

# 南北 1 次元エネルギーバランスモデルを用いた 惑星気候の多様性に関する数値実験

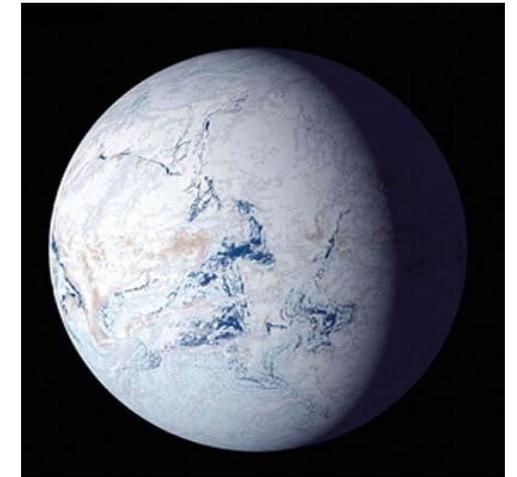
神戸大学理学部惑星学科  
流体地球物理学教育研究分野  
2173435s 米倉裕亮

# はじめに

- 太陽定数などの様々な条件によって、惑星には様々な気候が存在しうる。
    - 地球全土が氷床でおおわれる全球凍結状態
    - 現在の地球のような氷床でおおわれている地域と氷床がない地域がある部分凍結状態
    - 極にも氷床が存在しない無凍結状態
- など (Budyko, 1969).



地球の観測画像 (NASA)



全球凍結状態の地球 (sorae)

# はじめに

- 研究の目標

南北 1 次元エネルギーバランスモデル  
(Energy Balance Model (EBM)) (Sellers, 1969) を用いて,  
太陽定数を変化させた際の氷線緯度を求め,  
惑星気候がどのような状態をとるかを考察する.

※氷線緯度…氷床が拡大, 縮小する際にエネルギー収支の釣り合いによってとどまる緯度

# 南北 1 次元エネルギーバランスモデル

$$C \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = F_S - F_{OLR} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ D(1 - x^2) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right\}$$

$x$ :  $\sin(\text{緯度})$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) (南北対称)

$t$ : 時間 [s]

$T$ : 地表面温度 [K]

$C$ : 熱容量 [ $\text{J}/\text{K}/\text{m}^2$ ] (=  $1.0 [\text{J}/\text{K}/\text{m}^2]$ )

$D$ : 拡散係数 [ $\text{W}/\text{m}^2/\text{K}$ ] (=  $0.2 [\text{W}/\text{m}^2/\text{K}]$ )

( $C, D$  は, Lindzen (1990) の値を参照.)

$F_S$ : 太陽放射 [ $\text{W}/\text{m}^2$ ]

$F_{OLR}$ : 惑星放射 [ $\text{W}/\text{m}^2$ ]

境界条件

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \quad (x = 0)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \quad (x = 1)$$

# 南北 1 次元エネルギーバランスモデル

$$Fs = Qs(x)(1 - \alpha(x))$$

$$F_{OLR} = A + BT(x, t)$$

$Q$  : 全球平均太陽放射フラックス

$s(x)$ : 年平均太陽放射フラックスの子午面分布

$$s(x) = 1 + s_2 p_2(x) = 1 - 0.482(3x^2 - 1)/2$$

$\alpha(x)$ : アルベド (水の凝固点温度を境に変化)

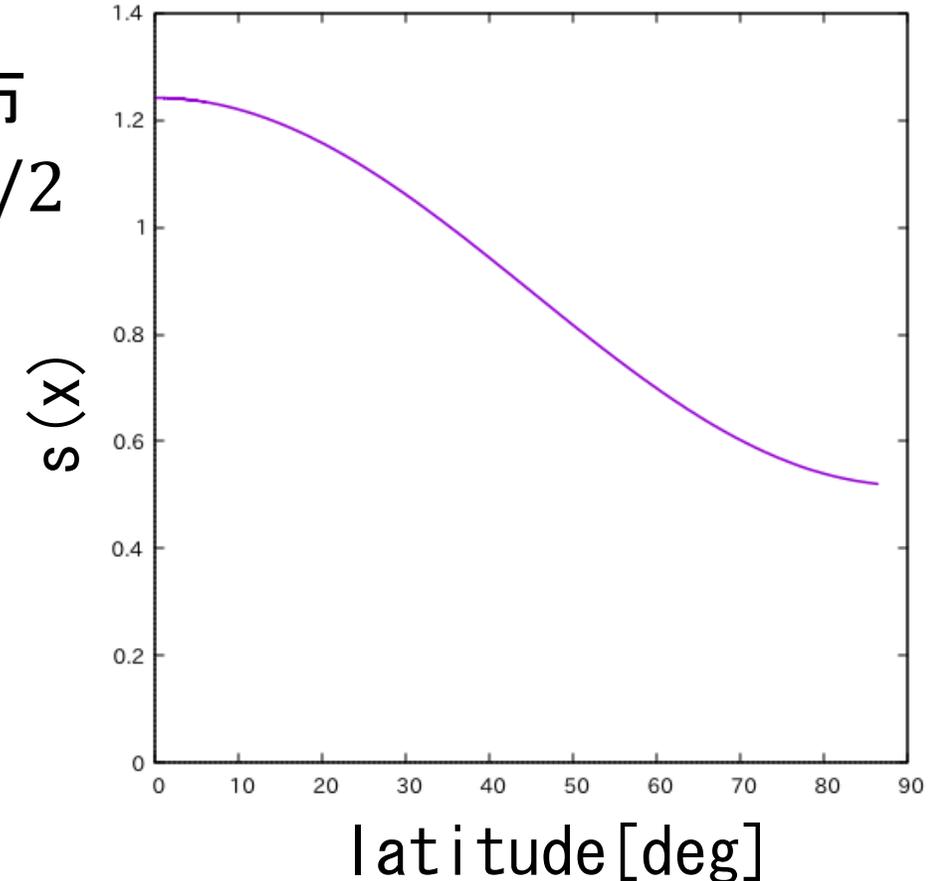
$$\begin{cases} 0.6 & (T(x) \leq 271.15 \text{ K}) \\ 0.1 & (T(x) > 271.15 \text{ K}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.6 & (T(x) \leq 271.15 \text{ K}) \\ 0.1 & (T(x) > 271.15 \text{ K}) \end{cases}$$

$A$  : 定数 (=  $-212.05 \text{ [W/m}^2\text{]}$ )

$B$  : 定数 (=  $1.55 \text{ [W/m}^2\text{/K]}$ )

( $A, B, s_2$  は Lindzen (1990) の値を参照)

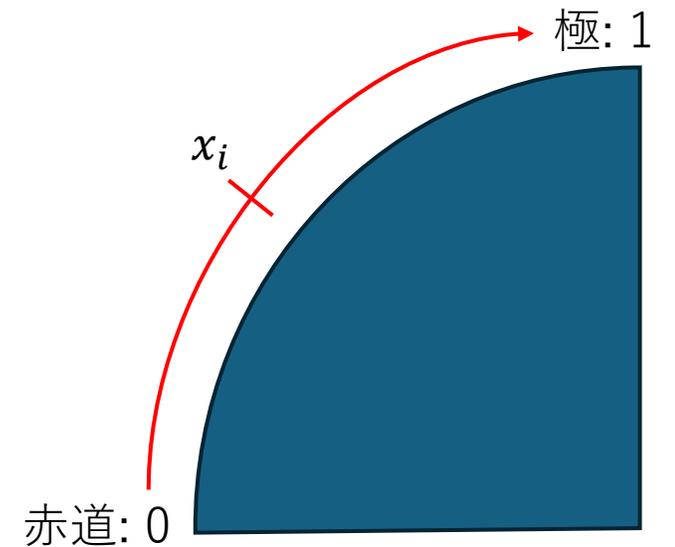
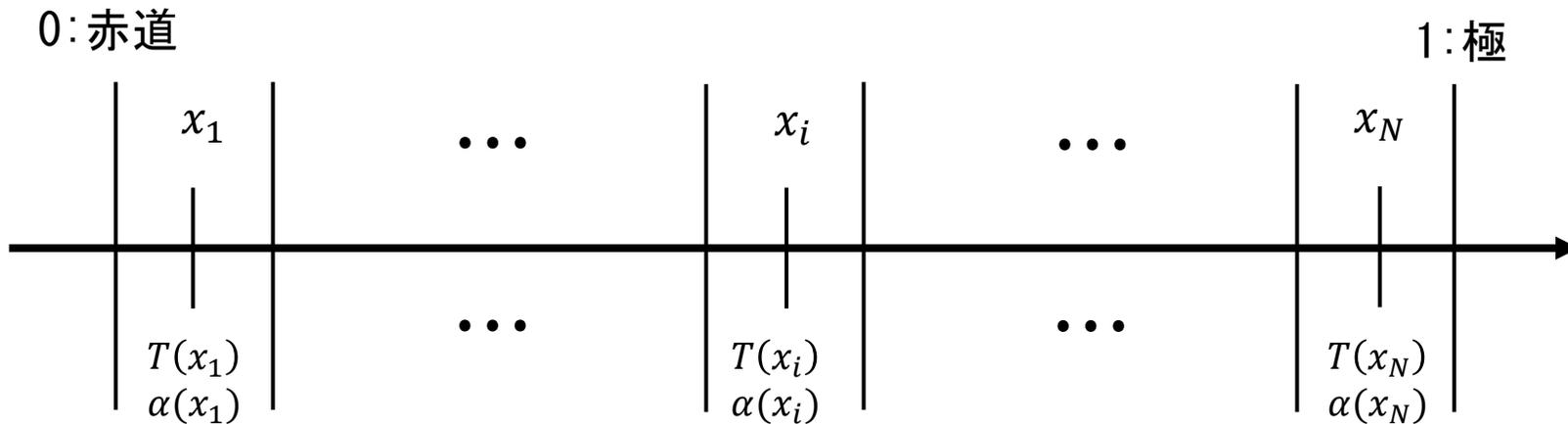


# 南北 1 次元エネルギーバランスモデル

- ・ 離散化の方法

赤道から極までを  $N$  個の格子点で分割し,  
その領域の平均的な各物理量の値をその領域の中心に置く.

図中の 0 は赤道, 1 は極を表す.



# 南北 1 次元エネルギーバランスモデル

- 空間に対して離散化した方程式

$$C \frac{\partial T_i(t)}{\partial t} = Q_s(x_i)(1 - \alpha(x_i)) - (A + BT_i(t)) \\ + \frac{D}{\Delta x^2} \left[ (1 - x_{i+\frac{1}{2}}^2)(T_{i+1}(t) - T_i(t)) - (1 - x_{i-\frac{1}{2}}^2)(T_i(t) - T_{i-1}(t)) \right]$$

$i$  : 格子点番号

$\Delta x$ : 格子点間隔

境界条件

$$T_0 = T_1$$

$$T_{N+1} = T_N$$

# 南北 1 次元エネルギーバランスモデル

空間に対して離散化した方程式を二種類の方法を用いて、  
氷線緯度の太陽定数依存性を計算する。

1. 地表面温度の時間発展を計算し、安定解を求める
2. 地表面温度の時間微分項をゼロとし、  
部分的に凍結した安定解/不安定解を求める

# 南北 1 次元エネルギーバランスモデル

- 1. 安定解を求めるための方法

$T_i(t)$  について時間発展を計算し, 各格子点について収束値を求める.

$$C \frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} = Q_s(x_i)(1 - \alpha(x_i)) - (A + BT_i^l) + \frac{D}{\Delta x^2} \left[ (1 - x_{i+\frac{1}{2}}^2)(T_{i+1}^l - T_i^l) - (1 - x_{i-\frac{1}{2}}^2)(T_i^l - T_{i-1}^l) \right]$$

$i$  : 格子点番号

$l$  : 時間

$\Delta x$  : 格子点間隔

$\Delta t$  : 時間間隔

収束の判断条件:

(右辺)  $< 10^{-5}$  [W/m<sup>2</sup>]

となったとき, 収束したと判断する.

# 南北 1 次元エネルギーバランスモデル

- 2. 安定解/不安定解を求めるための方法

N 個の格子点の内の一の格子点の温度に水の凝固点温度,  $T_k = 271.15$  [K], を与え,  $T_1, \dots, T_{k-1}, T_{k+1}, \dots, T_N, Q$  を未知数とする連立一次方程式を解く.  
(N+1) × (N+1) の係数行列を作成し, 解を求める.

$$-\frac{D}{(\Delta x)^2} \left(1 - x^2_{i-\frac{1}{2}}\right) T_{i-1} + \left\{ B + \frac{D}{(\Delta x)^2} \left(1 - x^2_{i+\frac{1}{2}}\right) + \frac{D}{(\Delta x)^2} \left(1 - x^2_{i-\frac{1}{2}}\right) \right\} T_i - \frac{D}{(\Delta x)^2} \left(1 - x^2_{i+\frac{1}{2}}\right) T_{i+1} - s(x_i)(1 - \alpha(x_i))Q = -A$$

$i$  : 格子点番号

$\Delta x$  : 格子点間隔

# 南北 1 次元エネルギーバランスモデル

- 2. 安定解/不安定解を求めるための方法 (行列)

$$\begin{pmatrix}
 M'_{1,0} + M'_{1,1} & M'_{1,2} & 0 & \dots & 0 & & 0 & Q'_1 \\
 M'_{2,1} & M'_{2,2} & M'_{2,3} & \dots & 0 & & 0 & Q'_2 \\
 0 & M'_{3,2} & M'_{3,3} & \dots & 0 & & 0 & Q'_3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & M'_{N-1,N-1} & & M'_{N-1,N} & Q'_{N-1} \\
 0 & 0 & 0 & \dots & M'_{N,N-1} & & M'_{N,N} + M'_{N,N+1} & Q'_N \\
 \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \dots & \delta_{N-1} & & \delta_N & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 T_1 \\
 T_2 \\
 T_3 \\
 \vdots \\
 T_{N-1} \\
 T_N \\
 Q
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 -A \\
 -A \\
 -A \\
 \vdots \\
 -A \\
 -A \\
 271.15
 \end{pmatrix}
 \tag{271.15}$$

$T_i$  :  $i$  番目の格子点の温度

$M'_{i,j}$  :  $i$  番目の格子点の  $T_j$  の係数

$Q'_i$  :  $i$  番目の格子点の  $Q$  の係数

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

# 南北 1 次元エネルギーバランスモデル

- アルベドの設定

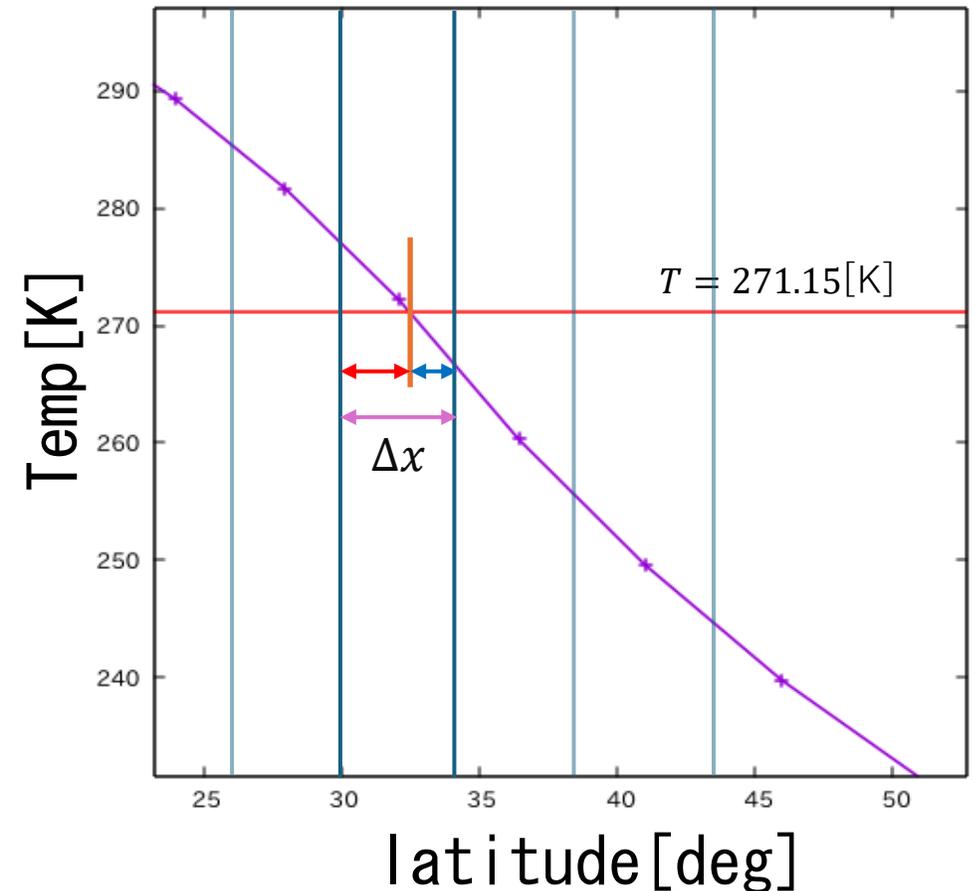
サブグリッドスケールで温度は  $x$  に対して線形に変化すると仮定し、氷の面積を考慮して、アルベド分布を決定する。(松田, 2018)

$$\alpha(x_i) = \frac{1}{\Delta x} \int_{\Delta x} \alpha(x) dx$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \int_{\Delta x} [0.6\beta(T) + 0.1(1 - \beta(T))] dx$$

$$\beta(T) = \begin{cases} 1 & (T(x) \leq 271.15 \text{ K}) \\ 0 & (T(x) > 271.15 \text{ K}) \end{cases}$$

$$T(x) = T(x_i) + \frac{T(x_{i+1}) - T(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i)$$



# 実験の設定

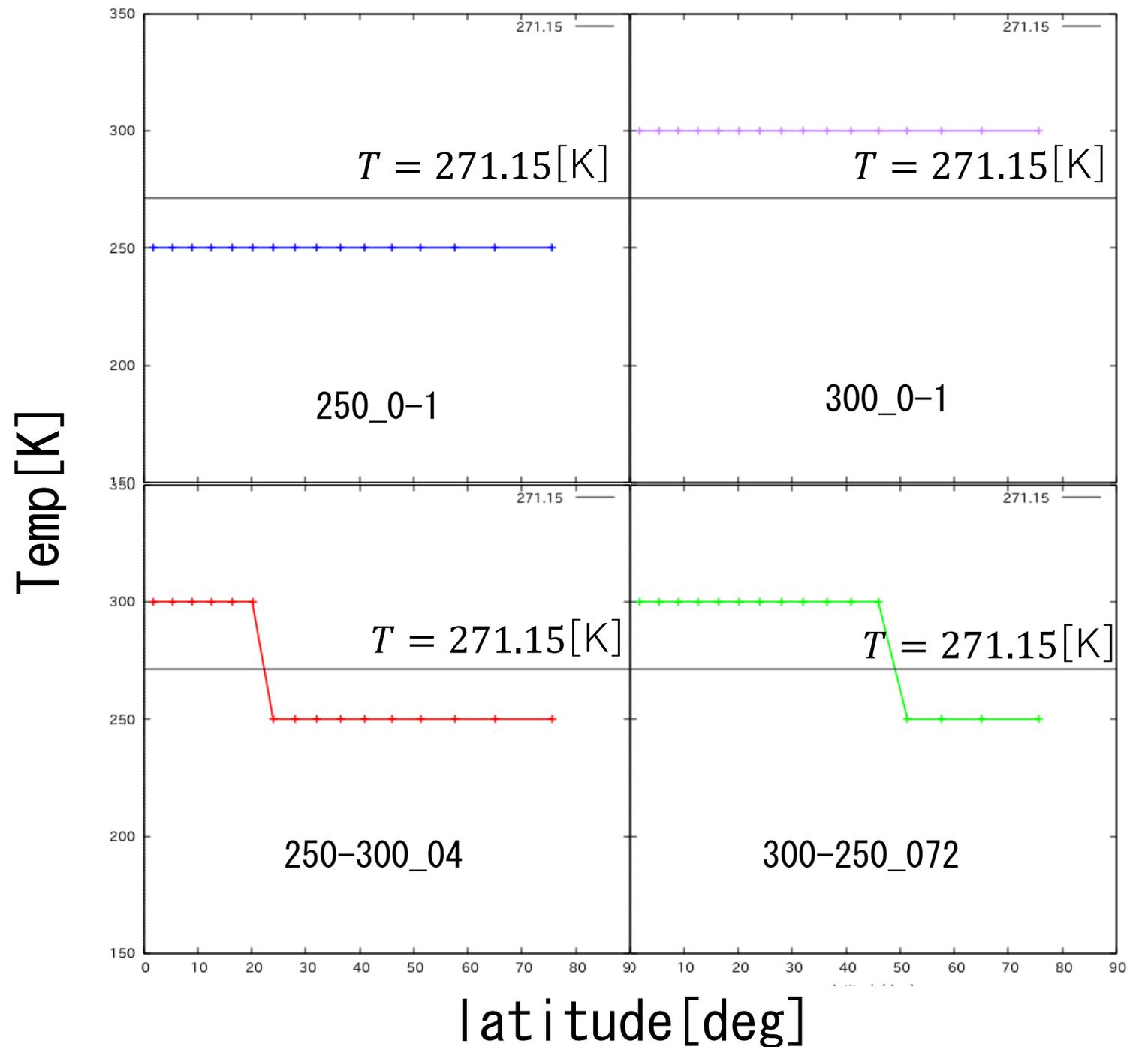
実験設定： 松田（2018）を参考に設定

実験名	初期条件 (1 の方法のみ)	格子点数	太陽定数
250_0-1	$T(x) = 250 K (0 < x < 1)$	N=16 (標準実験)	太陽放射フラックス 250 - 500 [W/m <sup>2</sup> ]
300_0-1	$T(x) = 300 K (0 < x < 1)$		
300-250_04	$T(x) = \begin{cases} 300 K (x < 0.40) \\ 250 K (x \geq 0.40) \end{cases}$		
300-250_072	$T(x) = \begin{cases} 300 K (x < 0.72) \\ 250 K (x \geq 0.72) \end{cases}$		

# 実験の設定

四つの実験における  
それぞれの初期値の図.  
格子点数は, N=16

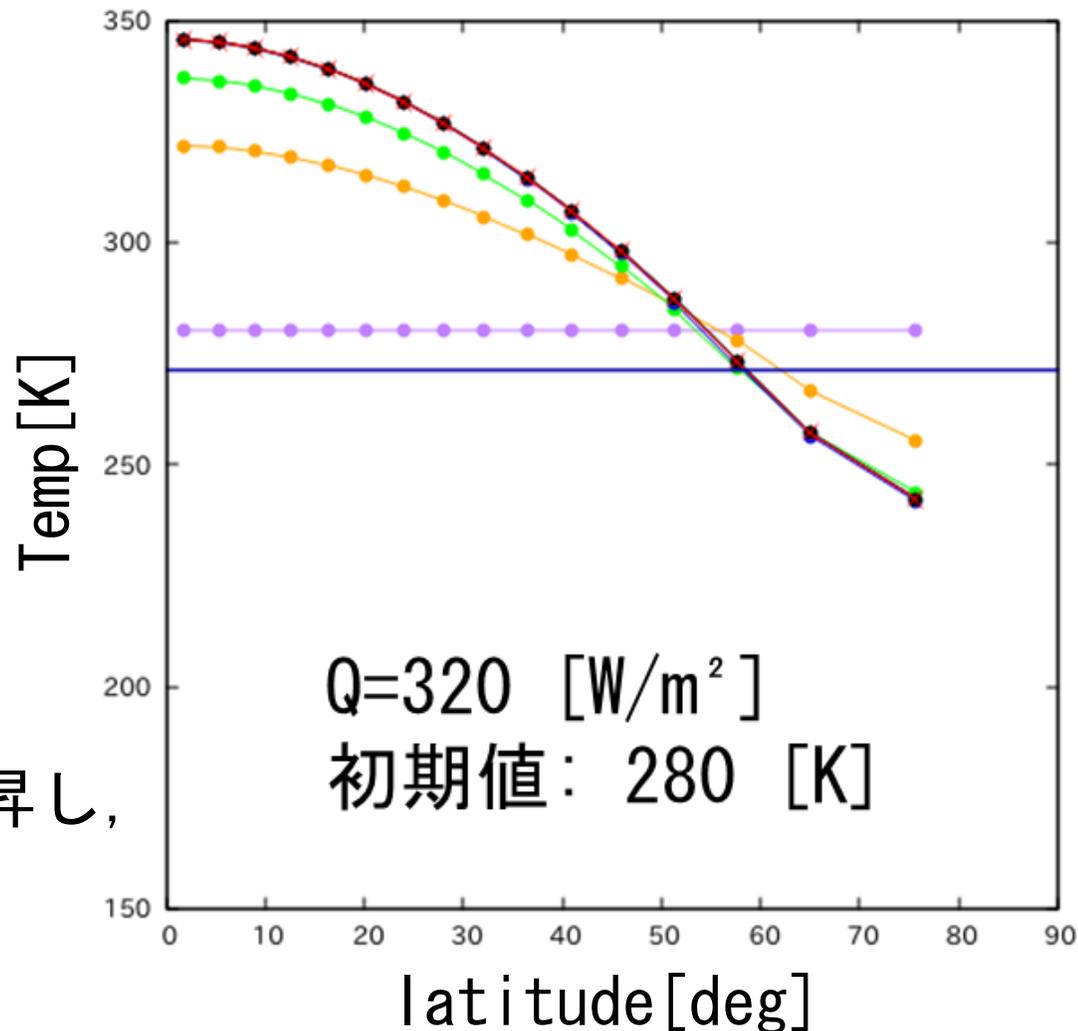
黒線は, 水の凝固点温度



# 実験結果

$Q=320$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ], 初期値:  $280$  [K] のときの,  
各緯度における地表面温度の時間発展の図.

- 赤道付近では時間発展に伴って, 温度が上昇し,  
およそ  $350$  [K] に収束する.
- 極付近では時間発展に伴って, 温度が下降し,  
およそ  $240$  [K] に収束する.

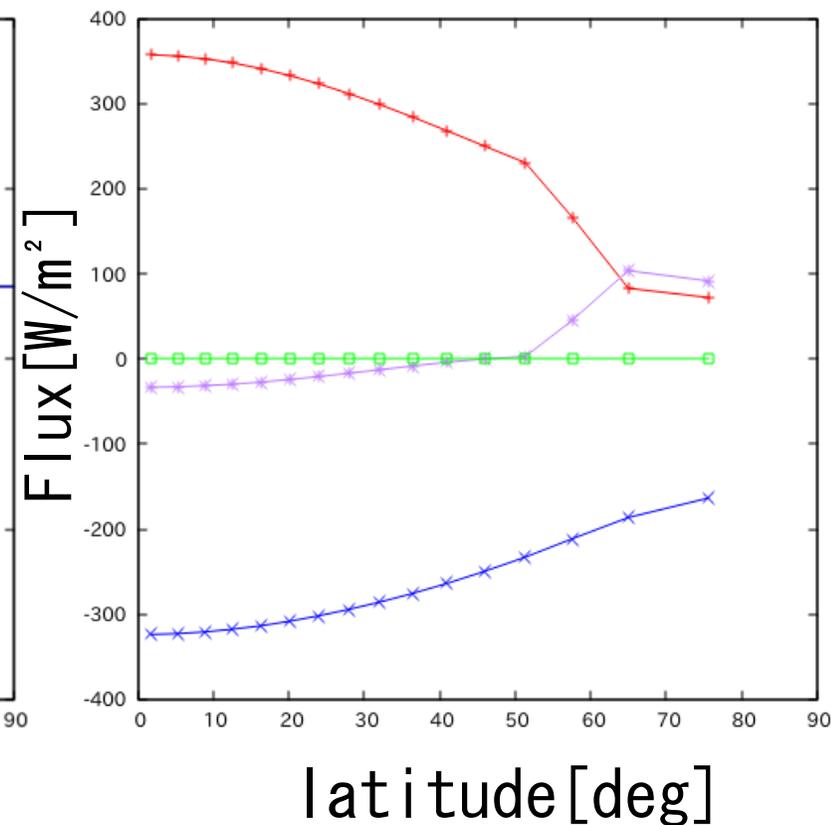
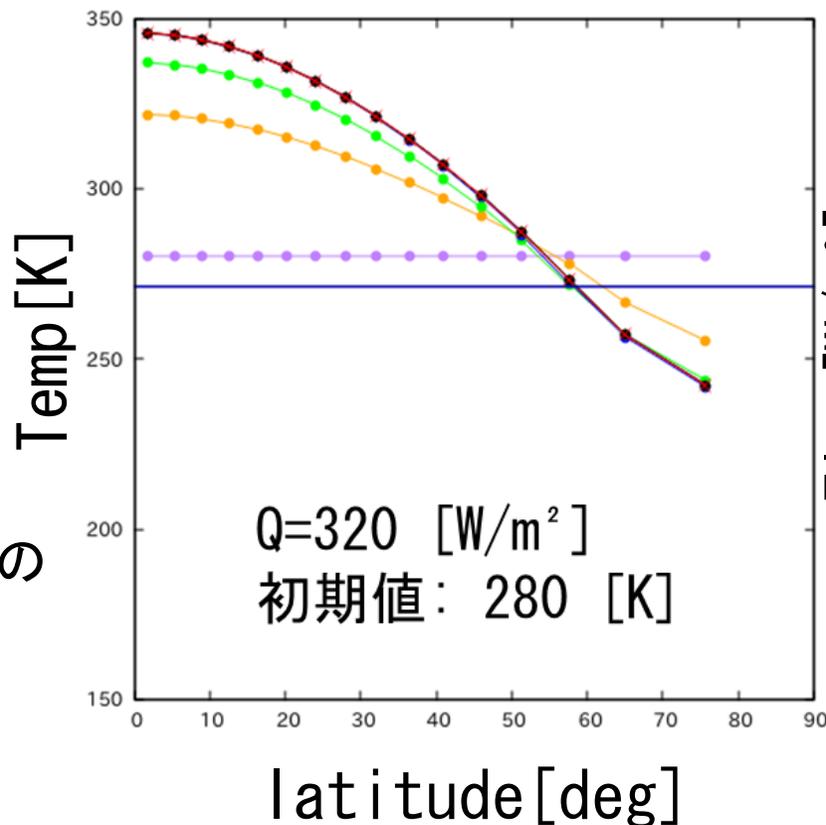


紫: 初期値  
橙: 5000 s  
緑: 10000 s  
青: 50000 s  
桃: 100000 s  
黒: 200000 s  
赤: 平衡時  
紺:  $T=271.15$  [K]  
(水の凝固点温度)

# 実験結果

左：各緯度の地表面温度  
の時間発展の図

右：平衡状態における各フラックスの  
単位面積当たりの加熱率の図



右図より，三つの加熱率は  
それぞれ緯度によって変化するが，  
それぞれの緯度で  
その合計値（緑線）は，ゼロとなる。

紫：初期値  
橙：5000 s  
緑：10000 s  
青：50000 s

桃：100000 s  
黒：200000 s  
赤：平衡時  
紺： $T=271.15 \text{ [K]}$   
(水の凝固点温度)

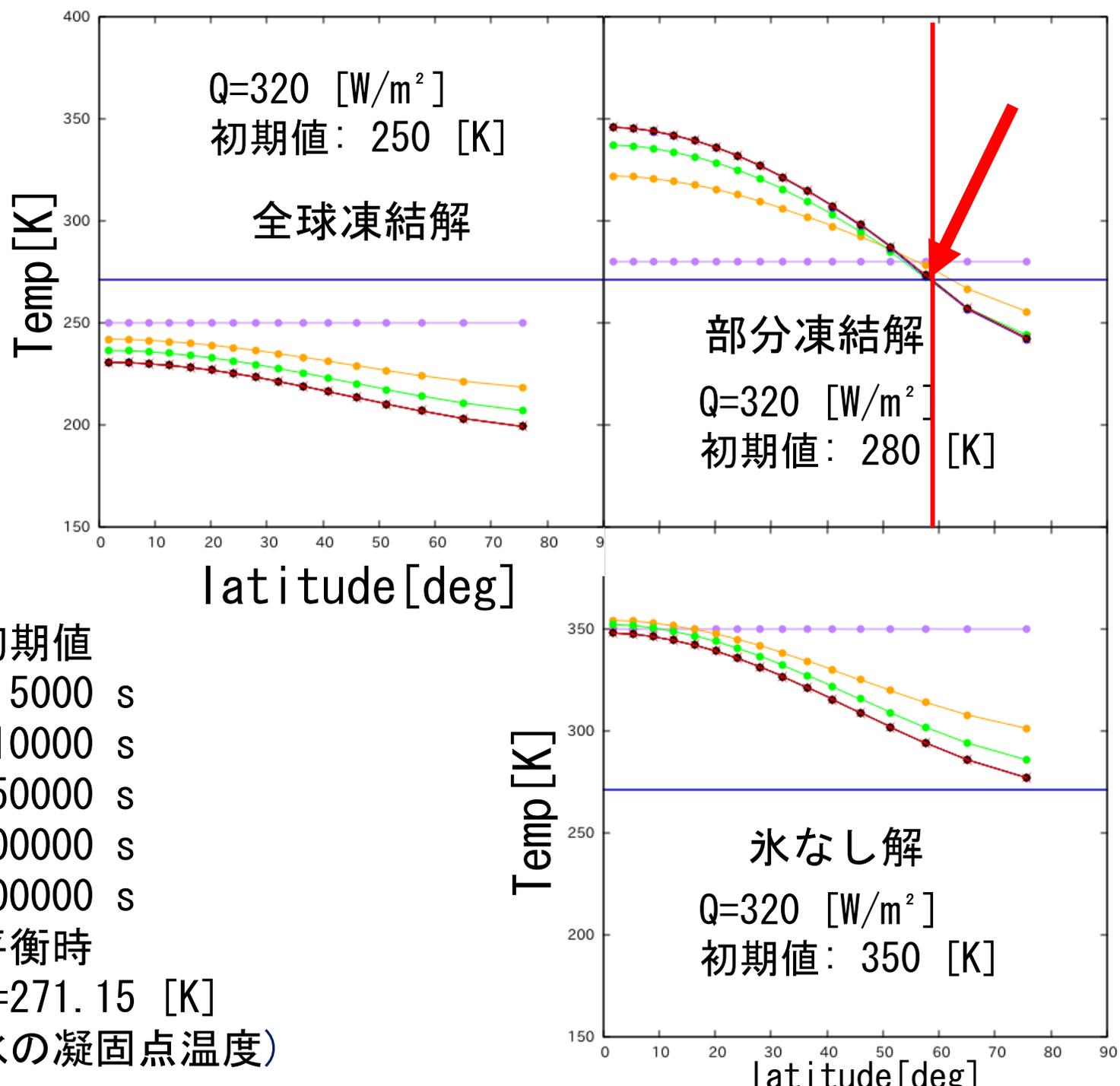
赤：太陽放射による加熱率  
紫：水平熱輸送によって  
吸収されるフラックス  
青：長波放射による加熱率  
緑：上記の合計

# 実験結果

$Q=320 \text{ [W/m}^2\text{]}$  における惑星気候の初期値による変化.

初期値を変化させると、異なる三つの状態とる.

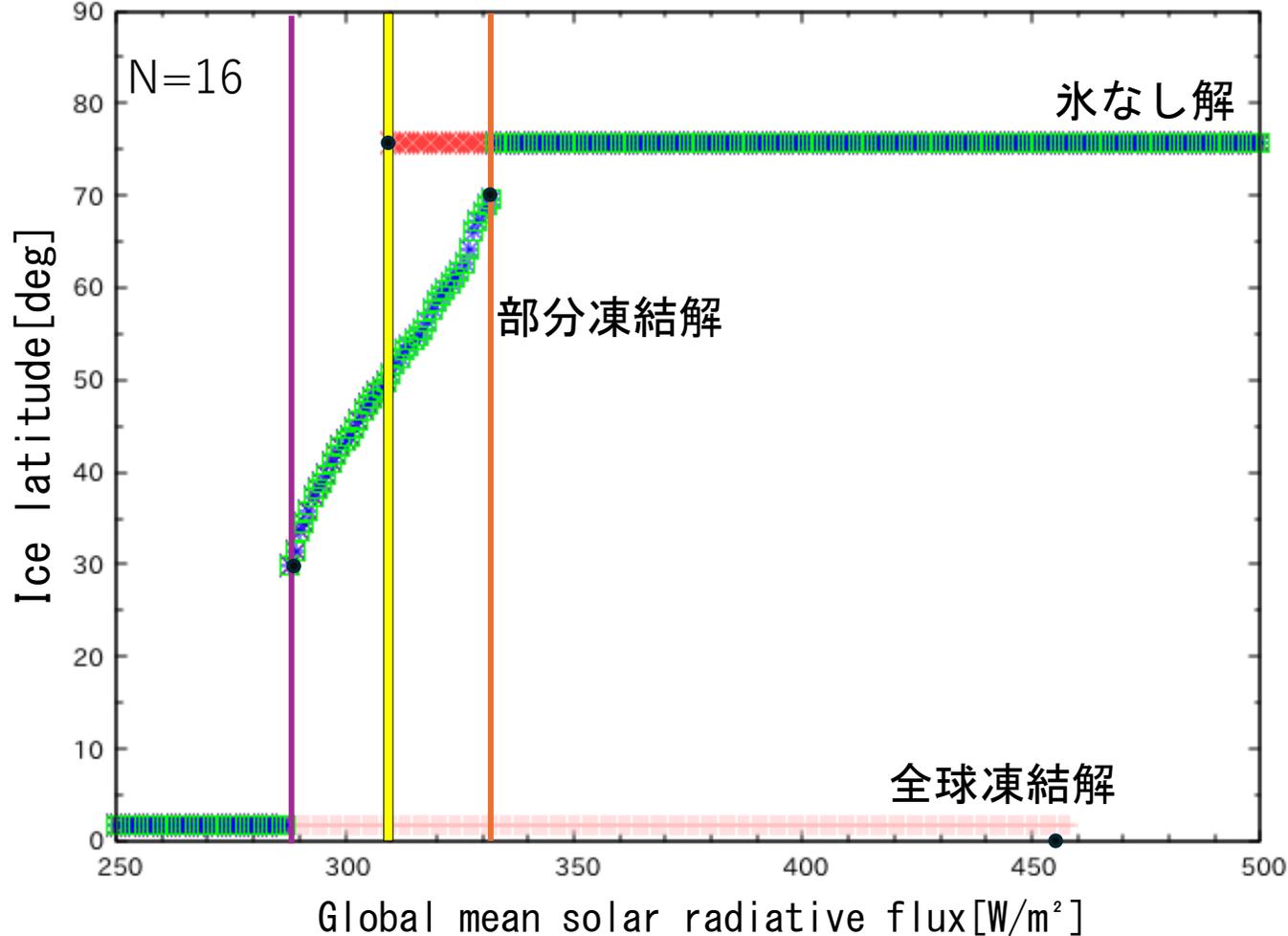
- 紫: 初期値
- 橙: 5000 s
- 緑: 10000 s
- 青: 50000 s
- 桃: 100000 s
- 黒: 200000 s
- 赤: 平衡時
- 紺:  $T=271.15 \text{ [K]}$   
(水の凝固点温度)



# 実験結果 安定解

地表面温度の時間発展によって得られた、各初期値における安定解の図。  
初期値，太陽放射フラックスの値によって、異なる三つの安定解をとる。

- 紫 (289 [W/m<sup>2</sup>]) より左側：  
平衡状態は全球凍結状態
- 紫，橙間 (289 [W/m<sup>2</sup>]-332 [W/m<sup>2</sup>])：  
平衡状態は，初期値により変化
- 紫，黄間 (289 [W/m<sup>2</sup>]-310 [W/m<sup>2</sup>])：  
部分凍結解と全球凍結解
- 黄，橙間 (310 [W/m<sup>2</sup>]-332 [W/m<sup>2</sup>])：  
三つの平衡状態 (初期値に依存)
- 橙 (332 [W/m<sup>2</sup>]) より右側：  
全球凍結解，または，氷なし解



- 桃: 250\_0-1
- 赤: 300\_0-1
- 青: 300-250\_04
- 緑: 300-250\_072
- 黒点: 安定解がなくなる臨界点

# 実験結果

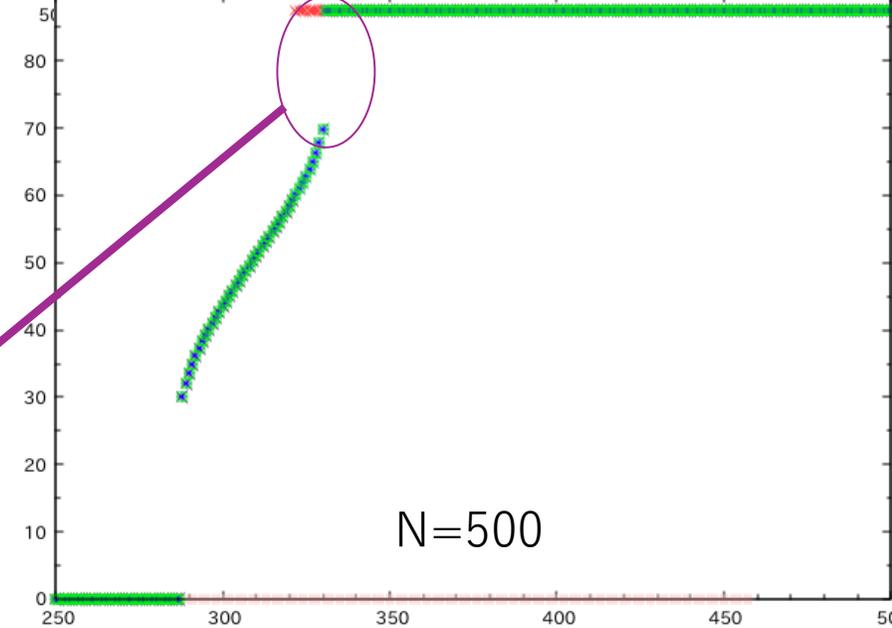
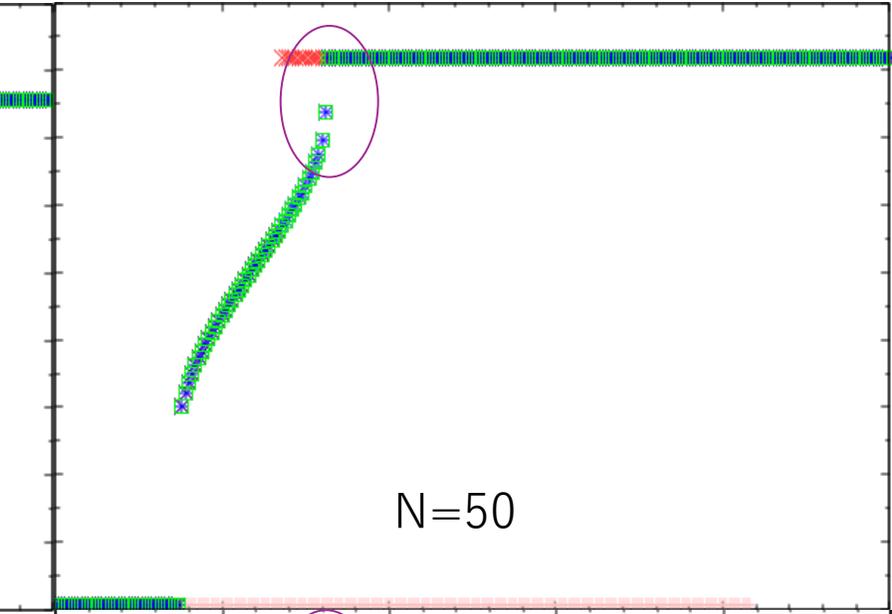
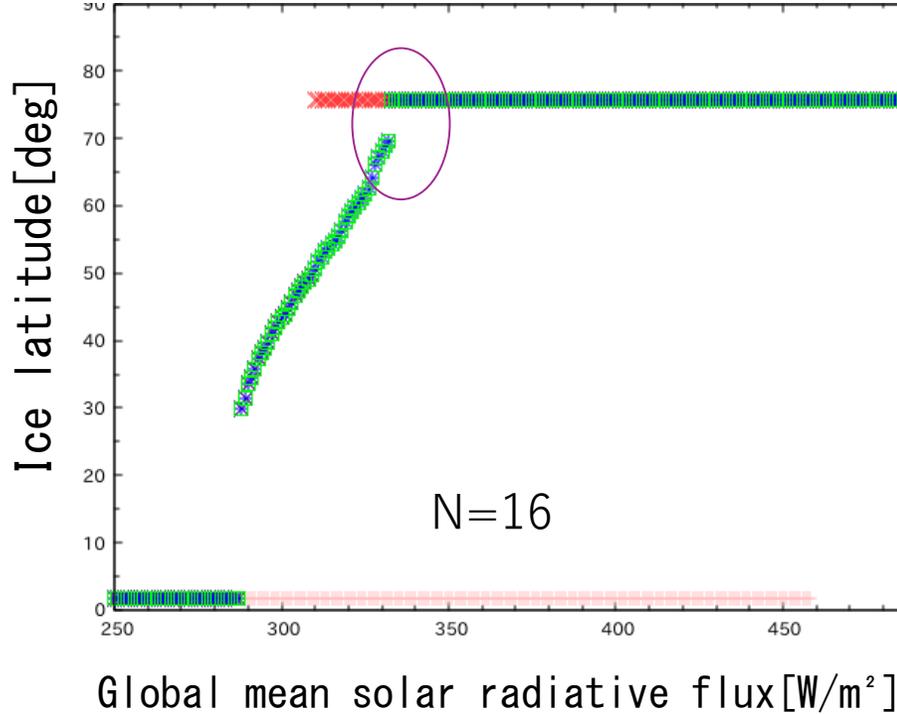
## 安定解

桃: 250\_0-1

赤: 300\_0-1

青: 300-250\_04

緑: 300-250\_072



地表面温度の時間発展によって得られた安定解の図。  
格子点数を変化させることで、高緯度側がより詳細になる。

格子点数を大きくすると、  
高緯度側の安定解が見られない  
領域は、大きくなる

# 実験結果

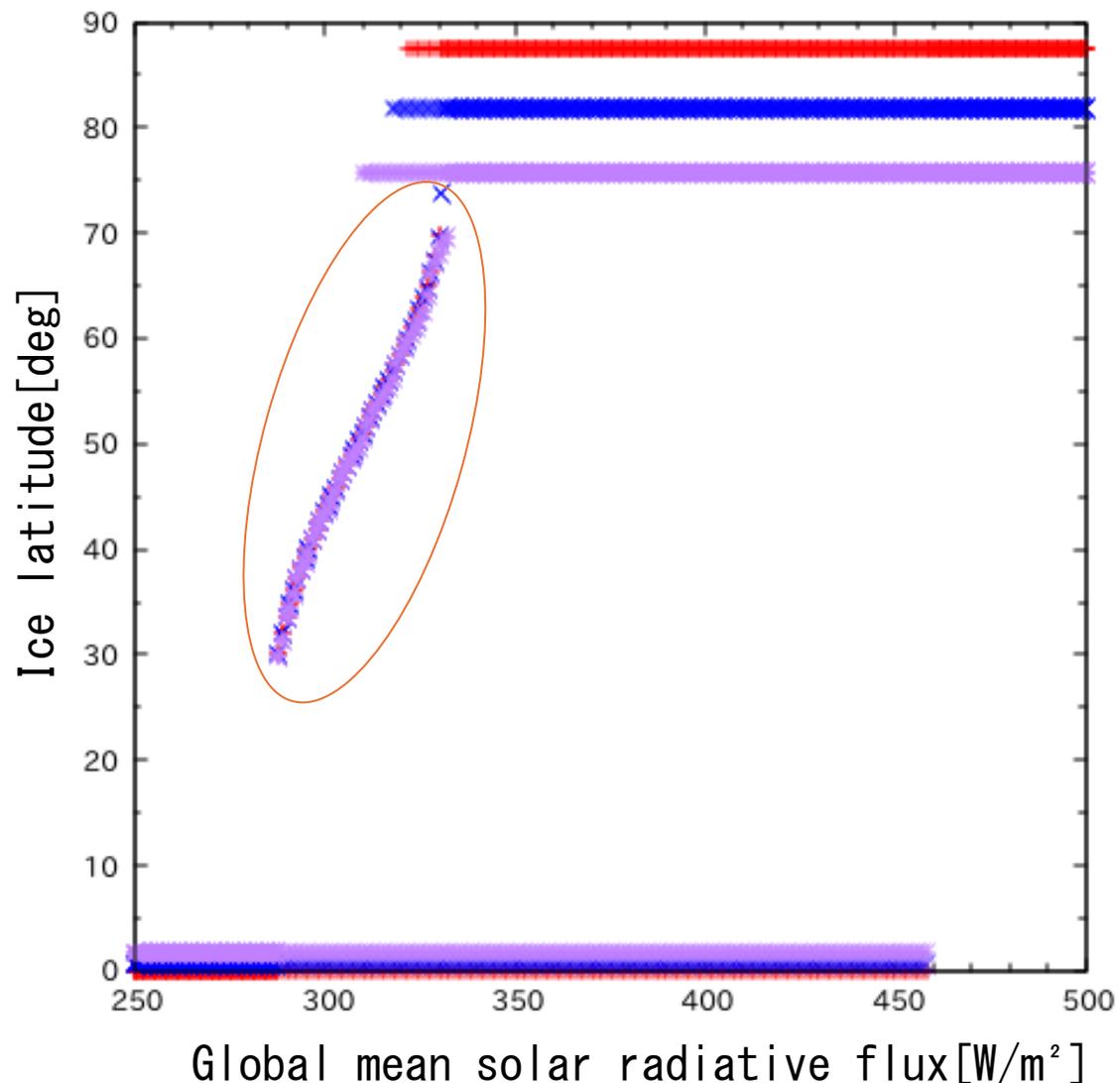
## 安定解

格子点を変化させて描いた安定解の図を重ねたもの。

横軸：太陽放射フラックス

縦軸：緯度

部分凍結解は，格子点数にかかわらず，よく一致していることが分かる



紫：N=16

青：N=50

赤：N=500

# 実験結果 安定解と不安定解

- N=500 として，行列計算で得た図と時間発展によって得た図を重ねると，部分凍結解はよく一致しており，安定解が見られない緯度の端も全球凍結解や氷なし解の端と一致する。

左：N=500 における行列の計算で求めた安定解/不安定解の図。

右：左の図にN=500 の安定解を重ねた図

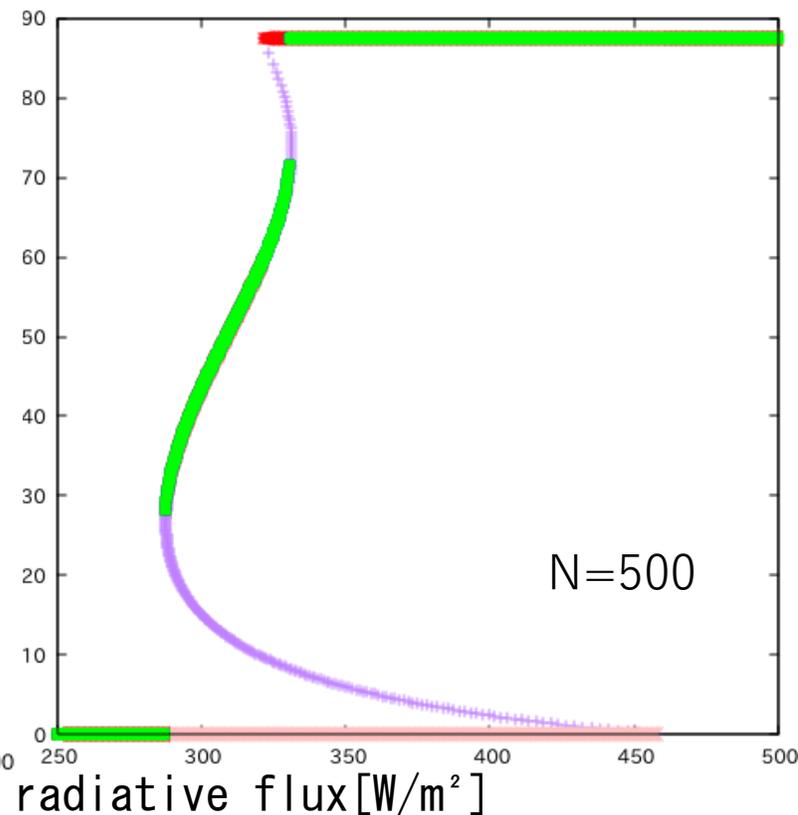
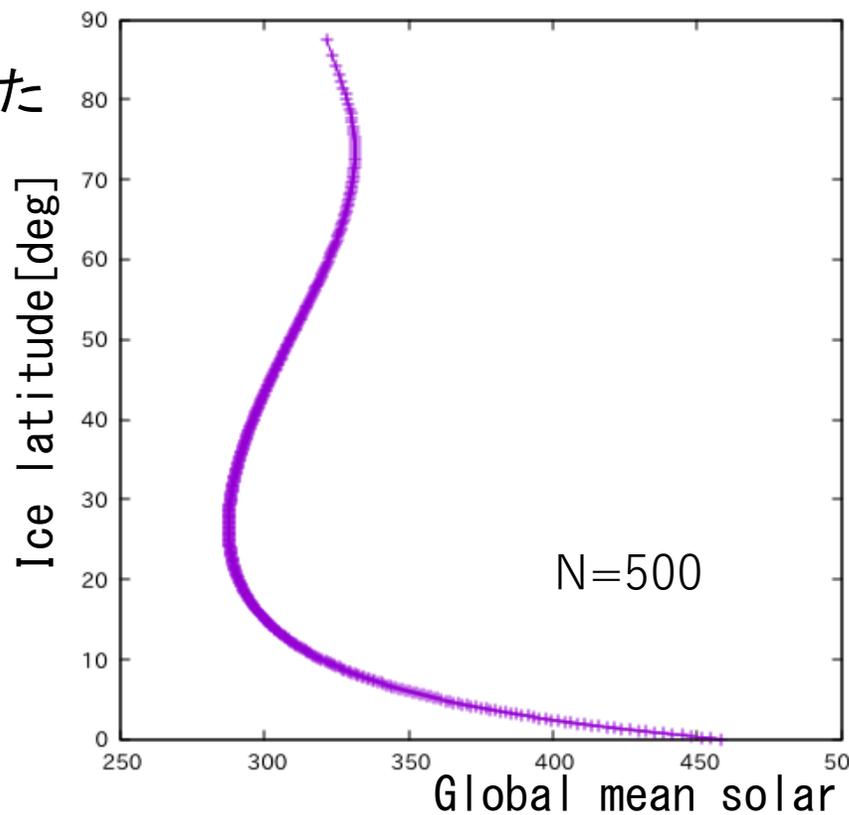
桃：250\_0-1

赤：300\_0-1

青：300-250\_04

緑：300-250\_072

紫：安定解と不安定解

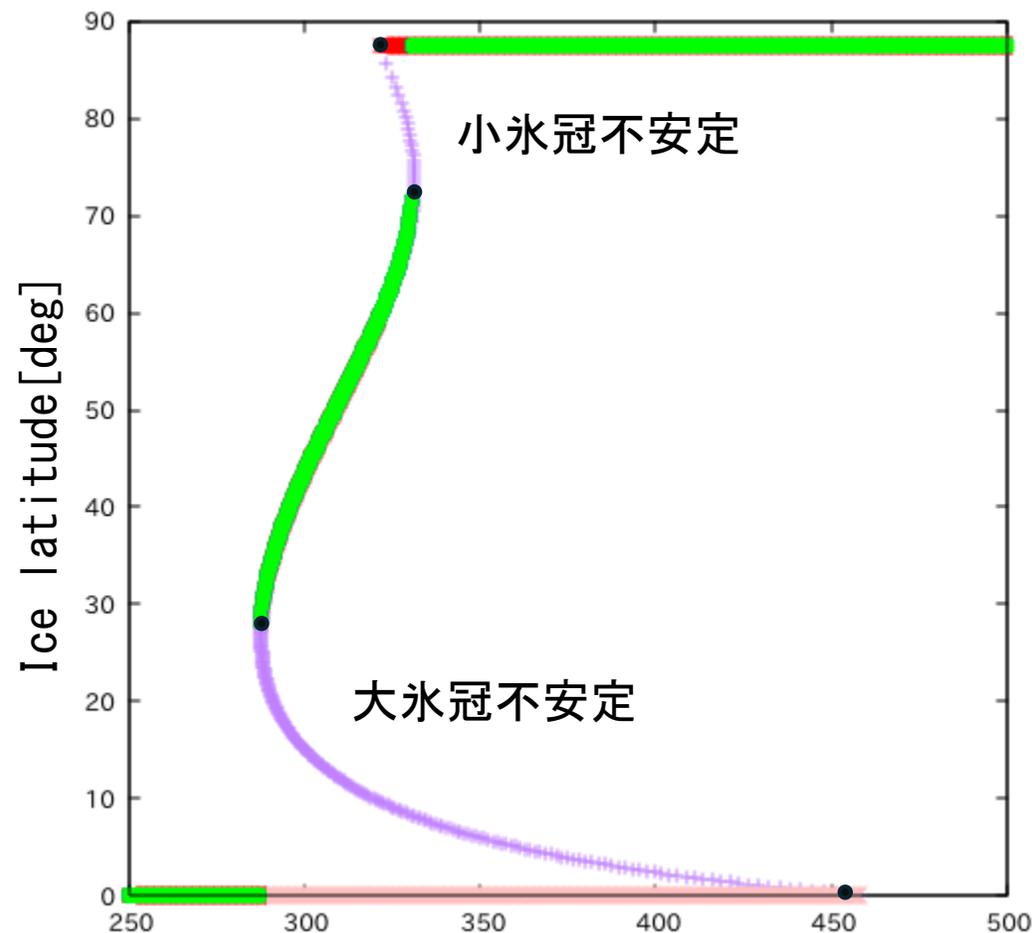


# 実験結果 安定解と不安定解

時間発展による安定解と  
行列計算による安定解/不安定解を重ねた図  
格子点数はどちらも N=500

高緯度，低緯度に不安定解が存在

- ・ 低緯度側 (大氷冠不安定)
  - ・ 温度が少し変化すると，  
安定解へ気候ジャンプが起こる。
- ・ 高緯度側 (小氷冠不安定)
  - ・ 氷床がある大きさよりも小さくなると，  
地表面が吸収する全球平均太陽放射フラックスが  
大きくなりすぎることにより，急速に氷が融け，  
氷なし解へと収束する？



Global mean solar radiative flux [W/m<sup>2</sup>]

桃: 250\_0-1

赤: 300\_0-1

青: 300-250\_04

緑: 300-250\_072

紫: 安定解と不安定解

黒点: 安定解がなくなる臨界

# まとめ

- 地表面温度の時間発展を計算することで、全球凍結解、部分凍結解、氷なし解の三つの状態をとることが分かった。
- その計算において、太陽放射フラックス、長波放射フラックス、また、水平熱輸送によって吸収されるフラックスの三つの項が釣り合うことも確認された。
- 安定解のみの図より、同じ太陽定数でも初期値が異なると、収束する状態も異なることがわかった。また、一度安定状態になると、臨界点を超えるまでその状態は維持される。
- 部分凍結状態は、格子点数を変化させてもほとんど変化しなかった。また、全球凍結状態、無凍結状態では、格子点数によってそれぞれより低緯度側、高緯度側へ氷線緯度が移動した。

# まとめ

- $N=500$  として、格子点数を大きくすると、部分凍結解も一致し、不安定解の端も全球凍結解と氷なし解の端と一致した。
- 安定解と不安定解を重ねた図より、大氷冠不安定における、部分凍結解の臨界点を超えた際の氷床の拡大、縮小の過程を考察することができた。これにより、正のフィードバック効果によって不安定な状態は部分凍結解と全球凍結解二つの安定な状態へ収束することが分かった。また、小氷冠不安定については、そのプロセスを完全に説明できていないため、今後の研究の課題である。