

モニン・オブコフの相似則 (2)

神戸大学大学院理学研究科惑星学専攻
流体地球物理学教育研究分野M1
入場柚太

目次

- はじめに
- 大気境界層境界層内の乱流状態にある風速と気温を支配する方程式
- モニン・オブコフの相似則
- モニン・オブコフの相似則の適用
- 普遍関数の形
- まとめ

はじめに

- 境界層とは地表面の影響を大きく受ける層のことであり, 地表面に最も近い大気層である.
- 地表面からの摩擦・加熱・冷却の影響を受ける層である. また, 強い対流や乱流が存在している.
- 地表面と大気との間で交換が行われている.
 - 地面の摩擦によって風速が弱まる. 大気から地面に運動量が輸送されている.
 - 顕熱が地面から大気に供給されている.
 - 水の蒸発により水蒸気が地面から大気に供給されている.

- 日中の大気境界層は主に三つの層に分かれており、地表面に近い順に接地層, 混合層, エントレインメント層である. 夜間は安定境界層が広がる.
- 境界層の上層は自由大気が広がっている. 自由大気とは地面からの摩擦の影響を受けない大気のことである.
- 接地層は地面からの摩擦の影響が最も強い層である.

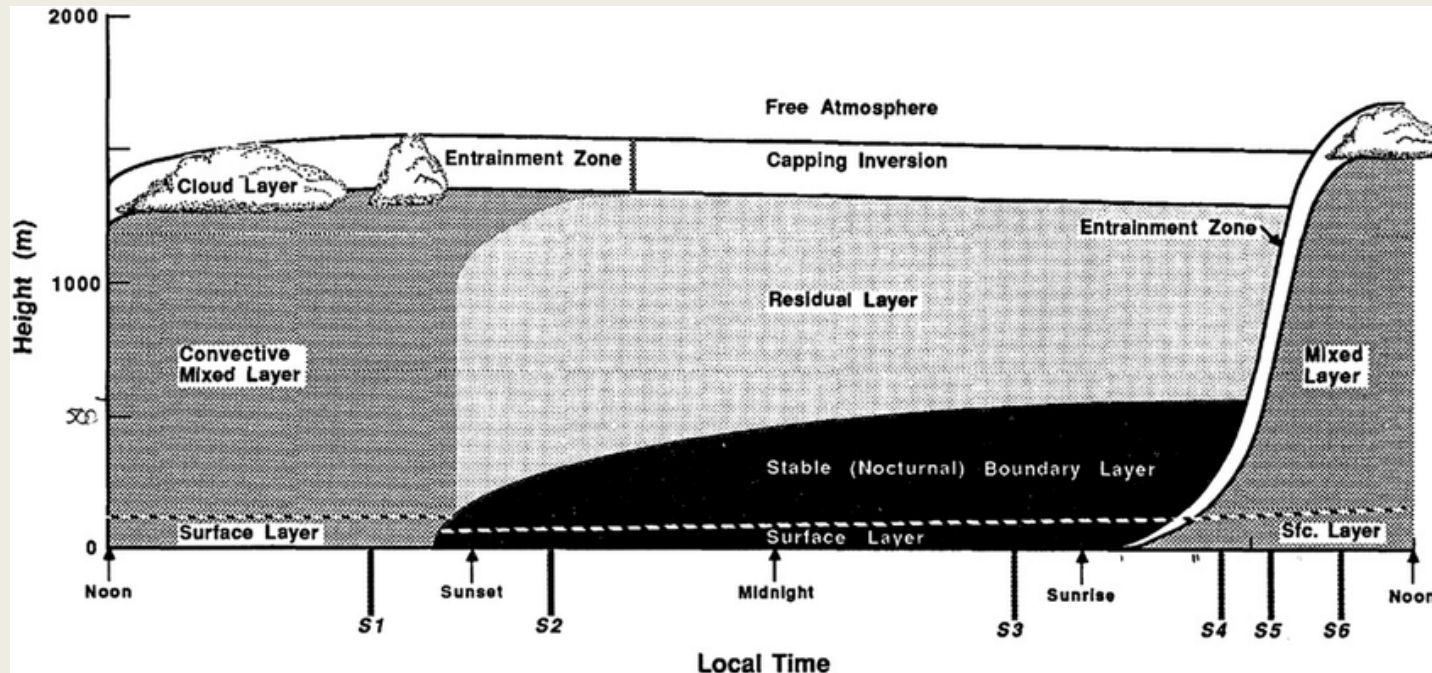


図1：境界層の日変化を表した模式図. 縦軸が高度, 横軸が時間である.

本セミナーの内容

- 前期の大気セミナーでは、大気境界層内の接地層で成り立っている相似則である、モニン・オブコフの相似則について紹介した。後期のセミナーでは、前期の大気セミナーの内容をより詳しく紹介する。

大気境界層境界層内の乱流状態にある風速と気温を支配する方程式

- 平坦で一様な地表を想定して, 大気境界層の現象を考える.
 - 大気境界層境界層内の乱流状態にある風速と気温を支配する方程式を考えるにあたり, 以下のように記号を用いる.
- u : 東西方向の風速, v : 南北方向の風速, w : 鉛直方向の風速, f : コリオリパラメータ
 P : 気圧, ρ_0 : 平均場の密度, θ : 温位, ρ : 密度, μ : 粘性係数, R : 気体定数, C_p : 定圧比熱,
 z_0 : 粗度
- 上線はアンサンブル平均, ダッシュ記号は偏差を表す.

- ◆ ブジネスク近似を行った f 平面上のナビエストークス方程式は, x 方向では (1) 式で表される.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\mu}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

ここで u, v, w, P を平均成分 (上線) とそこからの偏差 (' で表す) に分けて表し, (1) 式に代入し, 全体を平均すると (2) 式となる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{(\bar{u} + u')} + \overline{(\bar{u} + u')} \frac{\partial}{\partial x} \overline{(\bar{u} + u')} + \overline{(\bar{v} + v')} \frac{\partial}{\partial y} \overline{(\bar{u} + u')} + \overline{(\bar{w} + w')} \frac{\partial}{\partial z} \overline{(\bar{u} + u')} \\ - \overline{f(\bar{v} + v')} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \overline{(\bar{P} + P')} \\ = \frac{\mu}{\rho_0} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \overline{(\bar{u} + u')} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \overline{(\bar{u} + u')} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \overline{(\bar{u} + u')} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

ϕ と ω は任意の場の変数として, 一般に平均成分と偏差の間で

$$\overline{\bar{\phi}} = \bar{\phi}, \quad \overline{\phi'} = 0, \quad \overline{\phi'\omega'} \neq 0$$

となることに注意すると, (2) 式の左辺第二項は, (3) 式と変形できる.

$$\overline{(\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u')} = \overline{\bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}} + \overline{\bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} u'^2 \quad (3)$$

同様にして, (2) 式の左辺第三項と第四項はそれぞれ (4) (5) 式と変形できる.

$$\overline{(\bar{v} + v') \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u} + u')} = \overline{\bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \bar{u}} + \overline{\bar{v} \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} = \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y}} \quad (4)$$

$$\overline{(\bar{w} + w') \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u} + u')} = \overline{\bar{w} \frac{\partial}{\partial z} \bar{u}} + \overline{\bar{w} \frac{\partial u'}{\partial z}} + \overline{w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} = \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} - \overline{u' \frac{\partial w'}{\partial z}} \quad (5)$$

その他の項も変形して, (2) 式をまとめると (6) 式となる.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - f\bar{v} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \bar{u} - \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} + \overline{u' \frac{\partial v'}{\partial y}} + \overline{u' \frac{\partial w'}{\partial z}} \quad (6)$$

ここで連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

を用いると (6) 式は (7) 式と変形できる.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - f\bar{v} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \bar{u} - \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \quad (7)$$

ここで境界層は水平スケールが鉛直スケールより十分に大きいいため, 乱流による東西運動量のフラックスの発散について, 鉛直方向の変化が他の方向よりも大きいことから, 前者のみを考えることにする. また, 分子運動による運動量フラックスは乱流によるものと比べて二桁以上小さいので無視することにする.

(7) 式は (8) 式と書ける.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + f\bar{v} - \frac{\overline{\partial u' w'}}{\partial z} \quad (8)$$

また, y 方向についても同様にして計算すると (9) 式のように書ける.

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} - f\bar{u} - \frac{\overline{\partial v' w'}}{\partial z} \quad (9)$$

◆ 熱力学方程式は (10) 式である.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \kappa \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (10)$$

ここで κ は熱拡散係数である. ここで u, v, w, θ を平均成分 (上線) とそこからの偏差 (' で表す) に分けて表し, (10) 式に代入し, 全体を平均すると (11) 式となる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{(\bar{\theta} + \theta')} + (\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\theta} + \theta') + (\bar{v} + v') \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\theta} + \theta') + (\bar{w} + w') \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\theta} + \theta') \\ = \kappa \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \overline{(\bar{\theta} + \theta')} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \overline{(\bar{\theta} + \theta')} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \overline{(\bar{\theta} + \theta')} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

(11) 式を風速の時と同じように変形を行うと左辺第二項, 第三項, 第四項はそれぞれ (12)(13)(14) 式となる.

$$\overline{(\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\theta} + \theta')} = \overline{\bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}} + \overline{\bar{u} \frac{\partial \theta'}{\partial x}} + \overline{u' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}} + \overline{u' \frac{\partial \theta'}{\partial x}} = \bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u' \theta'}}{\partial x} - \overline{\theta' \frac{\partial u'}{\partial x}} \quad (12)$$

$$\overline{(\bar{v} + v') \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\theta} + \theta')} = \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \overline{v' \frac{\partial \theta'}{\partial y}} + \overline{v' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}} + \overline{v' \frac{\partial \theta'}{\partial y}} = \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v' \theta'}}{\partial y} - \overline{\theta' \frac{\partial v'}{\partial y}} \quad (13)$$

$$\overline{(\bar{w} + w') \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\theta} + \theta')} = \bar{w} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \overline{w' \frac{\partial \theta'}{\partial z}} + \overline{w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}} + \overline{w' \frac{\partial \theta'}{\partial z}} = \bar{w} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{w' \theta'}}{\partial z} - \overline{\theta' \frac{\partial w'}{\partial z}} \quad (14)$$

まとめると (11) 式は (15) 式のように書ける.

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u' \theta'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v' \theta'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w' \theta'}}{\partial z} = \kappa \nabla^2 \bar{\theta} + \overline{\theta' \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right)} \quad (15)$$

連続の式より, (15) 式は (16) 式となる.

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u' \theta'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v' \theta'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w' \theta'}}{\partial z} = \kappa \nabla^2 \bar{\theta} \quad (16)$$

ここで境界層は水平スケールが鉛直スケールより十分に大きいため, 乱流による熱フラックスの発散について, 鉛直方向の変化が他の方向よりも大きいことから, 前者のみを考えることにする. また, 分子運動による運動量フラックスは乱流によるものと比べて二桁以上小さいので無視することにする. そうすると (16) 式は (17) 式となる.

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = - \frac{\overline{\partial w' \theta'}}{\partial z} \quad (17)$$

- 平均風速及び平均気温は式 (8)(9)(17) によって支配されている。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + f \bar{v} - \frac{\overline{\partial u' w'}}{\partial z} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} - f \bar{u} - \frac{\overline{\partial v' w'}}{\partial z} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = - \frac{\overline{\partial w' \theta'}}{\partial z} \quad (17)$$

- 次に風速の鉛直成分について考える.
- ブジネスク近似を行った f 平面上のナビエストークス方程式は, z 方向に関しては (18) 式で表される.

$$\frac{D}{Dt}w = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} p - \frac{\rho}{\rho_0} g + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 w \quad (18)$$

- 基本場では, 風速がゼロであり, 圧力は p, 密度は ρ である. p, ρ を平均と偏差に分けると (18) 式は (19) 式と書ける. ここで右辺第二項は ρ/ρ を前に加え, 分子を平均と偏差に分けている.

$$\frac{D}{Dt}w = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p} + p') - \frac{\bar{\rho} + \rho'}{\rho_0} g + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 w \quad (19)$$

- 基本場においてもナビエストークス方程式が成り立っているため (20) である.

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{p} = -\bar{\rho} g \quad (20)$$

- (19) に (20) を代入することにより (18) 式は (21) と書ける.

$$\frac{D}{Dt}w = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} p' - \frac{\rho'}{\rho_0} g + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 w \quad (21)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho} g$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} g = 0$$

- ここで理想気体の状態方程式が成り立ち, 密度の変動は温度偏差と圧力偏差によってもたらされるとする. 圧力偏差の大きさ $|p'/\bar{p}|$ が温度偏差の大きさ $|T'/\bar{T}|$ に比べて十分に小さいと仮定すると, 密度偏差は温度偏差のみによって決まり, (22) 式で表される.

$$\frac{\rho'}{\rho} \approx \frac{\frac{1}{\bar{T}+T'} - \frac{1}{\bar{T}}}{\frac{1}{\bar{T}+T'}} = -\frac{T'}{\bar{T}} \quad (22)$$

- ここでは $\rho = P/RT$ を用いて P, T を平均と偏差に分け, $|p'/\bar{p}| / |T'/\bar{T}|$ は 1 と比べて十分に小さいので 0 として近似している.
- 温位の定義 $\theta = T (P_0/P)^{(R/C_p)}$ を微分した下の式

$$dT = d\theta \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{-R}{C_p}} - \frac{R\theta}{C_p} \cdot \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{-R}{C_p}-1} \cdot d\left(\frac{P_0}{P}\right) \quad \text{ただし } d\left(\frac{P_0}{P}\right) = \frac{P_0}{P^2}dP \text{ である.}$$

と温位の定義式を変形した式 $1/T = 1/\theta \cdot (P_0/P)^{(R/C_p)}$ を掛けると(23) 式が成立する.

$$\frac{dT}{T} = \frac{d\theta}{\theta} + \frac{R}{C_p} \frac{dp}{p} \quad (23)$$

- 圧力偏差が温度偏差に比べて十分に小さい場合には (24) 式のように近似することが出来る.

$$\frac{T'}{\bar{T}} \approx \frac{\theta'}{\bar{\theta}} \quad (24)$$

- (22) (24) を (21) に代入して (25) が得られる.

$$\frac{D}{Dt}w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} p' + g \frac{\theta'}{\bar{\theta}} + \mu \nabla^2 w \quad (25)$$

- 鉛直方向の加速度は, 浮力項により支配されていると仮定して (25) 式の圧力傾度項と粘性項を無視すると (26) 式となる.

$$\frac{D}{Dt}w = \frac{\theta'}{\bar{\theta}} g \quad (26)$$

- (8)(17)(26)より, 大気境界層内の乱流状態にある風速と気温を支配する要因は, 以下の5つが考えられる.
 - 地表における下向きの運動量フラックス $-\overline{u'w'}$
 - 地表における上向きの温度フラックス $-\overline{\theta'w'}$
 - 浮力を表すパラメータ g/θ_0
 - コリオリのパラメータ f
 - 圧力傾度力 $\partial P/\partial x$
- ただし接地層では, その厚さが比較的薄く高さによる風向変化が無視でき, 摩擦の影響が強いため, コリオリパラメータは考慮しなくてもよい.

ここまでのまとめ

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + f\bar{v} - \frac{\overline{\partial u'w'}}{\partial z} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = -\frac{\overline{\partial w'\theta'}}{\partial z} \quad (17)$$

$$\frac{D}{Dt} w = \frac{\theta'}{\bar{\theta}} g \quad (26)$$

- 大気境界層内の乱流状態にある風速と気温を支配する要因は、以下の5つが考えられる。
 - 地表における下向き運動量フラックス - $\overline{u'w'}$
 - 地表における上向き温度フラックス - $\overline{\theta'w'}$
 - 浮力を表すパラメータ g/θ
 - コリオリのパラメータ f
 - 圧力傾度力 $\partial P/\partial x$

モニン・オブコフの相似則

- モニンとオブコフは、理想化された接地層として、統計的には定常で水平一様と見なせる気層を考え (圧力傾度力を無視する), 次の提案をした.
- 境界層内の乱流状態にある風速や気温の各種統計量は, 地表における運動量フラックス ($-\overline{u'w'}$) と温度フラックス ($\overline{\theta'w'}$), 浮力パラメータ (g/θ_0) だけで決定される.
- ここで, $[\overline{u'w'}] = L^2T^{-2}$, $[\overline{\theta'w'}] = LT^{-1}\Theta$, $[g/\theta_0] = LT^{-2}\Theta^{-1}$ であることに注意すると以下の三つの基本スケール (27) (28) (29) が定義できる. ただし L, T, Θ はそれぞれ長さ, 時間, 温度の次元を表している. また式 (29) の κ はカルマン定数を表す.

$$u_* \equiv -(\overline{u'w'})^{1/2} \quad (27)$$

$$T_* \equiv -\overline{\theta'w'}/u_* \quad (28)$$

$$L \equiv -\frac{u_*^3\theta_0}{\kappa g\overline{\theta'w'}} \quad (29)$$

- 接地層における風速及び気温についての統計量を F として, 式(27)(28)(29) で表される3つの基本的スケールでつくった F と同じ次元を持つ量を F_* とする.
 $g_F(z/L)$ を, F についての普遍関数とし, (z/L) のみの関数で, 観測によって決定される. このとき式 (30) が成り立つことをモニン・オブコフの相似則という.

$$F/F_* = g_F(z/L) \tag{30}$$

モニン・オブコフの相似則の適用

- 風速及び温度の平均値の鉛直分布を考えるにあたり、モニン・オブコフの相似則を適用してみる。なお U を平均風速、 θ を平均気温とする。
- まず、平均風速の鉛直勾配について、式(27)(28)(29)で表されているスケールで無次元化すれば、無次元化された地上高 z/L の関数で表される。 U についての普遍関数を g_u として、式(30) の F を U 、 F_* を u_* に置き換えて変形し、 z で微分すると (31) 式となる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[u_* g_u \left(\frac{z}{L} \right) \right] \\ &= u_* \frac{\partial}{\partial z} g_u \left(\frac{z}{L} \right) \\ &= u_* \frac{1}{L} \frac{\partial g_u}{\partial (z/L)} \\ &= u_* \frac{1}{L\kappa} g_m \left(\frac{z}{L} \right)\end{aligned}\tag{31}$$

- ここで g_m は $g_m = \kappa \partial g_u / \partial (z/L)$ とおいた普遍関数である。カルマン定数 κ は便宜的に採用されたものである。

- 平均温度の鉛直勾配についても同様にして g_θ を θ に関する普遍関数とすると (32) 式となる.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[T_* g_\theta \left(\frac{z}{L} \right) \right] \\ &= T_* \frac{\partial}{\partial z} g_\theta \left(\frac{z}{L} \right) \\ &= T_* \frac{1}{L} \frac{\partial g_\theta}{\partial (z/L)} \\ &= T_* \frac{1}{L\kappa} g_h \left(\frac{z}{L} \right)\end{aligned}\tag{32}$$

ここでも同様に g_h (は $g_h = \kappa \partial g_\theta / \partial (z/L)$) とおいた普遍関数である. カルマン定数 κ は便宜的に採用されたものである.

- つまり, 平均風速及び平均温度の分布は, それぞれ式 (31), (32) を z について積分すれば求められる.

- ここで $\zeta (\equiv z/L)$ として (33) 式を定義する.

$$f_i(\zeta) = \int^{\zeta} g_i(\zeta) d\zeta \quad i = m, h \quad (33)$$

- (31) 式を z について積分すると (34) 式となる.

$$U(z) = \frac{u_*}{\kappa L} \left[f_m \left(\frac{z}{L} \right) - f_m \left(\frac{z_0}{L} \right) \right] \quad (34)$$

ここで z_0 は \bar{u} が 0 になる z の値を表す. この式は (35) 式のように書ける.

$$U(z_2) - U(z_1) = \frac{u_*}{\kappa L} \left[f_m \left(\frac{z_2}{L} \right) - f_m \left(\frac{z_1}{L} \right) \right] \quad (35)$$

ここで z_1, z_2 はある2つの高度を表している. 温度に関しても風速と同様に (36) 式となる.

$$\theta(z_2) - \theta(z_1) = \frac{T_*}{\kappa L} \left[f_h \left(\frac{z_2}{L} \right) - f_h \left(\frac{z_1}{L} \right) \right] \quad (36)$$

- モニン・オブコフの相似則は、次元解析を基礎としているので、常に実測で確かめなければならない。
- 右図は様々な野外観測で得られた接地層の平均風速の観測資料を整理したものである。
- 観測値がよくまとまっていることによって平均風速を決める普遍関数 $f_m(\zeta)$ の存在が裏付けされたことになる。
- モニン・オブコフの相似則が接地層の現象をよく説明している。

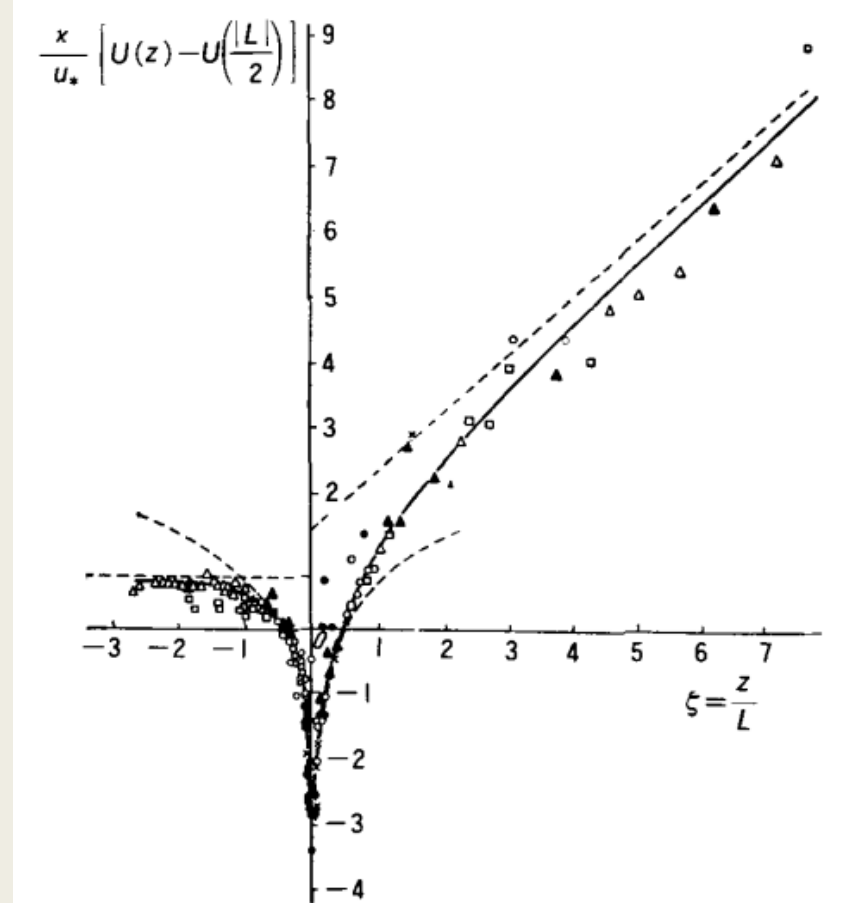


図 1.5 種々の野外観測で得られた平均風速 $U(z)$ と無次元の高さ z/L との関係 (Monin and Obukhov, 1954). 縦軸は普遍関数 $f_m(\zeta) - f_m\left(\pm\frac{1}{2}\right)$ に相当し、観測値がまとまっていることは、相似則の存在の裏づけと考えられる。

普遍関数の形

- 接地層の安定度が通常の場合は (27)(28)(29) の三つのスケールを用いればよいが、安定度が極端な場合にはこれらのスケールが使えなくなることが考えられる。
- 安定度が中立に近い場合、観測により以下の対数則が成立することが知られている。

$$U(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} \quad (37)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa} \frac{1}{z} \quad (38)$$

また $z=0$ で g_m は無有限大になるので、以下の式も普遍関数としてよく使われている。

$$\phi_m(\zeta) \equiv \zeta g_m(\zeta) = \frac{\kappa z}{u_*} \frac{\partial U}{\partial z} \quad (39)$$

(38)(39) を比較して $\phi_m(0)=1$ より $|\zeta| \ll 1$ として $\phi_m(\zeta)$ をテイラー展開すると

$$\phi_m(\zeta) = 1 + \beta_{m1}\zeta + \beta_{m2}\zeta^2 + \dots \quad (40)$$

したがって

$$f_m(\zeta) = \int^{\zeta} \phi_m/\zeta d\zeta = \text{const.} + \ln|\zeta| + \beta_{m1}\zeta + \dots \quad (41)$$

(40) 式の右辺第二項までとり, β_{m1} を β とおくと (34)(41)より

$$U(z) = \frac{u_*}{\kappa} \left(\ln \frac{z}{z_0} + \beta \frac{z - z_0}{L} \right) \quad (42)$$

となる. ただし β は実測によって決めるべきものである.

- 非常に不安定な場合
 - 基本スケール (27) (28) (29) が使えない.

この状態は $-z/L \gg 1$ の場合であり, $-L$ が小さいとき, z が大きいときに生じる.

接地層のような薄い気層でも, 風が弱くて日射が強く, 比較的高いところで満たされることがある.

このような場合, u_* は 0 に近くなり, 重要な量とは言えなくなり速さのスケールとは見なされない. このとき接地層の風速と気温を支配する基本的な量として $\overline{\theta'w'}$, g/θ_0 の他に, 独立変数としての高さ z を採用しなければならない. つまり (43) である.

速さ
$$u_f \equiv (zg\overline{\theta'w'}/\theta_0)^{1/3}$$

温度
$$T_f \equiv \overline{\theta'w'}/u_f \tag{43}$$

長さ
$$z$$

(27)(43)より (44) 式となる.

$$\begin{aligned} u_*^3 &\equiv \frac{-Lg\overline{\theta'w'}}{\theta_0} \\ \frac{u_f}{u_*} &\sim \left(\frac{-z}{L}\right)^{1/3} \\ \frac{T_f}{T_*} &\sim -\left(\frac{-z}{L}\right)^{-1/3} \end{aligned} \tag{44}$$

従って, 風速変動は中立に近い場合と比べて非常に大きい, 気温変動は小さい.

相似則によって平均速度の鉛直勾配は (45) のように表される.

$$\frac{\partial U}{\partial z} \sim \frac{U_f}{z} \tag{45}$$

普遍関数 ϕ_h で表してみる. (44) (45) (39)より (46) となる.

$$\phi_m = \frac{\kappa z}{u_*} \frac{\partial U}{\partial z} \sim \frac{\kappa z}{u_*} \frac{u_f}{z} \sim \left(-\frac{z}{L}\right)^{1/3} \quad (46)$$

■ 非常に安定な場合 ($z/L \gg 1$)

安定な気層では温度勾配は正である。平衡状態にある空気塊を断熱的に持ち上げると、周囲に比べて温位は低くなり、そこで放すと元の位置に戻ろうとする。安定度が強ければ強いほどこの力は大きく、上下運動は制限される。

中立状態のとき乱れの代表的な長さは地上高 z の程度と考えられるので、安定な場合はこれより小さくなり、非常に安定な場合には、 z に無関係になると予想される。安定度が増して極限の場合には、独立変数 z の意味がなくなり、その代わりに長さスケール L を使わざるをえない。つまり、速さ、温度、長さのスケールは (27)(28)(29) のスケールで表されるが、 z は意味を持たなくなる。

平均速度の鉛直勾配は、(47) 式で表される。

$$\frac{\partial U}{\partial z} \sim \frac{u_*}{L} \quad (47)$$

よって普遍関数は (48) 式のように表される.

$$\phi_m = \frac{\kappa z}{u_*} \frac{\partial U}{\partial z} \sim \frac{\kappa z u_*}{u_* L} \sim \frac{z}{L} \quad (48)$$

まとめ

- 接地層における風速及び気温についての統計量を F として, 式(27)(28)(29) で表される3つの基本的スケールでつくった F と同じ次元を持つ量を F_* とする.
 $g_F(z/L)$ を, F についての普遍関数とし, (z/L) のみの関数で, 観測によって決定される. このとき式 (30) が成り立つことをモニン・オブコフの相似則という.

$$u_* \equiv -(\overline{u'w'})^{1/2} \quad (27)$$

$$T_* \equiv -\overline{\theta'w'}/u_* \quad (28)$$

$$L \equiv -\frac{u_*^3 \theta_0}{\kappa g \overline{\theta'w'}} \quad (29)$$

- 接地層における風速及び気温についての統計量を F として, 式(27)(28)(29) で表される3つの基本的スケールでつくった F と同じ次元を持つ量を F_* とする.
 $g_F(z/L)$ を, F についての普遍関数とし, (z/L) のみの関数で, 観測によって決定される. このとき式 (30) が成り立つことをモニン・オブコフの相似則という.

- 普遍関数の形は以下の三つによって場合分けされる.

- 中立の場合

$$\phi_m(\zeta) = 1 + \beta_{m1}\zeta + \beta_{m2}\zeta^2 + \dots \quad (40)$$

- 不安定の場合

$$\phi_h = \frac{\kappa z}{T_*} \frac{\partial \theta}{\partial z} \sim \frac{\kappa z}{T_*} \frac{T_f}{z} \sim \frac{T_f}{T_*} \sim \left(-\frac{z}{L}\right)^{-1/3} \quad (46)$$

- 安定の場合

$$\phi_m = \frac{\kappa z}{u_*} \frac{\partial U}{\partial z} \sim \frac{\kappa z}{u_*} \frac{u_*}{L} \sim \frac{z}{L} \quad (48)$$

参考文献

- 大気科学講座 (1) 地表に近い大気, 竹内清秀・近藤純正 著, 東京大学出版会, 1981
- Read et al. (2017) The Martian Planetary Boundary Layer (Chapter 7 in The Atmosphere and Climate of Mars) Cambridge University Press, pp. 172- 202.
- Monin, A.S. and Obukhov, A.M. (1954) Basic Laws of Turbulent Mixing in the Surface Layer of the Atmosphere. Contrib. Geophys. Inst. Acad. Sci. USSR, 24, 163-187.