

1 次元放射平衡モデルを用いた
灰色大気の鉛直温度構造に関する考察

西岡 友樹

神戸大学理学部地球惑星科学科
地球および惑星大気科学研究室

2016/02/05

要旨

地球大気の鉛直温度構造を決定する要因として、様々なものが挙げられるが、今回は気体による放射の吸収に注目した。小林英貴 (2012) を参考に、1次元放射平衡モデルを用いて、数値計算によって、大気が放射平衡に達したときの鉛直温度構造の考察を行った。吸収気体の吸収係数と大気の鉛直温度構造との関係について調べた。その結果、吸収係数が大きく、気層の光学的厚さが大きいほど、地表面における温度は高くなった。一方、大気上端における温度はほとんど変化しなかった。

目次

第1章 序論	3
第2章 放射の基礎法則	4
2.1 放射とは	4
2.2 基本的な物理量	4
2.3 黒体放射	7
2.4 放射伝達方程式の定式化	10
第3章 放射平衡	17
3.1 放射平衡温度	17
3.2 平行平面大気	18
第4章 数値計算	23
4.1 概要	23
4.2 設定	23
4.3 実験	27
第5章 結論	33

	2
付録	34
謝辞	39
参考文献	40

第1章 序論

地球において、大気のない場合の有効放射温度は 255 K となることが知られている。また、現在の地球大気における温度は、水平方向にも変化するが、鉛直方向に対しては非常に大きく変化しており、温度の高度分布によって、いくつかの層に分けられている。それらは、地表面から順に、対流圏、成層圏、中間圏、熱圏である。地表面における温度に注目すると、288 K であり、有効放射温度に比べて高い。これは、大気による温室効果があるためである。

本研究においては、地表面から成層圏上端 (高度 50 km) までを取り扱う。この高度範囲における実際の地球大気の鉛直温度分布は、対流圏においては、地表面からその上端に向かって、ある一定の割合で高度とともに温度が減少する。一方、成層圏においては、その上端に向かって、高度とともに温度が上昇する。これらの温度構造を決定する要因となるのが、吸収気体の存在による温室効果や大気の対流である。今回の 1 次元放射平衡モデルにおいては、簡単化のために、対流の効果を入れず、また、吸収気体を水蒸気のみとし、その高度分布を一定にした。放射平衡状態における温度構造がどのように決まるかを調べる。

実験においては、今回仮定している大気は灰色大気であるので、その鉛直温度分布は解析的に解ける。そのため、灰色大気の温度構造の解析値と計算値の比較を行い、モデルの信頼度を測るとともに、各条件における計算の結果を考察する。

本論文の構成を説明する。2 章では、放射に関連する基本的な物理量や法則を示す。3 章では、放射平衡の概念について説明し、解析的に解ける場合の温度構造を決定する方法について解説する。4 章では、温度を決定する過程で行う計算の設定、および、各条件における結果を示し、それについての考察を行う。5 章では、まとめと今後の展望を示している。

第2章 放射の基礎法則

2.1 放射とは

放射とは電磁波の総称であり、輻射と表記されることもある。電磁波は波長によって領域別の名称で呼ばれ、このうち、地球大気での放射過程に関して重要な領域は、紫外線から、可視光線、赤外線、およびマイクロ波にかけての領域である。

電磁波の識別には、真空中における波長 λ 、振動数 ν 、または波数 k が用いられ、また、三者の間には、電磁波伝播の位相速度 (光速度) を c とすると、

$$\lambda = \frac{c}{\nu}; \quad k = \frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda} \quad (2.1)$$

となる関係がある。因みに、光速度は $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ である。

気象の分野において問題にするのは、主に太陽からやってくる放射と、大気-地表面系が出す放射である。これらは放射源を基準にして、前者を太陽放射、後者を地球放射と呼ぶ。また、地球に入射する太陽放射エネルギーの99%以上は $4 \mu\text{m}$ より短い領域に、地球放射エネルギーのほとんどは $3 \mu\text{m}$ より長い波長域にあるので、それぞれを短波放射、長波放射と呼ぶこともある。

2.2 基本的な物理量

立体角

立体角 ω は、半径 r の球面上に円錐体で張られる面積 σ を半径の2乗で割った値、

$$\omega \equiv \frac{\sigma}{r^2} \quad (2.2)$$

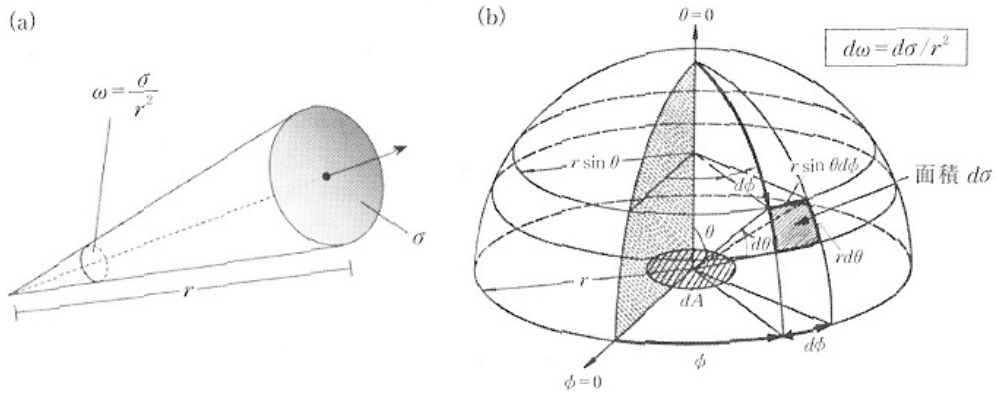


図 2.1: (a) 立体角 ω の定義 (b) 極座標系における微小立体角 $d\omega$ の定義
(浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎)

で定義され, ステラジアン sr の単位で表される. 極座標系において, 半径 r の球面上の天頂角 θ , 方位角 ϕ で規定される方向を考え, この微小な角度 $d\theta, d\phi$ で張られる錐体の微小面積 $d\sigma$ をみるとき, 立体角 $d\omega$ は,

$$d\omega = \frac{d\sigma}{r^2} = \frac{r \sin \theta d\phi \cdot r d\theta}{r^2} = \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.3)$$

で与えられる.

放射輝度

ある面 dA を通って, その面に対して角 θ をなす方向の, 立体角 $d\omega$ の錐体内を進む放射を考える. 振動数が $\lambda \sim \lambda + d\lambda$ にある放射が時間 dt で面 dA を通過するとき, 放射が運ぶ放射エネルギー dE_λ は,

$$dE_\lambda = I_\lambda \cos \theta dA d\omega d\lambda dt \quad (2.4)$$

である. ここで I_λ は放射輝度と呼ばれ, 波長 λ の放射の強さを表す比例定数である. よって, ある単一の波長 λ の放射の放射輝度は,

$$I_\lambda = \frac{dE_\lambda}{\cos \theta dA d\omega d\lambda dt} \quad (2.5)$$

で定義される. つまり, 放射輝度は場所のみならず進行方向にも依存する. また, ある地点で放射輝度が方向に依らず一定の場合に, 放射場は等方的であるという. なお, 放射が平行光線の場合, $d\omega = 0$ であるので, 放射輝度の概念は成り立たず, その場合, 次項で説明する放射フラックス (光線に垂直な面を通る放射エネルギーの大きさ) で光線の強さを記述する. 例としては, 太陽放射の大気上端での入射が挙げられる.

放射フラックス

面 dA を通して半球側へ流れる放射エネルギーの大きさを放射フラックスと呼ぶ。つまり、波長 λ の放射フラックス F_λ は、面 dA を通過する放射輝度 I_λ のうち面に垂直な成分を半球の全立体角 Ω で積分したものであり、

$$F_\lambda \equiv \int_{\Omega} I_\lambda \cos \theta d\omega \quad (2.6)$$

で定義される。極座標表示では、(2.3) を用いて、

$$F_\lambda = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_\lambda(\theta, \phi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.7)$$

と書ける。特に、等方的な放射場の場合は、放射輝度が θ や ϕ に依らないので、(2.3) を計算して $F_\lambda = \pi I_\lambda$ を得る。

また、単色光の放射フラックス F_λ を全波長にわたって積分した放射フラックス F は、

$$F = \int_0^{\infty} F_\lambda d\lambda \quad (2.8)$$

のように表せる。

大気中での放射過程

放射は大気中を伝播する間に、大気を構成する物質により吸収や散乱を受けて減衰する。吸収や散乱による減衰を合わせて消散と呼ぶ。他方、考慮している方向への放射に、地表面や大気物質から射出される放射が加わることもある。こうして、散乱、吸収および射出によって放射と大気物質は相互作用しあっている。

太陽放射の伝播を例にあげよう。図 2.2 は、晴天時に地上で太陽を直接見た時の太陽放射フラックスの波長分布を表し、大気外でのスペクトルからの変化の様相を示したものである。最下部の線が、地表面でのスペクトルであり、複雑な様相を呈している。それに至るまでに、まず、紫外線から可視光線、近赤外線域にかけて、空気分子によって散乱されて短い波長ほど強く減衰する。さらに、可視光域から近赤外線域の飛び飛びの波長帯において、様々な気体成分に吸収されていることが示されている。散乱にあずかる大気要素としては、空気分子に加えて、エアロゾルや雲粒子があり、粒子による太陽放射の散乱はすべての波長で連続的に起こるが、散乱

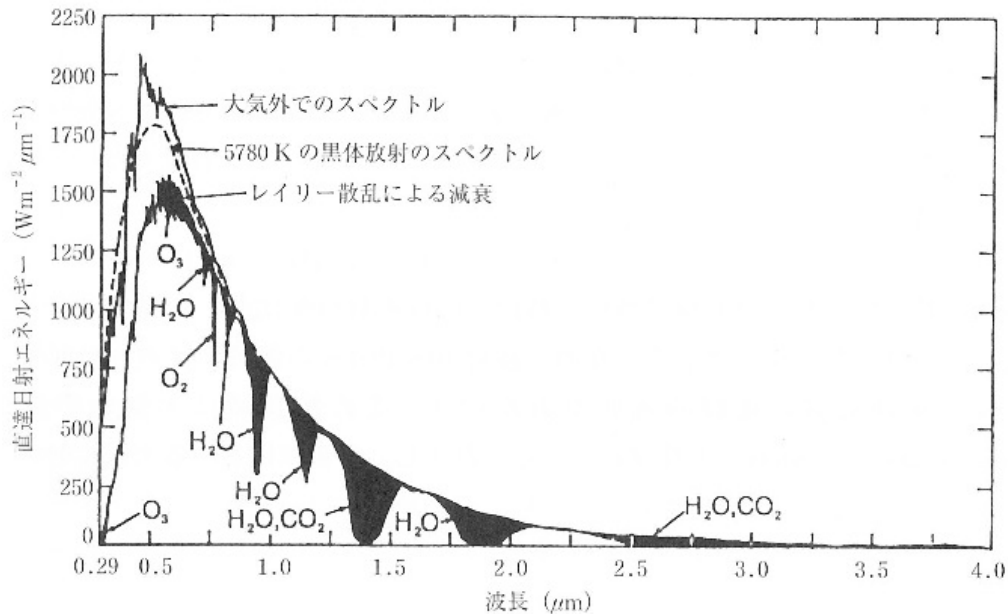


図 2.2: 晴天時の大気外および地表面における直達太陽放射のスペクトル
(浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎)

の強さと様相は、散乱粒子の波長に対する相対的大きさと光学特性に依存して大きく異なる。他方、放射の吸収にあずかる気体分子の主なものは、水蒸気、二酸化炭素、オゾンなどである。これらの気体成分による吸収は、吸収帯と呼ばれる気体成分ごとに特定の波長帯で起こる。例えば、水蒸気と二酸化炭素による太陽放射の吸収は、近赤外領域の波長域において離散的に起こり、また、オゾンによる吸収は、主に紫外線域で顕著である。気体成分により吸収された太陽放射は、熱エネルギーに変わり、大気を直接加熱する。

2.3 黒体放射

プランク関数

黒体とは、入射するすべての波長の放射を完全に吸収する理想的な物体をいい、また、黒体は同じ温度では他のどの物体よりも多くの放射を出すことができる。黒体から射出される放射を黒体放射と呼び、その放射場は等方的である。黒体は現実には存在しない理想的なものであるが、黒体放射は等温の不透明な壁面で囲まれた空洞内の放射として実現される。

プランクは、1900年にすべての温度領域での黒体放射スペクトルを統一的に表すことに成功し、これを、プランクの法則と呼ぶ。プランクの法則によると、絶対温度 T の黒体放射輝度 $B_\lambda(T)$ の波長 λ で表したスペクトル分布は、

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5 \{\exp(hc/\kappa_B\lambda T) - 1\}} \quad (2.9)$$

と表され、これは、プランク関数と呼ばれる。ここで、

$$h = 6.62607 \times 10^{-34} \text{ J s} : \quad \text{プランク定数}$$

$$\kappa_B = 1.38065 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} : \quad \text{ボルツマン定数}$$

である。波数 k 表示では、

$$B_k(T) = \frac{2hc^2k^3}{\exp(hck/\kappa_B T) - 1} \quad (2.10)$$

となる。すなわち、黒体の放射輝度は、絶対温度と波長(振動数、波数)の関数である。太陽放射のスペクトルは、厳密には黒体放射のスペクトルに一致しないが、可視光域から近赤外線域にかけての波長分布は約 $T = 5780 \text{ K}$ の黒体放射スペクトルでほぼ近似できる。一方、宇宙空間へ放射される地球のスペクトルは、 $T = 255 \text{ K}$ の黒体放射のそれに相当する。

ウィーンの変位則

ある温度の T でのプランク関数は、ある特定の波長で極大値をとる。その波長 λ_{\max} では $dB_\lambda(T)/d\lambda$ となることを考慮すると、 μm 単位の λ_{\max} と黒体温度 T との間には、

$$\lambda_{\max} = \frac{C}{T}, \quad C = 2897 \mu\text{m K} \quad (2.11)$$

なる関係があることが導かれる^{*1}。つまり、黒体放射の輝度が最大となる波長 λ_{\max} は、その絶対温度に反比例する。これをウィーンの変位則という。

ステファン・ボルツマンの法則

黒体面から射出される放射輝度を全波長にわたって積算した値 $B(T)$ は、プランク関数を波長範囲 $0 \sim \infty$ にわたって積分することにより、

$$B(T) = \int_0^\infty B_\lambda(T) d\lambda \quad (2.12)$$

^{*1}(2.11)の導出は、付録 A を参照されたい。

と書ける. この積分は, $B(T)$ が T^4 に比例する結果を導く. また, 黒体放射は等方的であるから, 全波長で積分した放射フラックス F は,

$$F = \pi B(T) = \sigma T^4 \quad (2.13)$$

で与えられる^{*2}. ここで, σ はステファン・ボルツマン定数であり, その値は $\sigma = 5.66961 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ である. すなわち, 黒体面から射出される放射フラックスの全波長にわたる積分値は, 絶対温度の 4 乗に比例する. これを, ステファン・ボルツマンの放射則という.

キルヒホッフの法則

キルヒホッフの法則は, 熱平衡の状態にある物質が放射を授受する際の基本的関係を表す法則であり, 物質の吸収係数 k_λ^a と射出係数 j_λ の比は, 物質の種類や性質に関係なく, その温度と放射の波長のみ依存する.

いま, 不透明な壁面で囲まれた空洞内の放射場を考える. 壁面-空洞系は, 外界とは熱の出入りがなく, それ自身の均一な温度と等方放射場で特徴づけられる熱力学的な平衡状態に達している. この場合, 壁面が黒体ではないとしても壁面における射出と多重反射の結果, 空洞内の放射場は黒体放射となる. 熱力学的平衡状態にあるので, 壁面は吸収する放射量と等しい量の放射を射出する. よって,

$$j_\lambda = k_\lambda^a B_\lambda(T) \quad (2.14)$$

$$\frac{j_\lambda}{k_\lambda^a} = B_\lambda(T) \quad (2.15)$$

の関係が成り立つ. すなわち, 壁面の吸収係数 k_λ^a と射出係数 j_λ の比は, 黒体放射輝度のプランク関数で与えられ, 温度と波長のみ依存する. いま, 熱力学的平衡状態にある物質の波長 λ の放射に対する吸収率 a_λ を, プランク関数 $B_\lambda(T)$ に対する吸収された放射強度の比として定義する. また, 射出率 ϵ_λ を $B_\lambda(T)$ に対する射出された放射強度 j_λ の比として定義すると, (2.15) は吸収率と射出率とが等しくなることを意味する. すなわち,

$$a_\lambda = \epsilon_\lambda \quad (2.16)$$

である. すべての波長で $a_\lambda = \epsilon_\lambda = 1$ であるような理想的物体を黒体という. 一方, すべての波長で $0 < a_\lambda = \epsilon_\lambda = \text{一定値} < 1$ であるような物体を灰色体と呼ぶ. 地表面は, 赤外放射に対してはほぼ黒体あるいは灰色体として近似される.

^{*2}(2.13) の導出は, 付録 B を参照されたい.

2.4 放射伝達方程式の定式化

放射伝達方程式

いま、大気中に断面積 $d\sigma$ 、長さ ds の微小な気柱を考え、これに対して、波長が λ と $\lambda+d\lambda$ の間にある強度 I_λ の放射が dt 時間に立体角 $d\omega$ で入射するとする。入射方向に進む放射は、この気柱を通過する間に散乱や吸収を受けて、その強度が $I_\lambda + dI_\lambda$ に変わるとする。気柱の密度を ρ 、単位質量あたりの消散係数を k_λ^e と表すと、入射した放射が気柱を通過する間に消散されるエネルギーは、 $k_\lambda^e I_\lambda \rho ds d\sigma d\omega d\lambda dt$ で与えられる。これは放射エネルギーの変化量 $-dI_\lambda d\sigma d\omega d\lambda dt$ に等しいので、この微小気柱による放射強度の減衰は、

$$dI_\lambda(\text{減衰}) = -k_\lambda^e I_\lambda \rho ds \quad (2.17)$$

と書き表せる。ここで、 k_λ^e は質量消散係数と呼ばれる。

他方、この微小気柱を通過している間に、気柱内で生じる射出によって進行方向の放射が強まる。また、他のあらゆる方向から考えている方向へ散乱光が加わり、放射は強められる。この射出と散乱による放射の増強分 $dI_\lambda(\text{増強})$ を表す係数 j_λ を導入する。これを質量射出係数、または、放射源係数という。よって、放射の増強分は、微小気柱の質量に比例するので、

$$dI_\lambda(\text{増強}) = +j_\lambda \rho ds \quad (2.18)$$

と表せる。2つの過程が同時に進行しているとすれば、正味としての放射強度の変化量は、

$$dI_\lambda = -k_\lambda^e I_\lambda \rho ds + j_\lambda \rho ds \quad (2.19)$$

と書ける。ここで、放射源関数 J_λ を、

$$J_\lambda = \frac{j_\lambda}{k_\lambda^e} \quad (2.20)$$

と定義して導入すると、(2.20) は、

$$\frac{dI_\lambda}{k_\lambda^e \rho ds} = -I_\lambda + J_\lambda \quad (2.21)$$

と書き表せる。これを放射伝達方程式と呼ぶ。この方程式は、大気中を伝播する間に吸収、射出、散乱を受けて変化する放射エネルギーの保存則を表す。

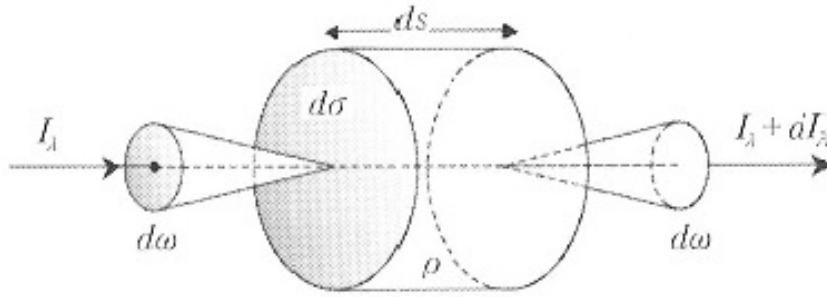


図 2.3: 放射伝達過程の概念図 (浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎)

散乱位相関数

次に、散乱がある場合の放射強度の変化を定式化する。図 2.4 のように、立体角 $d\omega'$ 内の強度 I_λ の放射光が、微小体積 $d\sigma ds$ により散乱されるとしたとき、1 回の散乱で消散される放射エネルギーは、

$$k_\lambda^e I_\lambda \rho d\sigma ds d\omega' d\lambda dt = k_\lambda^e I_\lambda dm d\sigma d\omega' d\lambda dt \tag{2.22}$$

と書ける。ただし、右辺の $dm = \rho d\sigma ds$ は微小気柱の質量である。なお、これ以降、入射光側の方角や立体角をプライム (\prime) のついた記号で表すことにする。入射光から失われた、すなわち、消散された放射エネルギーのうち、入射光の進行方向と角 Θ をなす方向の立体角 $d\omega$ 内に散乱される割合は、散乱の強さの角度分布を表す関数 $P(\cos \Theta)$ を導入することにより、

$$P(\cos \Theta) \left(\frac{d\omega}{4\pi} \right) k_\lambda^e I_\lambda dm d\omega' d\lambda dt \tag{2.23}$$

と書き表せる。 $P(\cos \Theta)$ を散乱位相関数と呼ぶ。また、角 Θ を散乱角という。散乱角は、入射光の進行方向 (前方) から測った散乱光の進行方向を表す角度である。したがって、すべての方向に同じ強さで散乱する等方性散乱の場合には、散乱位相関数は $P(\cos \Theta) = \text{一定値}$ となる。

すべての方向へ散乱されるエネルギーの割合は、(2.23) を散乱方向の全立体角 Ω について積分したものであるので、

$$k_\lambda^e I_\lambda dm d\sigma d\omega' d\lambda dt \int_\Omega P(\cos \Theta) \left(\frac{d\omega}{4\pi} \right) \tag{2.24}$$

と書ける。このとき、

$$\int_\Omega P(\cos \Theta) \left(\frac{d\omega}{4\pi} \right) = 1 \tag{2.25}$$

ならば, (2.22) と (2.24) は一致する. この場合, 散乱位相関数は, 1 に規格化されているといい, 散乱過程での放射エネルギーの消散は, 純粋な散乱によってのみ生じ, エネルギーの実質的な損失 (吸収) はないことを意味する. 吸収を伴う一般的な散乱過程に対しては,

$$\int_{\Omega} P(\cos \Theta) \left(\frac{d\omega}{4\pi} \right) = \varpi \leq 1 \quad (2.26)$$

となる. ここで, ϖ は単散乱アルベドであり, また, この量は,

$$\varpi = \frac{k_{\lambda}^s}{k_{\lambda}^e} = \frac{k_{\lambda}^s}{k_{\lambda}^s + k_{\lambda}^a} \quad (2.27)$$

と定義することもできる. ここで, k_{λ}^s は質量散乱係数と呼ばれ, 純粋な散乱効果の大きさを表す係数である. これは, (2.26) と (2.27) を組み合わせた,

$$k_{\lambda}^s \equiv \int_{\Omega} k_{\lambda}^e P(\cos \Theta) \left(\frac{d\omega}{4\pi} \right) \quad (2.28)$$

の関係式で定義される. また, (2.27) 右辺の分母の k_{λ}^a は, 質量吸収係数と呼ばれ, 質量消散係数と質量散乱係数の差である. 従って, 吸収のない ($k_{\lambda}^a = 0$) 純散乱の場合, 単散乱アルベドは $\varpi = 1$ となる. この場合は保存性散乱と呼ばれ, 入射光は散乱されてあらゆる方向に拡散するが, 散乱の前後で放射エネルギーは保存される. 反対に, 散乱のない ($k_{\lambda}^s = 0$) 純吸収の場合には, $\varpi = 0$ となる. 一方, $0 < \varpi < 1$ の場合には, 微小気柱内で散乱と同時に吸収もあり, $(1 - \varpi)$ の割合で吸収された放射は熱エネルギーに変換される. 大気粒子による散乱では, 一般的に, 粒子が入射光の波長に比べて大きくなるほど, 入射光の進行方向 (前方) により強く散乱される角度分布になる.

放射源関数

ここでは, 放射伝達方程式を導出する際に導入した, 放射源関数 J_{λ} について考える. 微小気柱を通過する放射強度を増強する効果には射出と散乱の寄与があり, 両方の効果を含めた広義の射出係数 j_{λ} を用いると, 微小気柱から dt 時間に立体角 $d\omega$ 内に射出される放射エネルギーは $j_{\lambda} d\mu d\omega d\lambda dt$ で与えられる. 散乱のない吸収大気 ($\varpi = 0$; $k_{\lambda}^e = k_{\lambda}^a$) で局所熱力学平衡 (LTE) の近似が成り立つ場合には, キルヒホッフの法則 (2.15) により, $j_{\lambda} = k_{\lambda}^a B_{\lambda}(T)$ であるので, (2.20) で定義される放射源関数は,

$$J_{\lambda} = J_{\lambda}^{(a)} \equiv \frac{j_{\lambda}}{k_{\lambda}^a} = B_{\lambda}(T) \quad (2.29)$$

となる. ここで, $J_{\lambda}^{(a)}$ は, 吸収大気の放射源関数であり, LTE 近似が成り立つ大気ではプランク関数で与えられる.

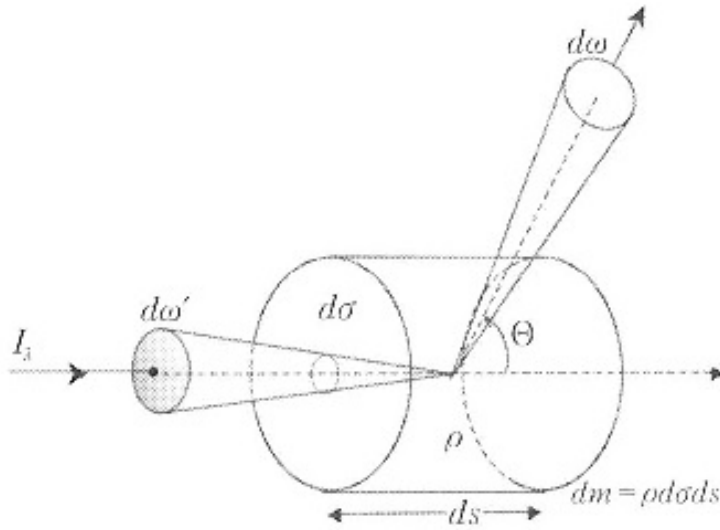


図 2.4: 散乱過程の概念図 (浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎)

他方, 吸収のない散乱大気 ($\varpi = 1$; $k_\lambda^e = k_\lambda^s$) の場合, あらゆる方向から入射した放射エネルギーのうち, 考慮している方向に散乱される割合は, 微小気柱からその方向に射出されるエネルギーに等しくなるので, (2.24) を参照すると射出係数 j_λ は,

$$j_\lambda = k_\lambda^s \int_{\Omega} I_\lambda P(\cos \Theta) \left(\frac{d\omega'}{4\pi} \right) \quad (2.30)$$

と書ける. 従って, この場合の放射源関数は,

$$J_\lambda = J_\lambda^{(s)} \equiv \frac{j_\lambda}{k_\lambda^s} = \int_{\Omega} I_\lambda P(\cos \Theta) \left(\frac{d\omega'}{4\pi} \right) \quad (2.31)$$

となる. ここで, $J_\lambda^{(s)}$ は, 散乱大気の放射源関数である.

実際の大気中での散乱を考える場合, 極座標系を用いて放射の進行方向を天頂角と方位角で表示すると便利である. 図 2.5 において, 入射光の進行方向を (θ', ϕ') , 散乱角の方向を (θ, ϕ) と表すと, それらの間の散乱角 Θ の余弦 $\cos \Theta$ は, 球面三角の余弦定理により,

$$\cos \Theta = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') \quad (2.32)$$

で与えられる. 散乱位相関数および放射輝度の角度変数も天頂角と方位角に直すと, 散乱大気の放射源関数 $J_\lambda^{(s)}$ は,

$$J_\lambda^{(s)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P(\theta, \phi; \theta', \phi') I_\lambda(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' \quad (2.33)$$

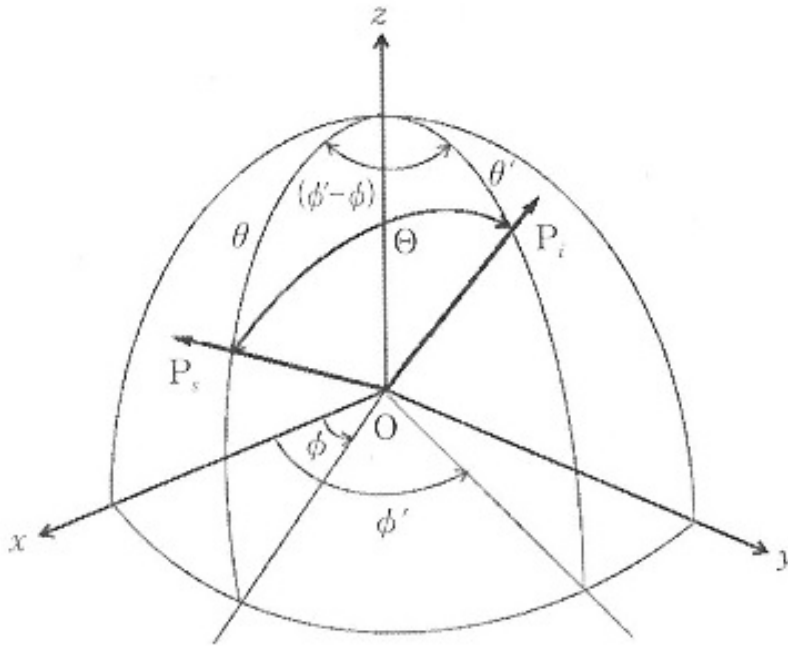


図 2.5: 極座標系における入射方向 (OP_i) および散乱方向 (OP_s) と散乱角 Θ の関係図 (浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎)

と書き表せる.

吸収と散乱の過程が共存する大気 ($0 < \varpi < 1$) の場合には, 微小気柱における散乱と吸収は, それぞれ独立の過程であるので, 放射源関数はそれぞれの効果の和として,

$$J_\lambda = (1 - \varpi)J_\lambda^{(a)} + \varpi J_\lambda^{(s)} = (1 - \varpi)B_\lambda(T) + \varpi J_\lambda^{(s)} \quad (2.34)$$

で与えられる. すなわち, 単散乱アルベド ϖ の値により, 吸収の放射源関数 $J_\lambda^{(a)}$ と散乱の放射源関数 $J_\lambda^{(s)}$ の寄与が決まる.

ビーア・ブーゲー・ランバートの法則

放射の射出がない場合 ($J_\lambda = 0$), 放射伝達方程式 (2.21) は,

$$\frac{dI_\lambda}{k_\lambda^e \rho ds} = -I_\lambda \quad (2.35)$$

と書ける. 今, 気柱の $s = 0$ 点に入射する放射輝度を $I_\lambda(0)$ としたとき, 気柱内を $s = s^*$ の距離を通過した放射の強度 $I_\lambda(s^*)$ は, (2.35) を積分して,

$$I_\lambda(s^*) = I_\lambda(0) \exp \left[- \int_0^{s^*} k_\lambda^e \rho ds \right] \quad (2.36)$$

となる. 気層は均質であるとし, 次式で定義される路程長,

$$u^* = \int_0^{s^*} \rho ds \quad (2.37)$$

を導入すると,

$$I_\lambda(s^*) = I_\lambda(0) \exp [-k_\lambda^e u^*] \quad (2.38)$$

を得る. この式は, 射出のない均質な吸収層を通過する放射輝度は指数関数的に減衰するところを表す. これを, 発見者の三者の連名で, ビーア・ブーゲー・ランバートの法則と呼ぶ.

また, 波長 λ の単色光線 I_λ が距離 $0 \sim s^*$ 間の気柱を通過する場合の透過率 t_λ は,

$$t_\lambda(0, s^*) \equiv \frac{I_\lambda(s^*)}{I_\lambda(0)} \quad (2.39)$$

と定義される. これは, (2.38) のビーア・ブーゲー・ランバートの法則により,

$$t_\lambda(0, s^*) = \exp [-k_\lambda^e u^*] \quad (2.40)$$

となる. (2.40) の関係式には方向に対する依存性は含まれていないので, 同様の指数関数型の減衰は, 均質な吸収層を透過する単色光の放射フラックスにも適用できる.

光学的厚さ

次に, 消散係数 k_λ^e と密度 ρ が場所場所で変わるような一般の気層における (2.35) の放射伝達を考える. ここで, k_λ^e と ρ との積を光路上の点 s_a と点 s_b の間で積分した量として定義される光学的厚さを $\tau_\lambda(s_a, s_b)$ と表記して導入する. すなわち,

$$\tau_\lambda(s_a, s_b) \equiv \int_{s_a}^{s_b} k_\lambda^e \rho ds \quad (2.41)$$

と定義する. これを導入すると, 解 (2.36) は,

$$I_\lambda(s^*) = I_\lambda(0) \exp [-\tau_\lambda(0, s^*)] \quad (2.42)$$

と書き直せる. この光路に沿った単色光の透過率 $t_\lambda(0, s^*)$ は,

$$t_\lambda(0, s^*) = \exp[-\tau_\lambda(0, s^*)] \quad (2.43)$$

と表すことができる. 大気が光学的に厚い場合, 大気を N 個の気層に分け, 各気層の光学的厚さを, $\tau_\lambda(0, s_1), \tau_\lambda(s_1, s_2), \dots, \tau_\lambda(s_{N-1}, s_N)$ としたとき, 大気全体の光学的厚さ $\tau_\lambda(0, s_N)$ は, 各気層の光学的厚さの和, すなわち,

$$\tau_\lambda(0, s_N) = \tau_\lambda(0, s_1) + \tau_\lambda(s_1, s_2) + \dots + \tau_\lambda(s_{N-1}, s_N) \quad (2.44)$$

で与えられる. したがって, 大気全層の透過率 $t_\lambda(0, s_N)$ は,

$$\begin{aligned} t_\lambda(0, s_N) &= \exp[-\tau_\lambda(0, s_N)] \\ &= t_\lambda(0, s_1) \cdot t_\lambda(s_1, s_2) \cdot \dots \cdot t_\lambda(s_{N-1}, s_N) \end{aligned} \quad (2.45)$$

となり, 各気層の透過率の積として与えられる.

第3章 放射平衡

3.1 放射平衡温度

ある物体が吸収するのと等量の放射エネルギーを射出して、正味の損得がない状態にあることを、その物体は放射平衡にあるといい、そのときの温度を放射平衡温度という。宇宙から見た地球は、気候系が定常であるならば、十分に長い時間で平均した場合に放射平衡にある。すなわち、地球が吸収する太陽放射エネルギーと宇宙へ放出している地球放射エネルギーとは釣り合っている。仮に、両者が釣り合っておらず、どちらかが大きいとすると、地球は全体として年々熱くなるか、あるいは冷えていくことになる。

ここで、地球放射を黒体放射と仮定して、地球の放射平衡温度を見積もる。放射平衡の状態は、ステファン・ボルツマンの法則を用いて次式のように書ける。

$$\pi R_e^2(1 - \alpha)S_0 = 4\pi R_e^2\sigma T_e^4 \quad (3.1)$$

ただし、 R_e は地球の半径、 S_0 は太陽定数、 α はアルベドである。上式の左辺は地球が吸収する太陽放射エネルギーを、右辺は地球の全表面から宇宙へ放出される黒体放射エネルギーを表す。(3.1) を整理して、 $S_0 = 1370 \text{ W m}^{-2}$ 、 $\alpha = 0.3$ 、 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ として^{*1}、 T_e の値を求めると、

$$T_e \simeq 255\text{K} \quad (3.2)$$

となる。

この地球の放射平衡温度 $T_e = 255 \text{ K}$ は標準大気の大気圏中層の温度に相当し、地表面の温度平均温度 288 K に比べて 33 K も低い。この差は地球大気の温室効果によってもたらされる。

^{*1}浅井正二, 2010 : 大気放射学の基礎より引用.

3.2 平行平面大気

平行平面大気の放射伝達方程式

地球大気は、局所的に見たとき水平方向の広がりに対して鉛直方向の厚さは薄いので、平板上の気層とみなすことができる。特に晴天大気の場合には、鉛直方向に比べて水平方向には温度や大気物質は比較的一様に分布しているので、このような大気層を水平方向には均質な薄い平板上の気層の重なりとして扱うことができる。この近似を平行平面大気近似と呼び、実用上多くの放射伝達計算に用いられている。ただし、この近似は、雲などの水平方向にも不均質な媒質内での放射伝達を問題にする場合には、そのまま適用することはできない。

水平方向に均質な平行平面大気での放射過程を考える場合には、大気層に垂直な天頂方向 z を基準にして、極座標 (θ, ϕ) を用いて放射の進行方向を表すと便利である。極座標系において θ 方向の微小距離は $ds = dz / \cos \theta$ と表示できることを考慮すると、放射伝達方程式 (2.21) は、

$$\frac{\cos \theta \cdot dI_\lambda(z; \theta, \phi)}{k_\lambda^e \rho dz} = -I_\lambda(z; \theta, \phi) + J_\lambda(z; \theta, \phi) \quad (3.3)$$

と書き表せる。ここで、

$$\mu \equiv \cos \theta \quad (3.4)$$

$$d\tau_\lambda \equiv -k_\lambda^e \rho dz \quad (3.5)$$

なる関係式で定義される方向余弦 μ および微小光学的厚さ $d\tau_\lambda$ を導入すると、(3.3) は、

$$\mu \frac{dI_\lambda(\tau; \mu, \phi)}{d\tau_\lambda} = I_\lambda(\tau; \mu, \phi) - J_\lambda(\tau; \mu, \phi) \quad (3.6)$$

と書き直せる。これが平行平面大気の放射伝達方程式の基本形である。

一般解

平行平面大気の放射伝達方程式 (3.6) の一般解を求める^{*2}。まず、大気層内の任意の光学的厚さ τ の高度 z における上向き放射強度を求める。(3.6) の両辺に $e^{-\tau/\mu}$

^{*2}(3.6) の一般解の詳しい導出は、付録 C を参照されたい。

をかけて、大気層の下端 ($\tau = \tau^*$) から考慮している高度 ($\tau = \tau$) まで光学的厚さについて積分すると、

$$I_\lambda(\tau : +\mu, \phi) = I_\lambda(\tau^* : +\mu, \phi) \exp \left[-\frac{(\tau^* - \tau)}{\mu} \right] + \int_\tau^{\tau^*} J_\lambda(t : +\mu, \phi) \exp \left[-\frac{(t - \tau)}{\mu} \right] \frac{dt}{\mu}, \quad (0 < \mu \leq 1) \quad (3.7)$$

を得る。ただし、 $I_\lambda(\tau^* : +\mu, \phi)$ は大気層の下端に上向きの方の (μ, ϕ) 方向に入射する放射輝度であり、境界条件により与えられる。右辺の第1項は入射光 $I_\lambda(\tau^* : +\mu, \phi)$ が減衰しながら考慮している高度まで達した分を表し、第2項は途中の各高度で (μ, ϕ) 方向に射出された放射が、距離に応じた減衰を受けながら $\tau = \tau$ まで達した分の総和を表す。

同様に、下向き放射輝度に対しては、

$$I_\lambda(\tau : -\mu, \phi) = I_\lambda(0 : -\mu, \phi) \exp \left[-\frac{\tau}{\mu} \right] + \int_0^\tau J_\lambda(t : -\mu, \phi) \exp \left[-\frac{(\tau - t)}{\mu} \right] \frac{dt}{\mu}, \quad (0 < \mu \leq 1) \quad (3.8)$$

と書くことができる。ただし、 $I_\lambda(0 : -\mu, \phi)$ は、考慮している大気層の上端に下向きの方の $(-\mu, \phi)$ 方向に入射する放射の強度を示し、境界条件によって与えられる。 $\tau = 0$ の高度として実際の大気の上端を取る場合には、そこへ入射する拡散放射はないので、 $I_\lambda(0 : -\mu, \phi) = 0$ としてよい。

現実の大気では、(3.7) および (3.8) の右辺の放射源関数を含む積分は、一般には解析的に解けない。特に、散乱過程が含まれている場合の放射源関数は、その中にあらゆる方向の放射輝度を含んでいるので、原理的にはすべての高度における放射輝度の解が得られた後でなければその値を知ることができない。つまり、散乱過程が含まれる場合には、任意高度の放射輝度に対して大気全層が影響を及ぼす。

放射による気層の加熱・冷却

3.2 節において平行平面大気の任意の高度 ($z = z(\tau)$) における上向きおよび下向きの放射輝度を求めた。(2.7) を参照すると、その高度における上向き放射フラックス $F_\lambda^\uparrow(z)$ および下向き放射フラックス $F_\lambda^\downarrow(z)$ は、これらの放射輝度の鉛直成分を積

分して,

$$F_{\lambda}^{\uparrow}(z) \int_0^{2\pi} \int_0^1 I_{\lambda}(\tau(z); +\mu, \phi) \mu d\mu d\phi \quad (3.9)$$

$$F_{\lambda}^{\downarrow}(z) \int_0^{2\pi} \int_0^1 I_{\lambda}(\tau(z); -\mu, \phi) \mu d\mu d\phi \quad (3.10)$$

で与えられる. 今, 上向き放射フラックス $F_{\lambda}^{\uparrow}(z)$ と下向き放射フラックス $F_{\lambda}^{\downarrow}(z)$ の差として正味の放射フラックス $F_{\lambda}^{\text{net}}(z)$ を定義すると, $F_{\lambda}^{\text{net}}(z) > 0$ の場合は高度 z の面を通した正味の上向き放射エネルギーの流量があることを意味する. 高度 z (光学的厚さ τ_{λ}) と $z + \Delta z$ ($\tau_{\lambda} + \Delta\tau_{\lambda}$) との間の厚さ Δz の気層をとり, この気層における放射エネルギーの出入りを考える. 気層の上面および下面を通した放射エネルギーの出入りの収支 $\Delta F_{\lambda}^{\text{net}}(z)$ は,

$$\begin{aligned} \Delta F_{\lambda}^{\text{net}}(z) &= [F_{\lambda}^{\uparrow}(z + \Delta z) - F_{\lambda}^{\downarrow}(z + \Delta z)] - [F_{\lambda}^{\uparrow}(z) - F_{\lambda}^{\downarrow}(z)] \\ &= F_{\lambda}^{\text{net}}(z + \Delta z) - F_{\lambda}^{\text{net}}(z) \end{aligned} \quad (3.11)$$

で与えられる. $\Delta F_{\lambda}^{\text{net}}(z)$ の値が正 (負) の場合, この気層内において正味としての上向き放射エネルギーの流出 (流入) があることに対応する. 放射エネルギーの流出は, 気層から熱エネルギーの一部が放射となって失われたことに相当し, これにより気層は冷却する. 他方, 流入した放射エネルギーは, 熱エネルギーに変換されて気層を加熱する. 波長範囲 $\lambda \sim \lambda + \Delta\lambda$ の放射の収束・発散に伴う気層の温度変化率は,

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{\Delta\lambda} = -\frac{1}{C_p \rho_a} \left(\frac{\Delta F_{\lambda}^{\text{net}}(z)}{\Delta z} \right) \Delta\lambda \quad (3.12)$$

で与えられる. ここで, C_p は気層の定圧比熱, ρ_a は空気の密度であり, (3.12) の右辺が正の場合が加熱, 負の場合が冷却を意味する.

灰色大気

平行平面大気における放射伝達の応用例として, 吸収係数 k_{λ}^e が波長によらず一定であり, 散乱のない, 局所熱力学平衡の状態にある灰色大気における放射伝達およびその温度分布について考える. いま, 短波に関して透明であるとする, この灰色大気における放射伝達方程式は,

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - B \quad (3.13)$$

である。さらに、上向き、下向きそれぞれで等方的に長波を放射しているとする、放射の出入りする断面積 $\cos \theta$ をかけて上下各半球の立体角で積分すると、

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^1 I^\uparrow 2\pi\mu^2 d\mu = \frac{2}{3} \frac{dI^\uparrow}{d\tau} = \frac{2}{3} \frac{dF^\uparrow}{d\tau} = F^\uparrow - \pi B, \quad (3.14)$$

$$-\frac{2}{3} \frac{dF^\downarrow}{d\tau} = F^\downarrow - \pi B \quad (3.15)$$

となる。

また、このような大気の放射平衡温度分布は以下のようにして求められる：まず、上式の和と差から、

$$\frac{2}{3} \frac{d}{d\tau} (F^\uparrow + F^\downarrow) = F^\uparrow - F^\downarrow, \quad (3.16)$$

$$\frac{2}{3} \frac{d}{d\tau} (F^\uparrow - F^\downarrow) = F^\uparrow + F^\downarrow - 2\pi B \quad (3.17)$$

が得られる。また、平衡状態にある大気は放射エネルギーのたまりがないので、

$$\frac{dF^{\text{net}}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (F^\uparrow - F^\downarrow) = 0, \quad (3.18)$$

$$\therefore F^\uparrow - F^\downarrow = F^{\text{net}} = \text{const.}$$

となる。(3.18) を用いると、(3.16) は積分でき、

$$F^\uparrow + F^\downarrow = \frac{3}{2} F^{\text{net}} \tau + C \quad (3.19)$$

を得る。大気上端では下向きの長波放射がなく、かつ、地球全体では入ってくる短波放射 J_0 と出て行く上向きの長波放射がバランスしているので、

$$F^\uparrow(0) = F^{\text{net}} = C = J_0 \quad (3.20)$$

となる。よって、(3.19) は、

$$F^\uparrow + F^\downarrow = J_0 \left(\frac{3}{2} \tau + 1 \right) \quad (3.21)$$

となる。さらに、平衡条件 (3.18) を用いると (3.17) は、

$$F^\uparrow + F^\downarrow = 2\pi B \quad (3.22)$$

となる。したがって、(3.21) は、

$$\pi B = \frac{J_0}{2} \left(\frac{3}{2} \tau + 1 \right) \quad (3.23)$$

となる。つまり、灰色放射平衡大気はプランク関数が光学的厚さの一次関数になるような温度分布となる。上下それぞれの放射フラックスは、

$$F^\uparrow = \frac{J_0}{2} \left(\frac{3}{2}\tau + 2 \right), \quad (3.24)$$

$$F^\downarrow = \frac{3}{4} J_0 \tau \quad (3.25)$$

である。

地面について、地面は長波放射に関して黒体として良く、その放射は地面に接している大気への上向き放射となっているので、(3.23) と (3.24) より、地面および大気下端からの黒体放射をそれぞれ B_g, B_a 、地面における光学的厚さを τ_g とすると、

$$\pi B_g = \frac{J_0}{2} \left(\frac{3}{2}\tau_g + 2 \right) = \pi B_a(\tau_g) + \frac{J_0}{2} \quad (3.26)$$

と書ける。つまり、地面の温度は地面直下の大気よりも温度が高い。これは、大気が日射に対して透明であり、赤外放射に対しては灰色であるという仮定からもたらされるものである。

吸収物質が静水圧平衡にある大気の密度、

$$\rho(z) = \rho_g e^{-z/H} \quad (3.27)$$

と同じように指数関数的に分布していると仮定する。そのとき、光学的厚さは、

$$\tau = \int_z^\infty k\rho(z)dz = k\rho_g H e^{-z/H} = \tau_g e^{-z/H} \quad (3.28)$$

となる。ゆえに、(3.23) は、

$$\pi B = \frac{J_0}{2} \left(\frac{3}{2}\tau_g e^{-z/H} + 1 \right) \quad (3.29)$$

となる。全波長と立体角で積分したプランク関数は温度の4乗の関数であるので、(3.29) より、任意の高度 z における温度は、

$$T(z) = \left[\frac{1}{\sigma} \frac{J_0}{2} \left(\frac{3}{2}\tau_g e^{-z/H} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{4}} \quad (3.30)$$

と表すことができる。

第4章 数値計算

4.1 概要

本研究において、大気の温度構造を理解する目的のもと、単純化した、灰色大気における鉛直1次元放射平衡モデルを構築し、その鉛直温度構造を求める。

具体的な設定および計算方法については次節で述べるとして、ここでは簡単に紹介する。まず、平行平面大気を仮定し、大気をいくつかの気層に分割する。次に、(3.7)および(3.8)を用いて、ある時刻における各層の放射輝度を計算し、そこから、放射フラックス、放射による気層の加熱・冷却を求める。それを時間発展させ、はじめに設定した大気上下端の正味の放射輝度の差を下回ったときに平衡に達したとみなし、そのときの各層の温度を平衡温度とする。

4.2 設定

仮定および境界条件

今回の数値計算において、以下の仮定および境界条件を適用する。

大気全般

- 平行平面大気
- 非散乱大気
- 局所熱力学的平衡の近似

- 大気層全体の高さは 50000 m
- 密度は指数関数的に分布 (スケールハイト 8000 m)
- 大気層下端の圧力は 1000 hPa
- 大気層上端の光学的厚さは 0.0

大気成分

- 吸収気体は水蒸気のみ

放射伝達

- 大気は太陽放射に対して透明
- 大気層上端からの赤外放射はない

平衡条件

- 大気上下端における正味の放射輝度の差が 0.01 未満

その他の条件

- 波長積分の範囲は $4 \mu\text{m} \sim 100 \mu\text{m}$
- 時間ステップの間隔は 8 h
- 各大気層の間隔は 1000 m

以上である.

方程式

放射平衡を計算する際には, 放射伝達方程式をはじめ, それから求まる放射輝度, また, 放射による気層の加熱・冷却の式なども利用している. 以下に, それらの式をまとめる.

放射伝達方程式：

$$\mu \frac{dI_\lambda(\tau : \mu, \phi)}{d\tau_\lambda} = I_\lambda(\tau : \mu, \phi) - J_\lambda(\tau : \mu, \phi) \quad (4.1)$$

上向きの放射輝度：

$$\begin{aligned} I_\lambda(\tau : +\mu, \phi) &= I_\lambda(\tau^* : +\mu, \phi) \exp \left[-\frac{(\tau^* - \tau)}{\mu} \right] \\ &+ \int_\tau^{\tau^*} J_\lambda(t : +\mu, \phi) \exp \left[-\frac{(t - \tau)}{\mu} \right] \frac{dt}{\mu}, \quad (0 < \mu \leq 1) \end{aligned} \quad (4.2)$$

下向きの放射輝度：

$$\begin{aligned} I_\lambda(\tau : -\mu, \phi) &= I_\lambda(0 : -\mu, \phi) \exp \left[-\frac{\tau}{\mu} \right] \\ &+ \int_0^\tau J_\lambda(t : -\mu, \phi) \exp \left[-\frac{(\tau - t)}{\mu} \right] \frac{dt}{\mu}, \quad (0 < \mu \leq 1) \end{aligned} \quad (4.3)$$

ある高度 z における光学的厚さ：

$$\tau(z) = \int_z^\infty k \rho dz' \quad (4.4)$$

ある高度 z における圧力：

$$p = \int_0^z \rho g dz' \quad (4.5)$$

光学的厚さ τ の気層の正味の放射フラックス：

$$F_\lambda^{\text{net}} = \pi [I_\lambda(\tau; +\mu) - I_\lambda(\tau; -\mu)] \quad (4.6)$$

放射による気層の加熱・冷却：

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{\Delta\lambda} = -\frac{1}{C_p \rho_a} \left(\frac{\Delta F_\lambda^{\text{net}}(z)}{\Delta z} \right) \Delta\lambda \quad (4.7)$$

それぞれの時間ステップにおける気層の温度変化：

$$T_{n+1} = T_n + \frac{\partial T}{\partial t} dt \quad (4.8)$$

以上である。なお、本研究で用いた変数や定数は表 4.1 にまとめた。

表 4.1: 本研究で用いた物理定数と変数表

重力加速度	g	9.8 m s^{-2}
太陽定数	S	1370 W m^{-2}
地球のアルベド	α	0.3
大気のスケーलハイト	H	8000 m
ステファン・ボルツマン定数	σ	$5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
プランク定数	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
ボルツマン定数	κ_B	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
大気の定圧比熱	C_p	$1.0 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
大気の花表面における密度	ρ_s	1.3 kg m^{-3}
水蒸気の花表面における密度	ρ_s^{ab}	$1.0 \times 10^{-2} \text{ kg m}^{-3}$
波長	λ	
光学的厚さ	τ	
花表面における光学的厚さ	τ_g	
大気上端から入射する短波放射	J_0	
吸収係数	k	
時間	t	
温度	T	
高度	z	

4.3 実験

設定

大気の初期温度分布, 赤外放射に対して一定の吸収係数を設定して一次元放射平衡モデル計算を行う. また, この実験において, 取り扱う大気については灰色大気を仮定しているので, 3.2 節で述べたように,

$$T(z) = \left[\frac{1}{\sigma} \frac{J_0}{2} \left(\frac{3}{2} \tau_g e^{-z/H} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{4}} \quad (3.30)$$

という形で, 解析的に鉛直温度分布を求めることができる. ただし, 今回の実験において, 大気上端からの短波放射 J_0 を, $J_0 = 240 \text{ W m}^{-2}$ とする. よって, 各条件における解析値と計算値を比較することで, モデルが鉛直温度構造を再現できていることを確認し, そのときの温度分布について考察する.

大気の初期温度分布として, 低温 160 K と高温 360 K の 2 種類, 吸収係数として $k_1 = 1.25 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$, $k_2 = 1.25 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$, $k_3 = 3.75 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$ の 3 種類, 合計 6 種類のモデルを model 1 ~ 6 とする. それぞれのモデルの条件については表 4.3 を参照されたい.

表 4.2: モデル

条件	160 K	360 K
$k_1 : 1.25 \times 10^{-3}$	model 1	model 2
$k_2 : 1.25 \times 10^{-2}$	model 3	model 4
$k_3 : 3.75 \times 10^{-2}$	model 5	model 6

結果

まず, 解析解について, 大気上端および地表面における温度を表 4.3 に, また, 解析解における鉛直温度分布を図 4.1 に示す.

これによると, 吸収係数 k の値が大きくなるに従って, 地表面における温度の値も大きくなっているのがわかる. 一方, 大気上端における温度の値に関しては, 地

表面付近から指数関数的に減少し, 3種類ともほぼ同じ温度の値に収束していることが認められる.

次に, model 1 ~ 6 それぞれの条件を適用して, 1次元放射平衡モデルを用いて計算を行い, 各条件における大気上端の温度, 地表面温度, および, 平衡到達時間を表 4.4, 4.5 に示し, また, 先ほどの解析値を合わせてグラフ化したものを, 図 4.2~4.4 に示す.

これによると, モデルのみを見た場合, どの吸収係数を設定した場合にも, 大気上端, および, 地表面における温度の値は各々一致しているのがわかる. また, 吸収係数の値を大きくするに従って地表面温度も上昇おり, 一方, 大気上端の温度については, どの吸収係数を設定した場合でもほぼ同じ温度を示す. モデルと解析値を比較した場合, 大気上端における温度は一致し, 地表面における温度に関しては, 吸収係数の値を大きくするに従って, その差も大きくなることが確認できる.

また, 平衡到達時間に関しては, 吸収係数の値が小さくなるに従って, その時間も大きくなり, 放射平衡に達するまでにかかる時間が増大していることがわかる.

表 4.3: 解析値

条件	$k_1 : 1.25 \times 10^{-3}$	$k_2 : 1.25 \times 10^{-2}$	$k_3 : 3.75 \times 10^{-2}$
大気上端の温度 [K]	214.5	214.6	214.9
地表面温度 [K]	222.1	269.7	328.5

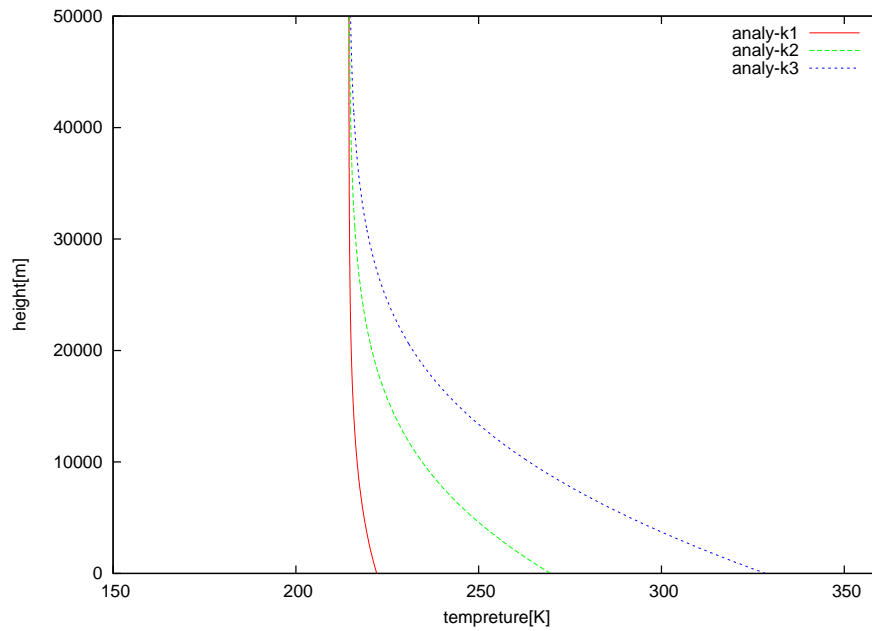


図 4.1: 解析値の温度構造.

表 4.4: 計算値 (160 K)

条件	$k_1 : 1.25 \times 10^{-3}$	$k_2 : 1.25 \times 10^{-2}$	$k_3 : 3.75 \times 10^{-2}$
大気上端の温度 [K]	214.5	214.6	214.7
地表面温度 [K]	220.0	254.9	302.6
平衡到達時間 [day]	2007.0	435.3	328.6

表 4.5: 計算値 (360 K)

条件	$k_1 : 1.25 \times 10^{-3}$	$k_2 : 1.25 \times 10^{-2}$	$k_3 : 3.75 \times 10^{-2}$
大気上端の温度 [K]	214.7	214.7	214.7
地表面温度 [K]	220.0	255.0	302.6
平衡到達時間 [day]	1992.0	400.3	283.0

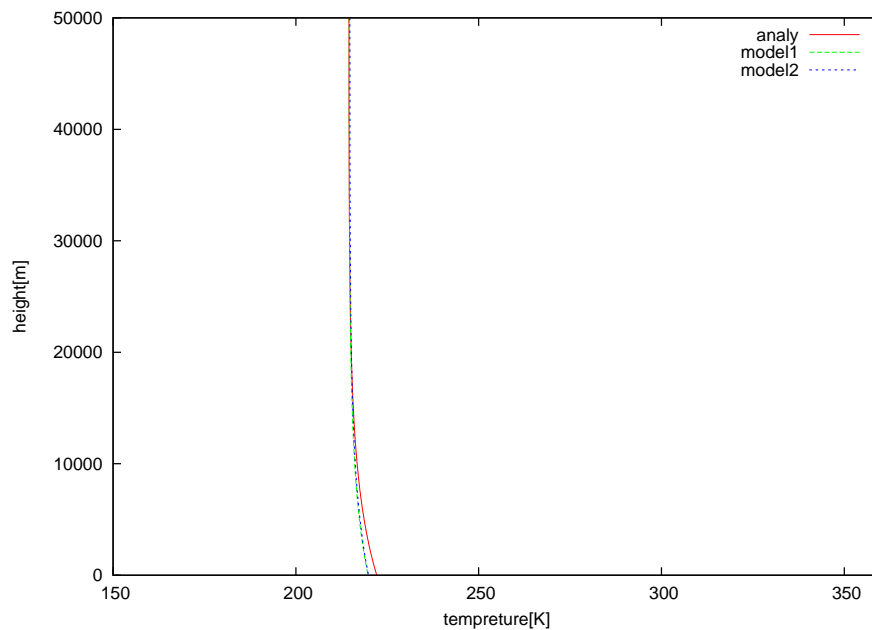


図 4.2: $k_1 = 1.25 \times 10^{-3}$ の場合の解析値と計算値.

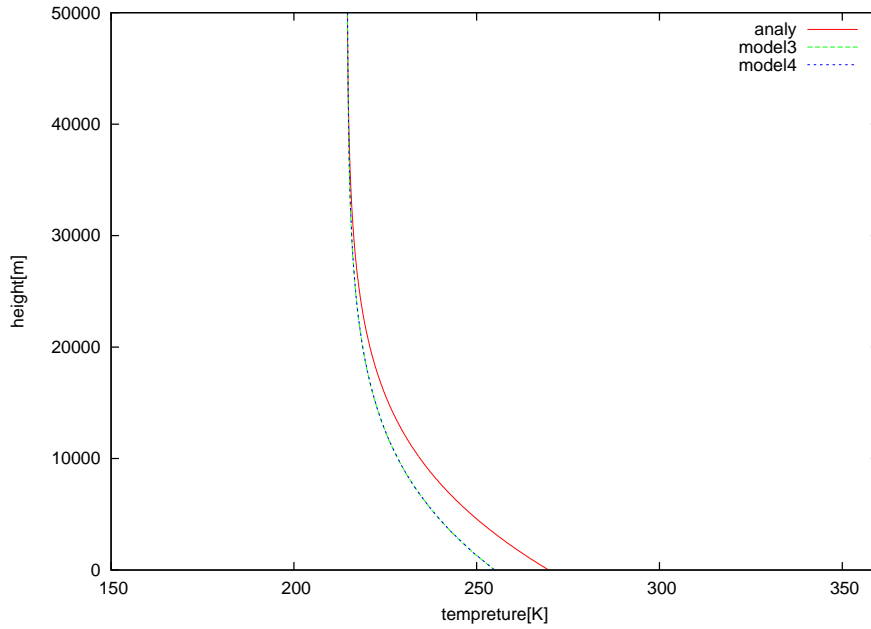


図 4.3: $k_2 = 1.25 \times 10^{-2}$ の場合の解析値と計算値.

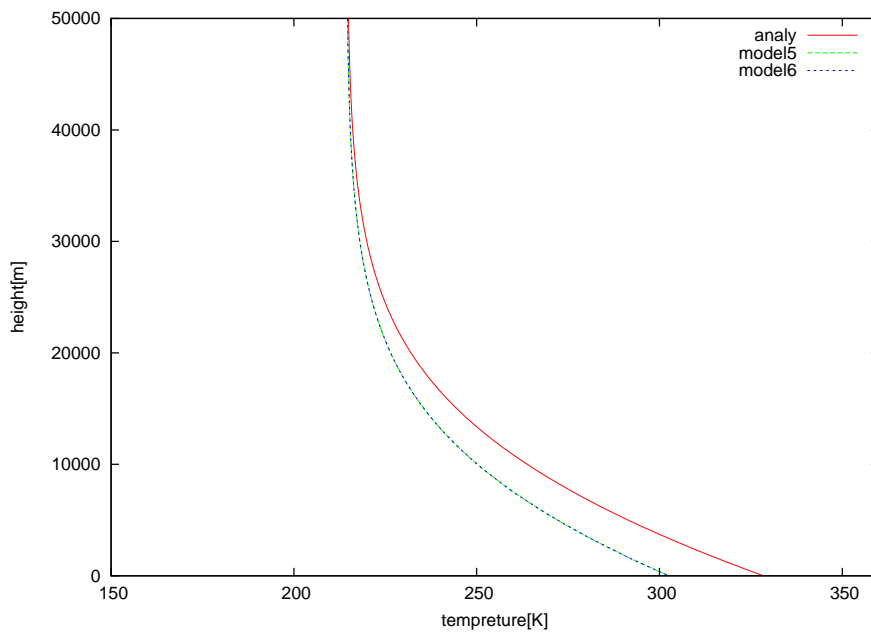


図 4.4: $k_3 = 3.75 \times 10^{-2}$ の場合の解析値と計算値.

考察

まず, 160 K, および, 360 K の等温大気を初期値として計算した結果, $k_1 \sim k_3$ のどの吸収係数を与えた場合にも, model 1 と 2, model 3 と 4, および, model 5 と 6 はそれぞれグラフが一致した. このことから, 平衡温度に正しく収束しているように見える. また, 放射平衡時間に関しては, 吸収係数の値が小さくなるに従って, その時間も増大している. これは, タイムステップあたりの各気層における放射フラックスの授受が小さいため, その温度変化も小さくなり, 結果として, 放射平衡に至るまでに時間がかかってしまうためであると考えられる.

次に, 解析値と計算値の鉛直温度分布を比較した結果については, 大気上端の温度に関しては互いに一致しているが, 逆に, 地表面付近の温度は一致せず, また, どの計算値も解析値に比べて小さくなっている. さらに, 設定する吸収係数の値を大きくするに従い, その誤差は大きくなっている. この誤差が発生する要因として, 数値計算を行う場合, 設定した大気層をいくつか分割して, 各層の放射フラックスの授受を計算しているが, 分割した大気層の幅が大きいと, 吸収係数の値を大きくするのに伴い, 各層の光学的厚さの差が大きくなりすぎ, 解析値に比べて必要以上に気層が冷やされてしまうと考えられる.

第5章 結論

地球に大気がないと仮定した場合の有効放射温度は 255 K であるが、実際の地球の地表面温度は 288 K であり、その差は吸収大気における温室効果が主な要因と考えられる。本研究においては、設定した条件における鉛直温度構造がどのような形になるのかを検証した。

小林英貴 (2012) を参考に、初期の温度分布を設定し、吸収係数が高度によらず一定である、単純化した大気、いわゆる灰色大気における放射平衡温度を数値計算によって求め、解析値との比較を行った。その結果、計算値において、平衡状態に達したときの鉛直温度分布は、同一の吸収係数の場合、初期の温度分布によらず、その温度構造は一致した。一方で、計算値と解析値とを比較した場合、同一の吸収気体においては、大気上端の温度は一致するが、地表面の温度は、どの吸収係数を設定した場合でも解析値よりも小さい値を示し、かつ、その誤差は吸収係数の値が大きいくほど、顕著になることが確認された。これは、大気層を分割した際の各層の幅が大きすぎることが原因として考えられ、この放射平衡モデルは不完全であることが示唆している。

今回は、吸収気体に関しては水蒸気のみとし、また、対流過程も加味しなかった。しかし、実際の大気は、吸収気体として他に二酸化炭素やオゾンなどが挙げられ、さらには、対流も存在している。従って、これらの効果を追加することによって、より実際の鉛直温度構造に近いものが得られると推測される。

付録

付録 A : ウィーンの変位則 (2.11) の導出

ウィーンの変位則 (2.11) の導出を行う. まず, プランク関数 (2.9) を波長 λ について微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{dB_\lambda(T)}{d\lambda} &= 2hc^2 \left[-\frac{5}{\lambda^6 \{\exp(hc/\kappa_B\lambda T) - 1\}} + \frac{1}{\lambda^6} \frac{hc}{\kappa_B\lambda T} \frac{\exp(hc/\kappa_B\lambda T)}{\{\exp(hc/\kappa_B\lambda T) - 1\}^2} \right] \\ &= \frac{2hc^2}{\lambda^6 \{\exp(hc/\kappa_B\lambda T) - 1\}} \left[\frac{hc}{\kappa_B\lambda T} \frac{\exp(hc/\kappa_B\lambda T)}{\exp(hc/\kappa_B\lambda T) - 1} - 5 \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

となる. $\lambda = \lambda_{\max}$ のとき, プランク関数が極大値をとるとすると,

$$\begin{aligned} \left. \frac{dB_\lambda(T)}{d\lambda} \right|_{\lambda_{\max}} &= \frac{2hc^2}{\lambda_{\max}^6 \{\exp(hc/\kappa_B\lambda_{\max}T) - 1\}} \left[\frac{hc}{\kappa_B\lambda_{\max}T} \frac{\exp(hc/\kappa_B\lambda_{\max}T)}{\exp(hc/\kappa_B\lambda_{\max}T) - 1} - 5 \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

とならなければならない. ここで,

$$x = \frac{hc}{\kappa_B\lambda_{\max}T} \quad (5.3)$$

とすると, (5.2) より,

$$\begin{aligned} \frac{xe^x}{e^x - 1} - 5 &= 0 \\ x &= 5 - 5e^{-x} \\ &= W(-5e^{-5}) + 5 \\ &\approx 4.96511 \dots \end{aligned} \quad (5.4)$$

となる. ここで, W はランベルトの W 関数である. 以上より,

$$\begin{aligned}\lambda_{\max} &= \frac{hc}{\kappa_B x T} \\ &= \frac{2897}{T} \mu\text{m}\end{aligned}\tag{5.5}$$

となり, ウィーンの変位則が導けた.

付録 B : ステファン・ボルツマンの法則 (2.13) の導出

ステファン・ボルツマンの法則 (2.13) の導出を行う. 黒体面から射出される放射輝度を全波長にわたって積分した値 $B(T)$ は,

$$\begin{aligned} B(T) &= \int_0^{\infty} B_{\lambda}(T) d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} \frac{2hc^2}{\lambda^5 \{\exp(hc/\kappa_B \lambda T) - 1\}} \end{aligned} \quad (5.6)$$

と表せる. ここで, $x = hc/\kappa_B \lambda T$ とおくと, (5.6) は,

$$\begin{aligned} B(T) &= \frac{2\kappa_B^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \\ &= \frac{2\kappa_B^4 T^4}{h^3 c^2} \Gamma(4) \zeta(4) \\ &= \frac{2\kappa_B^4 T^4}{h^3 c^2} \cdot 6 \cdot \frac{\pi^4}{90} \\ &= \frac{2\kappa_B^4 \pi^4}{15 h^3 c^2} T^4 \end{aligned} \quad (5.7)$$

と書ける. (5.7) は T^4 に比例していることがわかる. なお, 上式において, ガンマ関数を用いたリーマンゼータ関数の定義式,

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du \quad (5.8)$$

を用いた. 以上より, ステファン・ボルツマンの法則が導出できた.

付録 C : 平行平面大気における放射伝達方程式の一般解の導出

平行平面大気における放射伝達方程式の基本形である,

$$\mu \frac{dI_\lambda(\tau : \mu, \phi)}{d\tau_\lambda} = I_\lambda(\tau : \mu, \phi) - J_\lambda(\tau : \mu, \phi) \quad (3.6)$$

を用いて, 上向き放射輝度 (3.7), および下向き放射輝度 (3.8) の導出を行う.

まず, (3.6) の両辺に $e^{-\tau/\mu}$ をかけて, 整理すると,

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI_\lambda(\tau : \mu, \phi)}{d\tau_\lambda} e^{-\frac{\tau}{\mu}} &= I_\lambda(\tau : \mu, \phi) e^{-\frac{\tau}{\mu}} - J_\lambda(\tau : \mu, \phi) e^{-\frac{\tau}{\mu}} \\ \frac{dI_\lambda(\tau : \mu, \phi)}{d\tau_\lambda} e^{-\frac{\tau}{\mu}} &= \frac{1}{\mu} I_\lambda(\tau : \mu, \phi) e^{-\frac{\tau}{\mu}} - \frac{1}{\mu} J_\lambda(\tau : \mu, \phi) e^{-\frac{\tau}{\mu}} \\ \frac{dI_\lambda(\tau : \mu, \phi)}{d\tau_\lambda} e^{-\frac{\tau}{\mu}} + \frac{de^{-\frac{\tau}{\mu}}}{d\tau_\lambda} I_\lambda(\tau : \mu, \phi) &= -\frac{1}{\mu} J_\lambda(\tau : \mu, \phi) e^{-\frac{\tau}{\mu}} \\ \frac{d}{d\tau_\lambda} \left[I_\lambda(\tau : \mu, \phi) e^{-\frac{\tau}{\mu}} \right] &= -\frac{1}{\mu} J_\lambda(\tau : \mu, \phi) e^{-\frac{\tau}{\mu}} \end{aligned} \quad (5.9)$$

となる. さらに, 大気層下端 ($\tau = \tau^*$) から考慮している高度 ($\tau = \tau$) まで光学的厚さについて積分して, 整理すると,

$$\begin{aligned} \left[I_\lambda(t : \mu, \phi) e^{-\frac{t}{\mu}} \right]_{\tau^*}^{\tau} &= - \int_{\tau^*}^{\tau} J_\lambda(t : \mu, \phi) e^{-\frac{t}{\mu}} \frac{dt}{\mu} \\ I_\lambda(\tau : \mu, \phi) e^{-\frac{\tau}{\mu}} &= I_\lambda(\tau^* : \mu, \phi) e^{-\frac{\tau^*}{\mu}} + \int_{\tau}^{\tau^*} J_\lambda(t : \mu, \phi) e^{-\frac{t}{\mu}} \frac{dt}{\mu} \\ I_\lambda(\tau : +\mu, \phi) &= I_\lambda(\tau^* : +\mu, \phi) e^{-\frac{\tau^* - \tau}{\mu}} + \int_{\tau}^{\tau^*} J_\lambda(t : +\mu, \phi) e^{-\frac{t - \tau}{\mu}} \frac{dt}{\mu} \end{aligned} \quad (5.10)$$

となり, 上向き放射輝度 (3.7) が導出できた. また, 同様に, (5.9) に対して, 大気層上端 ($\tau = 0$) から考慮している高度 ($\tau = \tau$) まで光学的厚さについて積分して, 整理すると,

$$\begin{aligned} \left[I_\lambda(t : \mu, \phi) e^{-\frac{t}{\mu}} \right]_0^{\tau} &= - \int_0^{\tau} J_\lambda(t : \mu, \phi) e^{-\frac{t}{\mu}} \frac{dt}{\mu} \\ I_\lambda(\tau : \mu, \phi) e^{-\frac{\tau}{\mu}} &= I_\lambda(0 : \mu, \phi) - \int_0^{\tau} J_\lambda(t : \mu, \phi) e^{-\frac{t}{\mu}} \frac{dt}{\mu} \\ I_\lambda(\tau : \mu, \phi) &= I_\lambda(0 : \mu, \phi) e^{\frac{\tau}{\mu}} - \int_0^{\tau} J_\lambda(t : \mu, \phi) e^{-\frac{t - \tau}{\mu}} \frac{dt}{\mu} \\ I_\lambda(\tau : -\mu, \phi) &= I_\lambda(0 : -\mu, \phi) e^{-\frac{\tau}{\mu}} + \int_0^{\tau} J_\lambda(t : -\mu, \phi) e^{-\frac{\tau - t}{\mu}} \frac{dt}{\mu} \end{aligned} \quad (5.11)$$

となり, 下向き放射輝度 (3.8) が導出できた.

以上より, 平行平面大気における放射伝達方程式の一般解が導出できた.

謝辞

本論文の作成にあたり, 林祥介教授および岩山准教授には研究内容についての方針を示して頂き, また, 高橋准教授にはモデル構築の際にアドバイスやコメント等を頂き, ここに厚く御礼申し上げます.

また, 様々なご指導頂いた地球および惑星大気科学研究室の皆様, ここに感謝の意を表する.

参考文献

- 会田勝, 1954: 気象学のプロムナード 8 大気と放射過程-大気の熱源と放射収支を探る-, 東京堂出版, 280pp.
- 浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎, 朝倉書店, 267pp.
- 小林英貴, 2012: 1次元放射平衡モデルによる大気の鉛直温度構造の考察, 44pp