

傾圧不安定における Green 問題の研究

宮階 悠

2017/2/16

要旨

本論文では, Green(1960) と Hirota(1968) を参考に中緯度大気によく見られる温帯低気圧の成因, つまり傾圧不安定論を研究する. まず, 非粘性, 断熱を仮定した準地衡流渦位方程式を導出する. その際, 使用する Boussinesq 方程式は渦位方程式の導出の手前で導出する. 次に導出した渦位方程式を用いて, Eady 問題を解くため, Eady 問題特有の境界条件に沿った式変形を行い, その式によって得られる摂動の安定性を調べる. 最後に本題に立ち返り, 考える系の境界条件を記述し, それに合わせて, 式の変形も行う. こうして導かれた方程式に波動解を仮定し, 与えられた摂動が不安定となる条件を調べ, 考察する.

目次

第 1 章	序論	4
第 2 章	基礎方程式系	5
2.1	Boussinesq 方程式系	5
2.2	準地衡流渦位方程式	9
第 3 章	Eady 問題についての考察	17
3.1	Eady 問題の設定	17
3.2	基礎方程式系	17
3.3	解の導出	19
第 4 章	Green(1960) の傾圧不安定論についての考察	30
4.1	Green(1960) の設定	30
4.2	摂動の方程式	30
4.3	モデル	33

	3
4.4	方程式の離散化 33
4.5	固有値の計算 37
4.6	計算結果 39
第 5 章	結論 45
付録 A	Green(1960) 全訳 47
謝辞	65
参考文献	66

第 1 章

序論

本論文で取り扱う傾圧不安定論とは、”温帯低気圧の発生、発達をもたらす偏西風波動は、傾圧不安定 (baroclinic instability) とよばれる仕組みによって生じている。低緯度と高緯度の温度差が大きくなると、温度風の関係により上空に非常に強い偏西風が吹くようになる。しかし、このような状態は安定ではなく、偏西風は波を打ち、蛇行するようになる。この波が傾圧不安定波 (baroclinic wave) である^{*1}。”

このように中緯度地域における温帯低気圧の発達に影響を及ぼす傾圧不安定の仕組みを知り、不安定波の成長率を知ることは今日の気象現象の理解をより一層深めてくれるであろう。

傾圧不安定性に伴う不安定波の発達条件を調べ、その成長率が最も大きくなるファクタを調べる。そのために必要な支配方程式として、準地衡流渦位方程式の導出のため、2章では1節で Boussinesq 方程式系を導出し、その方程式系を用いて2節では準地衡流渦位方程式を導出した。3章では本題に入る前に Eady 問題を解き、その結果について考察をした後、4章で本題となる GREEN モードについて考察をする。最後に、6章で本研究全体を通しての結論を示す。

^{*1} 東京学芸大学気象学研究室: <http://kishou.u-gakugei.ac.jp/lectures/basic/doc10.pdf>

第 2 章

基礎方程式系

2.1 Boussinesq 方程式系

2.1.1 Boussinesq 流体

Boussinesq 流体とは, 熱膨張による密度変化よりも圧力変化に伴う膨張, 収縮による密度変化はるかに小さく, それが無視できると仮定された流体である. この流体についての方程式系では密度変化が運動に影響するのは重力に比例した浮力としてのみである. 以下の節ではこの Boussinesq 近似を施した Boussinesq 方程式を導出する.

2.1.2 Boussinesq 方程式の導出

系の設定

本論文で取り扱う系として β 平面において非粘性流体の断熱的な運動を設定する.

水平方向の運動方程式

β 平面上での水平方向の運動方程式は, Navier-Stokes 方程式から

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$\frac{Du}{Dt} + fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.2)$$

である. ここで, (2.1), (2.2) はそれぞれ東西方向, 南北方向を表し, u は東西流速, v は南北流速, p は圧力, ρ は密度, f はコリオリパラメータ, ν は粘性率である. ただし, 非粘性流体を考えるため, $\nu = 0$ であるので粘性項はゼロになる. また, 各物理量を (2.1), (2.2) の成り立つある静止した基準状態におけるものとその基準状態からのずれ (擾乱) におけるものに線形的に分けると次のようになる:

$$\begin{cases} u = \bar{u} + u_* \\ v = \bar{v} + v_* \\ p = \bar{p} + p_* \\ \rho = \bar{\rho} + \rho_* \end{cases} \quad (2.3)$$

さらに基準状態における流速は $\bar{u} = 0$, $\bar{v} = 0$ となり, 密度 $\bar{\rho}$ は高度 z に依存せず定数として扱うことができる. (2.3) を (2.1), (2.2) に代入すると, それぞれ

$$\frac{Du_*}{Dt} - fv_* = -\frac{1}{\bar{\rho} + \rho_*} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + p') \quad (2.4)$$

$$\frac{Du_*}{Dt} + fv_* = -\frac{1}{\bar{\rho} + \rho_*} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p} + p') \quad (2.5)$$

となる. 基準状態においても (2.1), (2.2) が成立しているので

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{p} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \bar{p} = 0 \quad (2.7)$$

となる. 以上 (2.4), (2.6) より, 擾乱についての水平方向の運動方程式は近似的に

$$\frac{Du_*}{Dt} - fv_* = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p_*}{\partial x} \quad (2.8)$$

$$\frac{Dv_*}{Dt} + fv_* = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p_*}{\partial y} \quad (2.9)$$

と表現できる.

鉛直方向の運動方程式

鉛直方向の運動方程式についても Navier-Stokes 方程式を出発点とする:

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} p - g \quad (2.10)$$

ここで, w は鉛直流速, g は重力加速度, $\nu = 0$ であり, 粘性項はゼロになる. また (2.3) と同様に鉛直流速 w も線形化し, (2.3) に $w = \bar{w} + w_*$ を追加し,

$$\begin{cases} u &= \bar{u} + u_* \\ v &= \bar{v} + v_* \\ w &= \bar{w} + w_* \\ p &= \bar{p} + p_* \\ \rho &= \bar{\rho} + \rho_* \end{cases} \quad (2.11)$$

とする. さらに基準状態での流速は $\bar{w} = 0$ であるため, (2.11) を (2.10) に代入し,

$$\frac{Dw_*}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p} + p_*) - \frac{\bar{\rho} + \rho_*}{\rho} g \quad (2.12)$$

となる. ここで, 基準状態においても (2.10) が成立しているので,

$$-\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \bar{p} - g = 0 \quad (2.13)$$

となる. これは静水圧平衡の関係式である. (2.13) を (2.12) に適応すると, 擾乱についての鉛直方向の運動方程式は

$$\frac{Dw_*}{Dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} p_* - \frac{\rho_*}{\bar{\rho}} g \quad (2.14)$$

となる^{*1}.

^{*1} (2.14) を導出する. (2.12) を変形し,

$$\begin{aligned} \frac{Dw_*}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p} + p_*) - \frac{\bar{\rho} + \rho_*}{\rho} g \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \bar{p} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} p_* - \frac{\bar{\rho}}{\rho} g - \frac{\rho_*}{\rho} g \\ &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \bar{p} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} p_* - g - \frac{\rho_*}{\bar{\rho}} g \end{aligned} \quad (2.F1.1)$$

とする. ここで, (2.F1.1) の第 1 項と第 3 項は (2.13) よりゼロであるので, (2.14) は導かれた.

連続の式

連続の式は一般的に,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.15)$$

と表される. (2.15) に (2.11) を代入すると,

$$\frac{1}{\rho} \frac{D}{Dt} (\bar{\rho} + \rho_*) + \nabla \cdot \mathbf{v}_* = 0 \quad (2.16)$$

となる. ここで, 基準状態は密度が一様で静止した状態のため, $\partial \bar{\rho} / \partial t = 0$ であり, また擾乱の密度の時間変化は小さいものとして無視すると,

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_* = 0 \quad (2.17)$$

が得られる.

熱力学方程式

断熱な系における流体の運動を考えるため, 熱力学方程式は

$$\frac{D}{Dt} \theta = 0 \quad (2.18)$$

と書ける. ここで, θ は温位である. 温位 θ を線形的に基準状態と擾乱に分けると

$$\theta = \bar{\theta} + \theta_* \quad (2.19)$$

となり, (2.19) を (2.18) に代入すると,

$$\frac{D}{Dt} (\bar{\theta} + \theta_*) = 0 \quad (2.20)$$

となる. 基準状態の温位 $\bar{\theta}$ は高度 z の関数であることを考慮すると,

$$\frac{D}{Dt} \theta_* + w_* \frac{d\bar{\theta}}{dz} = 0 \quad (2.21)$$

を得る.

2.1.3 まとめ

以上より, Boussinesq 方程式系は以下の 5 つである^{*2}:

$$\text{東西方向の運動方程式: } \frac{Du_*}{Dt} + fv_* = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p_*}{\partial x}, \quad (2.22)$$

$$\text{南北方向の運動方程式: } \frac{Dv_*}{Dt} + fv_* = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p_*}{\partial y}, \quad (2.23)$$

$$\text{鉛直方向の運動方程式: } \frac{Dw_*}{Dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} p_* - \frac{\rho_*}{\bar{\rho}} g, \quad (2.24)$$

$$\text{連続の式: } \nabla \cdot \mathbf{v}_* = 0, \quad (2.25)$$

$$\text{熱力学方程式: } \frac{D}{Dt} \theta_* = -w_* \frac{d\bar{\theta}}{dz}. \quad (2.26)$$

2.2 準地衡流渦位方程式

2.2.1 系の設定

中緯度大気の空間スケールの大きな運動には地衡流平衡が近似的に成り立っている。これは水平方向の流れの地衡流成分が非地衡流成分より大きいからである。この条件を用いて、総観規模程度の現象を記述するのに適切な方程式系を近似的に導く。

本節での各物理量のスケールは以下のように設定する:

- 水平方向の
 - 長さスケールは $L \approx 10^6$ m
 - 速度スケールは $U \approx 10$ m/s
- 鉛直方向の
 - 長さスケールは $H \approx 10^4$ m

^{*2} 次章からは利便性のためにアスタリスクを省略して表記する。

- 中緯度地域におけるコリオリパラメータについて
 - コリオリパラメータ $f_0 \approx 10^{-4}$ /s
 - コリオリパラメータの緯度勾配は $\beta \approx 10^{-11}$ m/s

基礎方程式系

出発点は Boussinesq 方程式系である:

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.27)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2.28)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho}{\bar{\rho}} g, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = -w \frac{d\bar{\theta}}{dz}, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho} g. \quad (2.32)$$

この時, 物質微分は

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

である. また, f はコリオリパラメータであり,

$$f = f_0 + \beta y \quad (2.33)$$

とする. ここで, $f_0 = 2\Omega \sin \phi_0$ である. β はコリオリパラメータの緯度勾配である. さらに, 地衡流平衡が成り立っているとするので,

$$\begin{cases} u_g &= -\frac{1}{\bar{\rho} f_0} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ v_g &= \frac{1}{\bar{\rho} f_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \end{cases} \quad (2.34)$$

である. ここで, 上式の u_g と v_g の間には次のような関係があることがわかる:

$$\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0. \quad (2.35)$$

(7) より, これらを流線関数 ψ_g を使って

$$\begin{cases} u_g &= -\frac{\partial\psi_g}{\partial y}, \\ v_g &= \frac{\partial\psi_g}{\partial x}, \end{cases} \quad (2.36)$$

と表すことができる. また, p に関しても同様に流線関数を用いて次のように表しておく:

$$p = \bar{\rho} f_0 \psi. \quad (2.37)$$

2.2.2 導出の準備

地衡流的相対渦度は (2.34) より,

$$\zeta_g \equiv \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{1}{\bar{\rho} f} \nabla_h^2 \cdot p \quad (2.38)$$

である.

次に, スケーリング解析を行う.

$$\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \sim \frac{U}{L} \quad (2.39)$$

鉛直方向成分については連続の式 (2.30) より, 単純に $w \sim UH/L$ としたいところだが, 水平非発散であることから, U/L は非常に小さな値を示す. そのため, $w \sim RoUH/L$ とすることにより, 大きさのバランスをとる^{*3}. ここで, Ro はロスビー数 U/fL であり, 小

^{*3} ここで, 大まかな数値を代入し, ロスビー数をスケールする. 鉛直方向成分については連続の式 (2.30) から単純に $w \sim UH/L$ とした場合,

$$w = \frac{H}{L} U \approx \frac{10^4}{10^6} \cdot 10 = 10^{-1} \text{ m/s} \quad (2.F3.1)$$

であるが,

$$\frac{U}{L} \approx \frac{10}{10^6} = 10^{-5} \text{ /s} \quad (2.F3.2)$$

であるため, $w \sim RoUH/L$ とする. この時, ロスビー数 Ro は

$$Ro \sim \frac{U}{fL} \approx \frac{10}{10^{-4} \cdot 10^6} = 10^{-1} \quad (2.F3.3)$$

である.

さい量であるので, 今回は無視できる. また, 水平方向の速度を地衡流とその他のものに分けると

$$\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_g + Ro\mathbf{v}_a \quad (2.40)$$

となる. よって, Ro の最低次のオーダーで物質微分は

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla_h = \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} \equiv \left(\frac{D}{Dt} \right)_g \quad (2.41)$$

となる.

総観規模現象では, 鉛直方向には基準状態からの摂動もまた静水圧平衡が成り立つため, (2.29) は

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\bar{\rho}\theta}{\bar{\theta}} g \quad (2.42)$$

と書ける*4.

準地衡における熱力学の式は, (2.31) を (2.41) を適応することで,

$$\left(\frac{D\theta}{Dt} \right)_g = -w \frac{\bar{\theta}}{g} N^2 \quad (2.43)$$

と書くことができる. ここで, $N^2 = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz}$ である.

(2.40) と (2.41) を (2.27) と (2.28) に適応し, 地衡流平衡を考慮し, 書き換えると,

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial u_g}{\partial y} - \beta y v_g - f_0 v_a = 0 \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial v_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial v_g}{\partial y} + \beta y v_g + f_0 u_a = 0 \quad (2.45)$$

*4 Boussinesq 方程式系における基準状態の温位と密度の関係は,

$$\bar{\theta} = c\bar{\rho} \quad (2.F4.1)$$

である. ここで, c は正の比例定数であり, $K/(\text{kg}/\text{m}^3)$ の次元を持つ. しかし, 摂動に関しては

$$\bar{\theta} = -c\bar{\rho} \quad (2.F4.2)$$

の関係を持つ. これは基準状態の温位 $\bar{\theta}$, 密度 $\bar{\rho}$ が正定値であるのに対して, 摂動の温位 $\bar{\theta}$, 密度 $\bar{\rho}$ に関しては, 周囲より軽いパーセル ($\bar{\rho} < 0$) は温かい ($\bar{\theta} > 0$) となり, c には不符号がつく.

となる^{*5}. さらに (2.40) を (2.30) に代入すると, 地衡流は非発散であるので,

$$\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.46)$$

となる.

以上をまとめると, Boussinesq 方程式系は次の 5 つの式に変形された:

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial u_g}{\partial y} - \beta y v_g - f_0 v_a = 0, \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial v_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial v_g}{\partial y} + \beta y u_g + f_0 u_a = 0, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\bar{\rho} \theta}{\bar{\theta}} g, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.50)$$

$$\left(\frac{D\theta}{Dt} \right) = -w \frac{\bar{\theta}}{g} N^2. \quad (2.51)$$

^{*5} (2.44), (2.45) を導出する. 地衡流平衡の関係式 (2.35) をベクトル表記すると,

$$\mathbf{v}_g = \frac{1}{\bar{\rho} f_0} \mathbf{k} \times \nabla_h p \quad (2.F5.1)$$

である. さらに, (2.41) を適応した (2.27) と (2.28) もベクトル表記にすると,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla_h \right) \mathbf{v}_g + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla_h \right) \mathbf{v}_a + f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_g + f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_a = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla_h p \quad (2.F5.2)$$

である. 地衡流平衡の関係式 (2.F5.1) を用いて, (2.F5.2) を $O(Ro)$ の範囲内で見積もると,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla_h \right) \mathbf{v}_g + \beta y \mathbf{k} \times \mathbf{v}_g + f_0 \mathbf{k} \times \mathbf{v}_a = 0 \quad (2.F5.3)$$

となる. ここで, $f = f_0 + \beta y$ であり, (2.F5.2) の左辺第 2 項は $O(Ro)$ 程度と見積もれるので, 近似的に無視できるとわかる. よって (2.44), (2.45) が得られた.

2.2.3 準地衡流渦位方程式の導出

まず, 準地衡流渦度方程式を導出する. (2.48) を x で偏微分した式から (2.47) を y で偏微分した式を引くと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + \left(u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \\ + \beta v_g + f_0 \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

であり*6, (2.35), (2.38), (2.50) から準地衡流渦度方程式は

$$\begin{aligned} \left(\frac{D\zeta_g}{Dt} \right)_g + \beta v_g = -f_0 \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) \\ = f_0 \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.53)$$

となる. これが準地衡流渦度方程式である. さらに, (2.51) から

$$\left(\frac{D\zeta_g}{Dt} \right)_g + \beta v_g = -\frac{f_0 g}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{D}{Dt} \left(\frac{\theta}{\bar{\theta}} \right) \right)_g \right\} \quad (2.54)$$

*6 (2.52) を導出する. まず, (2.48) を x で偏微分した式は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial v_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial v_g}{\partial y} + \beta y u_g + f_0 u_a \right) = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} v_g + u_g \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_g + v_g \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} v_g + \beta \frac{\partial u_g}{\partial x} + f_0 \frac{\partial}{\partial x} u_a = 0 \end{aligned} \quad (2.F6.1)$$

である. 次に, (2.47) を y で偏微分した式は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial u_g}{\partial y} - \beta y v_g - f_0 v_a \right) = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t} u_g + u_g \frac{\partial}{\partial x} u_g + v_g \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_g - \beta v_g - \beta \frac{\partial v_g}{\partial y} - f_0 v_a = 0 \end{aligned} \quad (2.F6.2)$$

である. 最後に, (2.F4.1) から (2.F4.2) を引くと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + \left(u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \\ + \beta v_g + \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) + f_0 \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.F6.3)$$

となる. ここで, (??) の左辺第 3 項, 第 5 項は (2.35) より, ゼロになる. よって, (2.52) が導かれた.

となり, この式を変形すると,

$$\left(\frac{D\zeta_g}{Dt}\right)_g + \beta v_g = -\frac{f_0 g}{N^2} \left[\left(\frac{D}{Dt}\right)_g \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\theta}{\bar{\theta}} \right) \right\} + \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial z} \cdot \nabla_h \left(\frac{\theta}{\bar{\theta}} \right) \right] \quad (2.55)$$

$$= -\left(\frac{D}{Dt}\right)_g \left\{ \frac{f_0 g}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\theta}{\bar{\theta}} \right) \right\} \quad (2.56)$$

となる^{*7}. よって導かれた式

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_g \left\{ \zeta_g + \beta y + \frac{f_0 g}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\theta}{\bar{\theta}} \right) \right\} = 0 \quad (2.57)$$

を準地衡流渦位方程式, また左辺の中括弧の中を準地衡流渦位と呼ぶ. 地衡流的相対渦度の定義 (2.38) と静水圧平衡の式 (2.42) を用いて^{*8}, (2.57) を圧力 p のみで表現すると,

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)_g \left(\nabla_h^2 \cdot p + \beta y + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (2.58)$$

^{*7} (2.56) を導出する. つまり, (2.55) から (2.56) の変形について記述する. ここで, (2.55) の右辺の大括弧内の第 2 項について,

$$\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (u_g, v_g) \quad (2.F7.1)$$

$$= \frac{1}{\bar{\rho} f_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (2.F7.2)$$

$$= \frac{1}{\bar{\rho} f_0} \mathbf{k} \times \nabla_h \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.F7.3)$$

$$= \frac{1}{\bar{\rho} f_0} \mathbf{k} \times \nabla_h \left(\frac{\bar{\rho} \theta}{\bar{\theta} g} \right) \quad (2.F7.4)$$

$$= \frac{g}{f_0 \bar{\theta}} \mathbf{k} \times \nabla_h \theta \quad (2.F7.5)$$

と変形できることから,

$$\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial z} \cdot \nabla_h \left(\frac{\theta}{\bar{\theta}} \right) = \frac{g}{f_0 \bar{\theta}} \mathbf{k} \times \nabla_h \theta \cdot \nabla_h \left(\frac{\theta}{\bar{\theta}} \right) \quad (2.F7.6)$$

$$= 0 \quad (2.F7.7)$$

となる. よって, (2.56) が導かれた.

^{*8} (2.38), (2.42) を再掲する.

$$\zeta_g \equiv \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{1}{\bar{\rho} f_0} \nabla_h^2 \cdot p \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\bar{\rho} \theta}{\bar{\theta}} g \quad (2.41)$$

となる. ここで便利のため, 2.2.1 で求めた流線関数を用いて, (2.53), (2.51), (2.58) を下のように表しておく^{*9}:

$$\left\{ \frac{D(\nabla^2 \cdot \psi_g)}{Dt} \right\}_g + \beta \frac{\partial \psi_g}{\partial x} = f_0 \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.59)$$

$$\left(\frac{D}{Dt} \right)_g \left(\frac{\partial \psi_g}{\partial z} \right) = -\frac{w}{f_0 g} \bar{\theta} N^2 \quad (2.60)$$

$$\left(\frac{D}{Dt} \right)_g \left(\nabla_h^2 \cdot \psi_g + \beta y + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 \psi_g}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (2.61)$$

^{*9} ここでは, 地衡流の渦度および温位を取り扱っているため, 本節では流線関数や物質微分に下付き添え字 g をつけているが, 次章からは省略して表記する.

第 3 章

Eady 問題についての考察

Green(1960) では前段階として Eady 問題を解き, 系を Charney 問題に近づけていた. そこで本論文においてもまずは比較的簡単な系として Eady 問題を解いた後, 系の複雑な Green(1960) について考察する.

3.1 Eady 問題の設定

Eady 問題では f 平面上における Boussinesq 流体を考えている. 水平東西方向には無限遠のチャンネルを, 水平南北方向には有限距離のチャンネルを, 鉛直方向には一定のシアを仮定している. また, 鉛直方向の両端, $z = 0, H$ において, 鉛直速度 $w = 0$ となる剛体蓋があると仮定する. さらに Eady 問題では β 効果を見捨てる f 平面近似も施される. そのため, $\beta = 0$ であり, コリオリパラメータは $f = f_0$ となる.

3.2 基礎方程式系

2.2 節で求めた準地衡流渦位方程式 (2.61) を出発点とする:

$$\left(\frac{D}{Dt}\right) \left(\nabla_h^2 \psi + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) = 0 \quad (3.1)$$

この式の流線関数 ψ を基本場と摂動に線形的に分け、摂動についての方程式を取り出す。

3.2.1 摂動の方程式

式 (3.1) の中括弧のなか、つまり渦位を Q とするとき、基本場における渦位 Q_0 は基本場の流線関数^{*1} ψ_0 を用いて、

$$Q = \nabla_h^2 \cdot \psi_0 + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} = 0 \quad (3.2)$$

となる。これは Eady 問題が他の傾圧不安定論より特異であるとされる点である。(3.1) より、線形化された摂動の準地衡流渦位方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\nabla_h^2 \cdot \psi' + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (3.3)$$

となる。この方程式は x 依存した係数を持たないため、摂動についての流線関数は $\psi'(x, y, z, t) = \text{Re} \tilde{\psi}(y, z) \exp ik(x - ct)$ と表すことができ、この形式で解を考えると、

$$(U - c) \left(-k^2 \tilde{\psi} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial y^2} + \frac{f_0 g}{N^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (3.4)$$

となる。

3.2.2 境界条件

前節 3.1 において設定した条件より、境界条件を整理しておく。まず水平東西方向には無限遠のチャンネルを、水平南北方向には有限距離 L のチャンネルを設定していることから南北に $L/2$ ずつの距離を持つ場を考えると、基本場の流線関数が $\psi_0 = \hat{\psi} \sin ly$ となることから、摂動の流線関数 ψ' は

$$\psi'(x, y, z, t) = \text{Re} \hat{\psi}(z) \sin ly \exp \{ ik(x - ct) \} \quad (3.5)$$

^{*1} 流線関数 ψ は次のように基本場と擾乱の成分にわけられる:

$$\psi = \psi_0 + \psi'. \quad (3.F1.1)$$

ここで、基本場における流線関数は (3.1) を満たす。

と変形できる. さらに, 鉛直方向には両端に鉛直速度が 0 になる剛体壁を設定するので鉛直方向の上端, 下端での速度は,

$$w(H) = 0, w(0) = 0 \quad (3.6)$$

となる. ここで, 高さ z は $0 \leq z \leq H$ である. (3.6) より, 上端, 下端における浮力の方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi'}{\partial z} - \Lambda \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (3.7)$$

である.

3.3 解の導出

3.2.2 で導いた境界条件にしたがって 3.2 で求めた方程式 (3.4) を解く. (3.5) を (3.4) に代入し,

$$(U - c) \left\{ - (k^2 + l^2) \hat{\psi} + \frac{f_0 g}{N^2} \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial z^2} \right\} = 0 \quad (3.8)$$

を得る. さらに (3.5) を (3.7) に代入すると $z = 0, H$ における関係式

$$c \frac{d\hat{\psi}}{dz} + \Lambda \hat{\psi} = 0 \quad (3.9)$$

$$(c - U_H) \frac{d\hat{\psi}}{dz} + \Lambda \hat{\psi} = 0 \quad (3.10)$$

を得ることができる. ここで, U_H は $z = H$ における東西流速であり, 鉛直シア Λ を用いると $U_H = \Lambda H$ である. $U \neq c$ であるならば, (3.8) が成り立つには,

$$- (k^2 + l^2) \hat{\psi} + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial z^2} = 0 \quad (3.11)$$

となる必要がある. この方程式を解くと,

$$\hat{\psi}(z) = A \cos \mu \hat{z} + B \sin \mu \hat{z} \quad (3.12)$$

を得る. ここで, $\mu^2 = L_d^2(k^2 + l^2)$ であり, μ は無次元化された水平波数を表す. また, L_d はロスビー変形半径であり, $L_d = NH/f$ である^{*2}. また, $\hat{z} \equiv z/H$ である. (3.12) を

^{*2} ここで, ロスビー変形半径のスケーリングを行う. $L_d = NH/f$ であるので

$$L_d = \frac{NH}{f} \approx \frac{10^{-2} \cdot 10^4}{10^{-4}} = 10^6 \text{ m} \quad (3.F2.1)$$

用いて, 上下の境界条件 (3.9), (3.10) は行列の形で書いて, これが解をもつためには係数行列の行列式がゼロでなければならない. このことから

$$\begin{pmatrix} U_H & \mu c \\ (c - U_H)\mu \sinh \mu + U_H \cosh \mu & (c - U_H)\mu \cosh \mu + U_H \sinh \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \quad (3.13)$$

と書ける. よって,

$$c^2 - U_H c + U_H^2 (\mu^{-1} \coth \mu - \mu^{-2}) = 0 \quad (3.14)$$

が導かれる. この式を解くと,

$$c = \frac{U_H}{2} \pm \frac{U_H}{\mu} \left\{ \left(\frac{\mu}{2} - \coth \frac{\mu}{2} \right) \left(\frac{\mu}{2} - \tanh \frac{\mu}{2} \right) \right\}^{1/2} \quad (3.15)$$

となる. この流れの不安定波が成長するためには, (3.15) が虚数解を持つことが条件である. もし c が虚部を持つならば, $\exp ikct$ に比例した波は, 指数関数的に成長する. よってこの条件を満たすには,

$$\frac{\mu}{2} - \coth \frac{\mu}{2} < 0 \quad (3.16)$$

でなくてはならない. ここで, (3.16) が成り立つ水平波数の範囲 $\mu < \mu_c$ を求める.

図 3.3.1 に, $\mu/2$ と $\coth(\mu/2)$ のグラフを, 図 3.3.2 には $\mu/2$ と $\tanh(\mu/2)$ のグラフを示す. どちらも横軸は東西波数^{*3} μ であり, この時, 図 3.3.2 から $\mu > 0$ において, いつも

$$\frac{\mu}{2} - \tanh \frac{\mu}{2} > 0 \quad (3.17)$$

が成り立つことがわかる. また, μ_c は下の図 3.3.1 の交点であり, $\mu_c = 2.399$ である. これは計算機によってニュートン法を用いて求めた.

成長率 σ は c の虚部 c_i と東西波数 k によって

$$\begin{aligned} \sigma &= kc_i \\ &= k \frac{U_H}{\mu} \left\{ \left(\frac{\mu}{2} - \coth \frac{\mu}{2} \right) \left(\frac{\mu}{2} - \tanh \frac{\mu}{2} \right) \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (3.18)$$

と表される^{*4}.

となる.

^{*3} 水平波数は $\mu = L_d^2(k^2 + l^2)$ より, 南北波数を $l = 0$ とするので $\mu = (L_d k)^2$ となり, 以下ではこれを

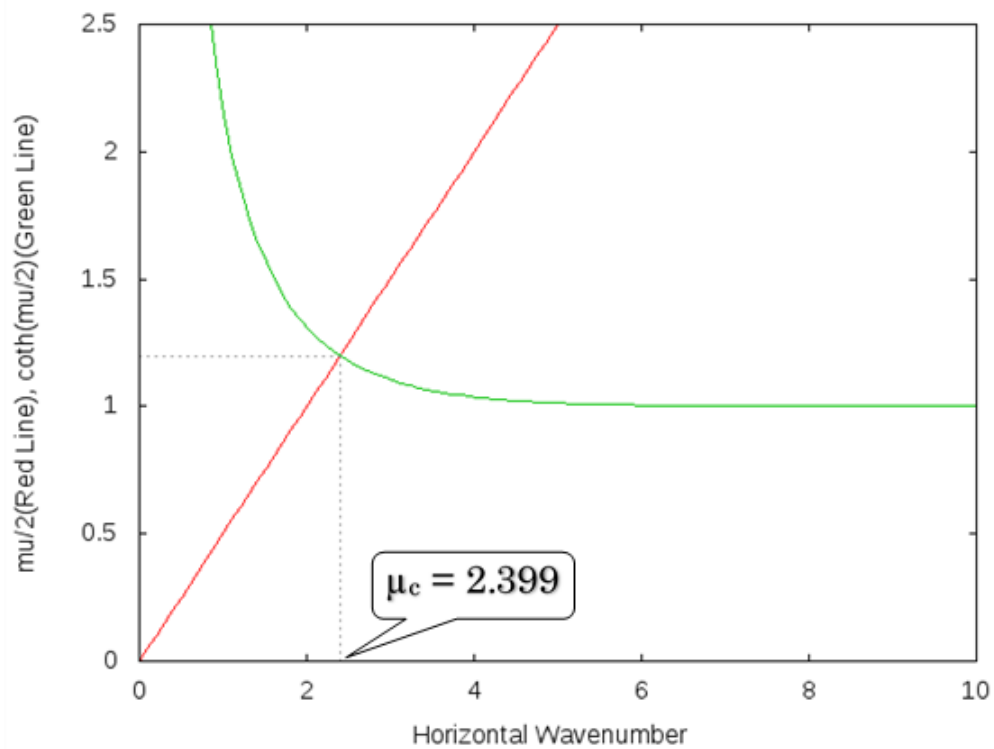


図 3.3.1 東西波長 μ を変数とする $\frac{\mu}{2}$ (赤線) と $\coth \frac{\mu}{2}$ (緑線). そのため, 横軸を東西波長としている. これは (3.15) の右辺第 2 項の中括弧内の左側のファクタである.

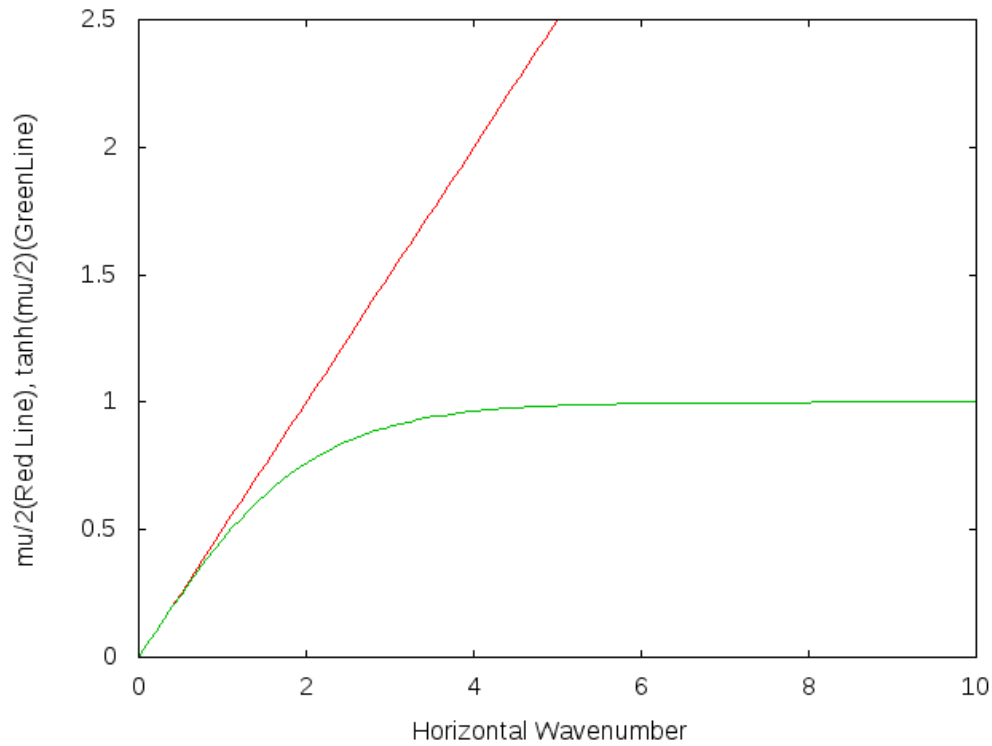


図 3.3.2 東西波長 μ を変数とする $\frac{\mu}{2}$ (赤線) と $\tanh \frac{\mu}{2}$ (緑線). そのため, 横軸を東西波長としている. これは (3.15) の右辺第 2 項の中括弧内の右側のファクタである.

‘東西波数’ と呼ぶことにする.

*4 ここで, 成長率 σ についてスケーリングを施す. 長さのスケールを L_d , 高さのスケールを H , 時間スケールを L_d/U_H , とした時, 成長率 σ は

$$\sigma \equiv \frac{U}{L_d} \approx \frac{10}{10^6} = 10^{-5} /s \quad (3.F4.1)$$

で表される.

ここで、図 3.3.3 に東西波数 μ に伴う流速の実部 c_r と虚部 c_i の変化を、図 3.3.4 には東西波数 μ に伴う不安定波の成長率 σ の変化を示す。どちらも横軸は東西波数 μ で、上で求めた $\mu_c = 2.399$ よりも大きくなると虚部 c_i がゼロとなり、実部 c_r のみとなる。そのため、成長率 σ もゼロとなる。また、図 3.3.4 から、最大成長を引き起こす東西波長は $\mu_m = 1.61$ であり、その成長率は $\sigma_m = 0.31$ であることがわかる。

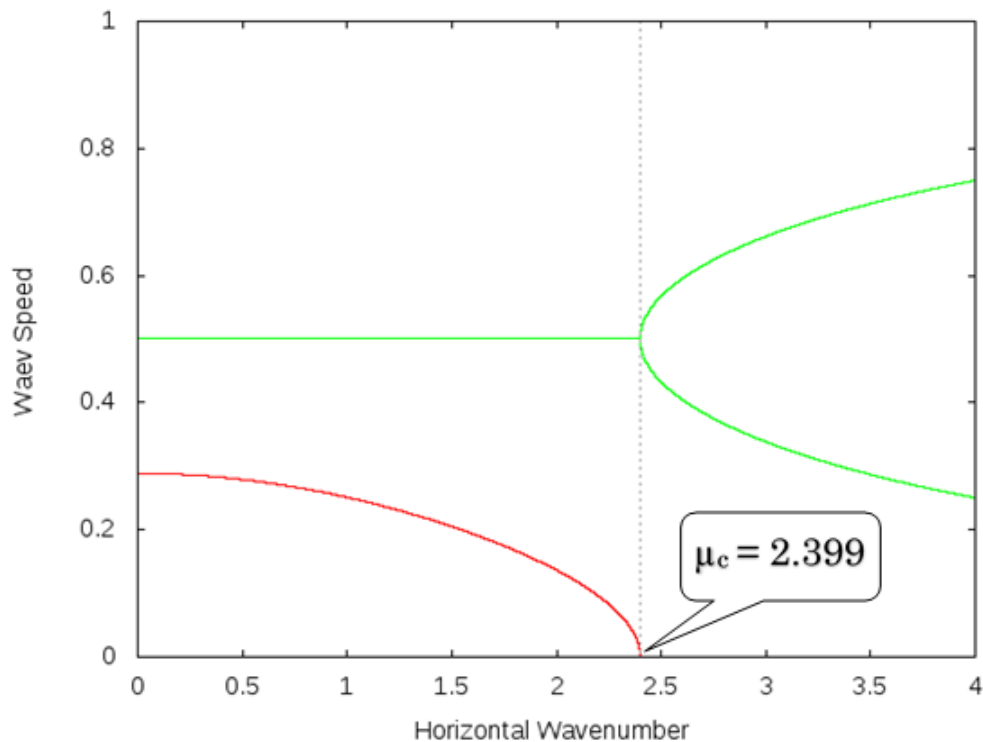


図 3.3.3 東西波長の変化に伴う流速の実部 c_r と虚部 c_i の変化。横軸は東西波数である。

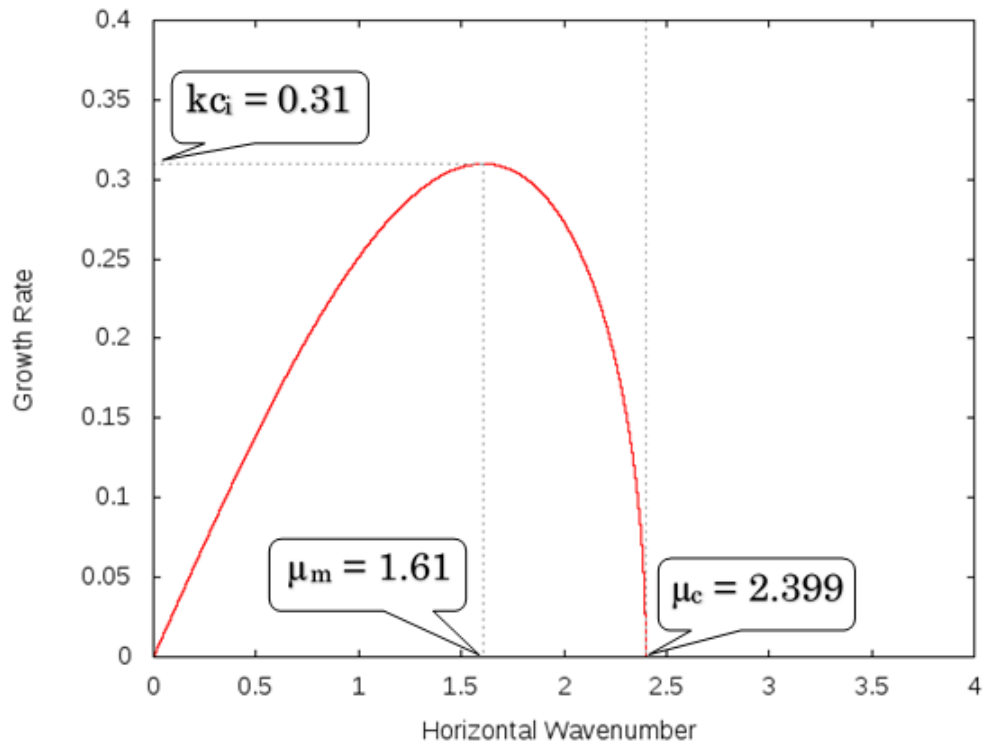


図 3.3.4 東西波数の変化に伴う不安定波の成長率. 横軸は東西波数 μ である.

以上のように固有値として流速 c が与えられると, Eady 問題における不安定波の鉛直構造が決定できる. そこで, (3.13) を (3.12) に代入し, 流線関数 $\hat{\psi}$ を

$$\hat{\psi} = \cosh \mu \hat{z} - \frac{U_H}{\mu c} \sinh \mu \hat{z} = \left(\cosh \mu \hat{z} - \frac{U_H c_r \sinh \mu \hat{z}}{\mu |c^2|} + \frac{i U_H c_i \sinh \mu \hat{z}}{\mu |c^2|} \right) \quad (3.19)$$

と表す. これは任意の定数の範囲内で成り立つ式である.

不安定波を表す流線関数 ψ' についてはその位相の変化と振幅の変化をそれぞれ図 3.3.5 と図 3.3.6 に示す. 図 3.3.5 より, 高度 \hat{z} に伴って位相が変化するが, その変化率はちょうど $\hat{z} = 1/2$ よりも高度を上げると, 著しく減少することがわかる. また図 3.3.6 から, 波の振幅は高度の上昇と共に減少し, $\hat{z} = 1/2$ を境に振幅が増加し, 最上部で下に戻る.

さらに図 3.3.7, 図 3.3.8 には, 上から流れの鉛直構造, 温度, 南北流速を東西位相と高度の関数としてプロットしたものを示している. 図 3.3.8 には, 鉛直シアーがなく, 大気が安定であるため, 流形は東西方向に傾きがない. それに対して図 3.3.7 には, 鉛直シアーを与え, その効果を見ると, 流形は西に傾いていることがわかる.

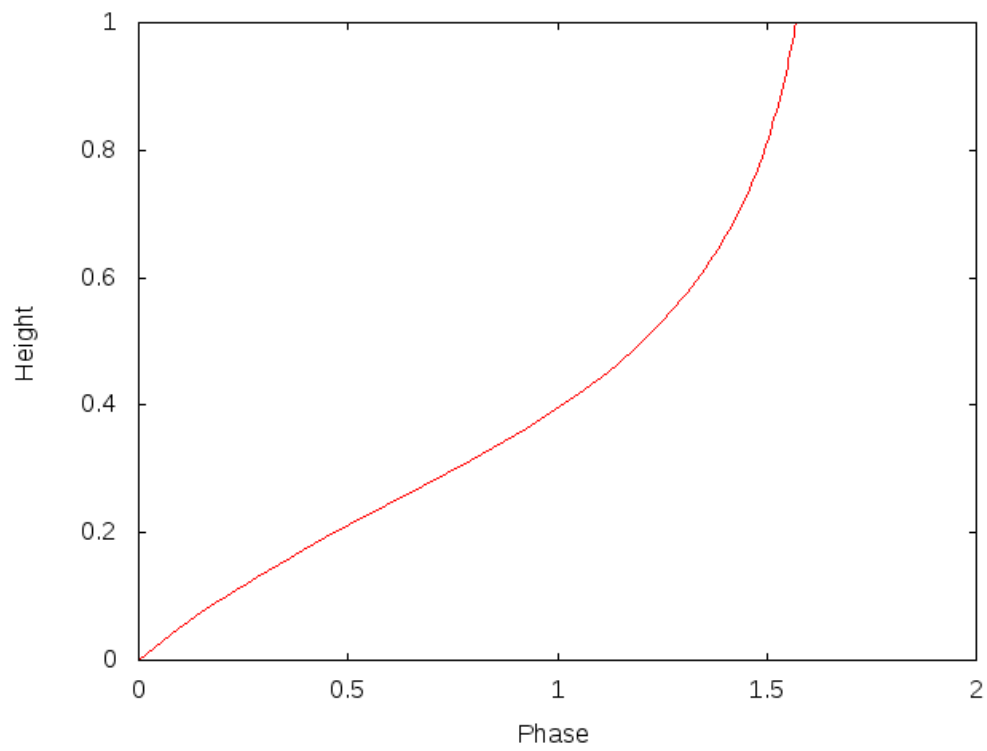


図 3.3.5 高度 z に伴う不安定波の位相変化. 縦軸は高度, 横軸は位相を表す.

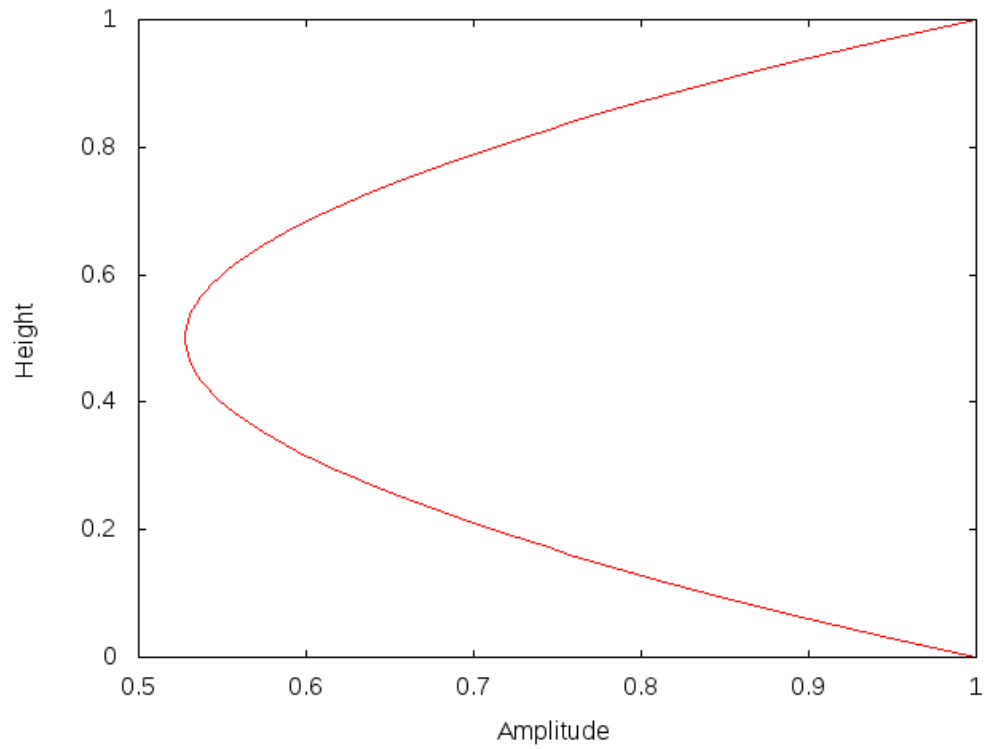


図 3.3.6 高度 z に伴う不安定波の振幅の変化. 縦軸は高度, 横軸は振幅を表す.

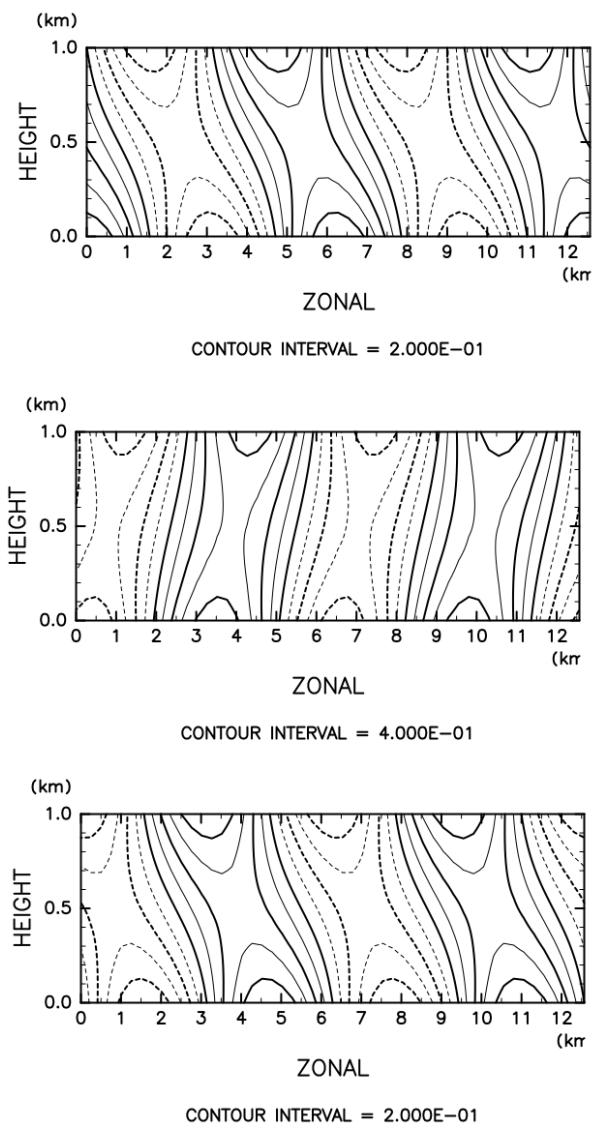


図 3.3.7 高度 z に伴う不安定波の位相変化. 縦軸は高度, 横軸は位相を表す.

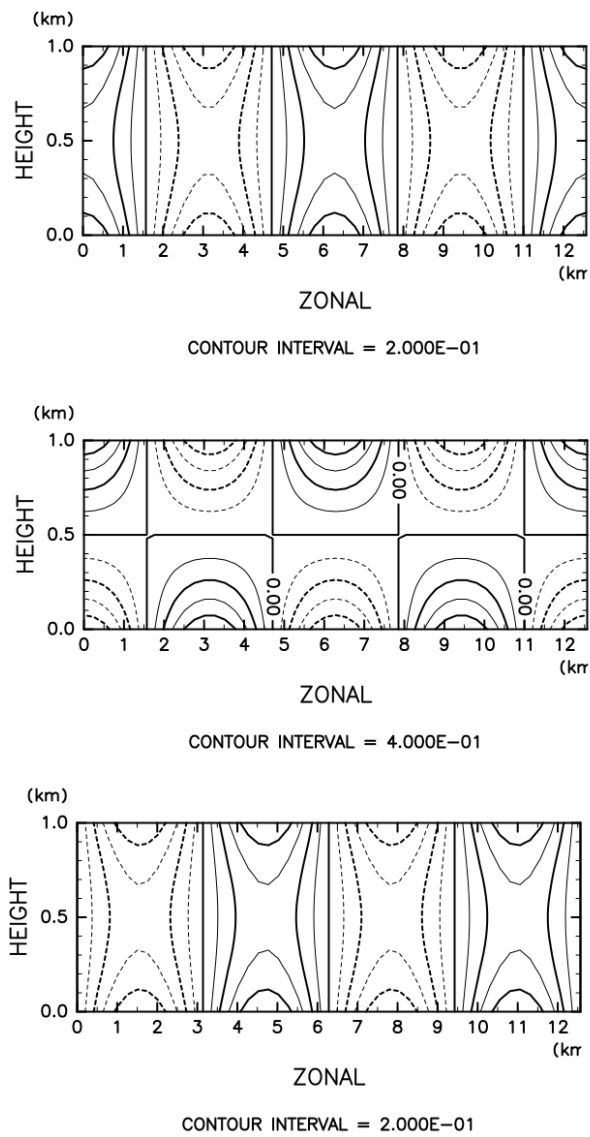


図 3.3.8 高度 z に伴う不安定波の振幅の変化. 縦軸は高度, 横軸は振幅を表す.

第 4 章

Green(1960) の傾圧不安定論についての考察

4.1 Green(1960) の設定

Green(1960) で扱う傾圧不安定論では, β 平面における Boussinesq 流体を考えている. 水平東西方向には無限遠のチャンネルを, 水平南北方向には有限距離のチャンネルを, 鉛直方向には一定のシアーを仮定する. また, Eady 問題と同様に鉛直方向の両端に鉛直速度がゼロになる剛体蓋を考える.

4.2 摂動の方程式

4.2.1 方程式の線形化と摂動についての表現

流線関数 ψ を基本場と摂動に線形化すると,

$$\psi = \psi_0 + \psi' \quad (4.1)$$

となる。ここで、基本場の流線関数 ψ_0 は高度 z にのみ依存する関数である。さらにこれに伴う物理量も同様に線形化を施し、

$$v = v_0 + v' \quad (4.2)$$

$$w = w_0 + w' \quad (4.3)$$

とする。ただし、基本場での南北流速は $v_0 = 0$ であるから、式の中の物理量はまとめて

$$\begin{cases} \psi &= \psi_0 + \psi' \\ v &= v' \\ w &= w_0 + w' \end{cases} \quad (4.4)$$

と線形化される。これを用いて以下の 2 式を摂動についての方程式に変換する:

- 準地衡流渦度方程式 (2.59)
- 準地衡流近似された熱力学方程式 (2.60)

準地衡流渦度方程式

準地衡流渦度方程式 (2.59) に (4.4) を代入すると、

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}') \cdot \nabla \right\} \nabla^2 (\psi_0 + \psi') + v' \beta = f \frac{\partial}{\partial z} (w_0 + w') \quad (4.5)$$

となる。これから基本場の準地衡流渦度方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \right) \nabla^2 \psi_0 = f \frac{\partial}{\partial z} w_0 \quad (4.6)$$

の各成分を引くと、

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi' + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \nabla^2 \psi' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \nabla^2 \psi_0 + v' \beta = f \frac{\partial}{\partial z} w' \quad (4.7)$$

となる。ここで、 $\mathbf{v}' \cdot \nabla \nabla^2 \psi'$ は値が小さすぎるため、近似的に無視した。流線関数の定義 (2.36) と基本場の南北速度が $v_0 = 0$ であることから、(4.7) は

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi' + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \nabla^2 \psi_0 + v' \beta = f \frac{\partial}{\partial z} w' \quad (4.8)$$

となる。また、基本場の流線関数 ψ は z の関数であるため、摂動についての準地衡流渦度方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi' + U \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi' + v' \beta = f \frac{\partial}{\partial z} w' \quad (4.9)$$

となる。ここで、 $U = u_0$ であり、基本場の東西流速を表す。

熱力学方程式

熱力学方程式 (2.61) に (4.4) を代入すると、

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}') \cdot \nabla \right\} \frac{\partial}{\partial z} (\psi_0 + \psi') = -\frac{N^2}{f} (w_0 + w') \quad (4.10)$$

となる。この式の各物理量から基本場の物理量

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \right) \frac{\partial}{\partial z} \psi_0 = -\frac{N^2}{f} w_0 \quad (4.11)$$

を引くと、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial z} \psi' \right) + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} \psi' \right) + \mathbf{v}' \cdot \nabla \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} \psi_0 \right) = -\frac{N^2}{f} w' \quad (4.12)$$

となる。ここで、 $\mathbf{v}' \cdot \nabla \cdot (\partial \psi') / (\partial z)$ は値が小さいため、近似的に無視した。さらに流線関数の定義 (2.36) と基本場の南北速度が $v_0 = 0$ であり、基本場における流線関数が z の関数であることから、(4.12) は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial z} \psi' \right) + U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial z} \psi' \right) - \Lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial z} \psi' \right) = -\frac{N^2}{f} w' \quad (4.13)$$

となる^{*1*2}。ここで、 $\Lambda = \partial U / \partial z$ である。

^{*1} 本節では摂動に関する物理量にはプライムをつけているが、以下の議論ではこれを省略する。

^{*2} (4.13) を導出する。厳密には (4.13) の左辺第 3 項の導出を行う。(4.12) の左辺第 3 項は流線関数の定義 (2.36) と基本場の流線関数の z 依存性から

$$\mathbf{v}' \cdot \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial z} \psi_0 = \frac{\partial}{\partial x} \psi' \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \psi_0 \quad (5.F2.1)$$

と表され、さらに

$$U = -\frac{\partial}{\partial y} \quad (5.F2.2)$$

と表されることから、(4.13) が導かれた。

4.3 モデル

ここでは本論文で取り扱う‘鉛直 N 層モデル’について説明する。鉛直座標系は高度座標系 (z 座標系) を用いて、高度を N 層に分割する。以下の議論では固有値計算には $N = 20$ を、固有ベクトルの計算には $N = 4$ を用いて計算を進めている。図 (4.3) にその様子を示している。方程式の離散表現の際、 z 微分には中央差分を用いるため、 N 分割された層の中央に $1/2$ 間隔の点線が記されている。

4.3.1 境界条件

ここで、境界条件を設定する。流体が鉛直方向がゼロになる剛体壁が上端と下端に存在する領域に存在すると仮定するため、上端と下端の鉛直速度は

$$\begin{aligned} \text{上端鉛直速度} : w(N + 1/2) &= 0 \\ \text{下端鉛直速度} : w(1/2) &= 0 \end{aligned}$$

となる。さらに今回、南北波数は考えないので、流線関数 ψ' は

$$\psi' = \hat{\psi}(z) \exp \{ ik(x - ct) \} \quad (4.14)$$

となる。ここで、 $\hat{\psi}(z)$ は波の波長であり、高度 z に依存する。また、 $\exp \{ ik(x - ct) \}$ は時間 t と東西位相 x に依存する。

4.4 方程式の離散化

次に摂動の渦度方程式 (4.9) と熱力学方程式 (4.13) を数値計算のために離散化する。鉛直方向の高さを N 等分し、各高さにおける方程式系を解くことによって 20 個の固有値を求める。その中の一つである j 番目の高さにおける方程式系は以下のようになる：

まず、摂動の渦度方程式 (4.9) を離散化する.

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \cdot \psi_j + U_j \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \cdot \psi_j + \beta \frac{\partial}{\partial x} \psi_j = f \left(\frac{w_{j+1/2} - w_{j-1/2}}{\Delta z} \right) \quad (4.15)$$

この式の両辺を N 回足し合わせると

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \cdot \psi_l + U_l \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \cdot \psi_l + \beta \frac{\partial}{\partial x} \psi_l \right) &= \frac{f}{\Delta z} \{ (w_{3/2} - w_{1/2}) \\ &+ (w_{5/2} - w_{3/2}) \\ &+ \dots \\ &+ (w_{N-1/2} - w_{N-3/2}) \\ &+ (w_{N+1/2} - w_{N-1/2}) \} \\ &= \frac{f}{\Delta z} (w_{N+1/2} - w_{1/2}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

となる. ここで、境界条件を考慮することによって (4.16) は

$$\sum_{l=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \cdot \psi_l + U_l \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \cdot \psi_l + \beta \frac{\partial}{\partial x} \psi_l \right) = 0 \quad (4.17)$$

となる.

次に、熱力学方程式 (2.48) についても同様に離散化する.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{\Delta z} \right) + U_{j+1/2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{\Delta z} \right) - \Lambda \frac{\partial}{\partial x} \psi_{j+1/2} = -\frac{g}{f\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz} w_{j+1/2} \quad (4.18)$$

となり、(4.17) を求めた時と同様に $w_{j+1/2}$ を求め、(4.18) に代入する. まず、 $w_{j+1/2}$ は

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^j \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \cdot \psi_l + U_l \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \cdot \psi_l + \beta \frac{\partial}{\partial x} \psi_l \right) &= \frac{f}{\Delta z} \{ (w_{3/2} - w_{1/2}) \\ &+ (w_{5/2} - w_{3/2}) \\ &+ \dots \\ &+ (w_{j-1/2} - w_{j-3/2}) \\ &+ (w_{j+1/2} - w_{j-1/2}) \} \\ &= \frac{f}{\Delta z} (w_{j+1/2} - w_{1/2}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

ここで、境界条件より $w(1/2) = 0$ なので

$$w_j = \frac{\Delta z}{f} \sum_{l=1}^j \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \cdot \psi_l + U_l \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \cdot \psi_l + \beta \frac{\partial}{\partial x} \psi_l \right) \quad (4.20)$$

となる. この式を (4.18) に代入すると,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{\Delta z} \right) + U_{j+1/2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\psi_{j+1} - \psi_j}{\Delta z} \right) - \Lambda \frac{\partial}{\partial x} \psi_{j+1/2} \\ &= -\frac{g\Delta z}{f^2\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz} \sum_{l=1}^j \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \cdot \psi_l + U_l \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \cdot \psi_l + \beta \frac{\partial}{\partial x} \psi_l \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

となる.

さらに流線関数 ψ に波型の式を適応させる. (4.17), (4.21) に $\psi_j = \hat{\psi}_j \exp ik(x - ct)$ を代入することを考える.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \psi_j = -ikc\hat{\psi}_j \exp\{ik(x - ct)\} \\ \frac{\partial}{\partial x} \psi_j = ik\hat{\psi}_j \exp\{ik(x - ct)\} \\ \nabla^2 \cdot \psi_l = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot \psi_l \\ \qquad \qquad = -k^2\hat{\psi}_l \exp\{ik(x - ct)\} \end{array} \right.$$

より, (4.17), (4.21) はそれぞれ

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N \left(ik^3 c\hat{\psi}_l - ik^3 U_l \hat{\psi}_l + ik\beta \hat{\psi}_l \right) \exp\{ik(x - ct)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{l=1}^N \left[\{(c - U_l) k^2 + \beta\} \hat{\psi}_l \right] &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (\psi_{j+1} - \psi_j) + U_{j+1/2} \frac{\partial}{\partial x} (\psi_{j+1} - \psi_j) - \frac{1}{2} \Lambda \Delta z \frac{\partial}{\partial x} (\psi_{j+1} + \psi_j) \\
&= -\frac{g}{\bar{\theta}} \left(\frac{\Delta z}{f} \right)^2 \frac{d\bar{\theta}}{dz} \sum_{l=1}^j \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \cdot \psi_l + U_l \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \cdot \psi_l + \beta \frac{\partial}{\partial x} \psi_l \right) \\
&\Leftrightarrow \left\{ (-ikc + ikU_{j+1/2}) (\hat{\psi}_{j+1} - \hat{\psi}_j) - \frac{1}{2} \Lambda \Delta z (ik) (\hat{\psi}_{j+1} + \hat{\psi}_j) \right\} \exp\{ik(x - ct)\} \\
&= -\frac{g}{\bar{\theta}} \left(\frac{\Delta z}{f} \right)^2 \frac{d\bar{\theta}}{dz} \sum_{l=1}^j \left(ik^3 c \hat{\psi}_l - ik^3 U_l \hat{\psi}_l + ik\beta \hat{\psi}_l \right) \exp\{ik(x - ct)\} \\
&\Leftrightarrow \left\{ (U_{j+1/2} - c) (\hat{\psi}_{j+1} - \hat{\psi}_j) - \frac{1}{2} \Lambda \Delta z (\hat{\psi}_{j+1} + \hat{\psi}_j) \right\} \\
&= -\left(N \frac{\Delta z}{f} \right)^2 \sum_{l=1}^j \left[\{(c - U_l) k^2 + \beta\} \hat{\psi}_l \right] \tag{4.23}
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$N^2 = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz} \tag{4.24}$$

であり、 N は Brunt-Vaisala 振動数と呼ぶ。ここで、式 (4.23) は $1 \leq j \leq (N-1)$ であり、行列式における N 行目には式 (4.22) が適応される。これらの式を用いて数値計算をしていく。

4.5 固有値の計算

前節で求めた方程式 (4.22), (4.23) を行列で表現するために

$$\begin{aligned}
 (4.22) \Leftrightarrow & [(\beta - k^2 U_N) - c(-k^2)] \psi_N \\
 & + [(\beta - k^2 U_{N-1}) - c(-k^2)] \psi_{N-1} \\
 & + \cdots \\
 & + [(\beta - k^2 U_1) - c(-k^2)] \psi_1
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
 (4.23) \Leftrightarrow & \left[\left(U_{j+1/2} - \frac{1}{2} \Lambda \Delta z \right) - c \right] \hat{\psi}_{j+1} \\
 & + \left[\left\{ -U_{j+1/2} - \frac{1}{2} \Lambda \Delta z + \left(\frac{\Delta z}{f} N \right)^2 (\beta - k^2 U_j) \right\} - c \left\{ -1 - \left(k \frac{\Delta z}{f} N \right)^2 \right\} \right] \hat{\psi}_j \\
 & + \left[\left(\frac{\Delta z}{f} N \right)^2 (\beta - k^2 U_{j-1}) - c \left\{ - \left(k \frac{\Delta z}{f} N \right)^2 \right\} \right] \hat{\psi}_{j-1} \\
 & + \cdots \\
 & + \left[\left(\frac{\Delta z}{f} N \right)^2 (\beta - k^2 U_1) - c \left\{ - \left(k \frac{\Delta z}{f} N \right)^2 \right\} \right] \hat{\psi}_1
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

と変形する. (4.25) より行列式は

$$(B - cD) \psi_j = 0 \tag{4.27}$$

の形で表され, 行列 B, D はそれぞれ

$$\left\{ \begin{array}{l} B(j, j) = \left\{ -U_{j+1/2} - \frac{1}{2}\Lambda\Delta z + \left(\frac{\Delta z}{f} N \right)^2 (\beta - k^2 U_j) \right\} \\ B(j, j+1) = \left(U_{j+1/2} - \frac{1}{2}\Lambda\Delta z \right) \\ B(j, j-1) = \left(\frac{\Delta z}{f} N \right)^2 (\beta - k^2 U_{j-1}) \\ \vdots \\ B(j, 1) = \left(\frac{\Delta z}{f} N \right)^2 (\beta - k^2 U_1) \\ B(j, j+2) = 0 \\ \vdots \\ B(j, N) = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} D(j, j) = -1 - \left(k \frac{\Delta z}{f} N \right)^2 \\ D(j, j+1) = 1 \\ D(j, j-1) = - \left(k \frac{\Delta z}{f} N \right)^2 \\ \vdots \\ D(j, 1) = - \left(k \frac{\Delta z}{f} N \right)^2 \\ D(j, j+2) = 0 \\ \vdots \\ D(j, N) = 0 \end{array} \right.$$

である. (4.27) より, 両辺に D^{-1} を左からかけ,

$$(D^{-1}B - c)\psi_j = 0 \tag{4.28}$$

について, $\det D^{-1}B$ を求めることによって固有値 c は求められる.

4.6 計算結果

4.6.1 鉛直 5 レベルモデルにおける順圧不安定波の発達

まずは、鉛直にシアがなく、こういった大気を順圧大気という。東西流速が $U = 0$ である場合に波の速度 c は東西波長の大小に対してどのような変化を見せるのかをグラフにする (図 4.6.1 に示した)。このグラフは $N = 5$ 、つまり鉛直 5 層モデルである。 x 軸は東西方向であり、正の向きは東向きなので今回出た値は西向きである。さらに波長が大きくなるにつれ、流速が大きくなっていることがわかる。しかし、1 層目以外の 2 から 5 層目に関してはある値を超えるとほぼ横ばいであり、ほぼ流速の成長がないことがわかる。ここで、第 1 レベルの波を‘順圧ロスビー波’と言う。また、最終的に求めるのは鉛直 20 層モデルであるが、今回 2 レベル以降の流速変化がほぼ横ばいになっているように 20 層を増やしてみたところ、予想通り、第 1 レベル以外のすべての波はほとんど横ばいになり、変化を見せなかった。よって今回はグラフの見やすさも考慮し、鉛直 5 層モデルでの順圧不安定波の流速変化を考えた上で、参考にした論文とほとんど同じ結果が出た。ただし、第 2 レベルの流速が参考論文に比べるとやや小さいことに対して、より研究が必要であると感じた。ここで、東西流速を $U = 10$ にしてみると、図 4.6.1 のようにすべての曲線が東西流速 10 の分だけ上昇する。

4.6.2 鉛直 20 レベルモデルにおける傾圧不安定波の発達

前節で順圧大気についてその不安定波 (ロスビー波) の発達を考えたが、本節では鉛直シアを変化させ、東西波長の変化と鉛直シアの変化に伴う不安定波の成長率の e フォールディングタイムの変化を考える。変数が 2 つの 3 次元グラフになるので、2 次元の等値線に書くことにする。これは Hirota(1968) の図を参考に作った図であるが、東西波長と鉛直シアに伴う等値線が大まかに異なる。特に目立った違いについては以下に示す通りである：

- 1.5, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0 を表す等値線の右側の方が等値線の間隔が広い

-
- 1.5, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0 を表す等値線は鉛直シアが 1 よりも小さい時にも現れている.
 - 図の中央付近に点線が多く現れている.

この原因として考えられるのは、座標軸の違いである。この固有値計算を参考にした Hirota(1968) では鉛直座標系に圧力座標を用いているが、本論文では高度座標系を用いている。よって用いた式から算出された固有値の値が異なってしまったと考えられる。

しかし、この座標軸の違いだけでこれだけの違いが出ることには甚だ違和感を感じるころである。今後の研究課題としては本論文で生じたこれらの違いについて調べる必要があるだろう。

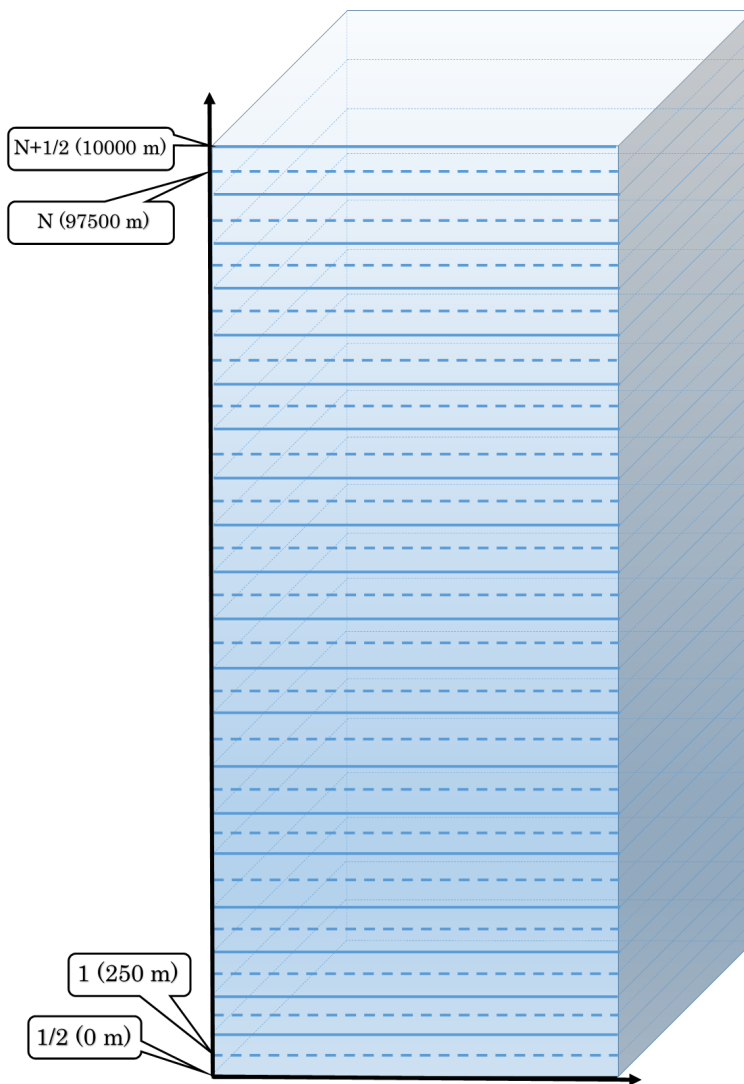


図 4.3.1 高度 10000 m (鉛直方向の長さが $z = 10000$) の大気を考え、それを等間隔で N 分割した図 (図は $N = 20$)。離散表現の際に $1/2$ グリッドを考えるので地上 ($z = 0$) が $1/2$ で始まり、大気上端 ($z = 10000$) が $N + 1/2$ となっている。

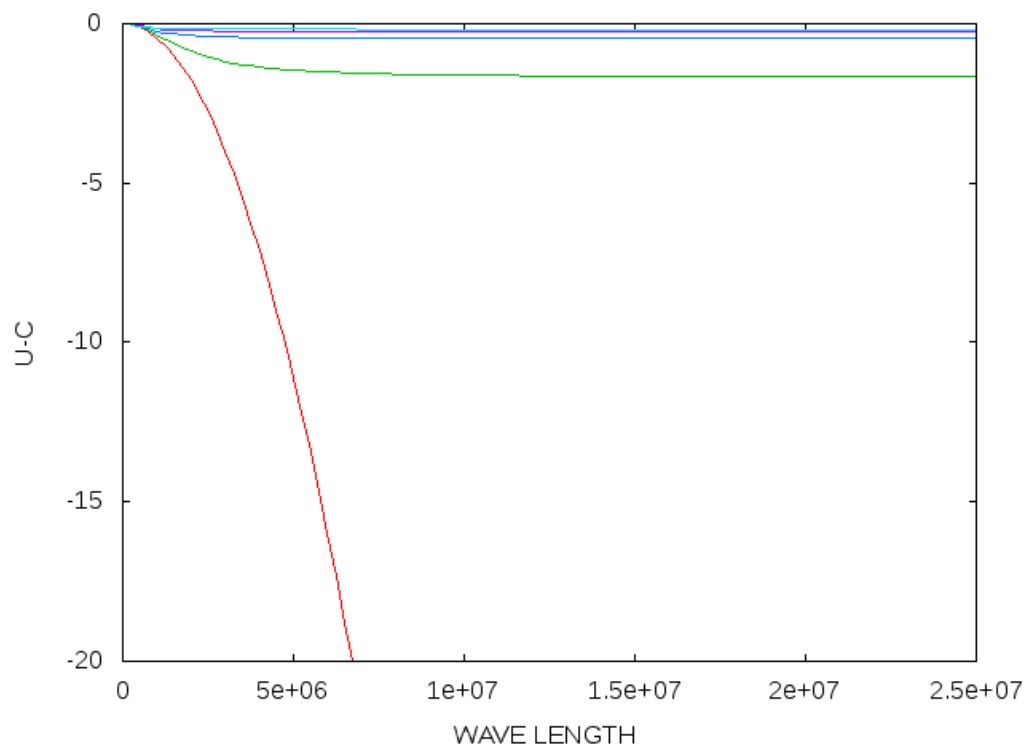


図 4.6.2 鉛直 5 層モデルにおける速度変化. 縦軸はロスビー波の流速, 横軸は東西波長であり, 東西流速は $U = 0 \text{ m/s}$ である.

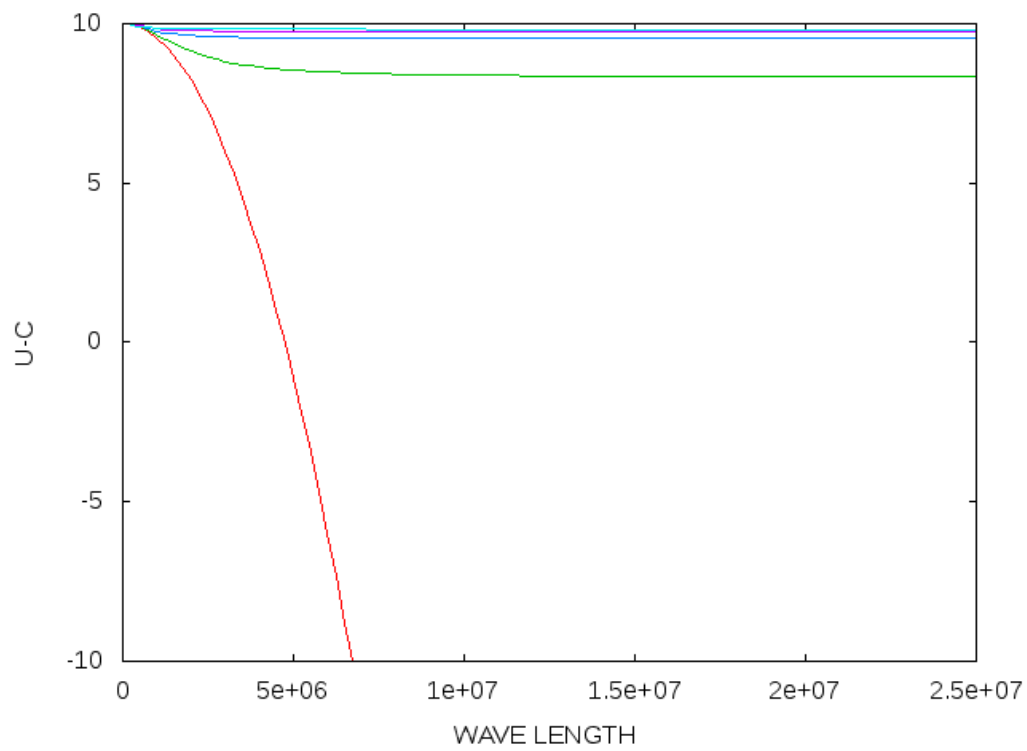


図 4.6.3 鉛直 5 層モデルにおける速度変化. 縦軸はロスビー波の流速, 横軸は東西波長であり, 東西流速は $U = 10 \text{ m/s}$ である.

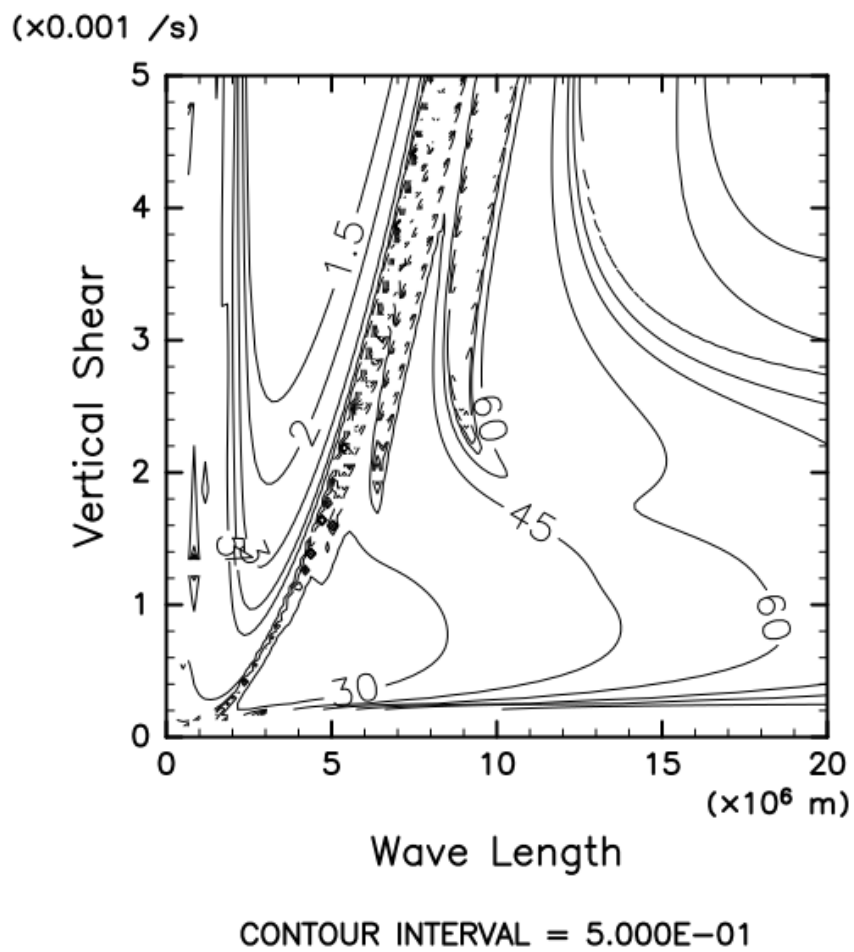


図 4.6.4 鉛直 20 層モデルにおける速度変化. 縦軸は鉛直シアア, 横軸は東西波長である. 流速は等値線によって表現している.

第 5 章

結論

本論文では, Green(1960) に基づき, 線形摂動論を用いて, 傾圧不安定論についての考察を行った. まず, Eady 問題の設定に沿って摂動の方程式を線形化し, その式に波動解を与え, 不安定波が成長する条件を調べた. Green(1960) には Eady 問題に対する詳しい計算法は明記されていなかったため, Vallis(2006) を参考に式変形を行った. すると摂動の最大成長を与える東西波数は Vallis(2006) のものと一致していた. また, 各物理量の大きな値から, 不安定波の最大成長は

$$\sigma_m \approx 0.31 \frac{U}{L_d} \approx 0.31 \cdot 10^{-5} \approx 0.27 / \text{day} \quad (5.1)$$

であり, これは不安定波の発達に費やす時間としては妥当な値である.

次に, 3 章で考察した Eady 問題では f 平面上での流体運動を考えていたが, これを β 平面上で考える. その際, コリオリパラメータ f_0 に β 効果を加えるだけで, 式の計算を困難にするため, 今回は計算機を用いて固有値計算を行った. 本論文の図からは, 東西波長が大きくなるほど, 不安定波の成長率の e フォールディングタイムは大きくなる傾向にあることがわかる. さらに鉛直シアアの増加に伴って成長率の e フォールディングタイムが大きくなる傾向にあることもわかる. 以上より不安定波の成長には東西波長と鉛直シアアが大きく関係していることが明らかになった.

しかしながら, 参考にした Hirota(1968) に記載されている図とは違った結果となった. この原因について考えると, 2 つの図には座標軸の違いが見受けられる. Hirota(1968) で

は鉛直方向に圧力座標系を用いていたが、本論文では高度座標系を用いた。この違いが図に差が生じた原因の 1 つと考えられる。これは‘原因の 1 つ’であるため、他に考えるべき項目を見落としている可能性を感じ、今後の研究課題とする必要性を痛く感じている。

付録 A

Green(1960) 全訳

概要

線形化された方程式は鉛直シアを伴う大きいスケールの帯状流の安定性についての理論的な問題を定式化するために用いられる。その問題は一般的な状況において解かれ、Rossby と Charney と Eady によってすでに得られた解の間の関係を説明する。

1.0.3 導入

この研究の目的は Charney(1947) と Eady(1949) によってもたらされた安定性の問題の種類を拡張することである。様々な定常傾圧帯状流は小さな振幅の大きなスケールの波動によって乱される。この系の安定性の特徴についての考察から傾圧擾乱の成長における初期段階についての情報が得れる。

それら運動のスケールに直接関連する過程が含まれるように、方程式は簡略化される。適切な解析はすでに詳細に与えられ (例えば, Eady 1949 を見よ), ここではこの解析は繰り返されないだろう。しかし原理の段階は示されている。

主な仮定は流体に摩擦はなく, 断熱的な運動であり, リチャードソン数 $Ri = gB/(\frac{dU}{dz})^2$

は大きく、正の数である。この時、水平方向の運動はほぼ地衡流であり、適切な渦度方程式 (Eady 1947, p.47, Eqs. 8 と 16) は

$$\frac{D\zeta}{Dt_h} + v\beta = \frac{f}{\rho} \frac{\partial}{\partial Z} (\rho w) \quad (1.1)$$

と言える。ここで添字 h は水平方向を表し、

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt_h} &= \text{水平方向の運動に伴う微分} \\ \zeta &= \text{相対渦度の鉛直成分} \\ v &= \text{子午面速度} \\ \beta &= \frac{\partial f}{\partial y} = \text{コリオリパラメータの緯度変化} \\ \rho &= \text{密度} \\ Z &= \text{高度} \\ w &= \text{鉛直速度} \end{aligned}$$

高度に伴って変化する密度 $\rho_0(Z)$ とそれに対応する静的圧力 $P_0(Z)$ の分布が‘標準’であると仮定することは便利である。それは密度や圧力が流体の平均状態を記述しているようなものである。この時、我々はそのような圧力と密度の場合は標準値に偏差を加えたものによって与えられたものとして考えると、観測された大きなスケールの対流圏の運動と矛盾しない偏差は平均値よりもかなり小さいことに気づく。故に我々は

$$\begin{aligned} \text{圧力} &= P_0(Z) + \delta P(x, y, Z, t) \\ \text{密度} &= \rho_0(Z) + \delta \rho \end{aligned}$$

と書く。さらに、

$$\text{エントロピー}/C_p = C_v/C_p \log P - \log \rho \simeq \phi_0(Z) + \delta \phi$$

であり、ここで

$$\delta \phi / \phi_0 \ll 1$$

である。この時、エントロピーの保存は

$$\frac{D}{Dt_h} \delta \phi + Bw = 0 \quad (1.2)$$

と書かれる。ここで、

$$B = \frac{d\phi_0}{dZ}$$

である。圧力と密度の場の偏差は静的平衡状態にあると仮定される。

$$\frac{\partial}{\partial Z} \delta P + g \delta \rho = 0 \quad (1.3)$$

この方程式系によって、地衡流近似が加わって、我々は圧力偏差を用いてすべての従属変数を取り除くことができ、モデル流体が明らかになる。しかし、方程式を次のように記される無次元関数 ψ の項で書くことはより便利である：

$$\delta P = \rho_0(Z) g H \psi(x, y, Z, t).$$

ここで、 H は幾何学的スケールハイトである。幾何学近似は

$$\mathbf{V}_h = \frac{gH}{f} \mathbf{k} \wedge \nabla \psi$$

(ここで、 \mathbf{k} は鉛直方向の単位ベクトルである)

となり、

$$\delta \phi = H \frac{\partial \psi}{\partial Z} - H B \psi \simeq H \frac{\partial \psi}{\partial Z}$$

である。

ψ は水平方向においては古典的な‘非発散性の’流線関数のような振る舞いをするが、鉛直勾配においてはポテンシャル温度の対数と (ほぼ) 一致する。

式 (1) は

$$\frac{D}{Dt_h} \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{f\beta}{gH} y + \frac{f^2}{gB} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) \right\} = 0 \quad (1.4)$$

となり、さらに

$$w = -\frac{H}{B} \frac{D}{Dt_h} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \quad (1.5)$$

となる。今、我々は小さな振幅の摂動によってかき乱される定常な帯状傾圧運動を考える。摂動を次の形式で特定すると便利である：

$$\psi \text{ の摂動} = \left\{ F(Z) \exp i\lambda (x - Ct) \frac{\sin}{\cos} \mu y \right\} \text{ の実数部分}$$

ここで、 $F(Z)$ は ψ の位相と振幅を記述した複素関数であり、複素数 $C = C_r + iC_i$ は位相速度 C を示し、摂動の増幅率 $\exp \lambda C_i t$ を表現している。座標系は直角座標系であり、 x 軸は水平東西方向、 y 軸は水平南北方向、 z 軸は鉛直方向に設定されている。緯度に伴うマッ

スケールの変化は気象力学においては慣用として無視されてきた。故に λ は東西波数, μ は南北波数である。無次元の形式に書き直すと便利であり, それ故以下のことが明らかになる:

$z = Z/H$ ここで H は流体における幾何学的スケールハイトである.

$u = U(Z)/\Delta U$ ここで ΔU は典型的な速度変化である.

$c = C/\Delta U$ 波速

$p^2 = \frac{gB}{f^2} H^2 (\lambda^2 + \mu^2)$ 水平波数

$\kappa = -\frac{H}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dZ}$ 質量発散パラメータ

$\gamma = \frac{gB}{f^2} H^2 \frac{\beta}{\Delta U}$ 一般的な β パラメータ

この時, 式 (4) の無次元摂動の形式は

$$(u - c) (F'' - \kappa F' - p^2 F) + (\gamma + \kappa u' - u'') F = 0 \quad (1.6)$$

ここでプライムは z に関する微分を表し, 関数 F は

$$\text{圧力の摂動} = \rho_0(Z)gH \cdot \left[\left\{ F(z) \exp i\lambda (x - Ct) \frac{\sin}{\cos} \mu y \right\} \text{の実数部分} \right]$$

を通じて摂動量を定義する.

付録 A.1 (4) 式の導出

(1) を再掲する.

$$\frac{D\zeta}{Dt_h} + v\beta = \frac{f}{\rho} \frac{\partial}{\partial Z} (\rho w) \quad (1)$$

ここで, 幾何学近似が

$$\mathbf{V}_h = \frac{gH}{f} \mathbf{k} \wedge \nabla \psi$$

(ここで, \mathbf{k} は鉛直方向の単位ベクトルである)

であることから,

$$\begin{cases} u &= -\frac{gH}{f_0} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= \frac{gH}{f_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

と書ける. よって渦度 ζ は

$$\begin{aligned} \zeta = \text{rot} \mathbf{V}_h &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gH}{f_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{gH}{f_0} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ &= \frac{gH}{f_0} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

と書き換えられる. また v は南北方向の速度より,

$$v = \frac{Dy}{Dt_h}$$

である. 次に (1) の右辺について考える:

$$\begin{aligned} \frac{f}{\rho} \frac{\partial}{\partial Z} (\rho w) &= \frac{f}{\rho_0} \left(w \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} + \rho \frac{\partial w}{\partial Z} \right) \\ &= \frac{f}{\rho_0} \left\{ -\frac{H}{B} \frac{D}{Dt_h} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} - \frac{H}{B} \rho_0 \frac{D}{Dt_h} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right) \right\} \\ &= -\frac{D}{Dt_h} \left(\frac{fH}{B} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} \frac{\partial \psi}{\partial Z} + \frac{fH}{B} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right) \end{aligned}$$

以上より, (1) は次のように書き換えられ, (4) は導かれた:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt_h} \frac{gH}{f_0} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \beta \frac{Dy}{Dt_h} + \frac{D}{Dt_h} \left(\frac{fH}{B} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} \frac{\partial \psi}{\partial Z} + \frac{fH}{B} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right) &= 0 \\ \frac{D}{Dt_h} \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{f\beta}{gH} y + \frac{f^2}{gB} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) \right\} &= 0 \end{aligned}$$

付録 A.2 (6) 式の導出

(4) を再掲する.

$$\frac{D}{Dt_h} \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{f^2}{gB} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) \right\} + \frac{f\beta}{gH} v = 0 \quad (4)$$

ここでは、後の式変形のために上式の左辺第 2 項は括弧の外に出しておく。この式に

$$\psi \text{ の摂動} = \left\{ F(Z) \exp i\lambda (x - Ct)_{\cos}^{\sin} \mu y \right\} \text{ の実数部分}$$

を代入する。ここで、便利のため (4) を

$$\frac{D}{Dt_h} q + \frac{f\beta}{gH} v = 0$$

のように表現すると、

$$q = -(\lambda^2 + \mu^2) F \exp \{i\lambda (x - ct)\} \sin \mu y + \frac{f_0^2}{gB} \left(\frac{F''}{H^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{F'}{H} \right) \exp \{i\lambda (x - ct)\} \sin \mu y$$

となる。この時、以下のことに注意されたい:

$$\begin{aligned} z &= Z/H \text{ より,} \\ \frac{\partial}{\partial Z} &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial Z} \\ &= \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

また、

$$\mathbf{V}_h = \frac{gH}{f} \mathbf{k} \wedge \nabla \psi$$

(ここで、 \mathbf{k} は鉛直方向の単位ベクトルである)

であることから、東西方向、南北方向の速度 u , v は

$$\left\{ \begin{aligned} u &= -\frac{gH}{f_0} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &= -\frac{gH}{f_0} \mu F(Z) \exp \{i\mu (x - ct)\} \cos \mu y \\ v &= \frac{gH}{f_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &= \frac{gH}{f_0} i\lambda F(Z) \exp \{i\mu (x - ct)\} \sin \mu y \end{aligned} \right.$$

と書き換えることができる。さらに本議論では平均流 $U(Z)$ が存在する場合の地衡流に沿った Lagrange 微分を用いるため、(4) の左辺第 1 項は

$$\frac{D}{Dt_h} q = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (U + u) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right\} q$$

となる。平均流が存在する場合、無次元関数 ψ は

$$\psi = \Psi + \psi$$

と表現できる。ここで、 Ψ は平均流に相当し、 y, z の関数であり、右辺第 2 項の ψ はゆらぎに相当する項である。そのため、東西流の速度 $U + u$ は

$$U(y, Z) + u = -\frac{gH}{f_0} \frac{\partial}{\partial y} \{ \Psi(y, Z) + \psi \}$$

となり、 q を平均流のみで表現したものを Q とするならば、

$$Q = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{f^2}{gBH^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho_0} H \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)$$

ここで、 Ψ は y, z の関数なので、右辺第 1 項と第 2 項は 0 となる。よって

$$Q = \frac{f^2}{gBH^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho_0} H \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)$$

である。以上より (4) は

$$\frac{D}{Dt_h} (Q + q) + \frac{f_0 \beta}{gH} v = 0$$

と書き換えられる。次に左辺第 1 項について考える。まず、 Q の Lagrange 微分は

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt_h} Q &= \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (U + u) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right\} Q \\ &= v \frac{\partial Q}{\partial y} \\ &= v \left(-\frac{f_0}{gH} \right) \left(\frac{f_0}{gB} \right) \left(\frac{u''}{H^2} + \frac{u'}{\rho_0 H} \frac{\partial \rho}{\partial Z} \right) \Delta U \end{aligned}$$

である。ここで、 $u = U/\Delta U$ である。さらに q の Lagrange 微分についても同様に式展開すると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt_h} q &= \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (U + u) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right\} q \\ &= i\lambda(U - C) \left\{ -(\lambda^2 + \mu^2) F + \frac{f_0}{gB} \left(\frac{F''}{H^2} + \frac{F'}{\rho_0 H} \frac{\partial \rho_0}{\partial Z} \right) \right\} \exp \{ i\lambda(x - ct) \} \end{aligned}$$

となる。以上より (1.6) が導かれた。

1.0.4 運動のパラメータ

我々が興味を持っている圧力や温度の範囲にとって、流体は圧縮性のあるものとして考えられなくてはならず、この仮定は3つの異なる物理過程に影響を及ぼす。

(i) ‘力学的圧縮率’は運動と音波の方程式における弾性力と関連している。音速は我々の関心事である波の速さに比べてはるかに大きく、この圧縮率の形式は除外された(モデルの音速を無限大にすることにより効果的に)。

(ii) ‘静的安定性’は鉛直方向の運動に逆らう向きの静的な力の尺度であり、温度(もしくは、密度)の勾配ではなく、エントロピー(もしくは、ポテンシャル密度)の鉛直勾配に表現されるものである。

(iii) ‘質量発散’の効果は与えられた質量の流体の体積の変化に関連する。渦度方程式は地衡流近似を用いて正確に決定することはできない $f \operatorname{div} \mathbf{V}_h$ の項を含む。それ故、連続の式が次の形式で用いられる:

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_h + \frac{\partial w}{\partial Z} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \simeq -\frac{w}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial Z}$$

故に質量の連続性(あるいは、発散)と体積の連続性との間の違いは $\kappa = -\frac{H}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial Z}$ の項で表現されており、質量発散パラメータと呼ばれている。

水平方向の運動のスケールはファクタ $\exp \lambda C_i t$ で表現される振幅を除けば、無次元パラメータ p で表され、 $\lambda^2 + \mu^2$ はその組み合わせの中に見える。もし μ を除くすべての運動のパラメータが一定であるとするならば、増幅率は $\mu = 0$ の時に最大となるだろう。これは摂動が無限の南北範囲のトラフとリッジからなると仮定されているからである。特にこのことは極域において座標系のねじれによって適切な近似ではない。傾圧域は小さな南北の範囲で観測されるものであることが加えられるだろう。しかしながら、他の研究(例えば、Eady 1949)はこれらのより現実的な場合において予期される変形の種類を指し示した。

現在の理論の保護において、この文脈の中では $\mu = 0$ が実際には $\mu \ll \lambda$ を暗示し、いかなる μ に対しても摂動がここで与えられる解から発見されうること気づくだろう。最も

重要な利点は $\mu = 0$ において摂動解は (技術的に) 非線形方程式 (4) の解であることである。故に、線形化された (1 次の) 質量の間の相関から計算された輸送特性は 2 次の効果による寄与によって歪められない。

平静な系において、摂動の運動エネルギーに転換できるポテンシャルエネルギーがある。ある点 (y_0, Z_0) において (平静な) エントロピー勾配は等エントロピー傾斜 $\alpha_I = A/B$ に伴う $\frac{\partial \phi}{\partial y} = -A$, $\frac{\partial \phi}{\partial Z} = B$ と表すことにする。今、質量 M_0 の流体を (y_0, Z_0) から $(y_0 + \delta S \cos \alpha, Z_0 + \delta S \sin \alpha)$ に移動させ、変位質量 M_1 を (y_0, Z_0) に戻すことを考えよう。この時、平均圧力場の変化を無視すると、ポテンシャルエネルギーの変化は

$$\Delta = g\delta S \sin \alpha (M_0 - M_1)$$

である。質量 M_0 のパーセルがエントロピー ϕ_0 と関連しているため、もしこの交換が断熱的に行われるならば、

$$M_1/M_0 = \exp(\phi_0 - \phi_1)$$

であり、

$$\Delta = gM(\delta S)^2 \cdot \sin \alpha (B \sin \alpha - A \cos \alpha) + 0(\delta S)^3 \quad (1.7)$$

である。ここで、

$$2M = M_0 + M_1$$

与えられた δS にとって $\alpha \simeq \frac{1}{2}\alpha_I$ の時、最大エネルギーの放出は導き出され、

$$\Delta_{max} = -gM(\delta S)^2 \frac{A^2}{4B} = -\frac{M(\delta S)^2}{4} \frac{f^2}{gB} \left(\frac{\partial U}{\partial Z} \right)^2 \quad (1.8)$$

によって与えられる。ただし、

$$\alpha_I \ll 1, \text{ さらに, } A\delta S \ll 1$$

と仮定する。この交換が水平方向の速さが $v = \delta v \exp \lambda C_i t$ と変位 $\delta S = \int_{-\infty}^t V dt$ で与えられる運動の指数関数的な増幅と一致すると仮定する。この運動の運動エネルギーの変化は次のように与えられる:

$$\Delta_{obs} = 2 \left(\frac{1}{2} M (\lambda C_i \delta S)^2 \right) = (2pc_i)^2 \Delta_{max}$$

pc_i はポテンシャルの運動エネルギーへの交換効率の尺度であり、可能な限り最も大きい値 0.5 を確認するより精密な分析が見える。

付録 A.3 (8) 式の導出

(7) を再掲する.

$$\Delta = gM (\delta S)^2 \cdot \sin \alpha (B \sin \alpha - A \cos \alpha) + 0 (\delta S)^3 \quad (7)$$

ここで, ポテンシャルエネルギーの放出が最大となる α を求める. (7) が最大になるには $\sin \alpha (B \sin \alpha - A \cos \alpha)$ が最大になればよい.

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \sin \alpha (B \sin \alpha - A \cos \alpha) \\ &= B \left(\sin^2 \alpha - \frac{A}{B} \sin \alpha \cos \alpha \right) \end{aligned}$$

ここで, 最大値を探すため, $f(\alpha)$ の傾きを調べ, $f'(\alpha) = 0$ なる α を求める.

$$f'(\alpha) = B \{ 2 \sin \alpha \cos \alpha - \alpha_I (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \}$$

より,

$$\begin{aligned} B \{ 2 \sin \alpha \cos \alpha - \alpha_I (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \} &= 0 \\ \sin(2\alpha) - \alpha_I \cos(2\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

α が極小であるとし, 上式を 1 次の項までテイラー展開すると,

$$\begin{aligned} \{ 2\alpha - O(2\alpha)^3 \} - \alpha_I \{ 1 - O(2\alpha)^2 \} &= 0 \\ \alpha &\simeq \frac{1}{2} \alpha_I \end{aligned}$$

となる. よって (7) は $\alpha = \frac{1}{2} \alpha_I$ の時, 最大値をとる. そこで次に, (7) に $\alpha = \frac{1}{2} \alpha_I$ を代入すると,

$$\begin{aligned} \Delta_{max} &= gM (\delta S)^2 \cdot \sin \left(\frac{1}{2} \alpha_I \right) \left\{ B \sin \left(\frac{1}{2} \alpha_I \right) - A \cos \left(\frac{1}{2} \alpha_I \right) \right\} + 0 (\delta S)^3 \\ &= gM (\delta S)^2 \cdot \left\{ \frac{1}{2} \alpha_I - \frac{1}{3!} \frac{\alpha_I^3}{8} \right\} A \left\{ \frac{B}{A} \left(\frac{1}{2} \alpha_I - \frac{1}{3!} \frac{\alpha_I^3}{8} \right) - \left(1 - \frac{1}{2!} \frac{\alpha_I^2}{4} \right) \right\} \end{aligned}$$

以上より, 高次の項は無視できるとすると, (1.8) の 1 つ目の等号が導かれた. さらに, 静水圧平衡の式と地衡流の関係式より, A^2 について以下のことが言える:

$$\begin{aligned} \text{静水圧平衡の式: } \frac{\partial P}{\partial Z} &= \bar{\rho} g \\ \text{地衡流の関係式: } U &= -\frac{1}{\bar{\rho} f} \frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned}$$

より, U を Z で偏微分すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial Z} &= -\frac{1}{\bar{\rho}f} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial Z} \\ &= -\frac{g}{f} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ &= -\frac{g}{f} \frac{\partial \phi}{\partial y}\end{aligned}$$

ここで, $A = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$ より,

$$\begin{aligned}A^2 &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \\ &= \frac{f^2}{g^2} \left(\frac{\partial U}{\partial Z}\right)^2\end{aligned}$$

である. ゆえに (1.8) の 2 つ目の等式はここで求めた A^2 を適応すると導かれた.

緯度に伴うコリオリパラメータの変化は平静なエントロピー勾配と共に'一般化された β パラメータ'として γ に現れる. 摂動が加えられていない等エントロピー勾配として α_I を用いると,

$$\gamma = \frac{H\beta}{f\alpha_I} = vB / \frac{v\alpha_I}{H} f$$

と書ける. 今, 子午面内の粒子の経路は流体の中程度の高さで勾配 $\frac{1}{2}\alpha_I$ の'最適条件'をもつ傾向にある. それ故, $v\alpha_I/H$ は $\frac{\partial w}{\partial z}$ の推定値であり, $v\alpha_I f/H$ は渦伸長による渦度の変化に一致する. 故に一般化 β パラメータは渦度の変化を生み出す際, 傾圧渦伸長の効果による変化と比べた, 緯度に伴うコリオリパラメータの変化がもたらす効果の指標を与える.

式 (1.6) の解は一般的に解析的な形式で表現できない. さらに, そのような解が得られる $u = z$ のような特殊な場合 (Charney 1947; Kuo 1952 を見よ) でさえ, 固有値を手計算するには膨大な手間がかかる. よって, 高速計算装置が必要になることが決定的であり, そのためには, いたる所で解を数値形式で残していくべきである. 実際に使用されている技術はここでは関係ないが, 簡単な計算は §7 で与えられる.

1.0.5 線形速度分布

エントロピー勾配が高度に依存せず (A と B は一定), 質量発散の効果を無視し ($\kappa = 0$ とおく), 運動学的な性質の制約がないとき, 式 (1.8) はポテンシャルエネルギーがどこでも等しく運動エネルギーに転換可能であることを示す. 運動を制限することのできる最も単純で可能な制約の評価はこの問題に対する 2 つの過去の解析を導く. そこで, それらの本質的な特徴のみが示されているため, 我々はこれらの扱いの詳細については関心がない.

Charney(1947) と Kuo(1952) は流体が下端は水平固体表面の峰によって有限であるが, 上端は無限であると考えた. 彼らはもし西風シアであり, $\beta > 0$ であるならば, 波の成長が起こりうるということを発見した.

Eady(1949) は流体が上端も下端も水平固体表面の峰によって有限であると考え, $\beta = 0$ における波の成長を発見した.

これらの単純化は決定的な束縛の性質を図示する. したがって, Eady の扱い方で上部境界を取り除く, あるいは Charney の扱い方で $\beta = 0$ とおくと, 問題は同じものになり,

全ての波は中立になる。これらの束縛の作用によって不安定な運動が与えられる。

1.0.6 線形分布 - β 効果

この章の趣旨は Eady の解から Charney の解への移り変わりを説明することである。なぜなら、 β 効果として、2 つの固定境界面の間の運動が重要になるからである。運動が上端と下端においてなめらかな固定水平面で束縛され、質量発散の効果 ($\kappa = 0$ とおく) を無視すると仮定しよう。

もし $\gamma = 0$ (Eady) ならば、互いの波長のための 2 つの解が存在する。長波長ならば、この解の組は摂動の加わっていない流れで平均速度を伝える増幅する波と減衰する波に一致する。すべての波の特徴は流体の中層について対称か反対称であり、成長率は有限波長において最大である。とても短い波は中立であり、この時、2 つの解は指向高度が中層に対してステアリングレベルが対称的である波に対応する (図 2 と図 5 を見よ)。

$\gamma \neq 0$ であるならば、微分方程式はもはや対称的ではなく、計算は次のことを示す:

- (i) ほぼすべての波長において成長する波は存在する。 - 不安定性を制限する短い波は存在しない;
- (ii) 追加の長い波の解はあり得る;
- (iii) もし $\gamma > 0$ ($\beta > 0$ であり、西寄りのシア) ならば、すべての波長においてステアリングレベルは中間の下にある。

これらの結果の性質を記述する中で、漠然と熱力学的過程と呼ぶことと運動学的過程と呼ぶことの間には差をつけることは便利である。もし運動が考えうるポテンシャルエネルギーの放出を行うならば、粒子の軌道は等エントロピーの傾きと水平面の間を傾きを (平均して) 持たなければならない。その他すべての粒子軌道の向きが静的安定性とは反対方向にされる仕事を必要とするため (例えば, (7) を見よ), これは必要条件である。温度場と速度場の相対的な位相が指定されていないため、十分条件ではない。

波の速度はステアリングレベル / 流体の深さの高度に等しい。適切な渦度方程式 ($\kappa = 0$) は絶対渦度の水平移流による渦度の変化と渦伸長から生じる変化のつりあい

を表す:

$$\frac{D\zeta}{Dt_h} + v\beta = f \frac{\partial w}{\partial Z}$$

今、不均一な運動にとってこの方程式の第 1 項は (自明のこととして) 波に関連した帯状移流のないステアリングレベル付近の v と比べて小さい。この時、つりあいは南への移流による渦度の変化と渦伸長による変化の間で維持されなければならない。

$$\text{例えば, ステアリングレベルにおいて, } v\beta \simeq f \frac{\partial w}{\partial Z} \quad (1.9)$$

今、このステアリングレベルが下端付近にあることを考えよう。この時、端において $w = 0$ であり、ステアリングレベルにおいては $v > 0$ より、 $\frac{\partial w}{\partial Z} > 0$ である。ゆえに、もし中間において $\frac{\partial w}{\partial Z}$ がゆっくり変化するならば、ステアリングレベルにおいて $v > 0$ より、 $w > 0$ であり、それ故、低いステアリングレベルは $\overline{vw} > 0$ を暗に示す。もし温度風が西よりならば、これは必要条件に矛盾しない。この運動が拡張しているか縮小しているかどうかは速度場と温度場との位相差による。

逆に上端付近のステアリングレベルは $\overline{vw} < 0$ を暗に示すだろう。これは西よりの温度風において必要条件を満たさず、もし温度風が東よりならば必要条件を満たす。代わりに、 v と w の相互関係と高さに伴う w の変化はエネルギー交換の性質によって暗に示される。この時、条件 (9) を満たすステアリングレベルは選ばれる。短い波において、もし境界付近のステアリングレベルの中立的な組からくる $\gamma = 0$ の短い波ならば、この傾向は重要な効果を持つ。 $\gamma > 0$ における下層の波は拡大 - 縮小の組になり、上層の波は存在しない (図 2 を見よ)。もし $\gamma < 0$ ならば、逆に下層の波が存在しない。- 数値予測の重要性であろう仕事の状態を幾分か当惑させると、上層の波の大きい - 位相速度は計算上の不安定を導きうる。

$\beta \neq 0$ の時に発生する 3 つ目の主要な効果は波が中立で表面風に関連して定常になるために重大な波長の存在である。より短い波長にとって、波の成長と縮小に対応した解の組があり、(重大な波長よりも) 長い波長にとって、少なくとも 3 つの解がある。2 つの共役な解の組は、むしろ異なる構造やより小さい成長率である。3 つ目の解は中立であり、表面風に関して逆向きに動く。

もし流体が深く、もしくはシアが小さければ (例えば、 γ が大きければ)、他の重要な点は長波長や加えられた中立波が出てくる互いの重大な点を引き起こす。例えば、Charney によって議論された問題において、流体の深さは無限であり、無数の重大な波長がある。- それは異なる多項式の解に対応している。

この長い波のふるまいは摂動の方程式の形を考える事によって最も正しく理解される:

$$(z - c)(F'' - p^2 F) + \gamma F = 0 \quad (1.10)$$

ここで、プライムはスケールハイト Z に関する違いを表す。最後の項がつりあうために、 $(z - c)$ が大きくなる時、 $F'' - p^2 F$ が小さくなるように、もし波長が大きく、 $p^2 \ll 1$ となるならば、 c が必然的に大きくなり、 $(z - c)$ の変化は不適切である。故に、我々は位相速度に伴う慣性波、例えばロスビー波、 $c \simeq -\gamma/p^2$ がわかる。

代替案は F''/F が p^2 や、有限値 c より大きくなるべきである。もしくは運動は南方の移流とすべての高度における渦伸長による渦度の変化につりあうべきである:

$$\text{すべての } Z \text{ において, } v\beta \simeq f \frac{\partial w}{\partial Z}$$

これはとても厳しい制約である:

$$vw \simeq \frac{f}{\beta} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{1}{2} w^2 \right)$$

ゆえに、固体の蓋の間の $total \int_0^H vwdz$ はゼロになる。実際、 v と w の間の相関は上層における南方の速度の反転によって与えられる。必要条件 $\overline{vw} > 0$ は唯一与えられ、成長率はそれに対応して小さい (図 2, 図 6)。

スペクトルの成長率の広域的特徴は図 3 において説明される。波数 p に関する pc_i の最大値によって測定されたポテンシャルエネルギーから運動エネルギーの変換効率は β 効果における変化にほとんど影響を受けない。例えば、 $\gamma = 0$ における最大値 pc_i は 0.310, $\gamma = 10$ においては 0.286 である。比較すると、下層表面において最大値 pc_i は '摩擦境界層' によっておよそ 0.27 減少する (動渦粘性 = $10^5 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$, $\Delta U = 30 \text{ msec}^{-1}$, $H = 10 \text{ km}$, $(gB)^{\frac{1}{2}} = 10^{-2} \text{ sec}^{-1}$, $f = 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$, $\gamma = 0$)。シアーが大きい時に長い波が支配的であるという意味では、成長率の最大値を引き起こす波長 (支配的な波長) はシアーに伴って著しく変化する。これは $\beta \neq 0$ の時に生じる長い波の一般的な安定性に一致する。

1.0.7 線形分布 - 成層圏

最初の重大な波長よりも小さい波長に伴う (1.10) の解は鉛直方向に指数的な変化を持つ。それは一般的に水平方向に大きな規模を持つ波も高度の大きい方へ拡大する。故に、

固体リッジの上部境界は長い波にとって‘現実的’ではなく、それ故無限の静的安定性を伴う上層の代わりに積み重ねられた大きな静的安定性の準無限層を用いた計算もある (リッジ).

平静な対流圏は水平方向に仮定され、対流圏の静的安定性の 4 倍もある成層圏の静的安定性と線形速度分布は上方に無限に拡張された。 u の高度に伴う無限的な増加において、解の減少が物理的にのみ相関を持つように、すべての解が最終的に指数関数であることが (1.6) から見られる。さらに、たとえ u が有限値で与えられるとしても、解は c の実数項、例えば、重大な波、に伴って振動するだけである。

上層の静的安定性の減少はステアリングレベルの転置の上方に生じる。 $B_s/B_T = 4$, $\gamma = 0$ に伴い、支配的な波の速さは 0.72 であり、 pc_i の最大値は図 4 の単位において 0.29 である。しかし、 $B_s/B_T = 4$, $\gamma = 0$ に伴って、ステアリングレベルは中層下部において保存され、長い波の傾向に伴う (図 4 と表 1 を見よ) が、スペクトルは対応する剛体のリッジのスペクトルによく似ている。この成層圏の存在が最大成長率の僅かな増加を導くということに記述することは $\gamma = 1$ にとって興味深いことである。ここでこれはステアリングレベルのより対称的な位置に関連する。

残念ながら、西風シアーに対応する $\gamma < 0$ を用いた計算はできない。我々は表面の小さな振幅に伴って、波がそれらのステアリングレベルを持ち、最大振幅が対流圏より遠くに置き換えられるということに予期するだろう。

1.0.8 線形分布 - 質量発散

連続の式における高さに伴った密度変化の効果は質量発散パラメータ κ の項における表現される。温度風の方程式に対応する厄介事はあるが、圧力が鉛直座標として用いられるとき、この質量発散の効果は暗黙のうちに含まれる。(1) の右辺を拡張すると我々は、

$$\frac{D\zeta}{Dt_h} + v\beta = \frac{f}{\rho} \frac{\partial}{\partial Z} (\rho w) \simeq f \frac{\partial w}{\partial Z} + \frac{f}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dZ} w$$

を得る。 v と w が互いに正の相関を持つとき、右辺第 2 項は β 効果を高めるということは簡単に見られる。すでに短い波が β 効果によって不安定になることは記述されており、 $\gamma\kappa > 0$ であるためにこの効果が強くなるのがわかる (図 4 を見よ)。

$\kappa > 0$ に伴って、ステアリングレベルが低くなるため、長い波のステアリングレベルは実際には圧力座標に関して変化しない。しかしながら、これらの長い波にとって、質量発散が (1.6) によって与えられる一般化 β パラメータの効果の一因とはならないことがわかる。例えば、 $\kappa \neq 0$ の時、短い波は不安定 (図 2 と比較しよう。ここで、 $\gamma\kappa = 0$ であり、短い波は安定である) だが、 $\gamma = 0$ と任意の κ に伴って、重大な波は存在しない。

特殊な運動エネルギー $\frac{1}{2}\rho\mathbf{V}$ が質量発散効果に対して等エントロピーであるため、すべての波の振幅は歪む。

謝辞

本論文を書くにあたって、林教授には研究内容についての基礎的な知見を授けていただき、指導教官である岩山准教授には的確な指摘と教育的配慮の下、研究内容の進展や私自身の成長のためにお力添えをいただいた。また、高橋准教授には研究内容についての私自身の誤解を解いていただいたり、さらなる研究の進展に欠かせない助言をいただいた。さらには、研究室の先輩方にも研究に関する基礎的な理解を助けるような助言をたくさんいただいた。多様な面で多くの協力を得ることができ、惑星大気科学研究室の皆様へ深く感謝を申し上げる。

参考文献

- 伊藤朋之, 住明正, 新田尚, 野瀬純一, 2005: 気象ハンドブック, 第3版, 朝倉書店
- Isamu Hirota, 1968: On the Dynamics of Long and Ultra-Long Waves in a Baroclinic Zonal Current*, Journal of the Meteorological Society of Japan, 46, 234-249.
- Green, J. S. A. 1960: A problem in baroclinic stability
- 木村 竜治 1983: 地球流体力学入門-大気と海洋の流れのしくみ, 東京堂出版
- 浅井 富雄 新田 尚, 松野 太郎, 2000: 基礎気象学, 朝倉書店
- Vallis, G. K. 2006: Atmospheric and oceanic fluid dynamics-fundamentals and large-scale circulation, Cambridge University Press.