

# 地球流体コアの 支配方程式

流体地球物理学分野

1833484s

服部蒼紀

# はじめに

- 目標
  - 支配方程式を計算, 地磁気の無次元量依存性を考察する.
  - 他天体の同様な構造に適用させる.
- ここでは
  - 地球流体コアにおいてどのような条件下で支配方程式が成り立つのかを説明する.
  - 具体的には非弾性近似, ブシネスク近似, (MHD 近似) である.
- 流体コアが満たす仮定
  - 化学的組成が均一 (熱力学で化学ポテンシャルの項はない)
  - ほとんど均一エントロピー (平均的なエントロピーの時間変化は 0)
  - ほとんど静水圧平衡 ( $\rho$  と  $p$  は 1 対 1 対応)

# 基礎方程式

- ナビエ=ストークスの式

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s$$

- 連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

- 熱力学の式

$$dU + pdV = \delta Q$$

- フーリエの法則

$$\mathbf{q} = -k \nabla T$$

- マクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- オームの法則

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}'$$

# 非弾性近似とブシネスク近似

- 方程式に表れる値の平均値からのズレが小さいと仮定する.
- 圧力  $p$ , 温度  $T$ , 密度  $\rho$ , エントロピー  $S$ , の摂動方程式を求める.
- 連続の式に対して摂動方程式を求めると,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

の非圧縮性が求まる.

ただしこのとき,  $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0$  の近似を行なったこれは音波が存在しないことを示し, 非弾性近似と呼ばれる.

# 剛体回転中の物質微分

- 剛体回転中の物質微分が  $\left(\frac{dA}{dt}\right)_{rest} = \left(\frac{dA}{dt}\right)_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}$  であるので加速度を陽に書くと

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{rest} = \mathbf{a} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{x} + \frac{1}{2}\nabla[(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2]$$

- $\boldsymbol{\Omega}$ が一定とすると, ナビエ=ストークス方程式は

$$\rho \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \right) = \rho \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s$$

# 体積力と面積力

- 体積力は地球流体コアにおいてはローレンツ力  $\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$  と重力である.
- 面積力は圧力  $p$  と粘性応力  $\tau$  である.
- ニュートン流体では粘性応力は

$$\tau_{ij} = \rho\nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

と書ける.

# ナビエ=ストークス方程式

- 非弾性近似とブシネスク近似下の回転系の摂動のナビエ=ストークス方程式は次のようになる.

$$\begin{aligned} & \rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \right) \\ & = -\nabla \left[ p + \frac{1}{2} \rho \nabla (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 \right] + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} \end{aligned}$$

- このとき流体が非圧縮であることが必要になる.

# 熱力学の式

- 熱力学の式  $dU + pdV = \delta Q$  は

$$\rho \frac{dU}{dt} - \frac{p d\rho}{\rho dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \varepsilon + H_M$$

となる.

- 熱力学関係式  $dU + pdV = TdS$  とフーリエの法則より

$$\rho T_0 \frac{dS_1}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T_0) + \varepsilon + H_M$$

$H_M$  は後述するオーム加熱である.

下付き添え字で 0 は平均値であり, 1 は摂動の値である.

# MHD 近似 (1)

- 電磁場の中で運動する物体が光速より十分遅い場合  
ファラデーの法則  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$   
またはアンペールの法則  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  が成り立たない。
- オームの法則で必要な慣性系からみた電場は

$$\mathbf{E}' = (1 - \gamma) \left( \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{v}}{v} \right) + \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

となるが、ローレンツ因子  $\gamma \approx 1$  なので  $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

## MHD 近似 (2)

- アンペールの法則の電場の時間変化を無視し, MHD 近似下のオームの法則を適用すると誘導方程式が求まる.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\mu\sigma} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

- これは磁場の時間偏微分なので回転系でも成り立つ.
- 一般的な電磁場の問題と同じくローレンツ力は

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

## MHD 近似 (3)

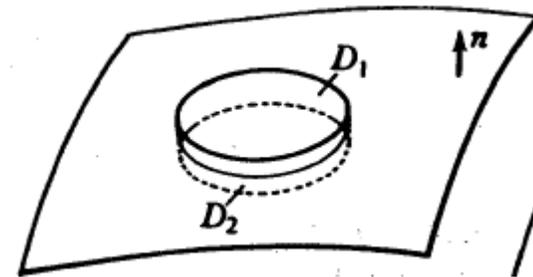
- 誘導方程式と  $\frac{\mathbf{B}}{\mu}$  の内積をとると, エネルギー方程式が求まる.

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu} \right) dV = \int_V \left( -\nabla \cdot \left( \mathbf{E} \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) - \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma} \right) dV$$

- 右辺第 3 項は抵抗による加熱の項でオーム加熱と呼ばれる.

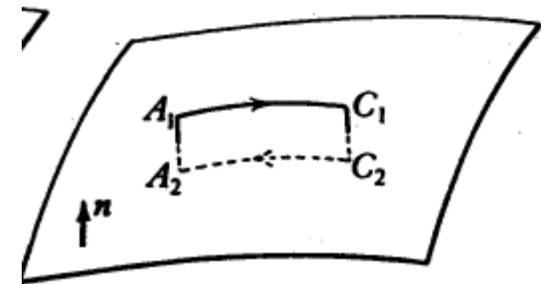
# 境界条件 (接線成分)

- 図のように境界をまたがる円柱の領域に対してソレノイド条件を積分すると、磁場が境界において連続であることが示される.
- 同様にガウスの法則を円柱領域で積分すると電荷密度の項が残り、境界とは電荷密度が異なる場所なので不連続であることがわかる.



# 境界条件（法線成分）

- 図のように境界をまたがる領域でファラデーの法則を積分すると、領域を貫く磁束がなくなるため、電場は連続である。
- MHD下の  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}$  アンペールの法則を領域で積分し、短辺を 0 にする極限をとるとどちらの領域でも電流が有限の値なら打ち消しあい連続である。



# まとめ

- ナビエ=ストークス方程式はローレンツ力が加わる.
  - 密度の変化が小さいと仮定しているため, 音波を考えない.
- 熱力学の式は一般的な加熱に加えてオーム加熱の項が増える.
- MHD 方程式は流体の運動が光速よりも十分に遅いときに成り立つ.
  - 誘導方程式は磁場の時間偏微分なので慣性系でも回転系でも成り立つ.
  - アンペールの法則が成り立たないので近似では電磁放射は失われる.
  - 電磁場の変化は情報を伝搬することのみに使われる.

# 参考文献

- Gubbins, D., and Roberts, P.H., 1987: Magnetohydrodynamics of the earth's core. Jacobs, J.A., Ed., Geomagnetism, Vol.2, 1–184.
- 吉田茂生, 竹広真一, 佐々木洋平, 林祥介, 2002: 磁気流体力学 (MHD) の定式化. at <https://www.gfd-dennou.org/library/riron/mhd/teishiki/pub/teishiki.pdf> (2021 年11 月閲覧)
- 木村龍治 (1983) 『地球流体力学入門』東京堂出版 (気象学のプロムナード).