回転球座標系における非粘性流体の運動方程式の導出

本間　友子

神戸大学 理学部 惑星学科
流体地球物理学教育研究分野

2025/03/25

要旨

金星ではスーパーローテーションという大気現象が発生している. これは全球的に自転速度を上回る速さで自転方向に風が吹いている現象である. 高度 60 km 程度上空では約 100 m/s の東風が吹いており, これは赤道における自転速度の約 60 倍にもなる. スーパーローテーションの成因については完全な解明がされていない. これは金星上空約 50 km 〜 70 km には分厚い雲層が存在しており, 可視光による雲層の内部や地表面付近の大気の運動の観測が出来なかったため, 観測データが少なかったことが由来している. 物理的限界によって観測データが限られることにより, 大気全体の運動の解析が出来ず, ひいては現象自体の解析ができなかった. そこで観測データによる解析と並行して, 支配方程式系の数値計算を用いた解析が進められている.

本研究では, 数値計算に用いられている方程式への理解を深めるため, 非粘性流体を仮定した回転球座標系における運動方程式の導出を行った. 非粘性流体を仮定したのは, 大気の運動を想定しているため, 粘性が限りなく小さいと考えることができるためである. 座標系の回転を考慮したのは, 惑星の自転によって観測者の存在する座標系が回転し, それによって生じる効果を計算に含めるためである. また, 惑星の形状を球に近似することが出来ることから, 球座標系を用いた表現を求めた. その結果, 回転による効果として遠心力項とコリオリ力項, 球座標系を想定したことによりメトリック項の存在が確認できた. また, それぞれの項について考察を行い, その理解を深めることを行った.

本論文における導出にあたっては Vallis (2017) を参考にしている.

目 次

第1章　はじめに

1.1　金星大気の観測と課題点

地球を始めとする太陽系の惑星はそれぞれ大気を持ち, 特徴的な大気現象が発生している. 例として金星を取り上げると, スーパーローテーションという現象が起こっている. これは全球的に自転速度を上回る速さで自転方向に風が吹く現象である. 金星では高度 60 km 程度の上空で約 100 m/s に達する東風が吹いており, これは金星の自転速度の約 60 倍にもなる. (図 1.1, 図 1.2). スーパーローテーショ

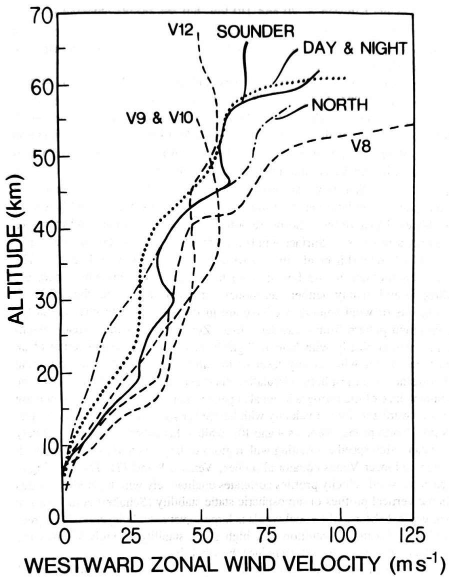

図 1.1: 探査機 Pioneer Venus (パイオニア・ヴィーナス) と Veneras (ヴェネラ) によって観測された, 金星の東風の鉛直分布. V8, V9, V10, V12 は Veneras 8, 9, 10, 12 のことを表している. また, NORTH, DAY & NIGHT, SOUNDER のデータは Pioneer Venus によるデータである. (Schubert, 1983)

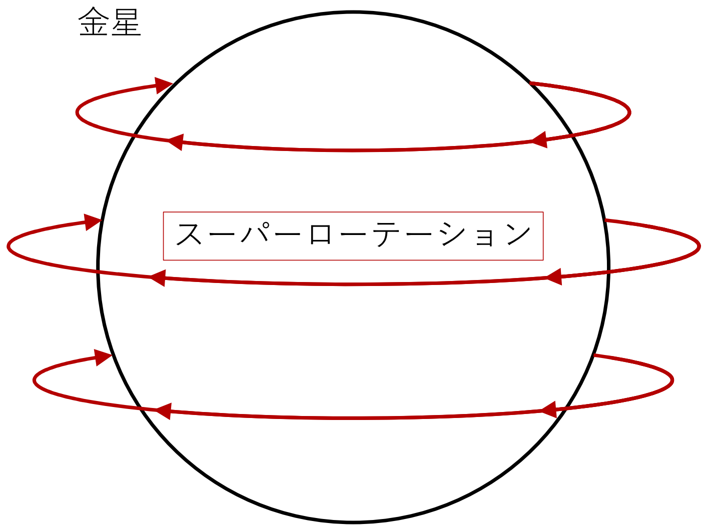

図 1.2: 金星のスーパーローテーションのイメージ図. 金星の自転方向, すなわち西向きに循環が生じている.

ンを始めとし, 金星大気現象に対する研究は進められているが, 金星には上空 50 〜 70 km に硫酸の雲が存在しており, 地表面付近及び雲層内部の可視光での観測はできない (図 1.3). そのため, 観測データが限られており, 大気内部の循環の様子, さらに大気現象についても完全には解明されていない. そこで, 大気現象の理解のための別の方法として, 支配方程式系の数値計算をして解析を行う方法がある.

1.2 流体の運動方程式

惑星大気の運動は, 質量の連続の式, 流体の運動方程式, 熱力学方程式, 状態方程式といった方程式系によって支配されており, 数値計算を行う場合にはこれらの式, もしくはより現実の大気に近づけるための近似や変形を行い, 初期値や境界条件を指定したものを用いて計算が行われる. 本卒業研究では, 特に流体の運動方程式について着目し, 数値計算に用いられるような方程式への理解を深める.

流体の運動方程式は

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{v} + \boldsymbol{F}$$

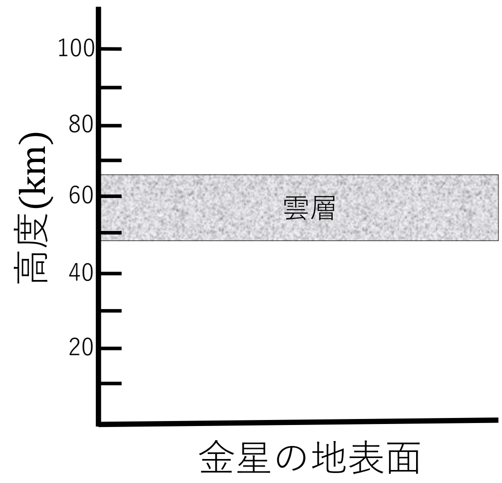

図 1.3: 金星大気における雲層の鉛直分布図. 高度約 50 〜 約 70 km 付近に雲層が存在している. 図の横軸は任意の地点の地表面である.

と表すことができる ($\boldsymbol{v}$ は流体粒子の速度, $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ は $\partial/\partial + \boldsymbol{v}\cdot\nabla$ の物質微分を表す演算子, ρ は流体密度, ν は動粘性係数, $\boldsymbol{F}$ は流体にかかる外力である). 惑星大気を考えるとき, 流体としての大気は粘性がとても小さいため, 非粘性流体を考えることができる. したがって本卒業研究で対象とする方程式は非粘性流体の運動方程式であり,

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \boldsymbol{F} \tag{1.1}$$

である. この式には速度の物質微分を用いられている. また, (1.1) は静止しているのならば座標系を問わない形で記述されている. しかし, 実際には惑星は自転を行っており, 座標系自体も回転軸の周りを回転している. したがって, (1.1) より, 座標系の回転によって生じる効果を考える必要がある. また惑星はその形状を回転楕円体に近似することができる. しかし, 極方向と赤道方向の半径の差は僅かであるため, 形状はさらに球に近似することができる. これらの考え方を用いると, (1.1) を回転球座標系で記述することが考えられる. 球座標系で記述するならば, 緯度, 経度, 惑星中心からの距離を用いて計算を行うことができるようになる.

1.3 本論文の目的と構成

この卒業論文では, (1.1) に着目し, 回転している球座標での非粘性流体の運動方程式を記述する. また, 記述された方程式を考察し, 運動方程式への理解を深めることを目的とする. なお, 一連の導出は Vallis (2017) を参考に行った.

第 2 章では, まず任意の座標系が回転しているときのベクトルの変化率を計算し, 回転の効果を求める. そして, 回転の効果を含んだ非粘性流体の運動方程式の導出を行う.

第 3 章では, 球座標系におけるベクトルや微分の表記を確認し, それらを用いた回転球座標系の非粘性流体運動方程式を記述する.

第 4 章では, 第 2 章, 第 3 章を踏まえた運動方程式の考察を行う.

第 5 章では, 本論文の結論を記している.

第2章 回転系における運動方程式の導出

この章では, 回転系における運動方程式の導出を行う. まずデカルト座標系における回転に伴うベクトルの変化率を求め, これを用いて回転系における位置ベクトル, 速度ベクトルの表現を考える. これらを用いて流体の運動方程式を求める. さらに回転に伴うスカラーの時間変化率を考える.

2.1 回転を伴うベクトルの変化率

ある慣性系におけるデカルト座標を考える. 長さ一定のベクトル $\boldsymbol{C}$ が一定の角速度 Ω で z 軸周りを回転するとき, 微小時間 δt の間で微小角度 $\delta\lambda = \Omega\delta t$ 回転する. この回転によるベクトル $\boldsymbol{C}$ の変化 $\delta\mathbf{C}$ は

$$\delta \boldsymbol{C} = |\boldsymbol{C}|\, cos\vartheta \cdot \delta\lambda \cdot \boldsymbol{m} \tag{2.1}$$

であらわされる. ϑ は $z = 0$ の面とベクトル $\boldsymbol{C}$ がなす角, $\boldsymbol{m}$ は $\boldsymbol{C}$ が変化する方向の単位ベクトルである. ここで $\hat{\vartheta} = \pi/2 - \vartheta$ を導入する. $\hat{\vartheta}$ は角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ と $\boldsymbol{C}$ の成す角であり, これを用いると (2.1) 式は $\boldsymbol{\Omega}$ と $\boldsymbol{C}$ の外積の形で表せることがわかる.

$$\begin{aligned}\delta \boldsymbol{C} &= |\boldsymbol{C}|\, cos\vartheta \cdot |\boldsymbol{\Omega}|\, \delta t \cdot \boldsymbol{m} \\ &= |\boldsymbol{C}|\, |\boldsymbol{\Omega}|\, sin\hat{\vartheta}\boldsymbol{m} \cdot \delta t \\ &= \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{C}\delta t \end{aligned} \tag{2.2}$$

(2.2) 式の両辺を δt で割り, $\delta t \to 0$ の極限操作を行うと

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{C}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{C} \tag{2.3}$$

となり, この左辺は $\boldsymbol{C}$ の変化率を表している. 以上を図示すると図 2.1 のとおりである.

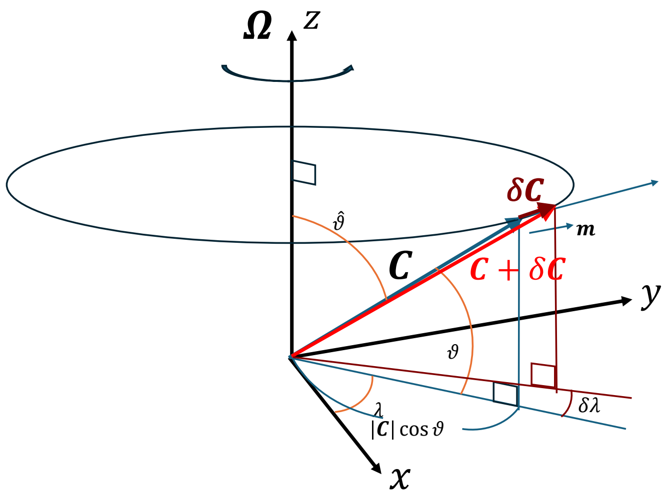

図 2.1: 角速度 Ω で回転するベクトル $\boldsymbol{C}$. ベクトル $\boldsymbol{C}$ は長さ一定であり, 回転系において定ベクトルである. 慣性系においては, 微小時間 δt の間に $\delta\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{C}\delta t$ 変化する. 従って慣性系におけるベクトル $\boldsymbol{C}$ の変化率は $\mathrm{d}\boldsymbol{C}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{C}$ である.

ここで z 軸の周りを一定の角速度 Ω で回転する系を考えると $\boldsymbol{C}$ は定ベクトルである. この回転系において変化するベクトル $\boldsymbol{B}$ について, 回転系における変化量を $(\delta\boldsymbol{B})_R$, 慣性系における変化量を $(\delta\boldsymbol{B})_I$, 慣性系における回転による変化量を $(\delta\boldsymbol{B})_{rot}$ とする. 以降, 慣性系における物理量には I , 回転系における物理量には R を添え字として付ける. 3 つの変化量の関係式は

$$(\delta\boldsymbol{B})_I = (\delta\boldsymbol{B})_R + (\delta\boldsymbol{B})_{rot} \tag{2.4}$$

である. (2.2) 式より, 回転による変化は $\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{B}\delta t$ であるので,

$$(\delta\boldsymbol{B})_I = (\delta\boldsymbol{B})_R + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{B}\delta t \tag{2.5}$$

となる. (2.2) 式から (2.3) 式への変形と同じように変形を行うと,

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\right)_R + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{B} \tag{2.6}$$

となる. (2.6) 式はベクトル $\boldsymbol{B}$ の慣性系における変化率と, 回転系における変化率の関係式である.

2.2 回転系における速度と加速度

位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ に (2.6) 式を適用すると,

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_I = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_R + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r} \tag{2.7}$$

である. 位置ベクトルの時間変化率は速度であるため, 速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を用いて (2.7) 式は

$$\boldsymbol{v}_I = \boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r} \tag{2.8}$$

となる. ここで $\boldsymbol{v}_I$ は慣性速度, $\boldsymbol{v}_R$ は相対速度と呼ばれる. $\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$ は回転による位置ベクトルの変化率, すなわち回転の速度である. 相対速度に着目し, 再度 (2.6) 式を適用し, (2.8) 式を用いながら変形すると

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{d}t}\right)_I &= \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{d}t}\right)_R + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_R \\
\left(\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{v}_I - \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})}{\mathrm{d}t}\right)_I &= \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{d}t}\right)_R + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_R \\
\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_I}{\mathrm{d}t}\right)_I &= \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{d}t}\right)_R + \left(\frac{\mathrm{d}\left(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}\right)}{\mathrm{d}t}\right)_I + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_R \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{d}t}\right)_R + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega}\times\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_I + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_R \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{d}t}\right)_R + 0\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_R \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{d}t}\right)_R + 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})
\end{aligned} \tag{2.9}$$

となる. この変形において回転系は一定の角速度で回転している, つまり $\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}/\mathrm{d}t = 0$ を用いた. (2.9) の右辺第 2 項と第 3 項を移項すると次の式が得られる.

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{d}t}\right)_R = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_I}{\mathrm{d}t}\right)_I - 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_R - \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) \quad \mathrm{at} \quad |\boldsymbol{\Omega}| = \Omega = const \tag{2.10}$$

(2.10) 式は回転系における相対速度の変化率, すなわち相対加速度と, 慣性系における慣性速度の変化率, すなわち慣性加速度の関係式である. ここで右辺第 2 項, 第 3 項はそれぞれ単位質量あたりの**コリオリ力**と**遠心力**であり, 回転系から観測した際に物体に影響を与えているかのように振る舞う見かけの力を表している.

遠心力

単位質量あたりの遠心力 $\boldsymbol{F}_{ce}$ は

$$\boldsymbol{F}_{ce} = -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) \tag{2.11}$$

で表される.

ここで, 図 2.2 のように, 角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ と位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の同一平面上に存在し, $\boldsymbol{\Omega}$ に対し直角に存在するベクトル $\boldsymbol{r}_\perp$ を考える. $\boldsymbol{r}_\perp$ について, $|\boldsymbol{r}_\perp| = |\boldsymbol{r}|sin\hat{\vartheta}$

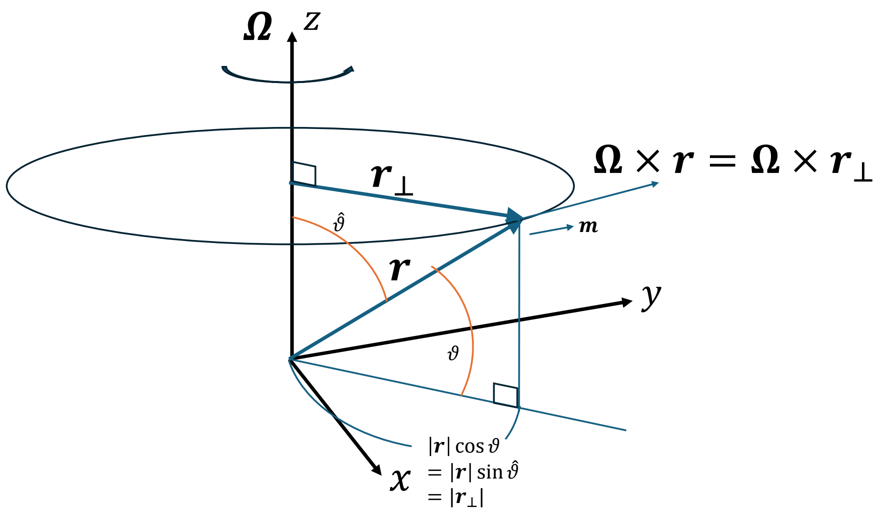

図 2.2:　角速度 Ω で回転する位置ベクトル $\boldsymbol{r}$. 角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ と位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と同じ平面上に存在し, 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と終点を共有しながら角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ に垂直に交わるベクトルを $\boldsymbol{r}_\perp$ とする.

である. また, 物体の進行方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{m}$ とすると, $\boldsymbol{r}_\perp \perp \boldsymbol{m}$ である. 従って, 角速度ベクトルと位置ベクトルの外積について

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r} &= |\boldsymbol{\Omega}||\boldsymbol{r}|sin\hat{\vartheta}\boldsymbol{m} \\ &= |\boldsymbol{\Omega}||\boldsymbol{r}_\perp|\boldsymbol{m} \\ &= \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_\perp \end{aligned} \tag{2.12}$$

が成り立つ. (2.16) 式を用いて $\boldsymbol{F}_{ce}$ を表すと,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{ce} &= -\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_\perp)\\ &= -((\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r}_\perp)\boldsymbol{\Omega}-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{r}_\perp)\\ &= 0+(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{r}_\perp\\ &= \Omega^2\boldsymbol{r}_\perp \end{aligned} \tag{2.13}$$

が成り立つ. ここでスカラーポテンシャル Φ_{ce} を導入する. Φ_{ce} は以下の式で定義する.

$$\begin{aligned}\Phi_{ce} &= -\frac{\Omega^2|r_\perp|^2}{2}\\ &= -\frac{|\boldsymbol{\Omega}|^2|r_\perp|^2}{2}\\ &= -\frac{(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_\perp)^2}{2}\end{aligned} \tag{2.14}$$

スカラーポテンシャル Φ_{ce} の勾配は,

$$\begin{aligned}\nabla\Phi_{ce} &= \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}_\perp|}(\Omega^2|\boldsymbol{r}_\perp|^2)\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}_\perp}\\ &= -\Omega^2|\boldsymbol{r}_\perp|\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}_\perp}\\ &= -\Omega^2\boldsymbol{r}_\perp\end{aligned} \tag{2.15}$$

であるため, 単位質量あたりの遠心力は

$$\boldsymbol{F_{ce}} = -\nabla\Phi_{ce} \tag{2.16}$$

となる.

2.3　回転系における運動方程式

(2.10) は相対加速度と慣性加速度の関係を表している. また慣性系における圧縮非粘性流体の運動方程式 (1.1) の $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v}_I$ と書き直すと

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v_I}}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p+\boldsymbol{F} \tag{2.17}$$

である. ここで扱われている ρ は流体の密度, p は流体中にかかる圧力, $\boldsymbol{F}$ は重力などの外力を表す. 運動方程式は流体粒子に対する時間微分, すなわち物質微分を用いて記述されており, 任意の質点の速度ベクトルの時間微分 (2.10) を適用する

ことで回転系における流体の運動方程式を記述することができる. 従って (2.17) の左辺に (2.10) の相対加速度と慣性加速度の関係式を使って

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{D}t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{F}$$

が得られる. (2.11), (2.13) より, $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) = \Omega^2 \boldsymbol{r}_\perp$ を用いると

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{D}t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_R - \Omega^2 \boldsymbol{r}_\perp = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{F}$$

である. (2.16) より遠心力項 $-\Omega^2 \boldsymbol{r}_\perp$ をポテンシャル Φ_{ce} を使って書き直すと

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{D}t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_R + \nabla\Phi_{ce} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{F}$$

であり, 左辺第 3 項を移項して

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{D}t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_R = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi_{ce} + \boldsymbol{F} \tag{2.18}$$

となり, 回転系における非粘性流体の運動方程式を導けた.

第3章　球座標系における運動方程式の導出

この章では, 球座標における ∇ を用いた演算子を導き, それらを用いて回転球座標における運動方程式を導出する.

まず, 球座標系における物質微分を, 局所平面における物質微分に, 球座標の微小量を代入することで求める.

次に演算子 ∇, 及び ∇ を利用したベクトルの恒等式を, 惑星の中心を中心としたデカルト座標との対応を考えながら導出する.

3.1　遠心力と球座標

2.2 節より, 遠心力はスカラーポテンシャルを用いて表現できることがわかった. また重力, すなわち惑星と惑星上の物質による万有引力によるニュートン引力もポテンシャルによって表現できる, ポテンシャル力であることが知られている. そのため, 遠心力とニュートン引力の和として実効重力 $\boldsymbol{g}$ を定義できる.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g} &\equiv \boldsymbol{g}_{grav} + \boldsymbol{F}_{ce} \\ &= \boldsymbol{g}_{grav} + \Omega^2 \boldsymbol{r}_\perp \end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで, $\boldsymbol{g}_{grav}$ はニュートン引力, $\boldsymbol{F}_{ce}$ は遠心力, $\boldsymbol{r}_\perp$ は角速度ベクトルに対し垂直で大きさ $r_\perp = r\cos\theta$ を持つベクトル, r は物体と惑星の中心の間の距離, θ は緯度を表す. $\boldsymbol{g}$ について, ニュートン引力, 遠心力ともにスカラーポテンシャルを用いて表現することができるため, 実効重力もまたジオポテンシャル Φ を

$$\boldsymbol{g} = -\nabla\Phi \tag{3.2}$$

と定義することができる. このジオポテンシャルが一定の面は厳密には球形ではない. なぜなら, 遠心力の大きさ $r_\perp$ が緯度によって変化し, 重力と遠心力の合成によって得られる実効重力の方向が惑星の中心方向とからずれるからである.

ここで, 地球を例にとって, 形状が完全な球であると仮定した場合における, 東西風が存在している大気の局所平面に対し垂直な方向と平行な方向の力のバランスについて考える. 任意の局所平面に対しかかっている力は図 3.1 において表したとおりである. 遠心力の大きさは $|\boldsymbol{F}_{ce}| = |\Omega^2 \boldsymbol{r}_\perp| = \Omega^2 r_\perp$ である. またコリオリ力の大きさは $|\boldsymbol{F}_{Co}| = |-2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_R| = 2\Omega|\boldsymbol{v}_R|$ である.

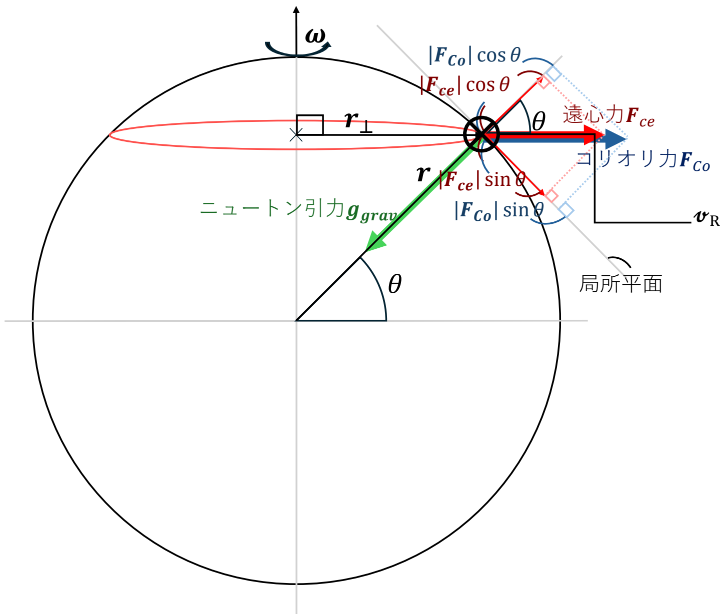

図 3.1:　惑星を回転軸と任意の地点を表す位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を含むように切ったときの断面図と, その地点においてかかっている重力 $\boldsymbol{g}_{grav}$, 遠心力 $\boldsymbol{F}_{ce}$, コリオリ力 $\boldsymbol{F}_{Co}$ を表した図. 遠心力は回転軸に垂直方向に働くため, 位置ベクトルが表す地点の局所平面に対し, 垂直な成分と平行な成分に分解でき, その大きさは緯度を θ とするとそれぞれ $|\boldsymbol{F}_{ce}|\cos\theta$, $|\boldsymbol{F}_{ce}|\sin\theta$ である. コリオリ力についても同様に分解でき, 垂直な成分と平行な成分はそれぞれ $|\boldsymbol{F}_{Co}|\cos\theta$, $|\boldsymbol{F}_{Co}|\sin\theta$ である.

遠心力とコリオリ力の局所平面に垂直な成分の大きさはそれぞれ $\Omega^2 r_\perp \cos\theta = \Omega^2 r\cos^2\theta$, $2\Omega|\boldsymbol{v}_R|\cos\theta$ である. これらの和と重力の大きさとの比を考えると

$$\begin{aligned}
\frac{\Omega^2 r\cos^2\theta + 2\Omega|\boldsymbol{v}_R|\cos\theta}{|\boldsymbol{g}_{grav}|} &= \frac{\Omega^2 a\cos^2\theta}{|\boldsymbol{g}_{grav}|} + \frac{2\Omega|\boldsymbol{v}_R|\cos\theta}{|\boldsymbol{g}_{grav}|} \\
&\approx \frac{\Omega^2 a}{|\boldsymbol{g}_{grav}|} + \frac{2\Omega|\boldsymbol{v}_R|\cos\theta}{|\boldsymbol{g}_{grav}|} \\
&\approx \frac{(7.2\times10^{-5})^2\times6.4\times10^6}{9.8} + \frac{2\times7.2\times10^{-5}\times1.0\times10}{9.8} \\
&\approx 3.4\times10^{-3} + 1.5\times10^{-5} \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

となる．ここでニュートン引力の大きさ $|\boldsymbol{g}_{grav}|$ には 9.8 $\mathrm{N/s^2}$, Ω には地球の自転角速度 7.2 $\times 10^{-5}$ rad/s, $|\boldsymbol{v}_R|$ には 1.0 $\times$ 10 m/s, a には地球の半径 6.4 $\times 10^6$km を用いた. (3.3) より, 地球上の局所平面において重力に対して遠心力, コリオリ力は十分に小さいことが分かる．従って, 地球上の局所平面に垂直な方向の力の釣り合いには, 重力と釣り合う別の力が働くことが考えられる.

遠心力とコリオリ力の局所平面に平行な成分の大きさは $\Omega^2 r_\perp \sin\theta = \Omega^2 r\cos\theta\sin\theta$, 2 $\Omega|\boldsymbol{v}_R|\sin\theta$ である．この 2 つの力の比を取ると

$$\begin{aligned}\frac{\Omega^2 r\cos\theta\sin\theta}{2\Omega|\boldsymbol{v}_R|\sin\theta} &= \frac{\Omega a\cos\theta}{2|\boldsymbol{v}_R|}\\ &\approx \frac{\Omega a}{2|\boldsymbol{v}_R|}\\ &\approx \frac{7.2\times10^{-5}\times6.4\times10^{6}}{2\times1.0\times10}\\ &\approx 2.3\times10 \end{aligned}\tag{3.4}$$

となる．この結果より, 地球上においてコリオリ力に対しては遠心力が優位に働いていることが分かる．また, 遠心力とコリオリ力は惑星の極から離れる方向に向かって働いており, 局所平面に対し水平な方向の力の釣り合いには, 極に向かうような別の力が働いており, それは主に遠心力と釣り合っていることが考えられる.

また同様の比較を, 金星上空 60 km の東西風, 金星地表面付近の東西風についても行った．計算に用いた数値, 及び計算結果は以下の表の通り．　金星の場合に

表 3.1: 金星における力学バランスの計算に用いた値

	Ω [rad/s]	$|\boldsymbol{v}_R|$ [m/s]	r [m]	$|\boldsymbol{g}_{grav}|$ [m/s^2]
金星上空 60 km	3.0×10^{-7}	100	6.1×10^{6}	8.7
金星地表面付近	3.0×10^{-7}	10	6.1×10^{6}	8.9

表 3.2: 表 3.1 を用いた, 金星における力学バランスの計算結果

	コリオリ力の垂直方向の比	遠心力の垂直方向の比	平行方向の比
金星上空 60 km	6.9×10^{-6}	6.3×10^{8}	9.2×10^{-3}
金星地表面付近	6.7×10^{-7}	6.1×10^{8}	9.1×10^{-2}

おける局所平面に対し垂直方向のバランスは, 地球と同じくニュートン引力の方が大きく働いていることが分かる．また, 局所平面に対し平行方向にはコリオリ力の方が強く働いていることが分かる．また, 金星では自転方向, 東西風の方向が地球とは反対方向になるため, コリオリ力の局所平面に対し平行な方向の成分は極から

離れる方向に働く. これにより, 遠心力, コリオリ力以外に働く力は局所平面に対して平行方向では極向きに働いており, 主にコリオリ力と釣り合っていることが分かる. 上空と地表面付近の比をみると, ニュートン引力の差と比較して, コリオリ力の垂直方向の比が大きいことと, 遠心力の垂直方向の比はあまり変わっていないことが分かる. また平行方向の比は上空の方が小さくなっている. これらのことから, 上空ではコリオリ力がより強くなっていることが分かる. なお, これはコリオリ力の大きさが $\Omega|\boldsymbol{v}_R|$ であることからも確かめられ, 上空であるほど東西風が速くなるために, 上空でのコリオリ力が強くなることが分かる. したがって遠心力, コリオリ力以外に働く力は上空に行くほど強くなっている必要がある.

上記の別の力として, 気圧傾度力が考えられる. つまり局所平面に対し垂直方向, 平行方向ともに気圧傾度力と重力, もしくは気圧傾度力と遠心力, コリオリ力のつりあいを考える必要がある.

また地球上の中高緯度の支配的な流れは地衡流だと考えられている. 地衡流とは, 圧力勾配が存在することで発生する圧力傾度力と, 粒子の運動方向に垂直に働くコリオリ力が釣り合うことで流れの方向, 大きさが決定される流れのことである. 地衡流が存在しているとき, 上記の通り, 流れの方向, 大きさを決定しているのは局所平面に対して平行方向のコリオリ力と気圧傾度力の釣り合いである. しかし, 地球の形を球で近似するとき, (3.8) より平行方向には遠心力のほうが強く働いており, コリオリ力と釣り合う気圧傾度力の成分よりも遠心力と釣り合う気圧傾度力の成分が大きいことになる. そのためコリオリ力と気圧傾度力のバランスが分かりづらくなってしまう.

この問題を回避するために, ジオポテンシャル Φ について等値面を球で近似し, 勾配の方向を鉛直方向と定義し, 実効重力を用いて力の釣り合いを考えることにする. このとき局所平面は等ポテンシャル面に接する形で存在し, 実効重力は局所平面に垂直に働くようになる. すなわち, 実効重力の平行方向への成分の大きさは 0 となる. そのため平行方向の力としては, コリオリ力と気圧傾度力のみが存在する形となり, 地衡流を決定する力のバランスがわかりやすくなる.

ここまでは地球での力のバランスを考え, 局所平面の鉛直方向の再定義を行ってきた. 以降の節では, 地球以外の惑星においても同様にジオポテンシャル Φ の勾配の方向を鉛直方向と定義して計算を進めていく.

3.2 球座標系における物質微分

ジオポテンシャル Φ の勾配方向を鉛直方向と定義した球座標系を考える．球座標系におけるある点の位置は (λ, ϑ, r) によって与えられる．λ, ϑ, r はそれぞれ，東方向の角度 (経度), 極方向の角度 (緯度), 惑星の中心からの距離を表す．また，ある点における局所平面において，東西方向を x, 極方向を y, 局所平面に対し垂直方向を z とする局所デカルト座標を考える．これらの点と座標系の関係は図 3.2 の通り．また惑星の半径を a と置くと，$z = r - a$ の関係が得られる．また図より，

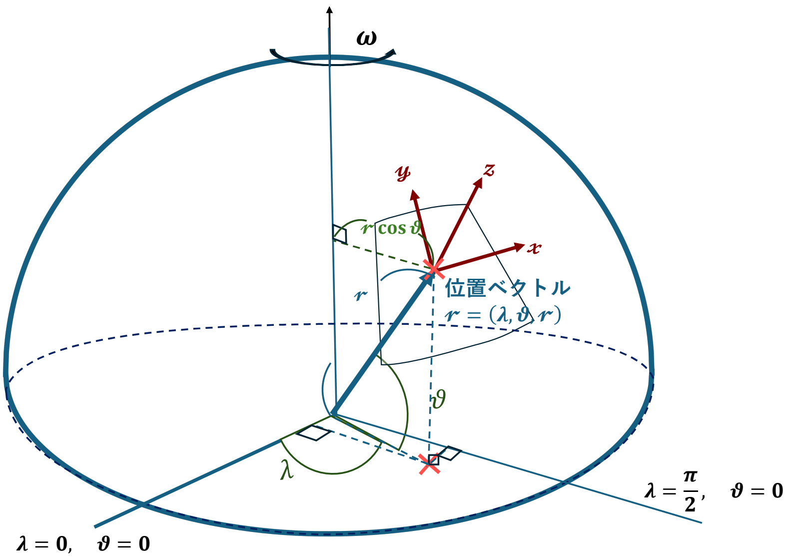

図 3.2: 惑星の北半球における位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と位置ベクトルが表す点を含む局所平面，及び球座標系と局所デカルト座標系の図．位置ベクトルは球座標を用いて $\boldsymbol{r} = (\lambda, \vartheta, r)$ で表される．局所平面上では，東西方向を x, 極方向を y, 局所平面に対し垂直方向を z とする局所デカルト座標が図示されている．

x と λ, y と ϑ, z と r 方向が一致していることが分かる．

球座標の 3 成分の微小変化量を $\delta\lambda$, $\delta\vartheta$, δr, 局所デカルト座標の 3 成分の微小変化量を δx, δy, δz とする．この 2 つの系における微小変化量の関係は

$$\delta x = r\cos\vartheta\delta\lambda, \tag{3.5}$$

$$\delta y = r\delta\vartheta, \tag{3.6}$$

$$\delta z = \delta r \tag{3.7}$$

である．また, 局所デカルト座標における任意の物理量 ϕ の物質微分は, 局所デカルト座標での速度を $(u,\, v,\, w)$ とすると

$$\frac{\mathrm{D}\phi}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + u\frac{\partial\phi}{\partial x} + v\frac{\partial\phi}{\partial y} + w\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

である．第 2 項, 第 3 項, 第 4 項に連鎖律を適用し

$$\frac{\mathrm{D}\phi}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + u\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x} + v\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + w\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} \tag{3.8}$$

となる．ここで $\lambda = \lambda(x, y)$, $\vartheta = \vartheta(x, y)$ とする．このように書けるのは, r は z の関数であり, かつ λ, ϑ は r と独立であることから, λ, ϑ が z の関数でないと推測できるためである．また $z = r - a$ であることから, $r = r(z)$ と表すことができ, x, y には依存しない．$\partial\lambda/\partial x$ について

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\lambda(x+\Delta x, y) - \lambda(x, y)}{\Delta x}$$

と定義される．λ の変化量を $\Delta\lambda$ とすると

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\lambda(x+\Delta x, y) - \lambda(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\lambda}{\Delta x}$$

となり, $\Delta\lambda$, Δx に微小増加量 $\delta\lambda$, δx を代入すると

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\lambda}{\Delta x} &= \frac{\delta\lambda}{\delta x}\\ &= \frac{\delta\lambda}{r\cos\vartheta\delta\lambda}\\ &= \frac{1}{r\cos\vartheta}\end{aligned} \tag{3.9}$$

と表される．同様に $\partial\vartheta/\partial y$, $\partial r/\partial z$ を求めると

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vartheta}{\partial y} &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\vartheta(x, y+\Delta y) - \vartheta(x, y)}{\Delta y}\\ &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta\vartheta}{\Delta y}\\ &= \frac{\delta\vartheta}{\delta y}\\ &= \frac{\delta\vartheta}{r\delta\vartheta}\\ &= \frac{1}{r}\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{r(z+\Delta z) - r(z)}{\Delta z}$$

ここで $z = r - a$ より

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{r(z+\Delta z) - r(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z+a)-(z+a)}{\Delta z} \\ = 1 \tag{3.11}$$

が得られる. (3.9), (3.10), (3.11) を (3.8) に代入すると

$$\frac{\mathrm{D}\phi}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + v\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} + w\frac{\partial \phi}{\partial r} \tag{3.12}$$

となる. ここで x と λ, y と λ, z と r 方向が一致しているため, 局所デカルト座標における速度 (u, v, w) は球座標系における速度となる. そのため (3.12) は球座標系における物質微分を表す.

ここで速度成分 u, v, w を λ, ϑ, r を用いて書き表す. まず, 東西方向の速度成分 u を求める. (3.12) の 物理量 ϕ に λ を代入し

$$\frac{\mathrm{D}\lambda}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} + u\frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial \lambda}{\partial \lambda} + v\frac{1}{r}\frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta} + w\frac{\partial \lambda}{\partial r} \\ = u\frac{1}{r\cos\vartheta}$$

が得られる. 両辺に $r\cos\vartheta$ を掛けると

$$u = r\cos\vartheta\frac{\mathrm{D}\lambda}{\mathrm{D}t} \tag{3.13}$$

となる. 同様に v, w を求めると,

$$\frac{\mathrm{D}\vartheta}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u\frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial \lambda} + v\frac{1}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial \vartheta} + w\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \\ = v\frac{1}{r}$$

両辺に r を掛け

$$v = r\frac{\mathrm{D}\vartheta}{\mathrm{D}t} \tag{3.14}$$

$$\frac{\mathrm{D}r}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial r}{\partial t} + u\frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial r}{\partial \lambda} + v\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \vartheta} + w\frac{\partial r}{\partial r} \\ = w \tag{3.15}$$

となる. (3.13), (3.14), (3.15) より速度成分は

$$(u, v, w) = \left(r\cos\vartheta\frac{\mathrm{D}\lambda}{\mathrm{D}t}, r\frac{\mathrm{D}\vartheta}{\mathrm{D}t}, \frac{\mathrm{D}r}{\mathrm{D}t} \right) \tag{3.16}$$

である.

3.3　球座標系における単位ベクトルの偏微分

この節では, 球座標系における λ, ϑ, r 方向の単位ベクトルの空間偏微分を求める．これは 河合 (2015) を参考に行った．惑星の中心を原点とし, $\lambda = 0$, $\vartheta = 0$ の方向を x 方向, $\lambda = \pi/2$, $\vartheta = 0$ の方向を y 方向, 回転軸方向を z 方向とするデカルト座標系を考える．ここで扱うデカルト座標系は前節において考えた局所デカルト座標系とは異なる．球座標系 (λ, ϑ, r) とデカルト座標系 (x, y, z) の間の関係は

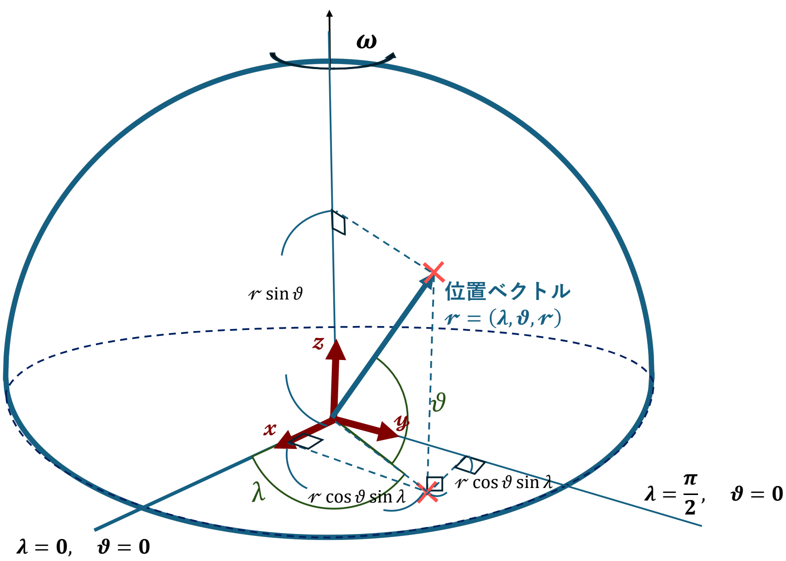

図 3.3:　惑星の北半球における位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と位置ベクトルが表す点を含む局所平面, 及び球座標系と惑星の原点を中心とするデカルト座標系の図. 位置ベクトルは球座標を用いて $\boldsymbol{r} = (\lambda, \vartheta, r)$ で表される．デカルト座標は $\lambda = 0$, $\vartheta = 0$ を x, $\lambda = \pi/2$, $\vartheta = 0$ を y, 回転軸方向を z と設定した.

$$x = r\cos\vartheta\cos\lambda \tag{3.17}$$

$$y = r\cos\vartheta\sin\lambda \tag{3.18}$$

$$z = r\sin\vartheta \tag{3.19}$$

である．球座標系における規格化されていない基底 $\boldsymbol{e}_\lambda$, $\boldsymbol{e}_\vartheta$, $\boldsymbol{e}_r$ は, 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ の λ, ϑ, r の偏微分で得られるため

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_\lambda \\ \boldsymbol{e}_\vartheta \\ \boldsymbol{e}_r\end{pmatrix} &\equiv \begin{pmatrix}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r} + \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial r} + \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial r}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる．デカルト座標系の基底 $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ を用いて表すと, $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{y} = y\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{z} = z\boldsymbol{e}_z$ より

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r} + \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial r} + \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial r}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-r\cos\vartheta\sin\lambda & r\cos\vartheta\cos\lambda & 0 \\ -r\sin\vartheta\cos\lambda & -r\sin\vartheta\sin\lambda & r\cos\vartheta \\ \cos\vartheta\cos\lambda & \cos\vartheta\sin\lambda & \sin\vartheta\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-r\cos\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{e}_x + r\cos\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{e}_y \\ -r\sin\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{e}_x - r\sin\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{e}_y + r\cos\vartheta\boldsymbol{e}_z \\ \cos\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{e}_x + \cos\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{e}_y + \sin\vartheta\boldsymbol{e}_z\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.20}$$

である．それぞれの基底の大きさは

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{e}_\lambda| &= \sqrt{(-r\cos\vartheta\sin\lambda)^2 + (r\cos\vartheta\cos\lambda)^2} \\ &= \sqrt{r^2\cos^2\vartheta\sin^2\lambda + r^2\cos^2\vartheta\cos^2\lambda} \\ &= \sqrt{r^2\cos^2\vartheta} \\ &= r\cos\vartheta\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{e}_\vartheta| &= \sqrt{(-r\sin\vartheta\cos\lambda)^2 + (-r\sin\vartheta\sin\lambda)^2 + (r\cos\vartheta)^2} \\ &= \sqrt{r^2\sin^2\vartheta\cos^2\lambda + r^2\sin^2\vartheta\sin^2\lambda + r^2\cos^2\vartheta} \\ &= \sqrt{r^2} \\ &= r\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{e}_r| &= \sqrt{(\cos\vartheta\cos\lambda)^2 + (\cos\vartheta\sin\lambda)^2 + (\sin\vartheta)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2\vartheta\cos^2\lambda + \cos^2\vartheta\sin^2\lambda + \sin^2\vartheta} \\ &= 1\end{aligned} \tag{3.23}$$

となる．(3.21), (3.22), (3.23) を用いて (3.20) の規格化を行ったベクトルを ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$) とすると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i} &= \frac{1}{|\boldsymbol{e}_\lambda|}\boldsymbol{e}_\lambda \\ &= \frac{1}{r\cos\vartheta}(-r\cos\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{e}_x + r\cos\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{e}_y) \\ &= -\sin\lambda\boldsymbol{e}_x + \cos\lambda\boldsymbol{e}_y \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j} &= \frac{1}{|\boldsymbol{e}_\vartheta|}\boldsymbol{e}_\vartheta \\ &= \frac{1}{r}(-r\sin\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{e}_x - r\sin\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{e}_y + r\cos\vartheta\boldsymbol{e}_z) \\ &= -\sin\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{e}_x - \sin\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{e}_y + \cos\vartheta\boldsymbol{e}_z \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k} &= \frac{1}{|\boldsymbol{e}_r|}(\cos\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{e}_x + \cos\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{e}_y + \sin\vartheta\boldsymbol{e}_z) \\ &= \cos\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{e}_x + \cos\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{e}_y + \sin\vartheta\boldsymbol{e}_z \end{aligned} \tag{3.26}$$

と表せる．これらを球座標系の単位ベクトルと呼ぶ.

ここで, デカルト座標の基底 $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ を球座標系の単位ベクトルを使って書き表す．まず $\boldsymbol{e}_x$ を導出する．(3.24) と $-\sin\lambda$, (3.25) と $\sin\vartheta\cos\lambda$, (3.26) と $\cos\lambda\cos\vartheta$ の積をとり,

$$\begin{aligned}-\sin\lambda\boldsymbol{i} &= \sin^2\lambda\boldsymbol{e}_x - \sin\lambda\cos\lambda\boldsymbol{e}_y \\ \sin\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{j} &= \sin^2\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{e}_x + \sin^2\vartheta\sin\lambda\cos\lambda\boldsymbol{e}_y - \sin\vartheta\cos\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{e}_z \\ \cos\lambda\cos\vartheta\boldsymbol{k} &= \cos^2\vartheta\cos^2\lambda\boldsymbol{e}_x + \cos^2\vartheta\sin\lambda\cos\lambda\boldsymbol{e}_y + \cos\vartheta\sin\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{e}_z \end{aligned}$$

となる．これらを足し合わせると,

$$\begin{aligned}&-\sin\lambda\boldsymbol{i} + \sin\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{j} + \cos\lambda\cos\vartheta\boldsymbol{k} \\ &\quad= (\sin^2\lambda + \sin^2\vartheta\cos^2\lambda + \cos^2\vartheta\cos^2\lambda)\boldsymbol{e}_x \\ &\qquad + (-\sin\lambda\cos\lambda + \sin^2\vartheta\sin\lambda\cos\lambda + \cos^2\vartheta\sin\lambda\cos\lambda)\boldsymbol{e}_y \\ &\qquad + (-\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\lambda + \cos\vartheta\sin\vartheta\cos\lambda)\boldsymbol{e}_z \\ &\quad= \boldsymbol{e}_x \end{aligned} \tag{3.27}$$

となり $\boldsymbol{e}_x$ が得られる．次に $\boldsymbol{e}_y$ を導出する．(3.24) と $\cos\lambda$, (3.25) と $-\sin\vartheta\sin\lambda$,

(3.26) と $\cos\vartheta\sin\lambda$ の積をとると

$$
\begin{aligned}
\cos\lambda\boldsymbol{i} &= -\sin\lambda\cos\lambda\boldsymbol{e}_x + \cos^2\lambda\boldsymbol{e}_y \\
-\sin\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{j} &= \sin^2\vartheta\sin\lambda\cos\lambda\boldsymbol{e}_x + \sin^2\vartheta\sin^2\lambda\boldsymbol{e}_y - \sin\vartheta\cos\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{e}_z \\
\cos\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{k} &= \cos^2\vartheta\cos\lambda\sin\lambda\boldsymbol{e}_x + \cos^2\vartheta\sin^2\lambda\boldsymbol{e}_y + \sin\vartheta\cos\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}
$$

となる. これらを足し合わせると

$$
\begin{aligned}
&\cos\vartheta\boldsymbol{i} - \sin\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{j} + \cos\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{k} \\
&\quad = (-\sin\lambda\cos\lambda + \sin^2\vartheta\sin\lambda\cos\lambda + \cos^2\vartheta\cos\lambda\sin\lambda)\boldsymbol{e}_x \\
&\qquad + (\cos^2\lambda + \sin^2\vartheta\sin^2\lambda + \cos^2\vartheta\sin^2\lambda)\boldsymbol{e}_y \\
&\qquad + (-\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\lambda + \sin\vartheta\cos\vartheta\sin\lambda)\boldsymbol{e}_z \\
&\quad = \boldsymbol{e}_y
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

となり $\boldsymbol{e}_y$ が得られる. 最後に $\boldsymbol{e}_z$ を導出する. (3.25) と $\cos\vartheta$, (3.26) と $\sin\vartheta$ の積をとると

$$
\begin{aligned}
\cos\vartheta\boldsymbol{j} &= -\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{e}_x - \sin\vartheta\cos\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{e}_y + \cos^2\vartheta\boldsymbol{e}_z \\
\sin\vartheta\boldsymbol{k} &= \sin\vartheta\cos\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{e}_x + \sin\vartheta\cos\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{e}_y + \sin^2\vartheta\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}
$$

となる. これらを足し合わせると

$$
\begin{aligned}
&\cos\vartheta\boldsymbol{j} + \sin\vartheta\boldsymbol{k} \\
&\quad = (-\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\lambda + sin\vartheta\cos\vartheta\cos\lambda)\boldsymbol{e}_x \\
&\qquad + (-\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\lambda + \sin\vartheta\cos\vartheta\sin\lambda)\boldsymbol{e}_y \\
&\qquad + (\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)\boldsymbol{e}_z \\
&\quad = \boldsymbol{e}_z
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

となり $\boldsymbol{e}_z$ が得られる. (3.27), (3.28), (3.29) を改めて以下に記述すると

$$
\boldsymbol{e}_x = -\sin\lambda\boldsymbol{i} - \sin\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{j} + \cos\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{k} \tag{3.27}
$$
$$
\boldsymbol{e}_y = \cos\lambda\boldsymbol{i} - \sin\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{j} + \cos\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{k} \tag{3.28}
$$
$$
\boldsymbol{e}_z = \cos\vartheta\boldsymbol{j} + \sin\vartheta\boldsymbol{k} \tag{3.29}
$$

となり, デカルト座標系の基底と球座標の単位ベクトルの関係が得られる.

ここで, 球座標における演算子 ∇ を求めるため, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ の λ, ϑ, r の偏微分をそれぞれ計算する. 球座標の単位ベクトルの式を再掲すると

$$
\boldsymbol{i} = -\sin\lambda\boldsymbol{e}_x + \cos\lambda\boldsymbol{e}_y \tag{2.32}
$$
$$
\boldsymbol{j} = -\sin\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{e}_x - \sin\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{e}_y + \cos\vartheta\boldsymbol{e}_z \tag{2.33}
$$
$$
\boldsymbol{k} = \cos\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{e}_x + \cos\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{e}_y + \sin\vartheta\boldsymbol{e}_z \tag{2.34}
$$

である. まず $\boldsymbol{i}$ の λ の偏微分を求める.

$$\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial \lambda} = -\cos\lambda \boldsymbol{e}_x - \sin\lambda \boldsymbol{e}_y.$$

デカルト座標系の基底と球座標の単位ベクトルの関係を用いて $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ を消去すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial \lambda} &= -\cos\lambda(-\sin\lambda \boldsymbol{i} - \sin\vartheta\cos\lambda \boldsymbol{j} + \cos\vartheta\cos\lambda \boldsymbol{k}) \\ &\quad - \sin\lambda(\cos\lambda \boldsymbol{i} - \sin\vartheta\sin\lambda \boldsymbol{j} + \cos\vartheta\sin\lambda \boldsymbol{k}) \\ &= \sin\lambda\cos\lambda \boldsymbol{i} + \sin\vartheta\cos^2\lambda \boldsymbol{j} - \cos\vartheta\cos^2\lambda \boldsymbol{k} \\ &\quad - \sin\lambda\cos\lambda \boldsymbol{i} + \sin\vartheta\sin^2\lambda \boldsymbol{j} - \cos\vartheta\sin^2\lambda \boldsymbol{k} \\ &= \sin\vartheta \boldsymbol{j} - \cos\vartheta \boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{3.30}$$

となり, $\boldsymbol{i}$ の λ の偏微分を求めることができた. 次に $\boldsymbol{i}$ の ϑ の偏微分, r の偏微分を求めるが, $\boldsymbol{i}$ は ϑ, r に依存しないため,

$$\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial \vartheta} = 0 \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial r} = 0 \tag{3.32}$$

である.

次に $\boldsymbol{j}$ の λ の偏微分を求める.

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial \lambda} = \sin\vartheta\sin\lambda \boldsymbol{e}_x - \sin\vartheta\cos\lambda \boldsymbol{e}_y.$$

デカルト座標系の基底と球座標の単位ベクトルの関係を用いて $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ を消去すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial \lambda} &= \sin\vartheta\sin\lambda(-\sin\lambda \boldsymbol{i} - \sin\vartheta\cos\lambda \boldsymbol{j} + \cos\vartheta\cos\lambda \boldsymbol{k}) \\ &\quad - \sin\vartheta\cos\lambda(\cos\lambda \boldsymbol{i} - \sin\vartheta\sin\lambda \boldsymbol{j} + \cos\vartheta\sin\lambda \boldsymbol{k}) \\ &= -\sin\vartheta\sin^2\lambda \boldsymbol{i} - \sin^2\vartheta\sin\lambda\cos\lambda \boldsymbol{j} + \sin\vartheta\sin\lambda\cos\vartheta\cos\lambda \boldsymbol{k} \\ &\quad - \sin\vartheta\cos^2\lambda \boldsymbol{i} + \sin^2\vartheta\sin\lambda\cos\lambda \boldsymbol{j} - \sin\vartheta\sin\lambda\cos\vartheta\cos\lambda \boldsymbol{k} \\ &= -\sin\vartheta \boldsymbol{i} \end{aligned} \tag{3.33}$$

となり, $\boldsymbol{j}$ の λ の偏微分を求めることができた. 続いて, $\boldsymbol{j}$ の ϑ の偏微分を求める.

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial \vartheta} = -\cos\vartheta\cos\lambda \boldsymbol{e}_x - \cos\vartheta\sin\lambda \boldsymbol{e}_y - \sin\vartheta \boldsymbol{e}_z.$$

デカルト座標系の基底と球座標の単位ベクトルの関係を用いて $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ を消去すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial \vartheta} &= -\cos\vartheta\cos\lambda(-\sin\lambda\boldsymbol{i} - \sin\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{j} + \cos\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{k}) \\
&\quad - \cos\vartheta\sin\lambda(\cos\lambda\boldsymbol{i} - \sin\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{j} + \cos\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{k}) \\
&\quad - \sin\vartheta(\cos\vartheta\boldsymbol{j} + \sin\vartheta\boldsymbol{k}) \\
&= \cos\vartheta\sin\lambda\cos\lambda\boldsymbol{i} + \sin\vartheta\cos\vartheta\cos^2\lambda\boldsymbol{j} - \cos^2\vartheta\cos^2\lambda\boldsymbol{k} \\
&\quad - \cos\vartheta\sin\lambda\cos\lambda\boldsymbol{i} + \sin\vartheta\sin^2\lambda\cos\vartheta\boldsymbol{j} - \cos^2\vartheta\sin^2\lambda\boldsymbol{k} \\
&\quad - \sin\vartheta\cos\vartheta\boldsymbol{j} - \sin^2\vartheta\boldsymbol{k} \\
&= \sin\vartheta\cos\vartheta\boldsymbol{j} - \cos^2\vartheta\boldsymbol{k} - \sin\vartheta\cos\vartheta\boldsymbol{j} - \sin^2\vartheta\boldsymbol{k} \\
&= -\boldsymbol{k}
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

となり, $\boldsymbol{j}$ の ϑ の偏微分を求めることができた. 続いて $\boldsymbol{j}$ の r の偏微分を求めるが, $\boldsymbol{j}$ は r に依存しないため,

$$
\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial r} = 0 \tag{3.35}
$$

である.

次に $\boldsymbol{k}$ の λ の偏微分を求める

$$
\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \lambda} = -\cos\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{e}_x + \cos\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{e}_y.
$$

デカルト座標系の基底と球座標の単位ベクトルの関係を用いて $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ を消去すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \lambda} &= -\cos\vartheta\sin\lambda(-\sin\lambda\boldsymbol{i} - \sin\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{j} + \cos\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{k}) \\
&\quad + \cos\vartheta\cos\lambda(\cos\lambda\boldsymbol{i} - \sin\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{j} + \cos\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{k}) \\
&= \cos\vartheta\sin^2\lambda\boldsymbol{i} + \sin\vartheta\cos\vartheta\sin\lambda\cos\lambda\boldsymbol{j} - \cos^2\vartheta\sin\lambda\cos\lambda\boldsymbol{k} \\
&\quad + \cos\vartheta\cos^2\lambda\boldsymbol{i} - \sin\vartheta\cos\vartheta\sin\lambda\cos\lambda\boldsymbol{j} + \cos^2\vartheta\sin\lambda\cos\lambda\boldsymbol{k} \\
&= \cos\vartheta\boldsymbol{i}
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

となり, $\boldsymbol{k}$ の λ の偏微分を求めることができた. 続いて, $\boldsymbol{k}$ の ϑ の偏微分を求める.

$$
\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \vartheta} = -\sin\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{e}_x - \sin\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{e}_y + \cos\vartheta\boldsymbol{e}_z.
$$

デカルト座標系の基底と球座標の単位ベクトルの関係を用いて $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ を消去

すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial \vartheta} &= -\sin\vartheta\cos\lambda(-\sin\lambda\boldsymbol{i} - \sin\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{j} + \cos\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{k}) \\
&\quad - \sin\vartheta\sin\lambda(\cos\lambda\boldsymbol{i} - \sin\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{j} + \cos\vartheta\sin\lambda\boldsymbol{k}) \\
&\quad + \cos\vartheta(\cos\vartheta\boldsymbol{j} + \sin\vartheta\boldsymbol{k}) \\
&= \sin\vartheta\sin\lambda\cos\lambda\boldsymbol{i} + \sin^2\vartheta\cos\lambda\boldsymbol{j} - \sin\vartheta\cos\vartheta\cos^2\lambda\boldsymbol{k} \\
&\quad - \sin\vartheta\sin\lambda\cos\lambda \\
&= \sin^2\vartheta\boldsymbol{j} + \cos^2\vartheta\boldsymbol{j} \\
&= \boldsymbol{j}
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

となり, $\boldsymbol{k}$ の ϑ の偏微分を求めることができた. 続いて $\boldsymbol{k}$ の r の偏微分を求めるが, $\boldsymbol{k}$ は r に依存しないため,

$$
\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial r} = 0 \tag{3.38}
$$

である.

3.3.1 球座標系における勾配演算子

局所平面上における位置ベクトルの微小変化量 $\Delta\boldsymbol{r}$ は, 局所デカルト座標の微小変化量 $(r\cos\vartheta\Delta\lambda,\ r\Delta\vartheta,\ \Delta r)$ と球座標系における単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ を用いて

$$
\Delta\boldsymbol{r} = r\cos\vartheta\Delta\lambda\boldsymbol{i} + r\Delta\vartheta\boldsymbol{j} + \Delta r\boldsymbol{k}
$$

と表される. 球座標系における単位ベクトルを用いたのは, 局所デカルト座標での $(x,\ y,\ z)$ と球座標系の $(\lambda,\ \vartheta,\ r)$ と方向が一致しているためである.

ここで任意のスカラー場 $\phi = \phi(\lambda, \vartheta, r)$ の勾配を考える. まず ϕ の勾配の λ 成分, すなわち位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が λ 方向のみに変化する場合の ϕ の変化率を考える. ϕ の勾配の λ 成分を $(\nabla\phi)_\lambda$ と書くと

$$
\begin{aligned}
(\nabla\phi)_\lambda &= \left(\lim_{\Delta\boldsymbol{r}\to 0}\frac{\phi(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}) - \phi(\boldsymbol{r})}{\Delta\boldsymbol{r}}\right)_{\vartheta, r} \\
&= \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\phi(\lambda+\Delta\lambda, \vartheta, r) - \phi(\lambda, \vartheta, r)}{r\cos\vartheta\Delta\lambda} \\
&= \frac{1}{r\cos\vartheta}\lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\phi(\lambda+\Delta\lambda, \vartheta, r) - \phi(\lambda, \vartheta, r)}{\Delta\lambda} \\
&= \frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}
\end{aligned} \tag{3.39}
$$

と書けることが分かる. 続いて ϕ の勾配の ϑ 成分, すなわち $d\boldsymbol{r}$ が ϑ 方向のみに変化する場合の ϕ の変化率を考えると

$$
\begin{aligned}
(\nabla\phi)_\vartheta &= \left(\lim_{\Delta\boldsymbol{r}\to 0}\frac{\phi(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r})-\phi(\boldsymbol{r})}{\Delta\boldsymbol{r}}\right)_{\lambda,r} \\
&= \lim_{\Delta\vartheta\to 0}\frac{\phi(\lambda,\vartheta+\Delta\vartheta,r)-\phi(\lambda,\vartheta,r)}{r\Delta\vartheta} \\
&= \frac{1}{r}\lim_{\Delta\vartheta\to 0}\frac{\phi(\lambda,\vartheta+\Delta\vartheta,r)-\phi(\lambda,\vartheta,r)}{\Delta\vartheta} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

となる. 最後に ϕ の勾配の r 成分, すなわち $d\boldsymbol{r}$ が r 方向のみに変化する場合の ϕ の変化率を考えると

$$
\begin{aligned}
(\nabla\phi)_r &= \left(\lim_{\Delta\boldsymbol{r}\to 0}\frac{\phi(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r})-\phi(\boldsymbol{r})}{\Delta\boldsymbol{r}}\right)_{\lambda,\vartheta} \\
&= \lim_{\Delta r\to 0}\frac{\phi(\lambda,\vartheta,r+\Delta r)-\phi(\lambda,\vartheta,r)}{\Delta r} \\
&= \frac{\partial\phi}{\partial r}
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

となる. (3.39), (3.40), (3.41) をまとめると

$$
\begin{aligned}
\nabla\phi &= (\nabla\phi)_\lambda\boldsymbol{i}+(\nabla\phi)_\vartheta\boldsymbol{j}+(\nabla\phi)_r\boldsymbol{k} \\
&= \boldsymbol{i}\frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}+\boldsymbol{j}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\phi}{\partial r}
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

となり, 球座標系における勾配演算子が求められる. さらに演算子 ∇ は

$$
\nabla = \boldsymbol{i}\frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\lambda}+\boldsymbol{j}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial r}
\tag{3.43}
$$

と求められる.

3.3.2 球座標系における発散演算子

(3.43) を用いて, 任意のベクトル $\boldsymbol{A} = A^\lambda \boldsymbol{i} + A^\vartheta \boldsymbol{j} + A^r \boldsymbol{k}$ の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ を求める. ここで A^λ は $\boldsymbol{A}$ の λ 成分, A^ϑ は $\boldsymbol{A}$ の ϑ 成分, A^r は $\boldsymbol{A}$ の r 成分である.

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{A} =& \left(\boldsymbol{i}\frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \boldsymbol{j}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial r}\right) \cdot (A^\lambda \boldsymbol{i} + A^\vartheta \boldsymbol{j} + A^r \boldsymbol{k}) \\
=& \frac{1}{r\cos\vartheta}\left[\boldsymbol{i}\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda}(A^\lambda \boldsymbol{i} + A^\vartheta \boldsymbol{j} + A^r \boldsymbol{k})\right] \\
&+ \frac{1}{\vartheta}\left[\boldsymbol{j}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}(A^\lambda \boldsymbol{i} + A^\vartheta \boldsymbol{j} + A^r \boldsymbol{k})\right] + \left[\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(A^\lambda \boldsymbol{i} + A^\vartheta \boldsymbol{j} + A^r \boldsymbol{k})\right]. \\
=& \frac{1}{r\cos\vartheta}\left[\boldsymbol{i}\cdot\left(A^\lambda\frac{\partial\boldsymbol{i}}{\partial\lambda} + A^\vartheta\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial\lambda} + A^r\frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial\lambda}\right) + \frac{\partial A^\lambda}{\partial\lambda}\right] \\
&+ \frac{1}{r}\left[\boldsymbol{j}\cdot\left(A^\lambda\frac{\partial\boldsymbol{i}}{\partial\vartheta} + A^\vartheta\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial\vartheta} + A^r\frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial A^\vartheta}{\partial\vartheta}\right] \\
&+ \left[\boldsymbol{k}\cdot\left(A^\lambda\frac{\partial\boldsymbol{i}}{\partial r} + A^\vartheta\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial r} + A^r\frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial r}\right) + \frac{\partial A^r}{\partial r}\right].
\end{aligned} \tag{3.44}$$

ここからは単位ベクトルの偏微分を代入して (3.44) の変形を進めていく. まず第 1 項に (3.30), (3.31), (3.32) を代入して

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r\cos\vartheta}\left[\boldsymbol{i}\cdot\left(A^\lambda\frac{\partial\boldsymbol{i}}{\partial\lambda} + A^\vartheta\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial\lambda} + A^r\frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial\lambda}\right) + \frac{\partial A^\lambda}{\partial\lambda}\right] \\
&= \frac{1}{r\cos\vartheta}\left[\boldsymbol{i}\cdot A^\lambda(\sin\vartheta\boldsymbol{j} - \cos\vartheta\boldsymbol{k}) + A^\vartheta(-\sin\vartheta\boldsymbol{i}) + A^r(\cos\vartheta\boldsymbol{i}) + \frac{\partial A^\lambda}{\partial\lambda}\right] \\
&= \frac{1}{r\cos\vartheta}\left[-\sin\vartheta A^\vartheta + \cos\vartheta A^r + \frac{\partial A^\lambda}{\partial\lambda}\right]
\end{aligned} \tag{3.45}$$

となる. 続いて第 2 項に (3.33), (3.34), (3.35) を代入して

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\left[\boldsymbol{j}\cdot\left(A^\lambda\frac{\partial\boldsymbol{i}}{\partial\vartheta} + A^\vartheta\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial\vartheta} + A^r\frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial A^\vartheta}{\partial\vartheta}\right] \\
&= \frac{1}{r}\left[\boldsymbol{j}\cdot A^\vartheta(-\boldsymbol{k}) + A^r(\boldsymbol{j}) + \frac{\partial A^\vartheta}{\partial\vartheta}\right] \\
&= \frac{1}{r}\left[A^r + \frac{\partial A^\vartheta}{\partial\vartheta}\right]
\end{aligned} \tag{3.46}$$

となる. 最後に第 3 項に (3.36), (3.37), (3.38) を代入して

$$\begin{aligned}
&\left[\boldsymbol{k}\cdot\left(A^\lambda\frac{\partial\boldsymbol{i}}{\partial r} + A^\vartheta\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial r} + A^r\frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial r}\right) + \frac{\partial A^r}{\partial r}\right] \\
&= \left[\frac{\partial A^\vartheta}{\partial\vartheta}\right]
\end{aligned} \tag{3.47}$$

となる. (3.45), (3.46), (3.47) を (3.44) に代入して

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{A} =& \frac{1}{r\cos\vartheta}\left[-\sin\vartheta A^{\vartheta} + \cos\vartheta A^{r} + \frac{\partial A^{\lambda}}{\partial\lambda}\right] + \frac{1}{r}\left[A^{r} + \frac{\partial A^{\vartheta}}{\partial\vartheta}\right] + \left[\frac{\partial A^{\vartheta}}{\partial\vartheta}\right] \\
=& \frac{1}{r^2\cos\vartheta}\left[-r\sin\vartheta A^{\vartheta} + r\cos\vartheta A^{r} + r\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial\lambda}\right] \\
&+ \frac{1}{r^2\cos\vartheta}\left[\cos^2\vartheta A^{r} + \cos^2\vartheta\frac{\partial A^{\vartheta}}{\partial\vartheta}\right] + \frac{1}{r^2\cos\vartheta}\left[r^2\cos\vartheta\frac{\partial A^{\vartheta}}{\partial\vartheta}\right] \\
=& \frac{1}{r^2\cos\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}(rA^{\lambda}) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}(rA^{\vartheta}\cos\vartheta) + \frac{\partial}{\partial r}(r^2\cos\vartheta A^{\vartheta})\right] \qquad (3.48)
\end{aligned}
$$

と変形できた. したがって, 球座標系における発散演算子 (3.48) が得られる.

3.3.3 球座標系における回転演算子

(3.43) を用いて, 任意のベクトル $\boldsymbol{A} = A^{\lambda}\boldsymbol{i} + A^{\vartheta}\boldsymbol{j} + A^{r}\boldsymbol{k}$ の回転 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ を求める.

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{A} =& \left(\boldsymbol{i}\frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \boldsymbol{j}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial r}\right) \times (A^{\lambda}\boldsymbol{i} + A^{\vartheta}\boldsymbol{j} + A^{r}\boldsymbol{k}) \\
=& \frac{1}{r\cos\vartheta}\left[\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial\lambda} \times (A^{\lambda}\boldsymbol{i} + A^{\vartheta}\boldsymbol{j} + A^{r}\boldsymbol{k})\right] \\
&+ \frac{1}{r}\left[\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial\vartheta} \times (A^{\lambda}\boldsymbol{i} + A^{\vartheta}\boldsymbol{j} + A^{r}\boldsymbol{k})\right] + \left[\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial r} \times (A^{\lambda}\boldsymbol{i} + A^{\vartheta}\boldsymbol{j} + A^{r}\boldsymbol{k})\right] \\
=& \frac{1}{r\cos\vartheta}\left[\boldsymbol{i} \times \left(\frac{\partial\boldsymbol{i}}{\partial\lambda}A^{\lambda} + \boldsymbol{i}\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial\lambda} + \frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial\lambda}A^{\vartheta} + \boldsymbol{j}\frac{\partial A^{\vartheta}}{\partial\lambda} + \frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial\lambda}A^{r} + \boldsymbol{k}\frac{\partial A^{r}}{\partial\lambda}\right)\right] \\
&+ \frac{1}{r}\left[\boldsymbol{j} \times \left(\frac{\partial\boldsymbol{i}}{\partial\vartheta}A^{\lambda} + \boldsymbol{i}\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial\vartheta}A^{\vartheta} + \boldsymbol{j}\frac{\partial A^{\vartheta}}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial\vartheta}A^{r} + \boldsymbol{k}\frac{\partial A^{r}}{\partial\vartheta}\right)\right] \\
&+ \left[\boldsymbol{k} \times \left(\frac{\partial\boldsymbol{i}}{\partial r}A^{\lambda} + \boldsymbol{i}\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial r} + \frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial r}A^{\vartheta} + \boldsymbol{j}\frac{\partial A^{\vartheta}}{\partial r} + \frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial r}A^{r} + \boldsymbol{k}\frac{\partial A^{r}}{\partial r}\right)\right].
\end{aligned}
$$

ここで $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0$ を用いて,

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{A} =& \frac{1}{r\cos\vartheta}\left[\boldsymbol{i} \times \left(\frac{\partial\boldsymbol{i}}{\partial\lambda}A^{\lambda} + \frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial\lambda}A^{\vartheta} + \boldsymbol{j}\frac{\partial A^{\vartheta}}{\partial\lambda} + \frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial\lambda}A^{r} + \boldsymbol{k}\frac{\partial A^{r}}{\partial\lambda}\right)\right] \\
&+ \frac{1}{r}\left[\boldsymbol{j} \times \left(\frac{\partial\boldsymbol{i}}{\partial\vartheta}A^{\lambda} + \boldsymbol{i}\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial\vartheta}A^{\vartheta} + \frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial\vartheta}A^{r} + \boldsymbol{k}\frac{\partial A^{r}}{\partial\vartheta}\right)\right] \\
&+ \left[\boldsymbol{k} \times \left(\frac{\partial\boldsymbol{i}}{\partial r}A^{\lambda} + \boldsymbol{i}\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial r} + \frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial r}A^{\vartheta} + \boldsymbol{j}\frac{\partial A^{\vartheta}}{\partial r} + \frac{\partial\boldsymbol{k}}{\partial r}A^{r}\right)\right]
\end{aligned}
$$

と変形できる．また単位ベクトルの偏微分の結果を用い, (3.31), (3.32), (3.35), (3.38) より

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r\cos\vartheta}&\left[\boldsymbol{i}\times\left(\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial\lambda}A^{\lambda}+\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial\lambda}A^{\vartheta}+\boldsymbol{j}\frac{\partial A^{\vartheta}}{\partial\lambda}+\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial\lambda}A^{r}+\boldsymbol{k}\frac{\partial A^{r}}{\partial\lambda}\right)\right]\\
&+\frac{1}{r}\left[\boldsymbol{j}\times\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial\vartheta}+\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial\vartheta}A^{\vartheta}+\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial\vartheta}A^{r}+\boldsymbol{k}\frac{\partial A^{r}}{\partial\vartheta}\right)\right]\\
&+\left[\boldsymbol{k}\times\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial r}+\boldsymbol{j}\frac{\partial A^{\vartheta}}{\partial r}\right)\right]
\end{aligned}
$$

である．さらに単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ直行しているため, $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$ の関係を用いると

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r\cos\vartheta}&\left[\boldsymbol{i}\times\left(\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial\lambda}A^{\lambda}+\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial\lambda}A^{\vartheta}+\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial\lambda}A^{r}\right)+\boldsymbol{k}\frac{\partial A^{\vartheta}}{\partial\lambda}-\boldsymbol{j}\frac{\partial A^{r}}{\partial\lambda}\right]\\
&+\frac{1}{r}\left[\boldsymbol{j}\times\left(\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial\vartheta}A^{\vartheta}+\frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial\vartheta}A^{r}\right)-\boldsymbol{k}\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial\vartheta}+\boldsymbol{i}\frac{\partial A^{r}}{\partial\vartheta}\right]+\left[\boldsymbol{j}\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial r}-\boldsymbol{i}\frac{\partial A^{\vartheta}}{\partial r}\right]
\end{aligned}
$$

である．この式に単位ベクトルの偏微分の残りの式を代入すると

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \frac{1}{r\cos\vartheta}\left[\boldsymbol{i}\times\left((\sin\vartheta\boldsymbol{j}-\cos\vartheta\boldsymbol{k})A^{\lambda}+-\sin\vartheta\boldsymbol{i}A^{\vartheta}+\cos\vartheta\boldsymbol{i}A^{r}\right)+\boldsymbol{k}\frac{\partial A^{\vartheta}}{\partial\lambda}-\boldsymbol{j}\frac{\partial A^{r}}{\partial\lambda}\right]\\
&\quad+\frac{1}{r}\left[\boldsymbol{j}\times\left(-\boldsymbol{k}A^{\vartheta}+\boldsymbol{j}A^{r}\right)-\boldsymbol{k}\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial\vartheta}+\boldsymbol{i}\frac{\partial A^{r}}{\partial\vartheta}\right]\\
&\quad+\left[\boldsymbol{j}\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial r}-\boldsymbol{i}\frac{\partial A^{\vartheta}}{\partial r}\right]\\
&= \frac{1}{r\cos\vartheta}\left[\boldsymbol{i}\times\left((\sin\vartheta\boldsymbol{j}-\cos\vartheta\boldsymbol{k})A^{\lambda}\right)+\boldsymbol{k}\frac{\partial A^{\vartheta}}{\partial\lambda}-\boldsymbol{j}\frac{\partial A^{r}}{\partial\lambda}\right]\\
&\quad+\frac{1}{r}\left[\boldsymbol{j}\times\left(-\boldsymbol{k}A^{\vartheta}\right)-\boldsymbol{k}\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial\vartheta}+\boldsymbol{i}\frac{\partial A^{r}}{\partial\vartheta}\right]+\left[\boldsymbol{j}\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial r}-\boldsymbol{i}\frac{\partial A^{\vartheta}}{\partial r}\right]\\
&= \frac{1}{r\cos\vartheta}\left[(\sin\vartheta\boldsymbol{k}+\cos\vartheta\boldsymbol{j})A^{\lambda}+\boldsymbol{k}\frac{\partial A^{\vartheta}}{\partial\lambda}-\boldsymbol{j}\frac{\partial A^{r}}{\partial\lambda}\right]\\
&\quad+\frac{1}{r}\left[-\boldsymbol{i}A^{\vartheta}-\boldsymbol{k}\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial\vartheta}+\boldsymbol{i}\frac{\partial A^{r}}{\partial\vartheta}\right]+\left[\boldsymbol{j}\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial r}-\boldsymbol{i}\frac{\partial A^{\vartheta}}{\partial r}\right]
\end{aligned}
$$

である．これを整理すると,

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}&\left(-\frac{A^{\vartheta}}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial A^{r}}{\partial\vartheta}-\frac{\partial A^{\vartheta}}{\partial r}\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{A^{\lambda}}{r}-\frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial A^{r}}{\partial\lambda}+\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial r}\right)\\
&+\boldsymbol{k}\left(\frac{A^{\lambda}}{r}\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}+\frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial A^{\vartheta}}{\partial\lambda}-\frac{1}{r}\frac{\partial A^{\lambda}}{\partial\vartheta}\right)
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

となり, 球座標系における発散演算子 (3.49) が得られる. ここで (??) を行列を用いて表すことを試みる. そのために, まずは各単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ の係数を整理する. $\boldsymbol{i}$ の係数を整理すると

$$
\begin{aligned}
-\frac{A^\vartheta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A^r}{\partial \vartheta} - \frac{\partial A^\vartheta}{\partial r} &= -\frac{1}{r}A^\vartheta \frac{\partial r}{\partial r} - \frac{1}{r} r \frac{\partial A^\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A^r}{\partial \vartheta} \\
&= -\frac{1}{r}\frac{\partial (A^\vartheta r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A^r}{\partial \vartheta} \\
&= \frac{1}{r^2\cos\vartheta}\left(r^2\cos\vartheta \left[-\frac{1}{r}\frac{\partial (A^\vartheta r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A^r}{\partial \vartheta} \right] \right) \\
&= \frac{1}{r^2\cos\vartheta}\left(r\cos\vartheta \left[\frac{\partial A^r}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (A^\vartheta r)}{\partial r} \right] \right)
\end{aligned} \tag{3.50}
$$

となる. 続いて $\boldsymbol{j}$ の係数を整理すると

$$
\begin{aligned}
\frac{A^\lambda}{r} - \frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial A^r}{\partial \lambda} + \frac{\partial A^\lambda}{\partial r} &= \frac{1}{r}A^\lambda \frac{\partial r}{\partial r} + \frac{1}{r} r \frac{\partial A^\lambda}{\partial r} - \frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial A^r}{\partial \lambda} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial (A^\lambda r)}{\partial r} - \frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial A^r}{\partial \lambda} \\
&= \frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial (A^\lambda \cos\vartheta r)}{\partial r} - \frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial A^r}{\partial \lambda} \\
&= \frac{1}{r^2\cos\vartheta}\left(r \left[\frac{\partial (A^\lambda \cos\vartheta r)}{\partial r} - \frac{\partial A^r}{\partial \lambda} \right] \right)
\end{aligned} \tag{3.51}
$$

となる. 最後に $\boldsymbol{k}$ の係数を整理すると

$$
\begin{aligned}
\frac{A^\lambda}{r}\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} + \frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial A^\vartheta}{\partial \lambda} - \frac{1}{r}\frac{\partial A^\lambda}{\partial \vartheta} &= \frac{1}{r\cos\vartheta}A^\lambda \sin\vartheta - \frac{1}{r\cos\vartheta}\cos\vartheta \frac{\partial A^\lambda}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial A^\vartheta}{\partial \lambda} \\
&= -\frac{1}{r\cos\vartheta}\left(A^\lambda(-\sin\vartheta) + \cos\vartheta \frac{\partial A^\lambda}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial A^\vartheta}{\partial \lambda} \\
&= -\frac{1}{r\cos\vartheta}\left(A^\lambda \frac{\partial \cos\vartheta}{\partial \vartheta} + \cos\vartheta \frac{\partial A^\lambda}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial A^\vartheta}{\partial \lambda} \\
&= -\frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial (A^\lambda \cos\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial A^\vartheta}{\partial \lambda} \\
&= -\frac{1}{r^2\cos\vartheta}\frac{\partial (A^\lambda \cos\vartheta r)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2\cos\vartheta}\frac{\partial (A^\vartheta r)}{\partial \lambda} \\
&= \frac{1}{r^2\cos\vartheta}\left(\frac{\partial (A^\vartheta r)}{\partial \lambda} - \frac{\partial (A^\lambda \cos\vartheta r)}{\partial \vartheta} \right)
\end{aligned} \tag{3.52}
$$

となる. (3.50), (3.51), (3.52) を用いて (3.49) を表すと

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{i}\frac{1}{r^2\cos\vartheta}\left(r\cos\vartheta\left[\frac{\partial A^r}{\partial\vartheta}-\frac{\partial(A^\vartheta r)}{\partial r}\right]\right)+\boldsymbol{j}\frac{1}{r^2\cos\vartheta}\left(r\left[\frac{\partial(A^\lambda\cos\vartheta r)}{\partial r}-\frac{\partial A^r}{\partial\lambda}\right]\right)\\
&\quad+\boldsymbol{k}\frac{1}{r^2\cos\vartheta}\left(\frac{\partial(A^\vartheta r)}{\partial\lambda}-\frac{\partial(A^\lambda\cos\vartheta r)}{\partial\vartheta}\right)\\
&=\frac{1}{r^2\cos\vartheta}\left(\boldsymbol{i}\left[r\cos\vartheta\left(\frac{\partial A^r}{\partial\vartheta}-\frac{\partial(A^\vartheta r)}{\partial r}\right)\right]+\boldsymbol{j}\left[r\left(\frac{\partial(A^\lambda\cos\vartheta r)}{\partial r}-\frac{\partial A^r}{\partial\lambda}\right)\right]\right.\\
&\quad\left.+\boldsymbol{k}\left[\frac{\partial(A^\vartheta r)}{\partial\lambda}-\frac{\partial(A^\lambda\cos\vartheta r)}{\partial\vartheta}\right]\right)
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

である. これを用いて (3.53) を 3 次行列の形で表すと

$$
\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\cos\vartheta}\begin{vmatrix} r\cos\vartheta\boldsymbol{i} & r\boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial\lambda} & \frac{\partial}{\partial\vartheta} & \frac{\partial}{\partial r}\\ A^\lambda\cos\vartheta r & A^\vartheta r & A^r\end{vmatrix}
\tag{3.54}
$$

となる.

3.4 球座標系における単位ベクトルの変化率

この節では, 単位ベクトルの時間変化率を求めていく. デカルト座標系を例外とするが, ほとんどの座標系において単位ベクトルの方向は場所によって変化する. 球座標系においても, 図 3.4 のように場所によって異なることが分かる. 位置ベクトルが流れに沿って移動していくとき, 単位ベクトルの方向の変化が生じ, 移動前の場所から見ると単位ベクトルは回転していることになる. そのため単位ベクトルの変化率, すなわち物質微分は回転の効果を含みゼロではない. 流速が $\boldsymbol{v}=(u, v, w)$ の流れに乗って移動している単位ベクトルの角速度ベクトルを $\boldsymbol{\Omega}_{flow}$ とする. 単位ベクトルの変化率は (2.3) を利用して

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}&=\boldsymbol{\Omega}_{flow}\times\boldsymbol{i},\\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}&=\boldsymbol{\Omega}_{flow}\times\boldsymbol{j},\\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}&=\boldsymbol{\Omega}_{flow}\times\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

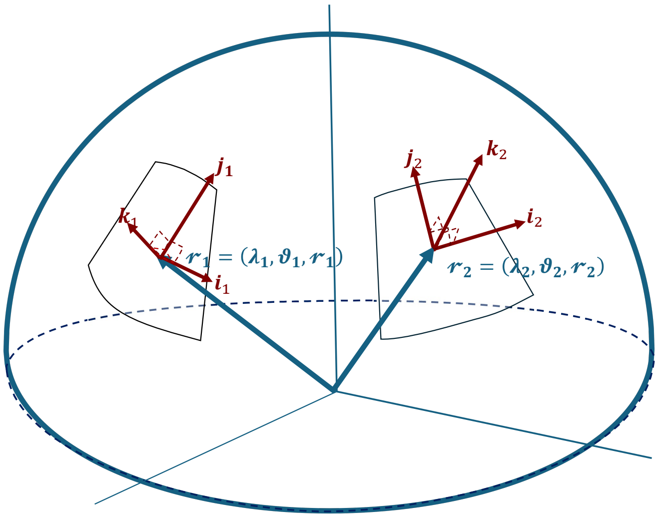

図 3.4:　惑星の北半球に存在する位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ と, その地点の局所平面における λ, ϑ, r 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{j}_1$,$\boldsymbol{j}_2$　, $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$ の図. λ, ϑ, r はそれぞれ東方向の角度 (経度), 極方向の角度 (緯度), 惑星の中心からの距離である. この図から地点による単位ベクトルは方向が変わっていることが分かる.

である. これを物質微分で表すと

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{i}}{\mathrm{D}t} = \boldsymbol{\Omega}_{flow} \times \boldsymbol{i}, \tag{3.55}$$
$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{j}}{\mathrm{D}t} = \boldsymbol{\Omega}_{flow} \times \boldsymbol{j}, \tag{3.56}$$
$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{k}}{\mathrm{D}t} = \boldsymbol{\Omega}_{flow} \times \boldsymbol{k} \tag{3.57}$$

となる.

ここで $\boldsymbol{\Omega}_{flow}$ を導出する. 導出は, 流れによって生じる変位から λ, ϑ 方向の単位ベクトルの回転率を求め, それを係数とする角速度ベクトルを求めることで行う. なお r 方向の変位とは惑星の中心からの距離の変化であるため, 回転に影響を与えない. まず極方向の速度成分 v によって生じる変位と回転率のみを考える. 回転した緯度を $\delta\vartheta$ とすると, 微小時間 δt の間に極方向に生じる変位は (3.6) より

$$v\delta t = r\delta\vartheta \tag{3.58}$$

である. このときの位置ベクトルと単位ベクトルの変化は図 3.5 の通り. このとき,

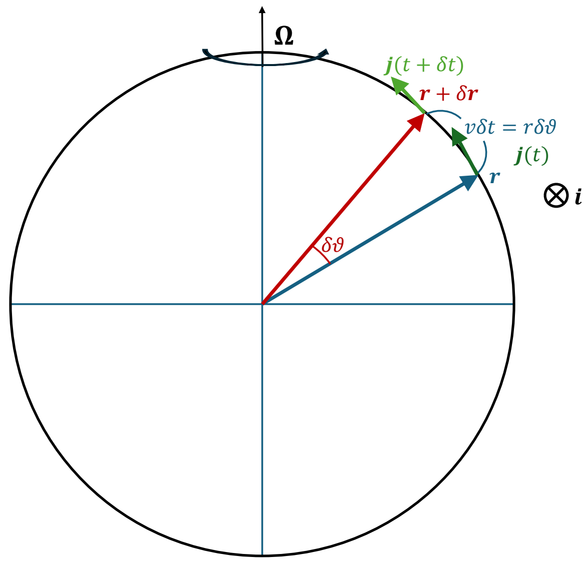

図 3.5:　惑星の回転軸を含む断面図における, 位置ベクトルと極方向の単位ベクトルの変化. 紙面垂直方向が λ 方向であり, 東西方向の単位ベクトル $\boldsymbol{i}$ は紙面奥向きに存在する. 時刻 t における位置ベクトルは $\boldsymbol{r}$, 極方向の単位ベクトルは $\boldsymbol{j}(t)$ である. また, 時刻 $t+\delta t$ の位置ベクトルは $\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}$, 極方向の単位ベクトルは $\boldsymbol{j}(t+\delta t)$ である. δt の間の流れによる変位は $v\delta t = r\delta\vartheta$ である.

位置ベクトルの回転率は $\mathrm{d}\vartheta/\mathrm{d}t$ である. 単位ベクトルは位置ベクトルに対し垂直に存在しているため, その回転率も $\mathrm{d}\vartheta/\mathrm{d}t$ である. 単位ベクトルのみの変化の様子は図 3.6 の通りであり, その回転軸は $\boldsymbol{i}$ 軸であることが分かる. (3.58) より

$$\frac{\delta\vartheta}{\delta t} = \frac{v}{r}$$

であり, $\delta t \to 0$ の極限操作を行うと

$$\begin{aligned}\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\vartheta}{\delta t} &= \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{v}{r}\end{aligned}$$

である. したがって, 流れの極方向成分によって生じる回転は $-(v/r)\boldsymbol{i}$ の角速度ベクトルを生じさせる. ただし, $\boldsymbol{i}$ に向かって時計回りに回転しているため負の符号がついている.

　次に東西方向の速度成分 u によって生じる変位と回転率を考える. 回転した経

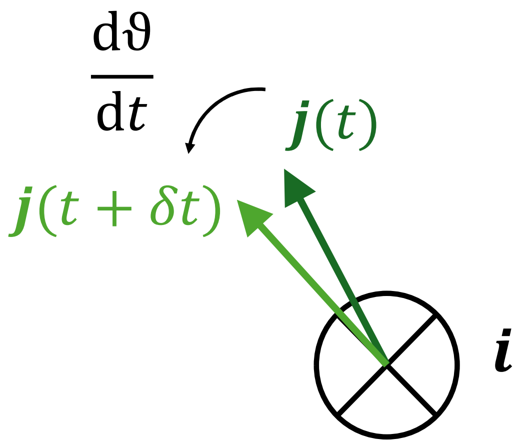

図 3.6: 図 3.5 における単位ベクトルの変化を取り出した図．単位ベクトル $\boldsymbol{j}(t)$, $\boldsymbol{j}(t+\delta t)$ は始点を揃えており，このとき紙面奥向きに $\boldsymbol{i}$ が存在する．$\boldsymbol{j}$ は回転率 $\mathrm{d}\vartheta/\mathrm{d}t$ で回転しており，回転軸は $\boldsymbol{i}$ 軸である．

度を $\delta\lambda$ とすると，微小時間 δt の間に東西方向に生じる変位は，(3.5) より

$$u\delta t = r\cos\vartheta\delta\lambda \tag{3.59}$$

である．このときの位置ベクトルと単位ベクトルの変化は図 3.7 の通り．このとき，位置ベクトルの回転率は $\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}t$ であり，単位ベクトルも同様に $\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}t$ の回転率を持つ．単位ベクトルのみの変化の様子は図 3.8 の通りであり，単位ベクトルの回転軸は惑星の回転軸と方向が一致していることが分かる．ここで $\boldsymbol{\Omega}$ は惑星の中心を原点とするデカルト座標系において z 軸方向に存在しており，単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_z$ とすると $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\boldsymbol{e}_z$ となる．したがって，単位ベクトルの回転軸は $\boldsymbol{e}_z$ 軸である．ここまでで，単位ベクトル $\boldsymbol{i}$ は $\boldsymbol{e}_z$ を軸として，$\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}t$ の回転率で回転していることが分かる．$\boldsymbol{e}_z$ は局所平面において $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ の方向に，図 3.9 のように分解できるため

$$\boldsymbol{e}_z = \cos\vartheta\boldsymbol{j} + \sin\vartheta\boldsymbol{k} \tag{3.60}$$

と書くことができる．また (3.59) より

$$\frac{\delta\lambda}{\delta t} = \frac{u}{r\cos\vartheta}$$

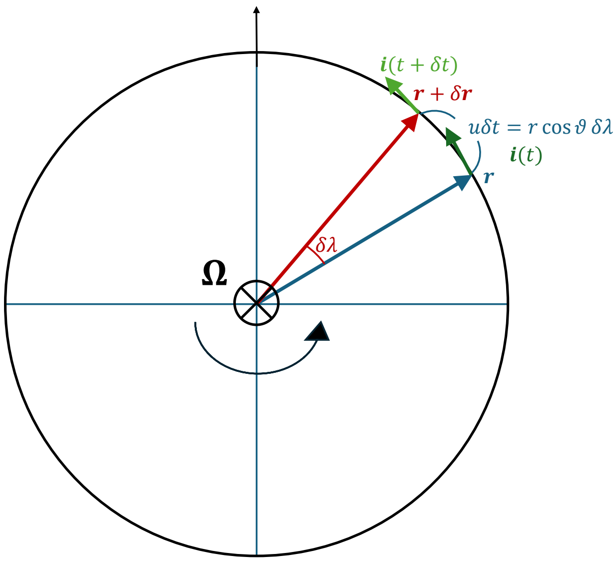

図 3.7:　$\vartheta = 0$ の惑星の断面図における, 位置ベクトルと極方向の単位ベクトルの変化. 紙面垂直方向が惑星の回転軸方向であり, 惑星の角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ は紙面手前向きに存在する. 時刻 t における位置ベクトルは $\boldsymbol{r}$, 東西方向の単位ベクトルは $\boldsymbol{i}(t)$ である. また, 時刻 $t+\delta t$ の位置ベクトルは $\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}$, 東西方向の単位ベクトルは $\boldsymbol{i}(t+\delta t)$ である. δt の間の流れによる変位は $u\delta t = r\cos\vartheta\delta\lambda$ である.

であり, $\delta t \to 0$ の極限操作を行うと

$$\begin{aligned}\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\lambda}{\delta t} &= \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{u}{r\cos\vartheta}\end{aligned}$$

となる. 以上より, 流れの東西方向成分によって生じる回転は

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_z &= \frac{u}{r\cos\vartheta}(\cos\vartheta\boldsymbol{j}+\sin\vartheta\boldsymbol{k})\\ &= \frac{u}{r}\boldsymbol{j}+\frac{u\tan\vartheta}{r}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

の角速度ベクトルを生じさせる. 極方向の流れによる回転の角速度ベクトルと, 東西方向の流れによる角速度ベクトルをあわせて, 単位ベクトルの角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}_{flow}$ は

$$\boldsymbol{\Omega}_{flow} = -\frac{v}{r}\boldsymbol{i}+\frac{u}{r}\boldsymbol{j}+\frac{u\tan\vartheta}{r}\boldsymbol{k} \tag{3.61}$$

である.

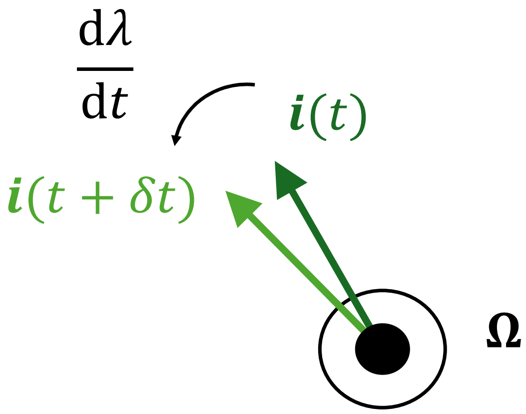

図 3.8: 図 3.7 における単位ベクトルの変化を取り出した図. 単位ベクトル $\boldsymbol{i}(t)$, $\boldsymbol{i}(t+\delta t)$ は始点を揃えており, このとき紙面手前向きに $\boldsymbol{\Omega}$ が存在する. $\boldsymbol{i}$ は回転率 $\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}t$ で回転しており, 単位ベクトルの回転軸は惑星の回転軸と方向が一致している.

(3.61) を (3.55), (3.56), (3.57) に用いると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{i}}{\mathrm{D}t} &= \left(-\frac{v}{r}\boldsymbol{i} + \frac{u}{r}\boldsymbol{j} + \frac{u\tan\vartheta}{r}\boldsymbol{k}\right) \times \boldsymbol{i} \\ &= \frac{u\tan\vartheta}{r}\boldsymbol{j} - \frac{u}{r}\boldsymbol{k},\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{j}}{\mathrm{D}t} &= \left(-\frac{v}{r}\boldsymbol{i} + \frac{u}{r}\boldsymbol{j} + \frac{u\tan\vartheta}{r}\boldsymbol{k}\right) \times \boldsymbol{j} \\ &= -\frac{u\tan\vartheta}{r}\boldsymbol{i} - \frac{v}{r}\boldsymbol{k},\end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{k}}{\mathrm{D}t} &= \left(-\frac{v}{r}\boldsymbol{i} + \frac{u}{r}\boldsymbol{j} + \frac{u\tan\vartheta}{r}\boldsymbol{k}\right) \times \boldsymbol{k} \\ &= \frac{u}{r}\boldsymbol{i} + \frac{v}{r}\boldsymbol{j}\end{aligned} \tag{3.64}$$

となり, 単位ベクトルの物質微分が得られた.

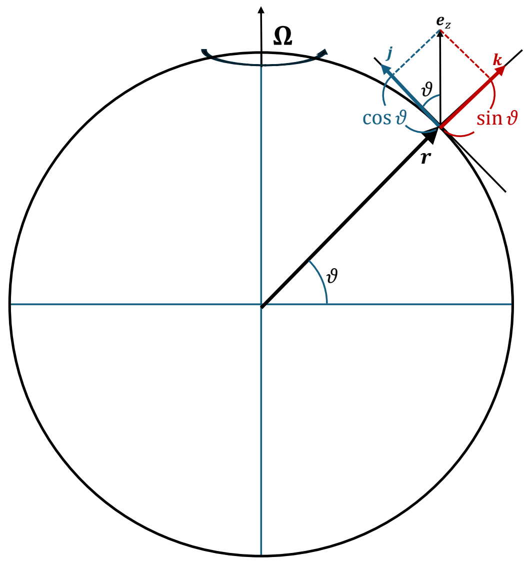

図 3.9:　惑星の回転軸を含む断面図における, 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と局所平面における極方向の単位ベクトル $\boldsymbol{j}$, 惑星の中心から離れる方向の単位ベクトル $\boldsymbol{k}$ の図. 回転軸方向には惑星の自転の角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ が存在している. 惑星中心を原点とするデカルト座標系を考えたときの z 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_z$ とすると $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \boldsymbol{e}_z$ である. また $\boldsymbol{e}_z$ を $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を用いて表すと (3.60) の通り.

3.5　回転球座標系における非粘性流体の運動方程式

第 2 章にて, 回転系における非粘性流体の運動方程式 (2.18)[*1] を求めた. また, 3.1 節にて実効重力 $\boldsymbol{g}$ の定義を行った. (2.18) にて外力 $\boldsymbol{F}$ からニュートン引力 $\boldsymbol{g}_{grav}$ を別の項として取り出すと

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{D}t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_R &= -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi_{ce} + \boldsymbol{g}_{grav} + \boldsymbol{F} \\ &= -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{F}_{ce} + \boldsymbol{g}_{grav} + \boldsymbol{F}\end{aligned}$$

[*1] (2.18) を再掲する.

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{D}t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_R = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi_{ce} + \boldsymbol{F} \tag{2.12}$$

ここで $\boldsymbol{v}_R$ は回転系から観測した流体の速度, $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ は物質微分を表す演算子, $\boldsymbol{\Omega}$ は系の回転に伴う角速度ベクトル, ρ は流体の密度, p は流体にかかる圧力, Φ_{ce} は遠心力 $\boldsymbol{F}_{ce}$ を $-\nabla\Phi_{ce}$ と表すときのスカラーポテンシャル, $\boldsymbol{F}$ は流体にかかる外力である.

である．ここで (2.16) の $\boldsymbol{F}_{ce} = -\nabla\Phi_{ce}$ を用いた．実効重力 $\boldsymbol{g}$ を用いて表すと, (3.1) より

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{D}t} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_R &= -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{F}_{ce} + \boldsymbol{g}_{grav} + \boldsymbol{F} \\ &= -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}\end{aligned}$$

となる．Φ をジオポテンシャルとして定義し, (3.2) を用いて上式を書き直すと

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{D}t} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_R = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi + \boldsymbol{F} \tag{3.65}$$

となる．(3.65) は座標系によらず, 回転している系における運動方程式である．これを球座標系における 3 成分 λ, ϑ, r に分解してそれぞれ書き表す．まず各項を成分ごとに書き表していく．

$\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}$ (ただし, u, v, w は λ, ϑ, r 方向の速度成分, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は λ, ϑ, r 方向の単位ベクトルである) とするとき, $\mathrm{D}\boldsymbol{v}/\mathrm{D}t$ は

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{i} + u\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{i}}{\mathrm{D}t} + \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{j} + v\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{j}}{\mathrm{D}t} + \frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{k} + w\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{k}}{\mathrm{D}t}$$

となる．ここで (3.62), (3.63), (3.64) を用いると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} &= \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{k} \\ &\qquad + u\left(\frac{u\tan\vartheta}{r}\boldsymbol{j} - \frac{u}{r}\boldsymbol{k}\right) + v\left(-\frac{u\tan\vartheta}{r}\boldsymbol{i} - \frac{v}{r}\boldsymbol{k}\right) + w\left(\frac{u}{r}\boldsymbol{i} + \frac{v}{r}\boldsymbol{j}\right) \\ &= \boldsymbol{i}\left(\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} - \frac{uv\tan\vartheta}{r} + \frac{uw}{r}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} + \frac{u^2\tan\vartheta}{r} + \frac{vw}{r}\right) \\ &\qquad + \boldsymbol{k}\left(\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t} - \frac{u^2}{r} - \frac{v^2}{r}\right)\end{aligned} \tag{3.66}$$

である．

$\boldsymbol{\Omega}$ を球座標系における単位ベクトルを用いて表すと

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega(\cos\vartheta\boldsymbol{j} + \sin\vartheta\boldsymbol{k})$$

である．これを用いて $2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}$ を計算すると

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 2\Omega\cos\vartheta & 2\Omega\sin\vartheta \\ u & v & w\end{vmatrix} \\ &= \boldsymbol{i}(2w\Omega\cos\vartheta - 2v\Omega\sin\vartheta) + \boldsymbol{j}2u\Omega\sin\vartheta - \boldsymbol{k}2u\Omega\cos\vartheta\end{aligned} \tag{3.67}$$

となる.

(3.65) の右辺第 1 項に球座標系における勾配演算子 (3.43) を用いると

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho}\nabla p &= -\frac{1}{\rho}\left(\boldsymbol{i}\frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial p}{\partial\lambda} + \boldsymbol{j}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\vartheta} + \boldsymbol{k}\frac{\partial p}{\partial r}\right) \\
&= -\boldsymbol{i}\frac{1}{\rho r\cos\vartheta}\frac{\partial p}{\partial\lambda} - \boldsymbol{j}\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\vartheta} - \boldsymbol{k}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}
\end{aligned} \tag{3.68}
$$

である. 右辺第 2 項はジオポテンシャルの勾配による項であるため, (3.68) と同様に (3.43) を用いて

$$
\nabla\Phi = \boldsymbol{i}\frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} + \boldsymbol{j}\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\Phi}{\partial r} \tag{3.69}
$$

である. また $\boldsymbol{F} = (F_\lambda,\, F_\vartheta,\, F_r)$ と表すことにする.

(3.66), (3.67), (3.68), (3.69) より, $\boldsymbol{\Omega}$ で回転している球座標系における非粘性流体の運動方程式は, λ, ϑ, r の各成分ごとに書き表すと

$$
\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} - \frac{uv\tan\vartheta}{r} + \frac{uw}{r} + 2w\Omega\cos\vartheta - 2v\Omega\sin\vartheta = -\frac{1}{\rho r\cos\vartheta}\frac{\partial p}{\partial\lambda} - \frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} + F_\lambda \tag{3.70}
$$

$$
\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} + \frac{u^2\tan\vartheta}{r} + \frac{vw}{r} + 2u\Omega\sin\vartheta = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} + F_\vartheta \tag{3.71}
$$

$$
\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t} - \frac{u^2}{r} - \frac{v^2}{r} - 2u\Omega\cos\vartheta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial\Phi}{\partial r} + F_r \tag{3.72}
$$

となる.

第4章 考察

4.1 コリオリ力

第 2 章では, 慣性加速度と相対加速度の関係式 (2.10) が得られた. (2.10) を再掲すると

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{d}t}\right)_R = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_I}{\mathrm{d}t}\right)_I - 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_R - \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) \quad \mathrm{at} \quad |\boldsymbol{\Omega}| = \Omega = const \tag{2.10}$$

である. この式の右辺第 2 項は単位質量あたりのコリオリ力, 第 3 項は単位質量あたりの遠心力である. (1.1) と比較すると, この 2 つの項が新しく記述されており, これら 2 つは, 系が回転することによって生じる特有の力であることが分かる. このコリオリ力の性質について, この節では考察を行う.

単位質量あたりのコリオリ力 $\boldsymbol{F}_{Co}$ は

$$\boldsymbol{F}_{Co} = -2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_R \tag{4.1}$$

で表される. 回転に伴うベクトルの変化率は (2.3)[*1] であるため, コリオリ力は惑星の自転によって流体に生じる見かけの力であることが分かる. 見かけの力としたのは, 実際に外力として働いているのではないからである.

流体中の物体が回転系上で静止し続けるときを考える. このとき相対速度について

$$\boldsymbol{v}_R = \boldsymbol{0} \tag{4.2}$$

が成り立つ. これらを (4.1) に代入すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{Co} &= -2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{F}_{Co} &= \boldsymbol{0}\end{aligned} \tag{4.3}$$

[*1] (2.3) を再掲する.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{C}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{C}. \tag{2.3}$$

ただし, $\boldsymbol{\Omega}$ は座標系の回転に伴う角速度ベクトルである.

となる．これは回転系で静止している物体に対してコリオリ力は力を及ぼしていない, すなわちコリオリ力が働いていないことを表している．また, コリオリ力に対し慣性速度の内積を取ると,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{Co}\cdot\boldsymbol{v}_R &= (-2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_R)\cdot\boldsymbol{v}_R\\ &= \boldsymbol{v}_R\cdot(-2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_R)\\ &= -2\boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{v}_R\times\boldsymbol{v}_R)\\ &= -2\boldsymbol{\Omega}\cdot 0\\ &= 0 \end{aligned}\tag{4.4}$$

となる．(4.4) 式の結果より, コリオリ力は物体の速度ベクトルと垂直の方向に働いていおり, 物体に対して仕事をせず, 進行方向に対し直角となる方向へ偏向させていることが分かる．

4.2 メトリック項

第 3 章では, (2.18) を球座標系にて記述することを考え, λ, ϑ, r 方向の非粘性流体の運動方程式, (3.70), (3.71), (3.72) を求めた．(3.70), (3.71), (3.72) を再掲する．

$$\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}-\frac{uv\tan\vartheta}{r}+\frac{uw}{r}+2w\Omega\cos\vartheta-2v\Omega\sin\vartheta=-\frac{1}{\rho r\cos\vartheta}\frac{\partial p}{\partial\lambda}-\frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}+F_\lambda,\tag{3.70}$$

$$\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t}+\frac{u^2\tan\vartheta}{r}+\frac{vw}{r}+2u\Omega\sin\vartheta=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\vartheta}-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}+F_\vartheta,\tag{3.71}$$

$$\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t}-\frac{u^2}{r}-\frac{v^2}{r}-2u\Omega\cos\vartheta=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+F_r.\tag{3.72}$$

これらの式において, Ω が含まれている項はコリオリ項と呼ばれ, $1/r$ を含む速度成分について 2 次の項のことはメトリック項と呼ばれる．コリオリ項は前節に考察したコリオリ力による項である．この節ではメトリック項について考察をする．

議論のために, (3.70), (3.71), (3.72) のメトリック項を抜き出し, 単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とともに記述する．このとき得られるベクトルを $\boldsymbol{M}$ とおくと

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{i}\left(\frac{uv\tan\vartheta}{r}+\frac{uw}{r}\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{u^2\tan\vartheta}{r}+\frac{vw}{r}\right)+\boldsymbol{k}\left(-\frac{u^2}{r}-\frac{v^2}{r}\right)$$

である．これを $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ を用いて書き直すと

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M} &= \begin{pmatrix} \frac{u}{r}w - \frac{u\tan\vartheta}{r}v \\ \frac{u\tan\vartheta}{r}u - \left(-\frac{v}{r}\right)w \\ \left(-\frac{v}{r}\right)r - \frac{u}{r}u \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{v}{r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{u\tan\vartheta}{r} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{v}{r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{u\tan\vartheta}{r} \end{pmatrix} \times \boldsymbol{v}
\end{aligned}
$$

となる．これに (3.61) を用いると

$$
\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\Omega}_{flow} \times \boldsymbol{v} \tag{4.5}
$$

となる．$\boldsymbol{\Omega}$ は, 球座標系における単位ベクトルが流速 $\boldsymbol{v}$ の流れに乗って移動しているとき, 場所によって方向が変わることによって生じる角速度ベクトルであった．また, 回転に伴うベクトルの変化率は (2.3) であるため, (4.5), 及びメトリック項は球座標系の単位ベクトルの方向が変わることによって生じる速度ベクトルの変化率, すなわち加速度を表している．したがって, メトリック項自体が球座標系を考えることで生じるものであることが分かる．

ここまではメトリック項自体を変形しその形式を見ることで, メトリック項が球座標系に特有のものであると考えた．一方で, メトリック項が球座標系を考えたときに生じることは, 惑星の中心を原点としたデカルト座標系での運動方程式と比較することでも確認できる．これは, デカルト座標系では場所による単位ベクトルの方向の変化が存在しないためである．これを見るため, 3.5 節と同様に, 非粘性流体の運動方程式 (2.18) を, 回転しているデカルト座標系の x, y, z 方向に分けて書くことを試みる．ここで $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{e}_x + v_y\boldsymbol{e}_y + v_w\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{\Omega}$ を $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{e}_x + F_y\boldsymbol{e}_y + F_z\boldsymbol{e}_z$ とする．また, $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ は原点を中心としたデカルト座標における x, y, z 方向の単位ベクトルであるとする．単位ベクトルが流れ $\boldsymbol{v}$ とともに移動しているとき, 単位ベクトルの場所による方向変化は存在せず, また大きさも変わらないため

$$
\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{e}_x}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{e}_y}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{e}_z}{\mathrm{D}t} = 0
$$

が成り立つ．従って $\boldsymbol{v}$ の物質微分は

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} &= \frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{e}_x + v_x\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{e}_x}{\mathrm{D}t} + \frac{\mathrm{D}v_y}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{e}_y + v_y\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{e}_y}{\mathrm{D}t} + \frac{\mathrm{D}v_z}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{e}_z + v_z\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{e}_z}{\mathrm{D}t} \\
&= \frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{e}_x + \frac{\mathrm{D}v_y}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{e}_y + \frac{\mathrm{D}v_z}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{e}_z
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

である. コリオリ項は

$$
\begin{aligned}
2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 0 & 0 & \Omega \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \\
&= -\Omega v_y \boldsymbol{e}_x + \Omega v_x \boldsymbol{e}_z
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

である. また, デカルト座標系における演算子 ∇ は $\nabla = (\partial/\partial x)\boldsymbol{e}_x + (\partial/\partial y)\boldsymbol{e}_y + (\partial/\partial z)\boldsymbol{e}_z$ であることを用いると

$$
-\frac{1}{\rho}\nabla p = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{e}_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{e}_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{e}_z, \tag{4.8}
$$

$$
-\nabla\Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}\boldsymbol{e}_x - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\boldsymbol{e}_y - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z, \tag{4.9}
$$

である. (2.18), (4.6), (4.7), (4.8), (4.9) より, 惑星の中心を原点とする回転デカルト座標系における非粘性流体運動方程式は, x, y, z 方向それぞれ記述すると

$$
\frac{\mathrm{D}v_x}{\mathrm{D}t} - \Omega v_y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + F_x, \tag{4.10}
$$

$$
\frac{\mathrm{D}v_y}{\mathrm{D}t} + \Omega v_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} + F_y, \tag{4.11}
$$

$$
\frac{\mathrm{D}v_z}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} + F_z \tag{4.12}
$$

となる. (3.70), (3.71), (3.72) と (4.10), (4.11), (4.12) を比較すると, 後者には $1/r$ を含む速度成分の 2 次の項は存在していない. 以上より, メトリック項は球座標系を考えるときに生じる項であることが分かる.

4.2.1 メトリック項の性質

メトリック項は, 球座標系における単位ベクトルの方向が場所によって変わることによって生じる加速度であった. そのため, この加速度によって流体には見かけの力 $\boldsymbol{F}_{me}$ がかかっていると考えられる. 以降では $\boldsymbol{F}_{me}$ を

$$
\boldsymbol{F}_{me} \equiv -\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{\Omega}_{flow} \times \boldsymbol{v} \tag{4.13}
$$

とおいて考察を進めていく. また座標系は球座標系である.

流体が限りなくゆっくり流れているか, 静止しており $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ とおけるときを考える. (4.13) に $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ を代入すると,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{me} &= -\boldsymbol{M} \times \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.14}$$

となる. これにより, ほぼ, もしくは完全に静止している流体には, 単位ベクトルの回転による力が存在しないことを表している. また $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ であるならば, (3.61) より $\boldsymbol{\Omega}_{flow} = \mathbf{0}$ である. したがって単位ベクトルは移動しないため, 角速度ベクトルを持たず, $\boldsymbol{F}_{me}$ は生じないとも考えられる.

$\boldsymbol{F}_{me}$ に 流れの速度 $\boldsymbol{v}$ の内積を取ると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{me} \cdot \boldsymbol{v} &= -\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{v} \\ &= (-\boldsymbol{\Omega}_{flow} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} \\ &= -\boldsymbol{\Omega}_{flow} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}) \\ &= -\boldsymbol{\Omega}_{flow} \cdot \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.15}$$

である. (4.15) の結果より, $\boldsymbol{F}_{ce}$ は流体の速度 $\boldsymbol{v}$ と垂直の方向に働いており, 流体に対しては仕事をせず, 流れの方向に対し直角する方向へ偏向させていることが分かる.

$\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v} = (u, 0, w)$ であり, 極方向へ流体が流れないときのことを考える. このとき $\boldsymbol{F}_{me}$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{me} &= -\boldsymbol{\Omega}_{flow} \times \boldsymbol{v} \\ &= -\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u}{r} \\ \frac{u \tan\vartheta}{r} \end{pmatrix} \times \boldsymbol{v} \\ &= -\frac{u}{r} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \tan\vartheta \end{pmatrix} \times \boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{4.16}$$

である. また同じ流体のコリオリ力 $\boldsymbol{F}_{Co}$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{me} &= -2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} \\ &= -2 \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega\cos\vartheta \\ \Omega\sin\vartheta \end{pmatrix} \times \boldsymbol{v} \\ &= -2\Omega\cos\vartheta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \tan\vartheta \end{pmatrix} \times \boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{4.17}$$

となる. (4.16), (4.17) を比較すると, $\boldsymbol{F}_{me}$ とコリオリ力 $\boldsymbol{F}_{Co}$ が同じ方向を向いていることが分かる.

第 5 章　結論

本論文では, 回転球座標系における非粘性流体の運動方程式について, 任意の座標の慣性系における流体の運動方程式に対し, 座標系が回転のするときの効果を含めることと, 球座標系の λ, ϑ, r 方向での式をそれぞれ記述することから導出した.

回転の効果として, 遠心力とコリオリ力が存在していた. 座標系が角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ で回転するとき, 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ とすると, 遠心力 $\boldsymbol{F}_{ce}$ は $-\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})$, コリオリ力 $\boldsymbol{F}_{Co}$ は $-2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}$ である. 遠心力はスカラーポテンシャル Φ_{ce} を用いて $-\nabla\Phi_{ce}$ で表すことができるポテンシャル力である. 同じようにポテンシャル力であるニュートン引力とあわせて実効重力を定義し, ジオポテンシャル Φ を用いて書くことができた. コリオリ力は回転系上で静止しているものに対して存在せず, 進行方向に直角に偏向させるように働いていることがわかった.

回転の効果を考慮した運動方程式を球座標系で書き表すとメトリック項の存在を確認できた. これは球座標系において単位ベクトルの方向が変わることによって生じる角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}_{flow}$ によって生じる加速度を表す. メトリック項を $\boldsymbol{M}$ とし, $\boldsymbol{F}_{me}=-\boldsymbol{M}$ とする力を考えると, $\boldsymbol{F}_{me}$ も回転系上で静止しているものに対して存在せず, 進行方向に直角に偏向させるように働いていることがわかった. また, 極方向への流れが存在しないとき, $\boldsymbol{F}_{me}$ はコリオリ力と同じ方向に働いている.

最終的に回転球座標系の非粘性流体の運動方程式として, 以下の 3 つの式が得られた.

$$\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}-\frac{uv\tan\vartheta}{r}+\frac{uw}{r}+2w\Omega\cos\vartheta-2v\Omega\sin\vartheta=-\frac{1}{\rho r\cos\vartheta}\frac{\partial p}{\partial\lambda}-\frac{1}{r\cos\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}+F_\lambda, \tag{3.70}$$

$$\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t}+\frac{u^2\tan\vartheta}{r}+\frac{vw}{r}+2u\Omega\sin\vartheta=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\vartheta}-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}+F_\vartheta, \tag{3.71}$$

$$\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t}-\frac{u^2}{r}-\frac{v^2}{r}-2u\Omega\cos\vartheta=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+F_r. \tag{3.72}$$

謝辞

本研究を行うにあたって, 樫村 博基講師には研究の方針を示していただき, 研究に関する相談の中で, 研究内容についてや発表資料の作成など数多くの件をご指導いただきました. 高橋 芳幸准教授, 林 祥介特命教授には基礎理論読書会や授業, 各種セミナーを通し, 流体力学に関する基礎的な知識や, 本研究に対する助言をいただきました. 地球および惑星大気科学研究室の皆様にも研究室活動や研究についての相談を通し, 多くの助言をいただきました. この場をお借りし, 改めて皆様に深く感謝申し上げます.

参考文献

[1] Geoffrey, K. Vallis, 2017: Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-scale Circulation, 2nd edn. Cambridge University Press.

[2] Schubert, G., 1983: General circulation and the dynamical state of the Venus atmosphere. *VENUS*, 681 - 765, the university of Arizona presss.

[3] 河合祐太 (2015 年 8 月 27 日), 付録 A : 球面座標系における微分演算子の導出, Vallis_2006_kobe-note_2020-04-02.pdf, 128 - 137, https://www.gfd-dennou.org/GFD_Dennou_Club/dc-arch/review/zz2006/Vallis_2006_AOFD/kobe/collected_pdf/Vallis_2006_kobe-note_2020-04-02.pdf (閲覧日 2025 年 3 月 5 日)