g_1} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{1}{g_1} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{1}{g_2} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{1}{g_2} \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{g_2} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{1}{g_3} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{1}{g_3} \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{1}{g_3} \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}.$$

^{†2} これらの式は、第一基本量の定義の式から導かれる。まず、 \mathbf{u} は u -曲面に垂直であるから、 ∇u と \mathbf{u} は平行になる：

$$\nabla u = \rho \mathbf{u}.$$

ここで、ベクトル \mathbf{u} と ∇u の向きは函数 u の増加する方向である。 ρ は正のスカラー量である。よって、

$$|\nabla u| = \rho \mathbf{u} = \rho \Leftrightarrow \rho = |\nabla u|.$$

一方、 u -曲線上のある定点から測った弧長を s とすると、 u -曲線は u -曲面に対して垂直なので、

$$\frac{du}{ds} = |\nabla u|$$

となる。また、 u を時間と考えた時の u -曲線上の運動の速度の大きさが g_1 であると考えられるので、

$$g_1 = \frac{ds}{du}$$

よって、 $\rho = \frac{1}{g_1}$ とわかるので、 $\nabla u = \frac{1}{g_1} \mathbf{u}$ となる。他についても同様に導ける。

正規直交基底の変換行列はユニタリ行列であったので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{g_1} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{1}{g_1} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{1}{g_2} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{1}{g_2} \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{g_2} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{1}{g_3} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{1}{g_3} \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{1}{g_3} \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

つまり、

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{g_1} \frac{\partial x}{\partial u} u + \frac{1}{g_2} \frac{\partial x}{\partial v} v + \frac{1}{g_3} \frac{\partial x}{\partial w} w \\ y &= \frac{1}{g_1} \frac{\partial y}{\partial u} u + \frac{1}{g_2} \frac{\partial y}{\partial v} v + \frac{1}{g_3} \frac{\partial y}{\partial w} w \\ z &= \frac{1}{g_1} \frac{\partial z}{\partial u} u + \frac{1}{g_2} \frac{\partial z}{\partial v} v + \frac{1}{g_3} \frac{\partial z}{\partial w} w. \end{aligned}$$

これらの式の両辺にそれぞれ $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ を掛けると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} x &= \frac{1}{g_1} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{g_2} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g_3} \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} y &= \frac{1}{g_1} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{g_2} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{g_3} \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} z &= \frac{1}{g_1} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{g_2} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{g_3} \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

これらの辺々を足すと、

$$\begin{aligned} \nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \\ &= u \frac{1}{g_1} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &\quad + v \frac{1}{g_2} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &\quad + w \frac{1}{g_3} \left(\frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= u \frac{1}{g_1} \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{1}{g_2} \frac{\partial}{\partial v} + w \frac{1}{g_3} \frac{\partial}{\partial w} \\ &= \left(\frac{1}{g_1} \frac{\partial}{\partial u}, \frac{1}{g_2} \frac{\partial}{\partial v}, \frac{1}{g_3} \frac{\partial}{\partial w} \right) \end{aligned}$$

を得る.

B.2.3 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ の (u, v, w) 系表示

$$\nabla = \mathbf{u} \frac{1}{g_1} \frac{\partial}{\partial u} + \mathbf{v} \frac{1}{g_2} \frac{\partial}{\partial v} + \mathbf{w} \frac{1}{g_3} \frac{\partial}{\partial w},$$

$$\mathbf{A} = A_u \mathbf{u} + A_v \mathbf{v} + A_w \mathbf{w}$$

と分配法則を用いると,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \nabla \cdot (A_u \mathbf{u} + A_v \mathbf{v} + A_w \mathbf{w}) \\ &= \{(\nabla A_u) \cdot \mathbf{u} + A_u (\nabla \cdot \mathbf{u})\} + \{(\nabla A_v) \cdot \mathbf{v} + A_v (\nabla \cdot \mathbf{v})\} + \{(\nabla A_w) \cdot \mathbf{w} + A_w (\nabla \cdot \mathbf{w})\} \end{aligned}$$

の6つの項が現れる. 第1項と第2項をそれぞれ計算すると,

$$\begin{aligned} (\nabla A_u) \cdot \mathbf{u} &= \left(\frac{1}{g_1} \frac{\partial A_u}{\partial u} \mathbf{u} + \frac{1}{g_2} \frac{\partial A_u}{\partial v} \mathbf{v} + \frac{1}{g_3} \frac{\partial A_u}{\partial w} \mathbf{w} \right) \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{g_1} \frac{\partial A_u}{\partial u} = \frac{g_2 g_3}{g_1 g_2 g_3} \frac{\partial A_u}{\partial u} \\ A_u (\nabla \cdot \mathbf{u}) &= A_u \left(\frac{\mathbf{u}}{g_1} \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{u} + \frac{\mathbf{v}}{g_2} \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{u} + \frac{\mathbf{w}}{g_3} \frac{\partial}{\partial w} \mathbf{u} \right) \\ &= A_u \left(\frac{\mathbf{u}}{g_1} \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{u} + \frac{\mathbf{v}}{g_2} \frac{1}{g_1} \frac{\partial g_2}{\partial u} \mathbf{v} + \frac{\mathbf{w}}{g_3} \frac{1}{g_1} \frac{\partial g_3}{\partial u} \mathbf{w} \right) \\ &= A_u \left(0 + \frac{1}{g_2 g_1} \frac{\partial g_2}{\partial u} + \frac{1}{g_3 g_1} \frac{\partial g_3}{\partial u} \right) \\ &= \frac{A_u}{g_1 g_2 g_3} \frac{\partial (g_2 g_3)}{\partial u}. \end{aligned}$$

ここで,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial v} = \frac{1}{g_1} \frac{\partial g_2}{\partial u} \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial w} = \frac{1}{g_1} \frac{\partial g_3}{\partial u} \mathbf{w}$$

を用いた^{†3}. よって,

$$(\nabla A_u) \cdot \mathbf{u} + A_u(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \frac{\partial(A_u g_2 g_3)}{\partial u}$$

とわかる. 同様にして,

$$(\nabla A_v) \cdot \mathbf{v} + A_v(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \frac{\partial(A_v g_1 g_3)}{\partial v} (\nabla A_w) \cdot \mathbf{w} + A_w(\nabla \cdot \mathbf{w}) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \frac{\partial(A_w g_1 g_2)}{\partial w}$$

もわかる. 以上より,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left(\frac{\partial(A_u g_2 g_3)}{\partial u} + \frac{\partial(A_v g_1 g_3)}{\partial v} + \frac{\partial(A_w g_1 g_2)}{\partial w} \right).$$

B.2.4 $\nabla \times \mathbf{A}$ の (u, v, w) 系表示

先程と同様に, 分配法則を用いて,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \nabla \times (A_u \mathbf{u} + A_v \mathbf{v} + A_w \mathbf{w}) \\ &= -\{(\mathbf{u} \times \nabla)A_u + (\mathbf{v} \times \nabla)A_v + (\mathbf{w} \times \nabla)A_w\} \\ &\quad + \{A_u(\nabla \times \mathbf{u}) + A_v(\nabla \times \mathbf{v}) + A_w(\nabla \times \mathbf{w})\}. \end{aligned}$$

ここで, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$, $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{u}$, $\mathbf{w} \times \mathbf{u} = \mathbf{v}$ を用いて,

$$(\mathbf{u} \times \nabla)A_u = \left(\mathbf{u} \times \left(\mathbf{u} \frac{1}{g_1} \frac{\partial}{\partial u} + \mathbf{v} \frac{1}{g_2} \frac{\partial}{\partial v} + \mathbf{w} \frac{1}{g_3} \frac{\partial}{\partial w} \right) \right) A_u = \mathbf{w} \frac{1}{g_1} \frac{\partial A_u}{\partial v} - \mathbf{v} \frac{1}{g_3} \frac{\partial A_u}{\partial w}.$$

同様に,

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times \nabla)A_u &= -\mathbf{w} \frac{1}{g_1} \frac{\partial A_v}{\partial u} + \mathbf{u} \frac{1}{g_3} \frac{\partial A_v}{\partial w}, \\ (\mathbf{w} \times \nabla)A_w &= \mathbf{v} \frac{1}{g_1} \frac{\partial A_w}{\partial u} - \mathbf{u} \frac{1}{g_2} \frac{\partial A_w}{\partial v}. \end{aligned}$$

^{†3} この式の導出は以下のとおり:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial v} (g_1 \mathbf{u}) &= \frac{\partial}{\partial u} (g_2 \mathbf{v}) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial g_1}{\partial v} \mathbf{u} + g_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial v} &= \frac{\partial g_2}{\partial u} \mathbf{v} + g_2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u}, \end{aligned}$$

の両辺に \mathbf{v} を掛けると, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$, $\partial_u \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ より,

$$g_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial v} \frac{\partial g_2}{\partial u} = \frac{\partial g_2}{\partial u} \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial v} = \frac{1}{g_1} \frac{\partial g_2}{\partial u} \mathbf{v}$$

となる. もう一つの式も同様.

また,

$$\begin{aligned}
A_u(\nabla \times \mathbf{u}) &= A_u \left(\mathbf{u} \frac{1}{g_1} \frac{\partial}{\partial u} + \mathbf{v} \frac{1}{g_2} \frac{\partial}{\partial v} + \mathbf{w} \frac{1}{g_3} \frac{\partial}{\partial w} \right) \times \mathbf{u} \\
&= A_u \left(\mathbf{u} \times \frac{1}{g_1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial u} + \mathbf{v} \times \frac{1}{g_2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial v} + \mathbf{w} \times \frac{1}{g_3} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial w} \right) \\
&= A_u \left(\mathbf{u} \times \frac{1}{g_1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial u} + \mathbf{v} \times \frac{1}{g_2 g_1} \frac{\partial g_2}{\partial v} \mathbf{v} + \mathbf{w} \times \frac{1}{g_3 g_1} \frac{\partial g_3}{\partial u} \mathbf{w} \right) \\
&= \frac{A_u}{g_1} \left(\mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial u} \right) \\
&= \frac{A_u}{g_1} \mathbf{u} \times \left(-\frac{1}{g_1} \frac{\partial g_1}{\partial v} \mathbf{v} - \frac{1}{g_3} \frac{\partial g_1}{\partial w} \mathbf{w} \right) \\
&= -\frac{A_u}{g_1 g_2} \frac{\partial g_1}{\partial v} \mathbf{w} + \frac{A_u}{g_1 g_3} \frac{\partial g_1}{\partial w} \mathbf{v}.
\end{aligned}$$

ここで,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial u} = -\frac{1}{g_2} \frac{\partial g_1}{\partial v} \mathbf{v} - \frac{1}{g_3} \frac{\partial g_1}{\partial w} \mathbf{w}$$

を用いた^{†4}. 同様にして,

$$\begin{aligned}
A_u(\nabla \times \mathbf{u}) &= \frac{A_v}{g_2 g_1} \frac{\partial g_2}{\partial u} \mathbf{w} - \frac{A_v}{g_2 g_3} \frac{\partial g_2}{\partial w} \mathbf{u} \\
A_w(\nabla \times \mathbf{w}) &= -\frac{A_w}{g_3 g_2} \frac{\partial g_3}{\partial v} \mathbf{u} + \frac{A_w}{g_3 g_1} \frac{\partial g_3}{\partial u} \mathbf{v}
\end{aligned}$$

これらを合わせると,

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{g_3}{g_2 g_3} \frac{\partial A_w}{\partial v} - \frac{g_2}{g_2 g_3} \frac{\partial A_v}{\partial w} \right) \mathbf{u} + \left(\frac{A_w}{g_2 g_1} \frac{\partial g_3}{\partial v} - \frac{A_v}{g_2 g_3} \frac{\partial g_2}{\partial w} \right) \mathbf{u} + \dots \\
&= \frac{1}{g_2 g_3} \left(\frac{\partial}{\partial v} (g_3 A_w) - \frac{\partial}{\partial w} (g_2 A_v) \right) \mathbf{u} \\
&\quad + \frac{1}{g_3 g_1} \left(\frac{\partial}{\partial w} (g_1 A_u) - \frac{\partial}{\partial u} (g_3 A_w) \right) \mathbf{v} \\
&\quad + \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial}{\partial u} (g_2 A_v) - \frac{\partial}{\partial v} (g_1 A_u) \right) \mathbf{w}
\end{aligned}$$

となる.

^{†4} この式の導出は以下のとおり: $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial u} \cdot \mathbf{u} = 0$ より, 係数 A, B を用いて,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial u} = A \mathbf{v} + B \mathbf{w}$$

とおける. この両辺に \mathbf{v} を内積で掛けると,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial u} = -\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u} = -\mathbf{u} \cdot \left(\frac{1}{g_2} \frac{\partial g_1}{\partial v} \mathbf{u} \right) = -\frac{1}{g_2} \frac{\partial g_1}{\partial v} = A$$

となる. B は両辺に \mathbf{w} を掛けると出てくる.

B.2.5 球面座標系の微分演算の計算

3次元直交座標系 (x, y, z) から座標変換

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi & \text{(B.13a)} \\ y = r \cos \theta \sin \varphi & \text{(B.13b)} \\ z = r \sin \theta & \text{(B.13c)} \end{cases}$$

により, 球面座標系 (r, θ, φ) を定義する. これより, r, θ, φ をそれぞれ x, y, z で表すと,

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & \text{(B.14a)} \\ \theta = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{(B.14b)} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} & \text{(B.14c)} \end{cases}$$

となる. 第一基本量を計算するために, $\mathbf{r} = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta)$ を r, θ, φ で微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} &= (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) = g_1 \mathbf{e}_r, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta) = g_2 \mathbf{e}_\theta, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} &= (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0) = g_3 \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned} g_1 &= \sqrt{(\sin \theta \cos \varphi)^2 + (\sin \theta \sin \varphi)^2 + (\cos \theta)^2} = 1, \\ g_2 &= \sqrt{(r \cos \theta \cos \varphi)^2 + (r \cos \theta \sin \varphi)^2 + (-r \sin \theta)^2} = r \\ g_3 &= \sqrt{(-r \sin \theta \sin \varphi)^2 + (r \sin \theta \cos \varphi)^2} = r \sin \theta \end{aligned}$$

である。これらを代入すると、

$$\begin{aligned}\nabla f &= \mathbf{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta A_\theta) + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \nabla^2 V &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}, \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{e}_r \left\{ \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta A_\varphi) - \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right\} \\ &\quad + \mathbf{e}_\theta \left\{ \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \right\} \\ &\quad + \mathbf{e}_\varphi \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\}\end{aligned}$$

を得ることができる。

B.3 まとめ

以上をまとめると次のようになる：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} &= \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0,\end{aligned}\tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} &= \cos \theta \mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} = -\sin \theta \mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \\ \nabla f &= \mathbf{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi},\end{aligned}\tag{B.16}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta A_\theta) + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi},\tag{B.17}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2},\tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{e}_r \left\{ \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta A_\varphi) - \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right\} \\ &\quad + \mathbf{e}_\theta \left\{ \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \right\} \\ &\quad + \mathbf{e}_\varphi \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\}\end{aligned}\tag{B.19}$$

付録 C

(A.9) の導出

C.1 問題設定

(A.9) の a_q を求めることは、球面上の函数 ψ_q について線型演算子 ∇_s^2 の固有値を求めることである。すなわち、球面上のラプラス方程式

$$\nabla_s^2 \psi_q = -a_q \psi_q \quad (\text{C.1})$$

を満たす a_q を求めることである (この式は (A.8) と同じ式である)。ラプラス方程式の正則な解を一般に**調和函数**と呼ぶ。特に、調和函数のうち、球座標 (極座標) (R, θ, φ) を用いて、 $R^n Y_n(\theta, \varphi)$ (ただし、 n は 0 または正の整数) の形に表されるものを n 次の**体球函数**、 $Y_n(\theta, \varphi)$ を n 次の**球面調和函数** (または、単に球面函数) という。

C.2 方程式の球座標での表示と変数分離

球面上のラプラシアンを用いて (C.1) の左辺を書き下すと、

$$\begin{aligned} \nabla_s^2 \psi_q &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi_q}{\partial R} \right) + \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial \psi_q}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi_q}{\partial \varphi^2} \\ &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \psi_q}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \psi_q \end{aligned}$$

となるが、今回は球面上での変化しか考えていない (鉛直方向 = r 方向の変化は考えていない) ので、

$$\frac{1}{R^2} \left\{ \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \psi_q = -a_q \psi_q \quad (\text{C.2})$$

となる. ここで, $\psi_q = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ と変数分離をすると,

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{R^2 \cos \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\cos \theta \frac{d}{d\theta} \right) \Theta + \frac{\Theta}{R^2 \cos^2 \theta} \frac{d^2}{d\varphi^2} \Phi &= -a_q \Theta \Phi, \\ \frac{1}{R^2 \cos \theta \Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\cos \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{R^2 \Phi \cos^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} &= -a_q, \\ \frac{\cos \theta}{R^2 \Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\cos \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + a_q \cos^2 \theta &= \frac{1}{R^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \end{aligned}$$

となる. 変数分離定数を α とすると, まず Φ については一般解として

$$\begin{cases} \Phi = Ae^{i\sqrt{\alpha}R\varphi} + Be^{-i\sqrt{\alpha}R\varphi} & (\alpha > 0) \\ \Phi = C_1 e^{\sqrt{|\alpha|R}\varphi} + C_2 e^{-\sqrt{|\alpha|R}\varphi} & (\alpha < 0) \end{cases}$$

を得る (A, B, C_1, C_2 は任意定数である). しかし, $\alpha < 0$ の場合の解は周期境界条件 $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2n\pi)$ ($n \in \mathbb{Z}$) を満たさないのが不適である. また, $\alpha > 0$ の場合の解についても周期境界条件を考慮すると, $\sqrt{\alpha}R = n$ より, $\alpha = (n/R)^2 \equiv m^2$ とできる. よって, φ 方向 (= 経度方向) の解は

$$\Phi = \hat{\Phi}_n e^{ims\varphi}$$

とできる. つまり, ϕ 方向の固有函数は Fourier 級数展開を使って書ける.

一方, θ 方向 (= 緯度方向) については,

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta}{R^2 \Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\cos \theta \frac{d}{d\theta} \right) \Theta + a_q \cos^2 \theta &= \alpha, \\ \cos^2 \theta \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} - \cos \theta \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} - (m^2 - a_q R^2 \cos^2 \theta) \Theta &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

となる. ここで, $x \equiv \sin \theta$ と変数変換を行うと,

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} = \cos \theta \frac{d}{dx}, \quad \frac{d^2}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left(\cos \theta \frac{d}{dx} \right) = -\sin \theta \frac{d}{dx} + \cos^2 \theta \frac{d^2}{dx^2}$$

より, (C.3) は

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2 \cos^2 \theta \sin \theta \frac{d\Theta}{dx} - (m^2 - a_q R^2 \cos^2 \theta) \Theta &= 0 \\ \cos^2 \theta \frac{d\Theta}{dx} - 2 \sin \theta \frac{d\Theta}{dx} - \left(\frac{m^2}{\cos^2 \theta} - a_q R^2 \right) \Theta &= 0 \\ (1 - x^2) \frac{d\Theta}{dx} - 2x \frac{d\Theta}{dx} - \left(\frac{m^2}{1 - x^2} - a_q R^2 \right) \Theta &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

となる. これは, ルジャンドルの微分方程式^{†1}の形式になっている.

^{†1} ルジャンドルの微分方程式は変数係数の 2 階線型常微分方程式であるが, $d^2\Theta/dx^2$ の係数 $(1 - x^2)$ が $-x = \pm 1$ でゼロになるため, 解くのは難しい. このような確定特異点をもつ微分方程式は無限級数の解の形で求める.

C.3 ルジャンドルの微分方程式の級数解法

ここで, $m = 0$ としたときの (C.4) の解を P とすると,

$$(1 - x^2) \frac{dP}{dx} - 2x \frac{dP}{dx} + a_q R^2 P = 0 \quad (\text{C.5})$$

となる. これを級数解法で解くために

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (\text{C.6})$$

とおく. これより,

$$\frac{dP}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad \frac{d^2 P}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

となるので, これらを (C.5) に代入すると,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \{(1 - x^2)n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x n c_n x^{n-1} + a_q R^2 c_n x^n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [\{n(1-n)c_n - 2n c_n + a_q R^2 c_n\} x^n + n(n-1)c_n x^{n-2}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [\underbrace{\{a_q R^2 - n(n+1)\} c_n x^n}_{(*)1} + \underbrace{n(n-1)c_n x^{n-2}}_{(*)2}] = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

となる. この式から, c_n が満たす漸化式を求める;

- x^0 の係数 \dots (*)1 の項に $n = 0$, (*)2 の項に $n = 2$ を代入したものを足すと,

$$a_q R^2 c_0 + 2c_2 = 0$$

- x^1 の係数 \dots (*)1 の項に $n = 1$, (*)2 の項に $n = 3$ を代入したものを足すと,

$$(a_q R^2 - 2)c_1 + 6c_3 = 0$$

- x^2 の係数 \dots (*)1 の項に $n = 2$, (*)2 の項に $n = 4$ を代入したものを足すと,

$$(a_q R^2 - 6)c_2 + 12c_4 = 0$$

⋮

- x^q の係数 \dots (*)1 の項に $n = q$, (*)2 の項に $n = q + 2$ を代入したものを足すと,

$$\{a_q R^2 - q(q+1)\}c_q + (q+2)(q+1)c_{q+2} = 0$$

以上から,

$$\frac{c_{n+2}}{c_n} = \frac{n(n+1) - a_q R^2}{(n+1)(n+2)} \quad (\text{C.8})$$

と推定できる. これより, c_0, c_1 を定めれば c_n は順次求められるが, $c_0 = c_1 = 0$ としてしまうと, 全ての c_n がゼロとなり, $p = 0$ の自明な解しか得られないので, $c_0 \neq 0, c_1 \neq 0$ と仮定する. P が $-1 < x < 1$ で発散しないためには, この級数が有限で終わる必要がある. ある q で $c_q = q(q+1) - a_q R^2 = 0$ となれば, $c_{q+2} = 0$ となり, q 以降の係数は全てゼロとなる. よって,

$$a_q = \frac{q(q+1)}{R^2} \quad (\text{C.9})$$

となる必要がある. これで, 求めるべき固有値が求まった.

参考文献

- [1] R. Fjørft (1953) 「On the Changes in the Spectral Distribution of Kinetic Energy for Twodimensional, Nondivergent Flow」 *Tellus*, 5: pp.225-230.
- [2] 岩山隆寛 (2013) 『2次元乱流の基礎理論』大気海洋科学特論 VI (2013年度 東京大学大学院理学研究科地球惑星科学専攻集中講義) 講義資料 (http://www2.kobe-u.ac.jp/~iwayama/teach/gfd/lecture_0924-26_rev.pdf)
- [3] G. K. Vallis (2006) 「Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics」 Cambridge U.P.
- [4] 小倉義光 (1978) 『気象力学通論』東京大学出版
- [5] G. D. Naston and K. S. Gage (1985) 「A climatology of atmospheric wavenumber spectra of wind and temperature observed by commercial aircraft」 *J. Atmos. Sci.*, Vol. 42: p.950.
- [6] 木村竜治 (1983) 『地球流体力学入門 -大気と海洋の流れのしくみ-』東京堂出版
- [7] 寺沢寛一 (1983) 『自然科学者のための数学概論 増訂版改版』岩波書店
- [8] 岩堀長慶 (1960) 『ベクトル解析』裳華房