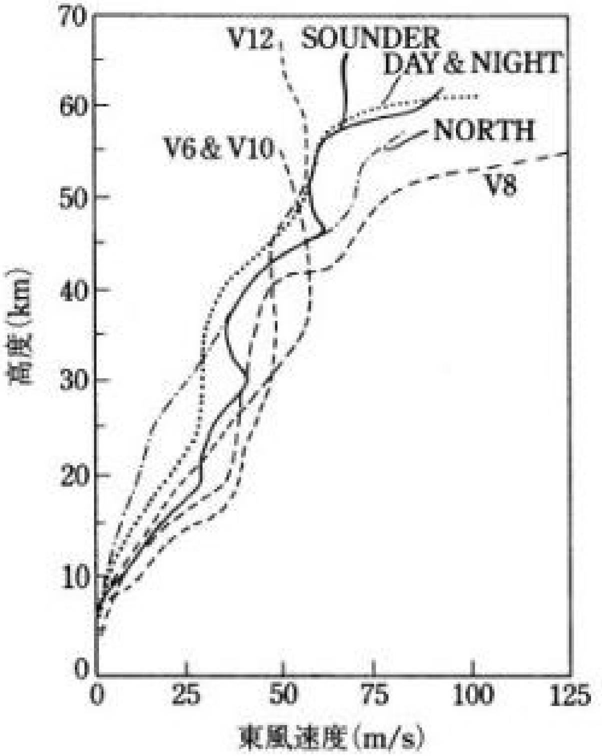
回転系における
非粘性流体の運動方程式の導出

神戸大学理学部惑星学科 流体地球物理学教育研究分野

2193434s 本間友子

はじめに

- 地球を始めとする太陽系の惑星は大気を持っており, それぞれ特徴的な大気現象が起こっている
- 金星の大気現象としてスーパーローテーションがある
  - 高度 65 km 付近で 100 m/s に達する東風が吹いている (右図上) (Schubert, 1983)
  - 成因を含めて研究が進められている



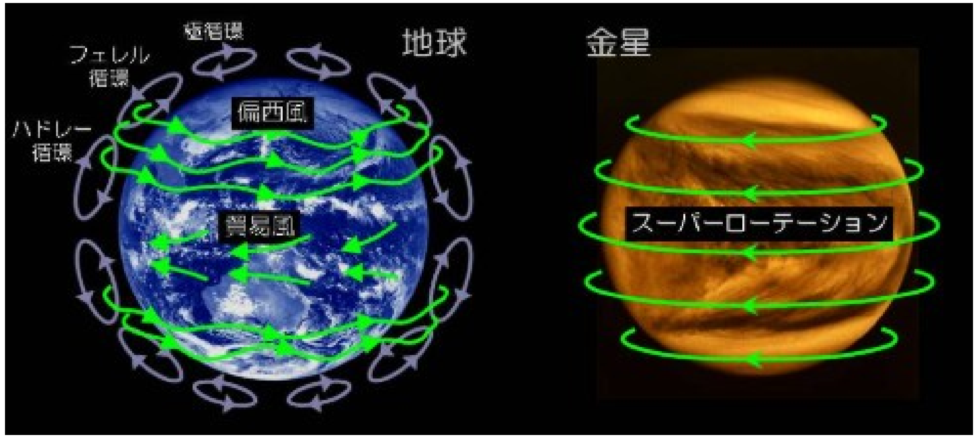


図1: (上) 探査機パイオニア・ヴィーナスとヴェネラによって観測された, 金星の東風の鉛直分布. (Schubert, 1983) (下) 地球と金星の大気循環のイメージ図. (引用: https://www.stp.isas.jaxa.jp/venus/sci_meteor.html)

はじめに

- 金星上空 50~70 km に硫酸の厚い雲が存在しており, 可視光での観測はできないため, 観測データが限られている
- そのため, 大気内部での循環の様子は完全に解明されていない
  - 結果として, 大気現象の全容も解明されていない
- 大気現象の理解のため, 観測以外にも大気の運動を支配する方程式系を数値計算し, 解析を行う方法がある

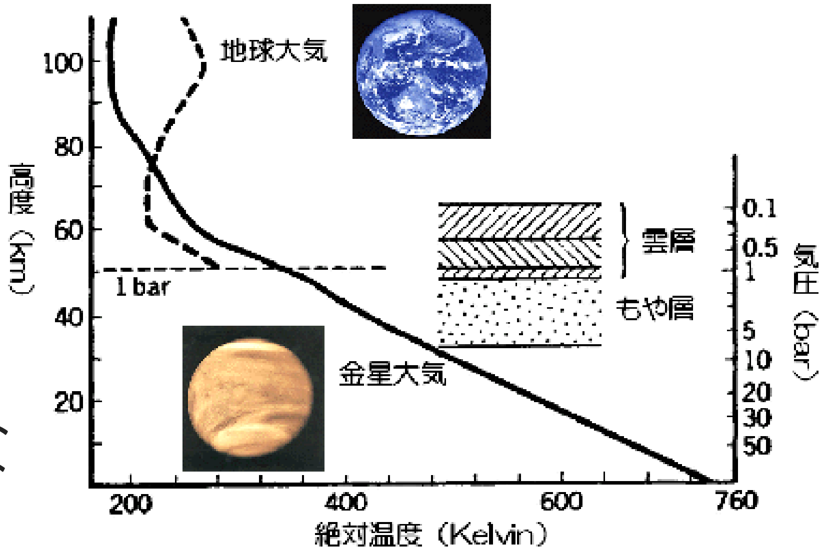


図2:金星大気 (実線) と地球大気 (点線) の絶対温度の鉛直分布. 図中には金星の雲層とちり層の分布と, 気圧軸が表示されている.
(引用: https://www.stp.isas.jaxa.jp/venus/sci_meteor.html)

はじめに

- 大学院修士課程修了までに, 金星大気の数値計算モデルを用いて解析を行うことを目標とする
- 本卒業研究では,惑星における非粘性流体の運動方程式の導出を行い, その理解を深める
    - 導出は Vallis (2017) に従って行う

支配方程式系について

- 大気の運動を支配している支配方程式には以下のものがある
  - 流体の運動方程式
    - 流体の速度の力に対する応答を表す
    - 次ページに示す
  - 質量の連続の式
    - 流体中での質量が領域全体で保存されていることを表す
    - $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$ (ρ: 密度[kg/m^3], $\boldsymbol{v}$: 流体の速度[m/s])
  - 状態方程式
    - 流体の温度, 圧力, 組成, 密度を関連付ける

流体の運動方程式

- 静止している任意の系における非粘性流体運動方程式は以下のように書ける

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g}$$

  - $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla$: 物質微分の演算子
  - $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$: 速度 $[m/s]$, ρ : 密度 $[kg/m^3]$
    p : 圧力 $[Pa]$, $\boldsymbol{g}$: 重力加速度 $[m/s^2]$
- 惑星は自転をしているため, 回転の効果を考える必要がある
- 惑星の形状は球に近似できるため, 全球を対象とする計算をするとき, 球座標系で書かれた方程式を用いることが出来る

卒業研究の流れ

- 回転系における運動方程式を導出する (本発表)
  - 系の回転に伴うベクトルの変化率を求める
  - 系が回転するときの速度, 加速度と
系が静止しているときの速度, 加速度の関係式を求める
  - 系が回転するときの非粘性流体運動方程式に変形する

- 球座標系における運動方程式を導出する
  - 球座標系における物質微分の表現を求める
  - 球座標系における単位ベクトルの偏微分と演算子を求める
  - 回転非粘性運動方程式の球座標系における表現を求める

系の回転にともなうベクトルの変化率

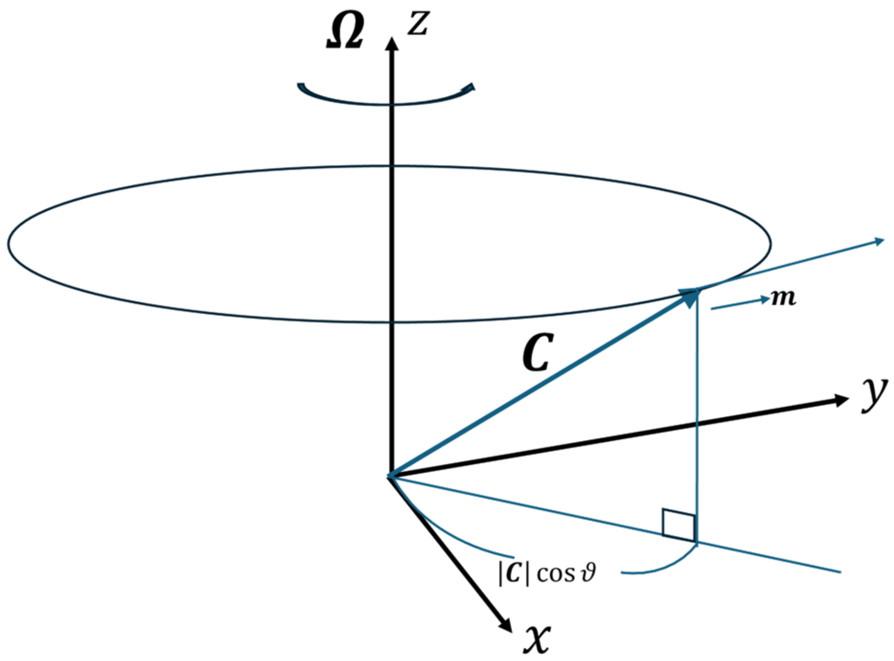


図3 一定の角速度で回転する系上に存在するベクトル $\boldsymbol{C}$. $\boldsymbol{C}$ は長さ一定であり, 回転系において定ベクトルである.

- 3 次元デカルト座標を考える
- 長さ一定のベクトル $\boldsymbol{C}$ が一定の角速度で z 軸周りを回転する系の上に載っている
  - ベクトル $\boldsymbol{C}$ は回転系から観測すると定ベクトルである
  - 以降回転している系のことを『回転系』, 静止している系を『慣性系』と呼ぶ
- $\boldsymbol{\Omega}$ は角速度ベクトル
- $\boldsymbol{m}$ は $\boldsymbol{C}$ の回転方向の単位ベクトル

系の回転にともなうベクトルの変化率

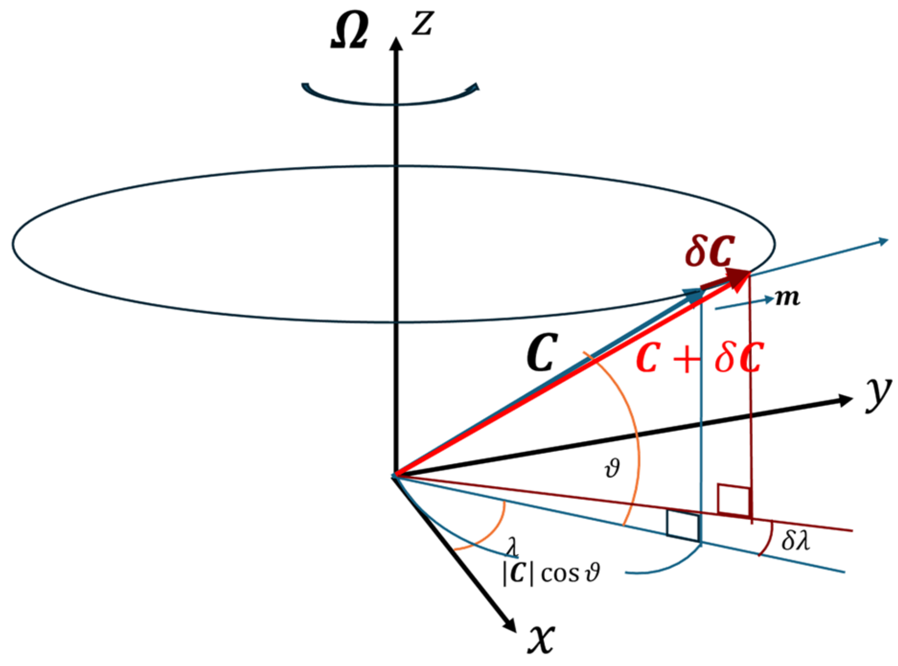


図3 一定の角速度で回転する系上に存在するベクトル $\boldsymbol{C}$. $\boldsymbol{C}$ は長さ一定であり, 回転系において定ベクトルである. 慣性系から見ると, 微小時間 δt 後には $\delta\lambda$ 回転し, 変化量 $\delta\boldsymbol{C}$ が生じる.

- x 軸とベクトル $\boldsymbol{C}$ を xy 平面に投影した線のなす角を λ とする
- xy 平面とベクトル $\boldsymbol{C}$ のなす角を ϑ とする
- 微小時間 δt の間で微小角度 $\delta\lambda=|\boldsymbol{\Omega}|\delta t$ 回転する
- 慣性系からみたベクトル $\boldsymbol{C}$ の変化 $\delta\boldsymbol{C}$ は

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{C} &= |\boldsymbol{C}|\cos\vartheta\,\delta\lambda\,\boldsymbol{m}\\ &= |\boldsymbol{C}|\cos\vartheta\,|\boldsymbol{\Omega}|\delta t\,\boldsymbol{m}\end{aligned}$$

系の回転にともなうベクトルの変化率

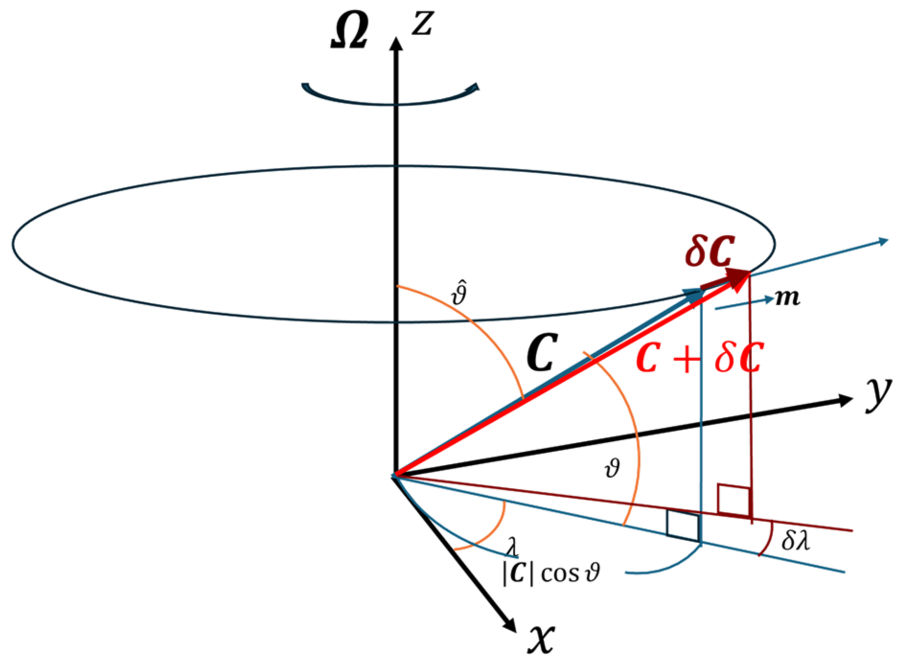


図3 一定の角速度で回転する系上に存在するベクトル $\boldsymbol{C}$. $\boldsymbol{C}$ は長さ一定であり, 回転系において定ベクトルである. 慣性系から見ると, 微小時間 δt 後には $\delta\lambda$ 回転し, 変化量 $\delta\boldsymbol{C}$ が生じる.

- $\hat{\vartheta} = \dfrac{\pi}{2} - \vartheta$ を導入すると
  $\cos\vartheta = \cos(\pi/2 - \hat{\vartheta}) = \sin\hat{\vartheta}$
  より
  $$\delta\boldsymbol{C} = |\boldsymbol{C}|\sin\hat{\vartheta}\,|\boldsymbol{\Omega}|\delta t\,\boldsymbol{m}$$
  $$= |\boldsymbol{C}||\boldsymbol{\Omega}|\sin\hat{\vartheta}\,\delta t\,\boldsymbol{m}$$
- $\hat{\vartheta}$ は $\boldsymbol{\Omega}$ と $\boldsymbol{C}$ のなす角であるためベクトルの外積を用いると
  $$\delta\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{C}\,\delta t$$

系の回転にともなうベクトルの変化率

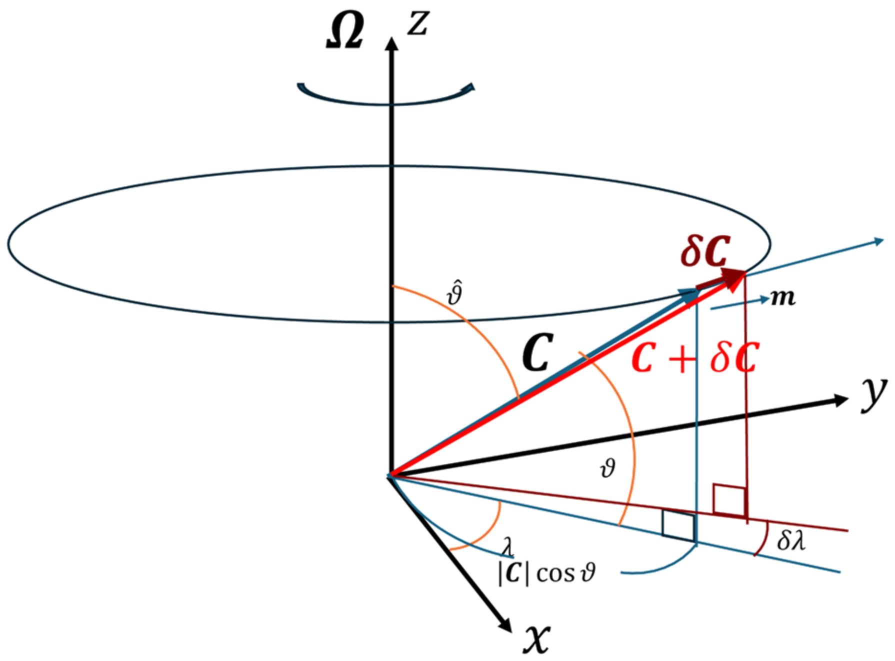


図3 一定の角速度で回転する系上に存在するベクトル $\boldsymbol{C}$. $\boldsymbol{C}$ は長さ一定であり, 回転系において定ベクトルである. 慣性系から見ると, 微小時間 δt 後には $\delta\lambda$ 回転し, 変化量 $\delta\boldsymbol{C}$ が生じる.

- 両辺を δt で割り $\delta t \to 0$ の極限操作を行うと

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{C}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{C}$$

- これは回転に伴うベクトル $\boldsymbol{C}$ の変化率を表す

系の回転にともなうベクトルの変化率

- 時間変化する任意のベクトル $\boldsymbol{B}$ を考える
- 慣性系における変化量を $(\delta\boldsymbol{B})_I$, 回転系における変化量を $(\delta\boldsymbol{B})_R$ とする
- 以降 I の添え字は慣性系における物理量, Rの添え字は回転系における物理量を表す
- 二つの変化量の関係は
$$(\delta\boldsymbol{B})_I = (\delta\boldsymbol{B})_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{B} \cdot \delta t$$
である
  - 回転系における変化量 $(\delta\boldsymbol{B})_R$ が 0 であるとき
$$(\delta\boldsymbol{B})_I = 0 + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{B} \cdot \delta t$$
となり, これは回転系における定ベクトル $\boldsymbol{C}$ の変化量と一致する

系の回転にともなうベクトルの変化率

- 両辺を δt で割り$\delta t \to 0$ の極限操作を行うと

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{B}$$

- 時間変化する任意のベクトル $\boldsymbol{B}$ の『慣性系における変化率と回転系における変化率の関係式』が得られる

回転系における速度と加速度

- 時間変化する任意の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする
- $\boldsymbol{r}$ に を適用すると
$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_R + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$$
となる
- $\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$ は回転による位置ベクトルの変化率, すなわち回転による速度である

回転系における速度と加速度

- $\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_I = \boldsymbol{v}_I$, $\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_R = \boldsymbol{v}_R$ と定義する
  - $\boldsymbol{v}_I$ は慣性速度, $\boldsymbol{v}_R$ は相対速度と呼ばれる
- $\boldsymbol{v}_I$, $\boldsymbol{v}_R$ を用いて『位置ベクトルの慣性系における変化率と, 回転系における変化率の関係式』を表すと

$$\boldsymbol{v}_I = \boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$$

となり『慣性速度と相対速度の関係式』が得られる

回転系における速度と加速度

- $\boldsymbol{v}_R$ に『慣性系における変化率と回転系における変化率の関係式』を適用すると

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_R}}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_R}}{\mathrm{d}t}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_R$$

- 左辺の $\boldsymbol{v}_R$ に『慣性速度と相対速度の関係式』を適用すると

$$\left(\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{v}_I - \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_R}}{\mathrm{d}t}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_R$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_I}{\mathrm{d}t}\right)_I - \left(\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_R}}{\mathrm{d}t}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_R$$

回転系における速度と加速度

- 左辺第 2 項を右辺に移項し変形すると

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_I}}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_R}}{\mathrm{d}t}\right)_R + \left(\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})}{\mathrm{d}t}\right)_I + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_R$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_I}}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_R}}{\mathrm{d}t}\right)_R + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_I + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_R$$

となる

回転系における速度と加速度

- 位置ベクトル, 角速度ベクトルは系に寄らずに存在するため, 添え字を外して

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_I}}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_R}}{\mathrm{d}t}\right)_R + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right)_I \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_I + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_R$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_I}}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_R}}{\mathrm{d}t}\right)_R + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right)_I \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_I + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_R$$

である

回転系における速度と加速度

- 一定の角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で回転しているため $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0}$ であることを用いると

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_I}}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_R}}{\mathrm{d}t}\right)_R + 0 \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_I + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_R$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_I}}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_R}}{\mathrm{d}t}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_I + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_R$$

回転系における速度と加速度

- 右辺の $\boldsymbol{v}_I$ に『慣性速度と相対速度の関係式』を適用すると

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_I}}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_R}}{\mathrm{d}t}\right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_R$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_I}}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v_R}}{\mathrm{d}t}\right)_R + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})$$

回転系における速度と加速度

- 右辺と左辺を入れ替えた後, 移項すると

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{d}t}\right)_R = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_I}{\mathrm{d}t}\right)_I - 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_R - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})$$

となり『慣性速度の変化率と相対速度の変化率の関係式』, すなわち『慣性加速度と相対加速度の関係式』が得られる

  - $-2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_R$　単位質量当たりのコリオリ力
  - $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})$　単位質量当たりの遠心力

回転の効果を含めた運動方程式

- 慣性系における非粘性流体運動方程式は
$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \boldsymbol{g}$$
である
- 運動方程式は流体粒子に対する時間微分, すなわち物質微分を用いて記述されている
- そのため, ある質点の速度ベクトルの時間微分を適用することで回転系における流体の運動方程式を記述することができる.

回転の効果を含めた運動方程式

- 慣性系における非粘性流体運動方程式に添え字を加えると

$$\left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}_I}{\mathrm{D}t}\right)_I = -\frac{\nabla p}{\rho} + \boldsymbol{g}$$

となる

- 上式に『慣性加速度と相対加速度の関係式』を先ほどの式に適用し, 移項すると

$$\left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{R}}}{\mathrm{D}t}\right)_R + 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) = -\frac{\nabla p}{\rho} + \boldsymbol{g}$$

となる

まとめ：回転系における運動方程式

- 回転系において観測された速度 $\boldsymbol{v}$ の流体について，運動方程式は
$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{g}$$
である
- 回転を考えることにより，$-2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}$（単位質量当たりのコリオリ力），$-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})$（単位質量当たりの遠心力）という回転によって生じる力が式中に表れる
- ここまで系を選択せず進めてきたが，惑星大気を想定するとき，座標系は球座標系を選択することが適切である

参考資料

- Geoffrey K. Vallis, 2017: Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics, p:55-58
- 地球流体電脳倶楽部, 『金星現象論:金星大気の風の場』 (https://www.gfd-dennou.org/library/riron/venus/wind/pub/wind.pdf)
- 金星探査機 あかつき, 「金星の気象学 ―惑星気象学とスーパー・ローテーション―」 (https://www.stp.isas.jaxa.jp/venus/sci_meteor.html)
- Schubert, G., 1983: General circulation and the dynamical state of the Venus atmosphere, Venus, p. 681-765