南北 1 次元エネルギーバランスモデルを用いた惑星気候の多様性に関する数値実験

米倉 裕亮

神戸大学 理学部 惑星学科
流体地球物理学教育研究分野

2025/03/25

要旨

本論文では, 太陽放射, 惑星放射, 熱輸送の釣り合いによって南北の温度分布を得ることのできる, 南北 1 次元エネルギーバランスモデル (Sellers, 1969) を用いて, 部分凍結解の初期値依存性を四つの初期条件を用いて議論した松田 (2018) を参考に実験設定を行うことによって, 太陽定数を変化させた際の氷線緯度を計算し, 安定定常解, 不安定定常解 (以下, 安定解, 不安定解) を求めた. ここで, 氷線緯度とは, 氷床がエネルギーの釣り合いによって拡大, 縮小することなくとどまることのできる緯度のことである. 安定解を求める際は, 初期条件と格子点数を変化させ, ある太陽定数の値に対して時間発展を計算し, 氷線緯度を求めた. その結果, 初期条件によって全球凍結解, 部分凍結解, 氷なし解の三つの平衡状態 (安定解) を得ることができた. また, 格子点数を変化させても, 部分凍結解は格子点数によらないことがわかった. 時間発展を用いた安定解の計算では, 不安定解を計算することができないため, 異なる方法を用いて不安定解を求めた. 不安定解を求める際は, N 個ある格子点の内の k 番目 (k は $1 \leq k \leq N$ を満たす自然数) の一つの格子点に水の凝固点温度となる $T_k = 271.15$ [K] を与え, 行列を計算することで, その条件を満たす太陽定数を計算した. その結果, 部分凍結解が得られない緯度にある太陽定数の不安定解を得ることができた. また, 不安定解と安定解の図を重ねて描画することで, 安定解と不安定解において, 擾乱が存在するときのそれぞれのもとの状態に戻る過程と, 安定解へ収束する過程について考察することができた.

目 次

第 1 章　はじめに **1**

1.1　惑星気候がとる状態 1

1.2　全球平均太陽放射フラックス 1

1.3　本論文の構成 2

第 2 章　モデルの概要と実験設定 **3**

2.1　南北 1 次元エネルギーバランスモデル 3

2.1.1　支配方程式系 3

2.1.2　境界条件 4

2.1.3　離散化の方法 4

2.2　数値計算の解法 5

2.3　アルベドの設定 6

2.4　実験設定 7

第 3 章　実験結果 **9**

3.1　解の基本構造 9

3.2　時間発展によって得られる安定解 11

3.3　行列計算によって得られる安定解と不安定解 14

第 4 章　結論 **17**

付録 A $s(x)$ **について** **18**

謝辞 **19**

参考文献 **20**

第1章　はじめに

本章では, 惑星気候のとりうる状態の中で本論文で考える三つの状態について説明を行い, その後, その三つの状態について数値実験を行う上での全球平均太陽放射フラックスについての説明を行う. また, 論文の構成についても記述する.

1.1　惑星気候がとる状態

惑星の気候は, その惑星を取り巻く様々な要因によって変化する. その要因として最も強く作用すると考えられるものの一つは, 惑星が恒星から受け取るエネルギーの大きさである. 恒星から受け取るエネルギーの大きさが小さすぎると, 水が惑星表面に存在する場合, すべて凝固してしまい全球的に氷床に覆われる全球凍結状態に陥ってしまう. また, それとは逆に受け取るエネルギーが大きすぎると, 水がすべて蒸発してしまい氷床が全く存在しない無凍結状態や液体の水も存在しないような高温の状態になる. さらに, 受け取るエネルギーが小さすぎず, 大きすぎ無ければ, ある程度の氷床が存在する部分凍結状態となる. 現在の地球は, 氷線緯度が約 60° から 70° ほどとなっており, 部分凍結状態を維持している. このように, 惑星は恒星から受け取るエネルギーによって様々な状態をとる. 本研究では, 恒星から受け取るエネルギーと氷線緯度の関係についての数値実験を行い, その解についての考察を行う.

1.2　全球平均太陽放射フラックス

恒星の大きさや恒星からの惑星の距離, また, 恒星の温度によって惑星が受け取るエネルギーの大きさは変化し, その惑星の軌道上で単位面積あたりに受け取るエネルギーが太陽定数である. 現在の地球の太陽定数の値は, 約 1367 [W/m^2] (Dennis, 1994) [2] である. 太陽定数を S_0 [W/m^2] とし, アルベドを α, 惑星の半径を r [m]

とすると, 惑星が恒星から受け取る単位時間あたりのエネルギーは,

$$Absorbed\ solar\ radiation\ =\ S_0(1-\alpha)\cdot\pi r^2 \tag{1.1}$$

と表せる．ここで, πr^2 は惑星の断面積を表す．また, 惑星からは宇宙へその温度に対応した波長の光を射出しているので, 単位時間当たりに惑星が放射するエネルギーは,

$$Emitted\ terrestrial\ radiation\ =\ \sigma T^4\cdot 4\pi r^2 \tag{1.2}$$

と表せる．ここで, σ はステファン・ボルツマン定数であり, T は惑星の地表面温度である．以上の二つのエネルギーが釣り合うと惑星の気候は定常状態となる．従って,

$$\begin{aligned} S_0(1-\alpha)\cdot\pi r^2 =& \sigma T^4\cdot 4\pi r^2 \\ \frac{S_0}{4}(1-\alpha) =& \sigma T^4 \end{aligned} \tag{1.3}$$

と表せる．ここで, $S_0/4$ は, 全球平均太陽放射フラックスであり, 地球においてその値は 約 341 [W/m^2] (Dennis, 1994) [2] である．本研究ではこの値を変化させることで, 惑星の気候の状態がどのように変化するのかを考察する．

1.3 本論文の構成

本論文の構成を簡単に記す．この後の 2 章では, 本研究で用いた南北 1 次元エネルギーバランスモデル (Energy Balance Model (EBM)) についての説明と, このモデルを用いて行う数値実験の方法についての説明を行い, 実験設定についての説明も行う．次に, 3 章では, EBM において, 地表面温度の時間発展を計算することで得られる, 地表面温度の緯度分布についての図を示し, その後, 全球平均太陽放射フラックスと氷線緯度についての関係を示す．そして, 4 章では, 上記の実験を行った上での結論を記す．

第2章　モデルの概要と実験設定

本章では, 本研究で使用した南北 1 次元エネルギーバランスモデル (EBM) についての説明を行う. 今回行う実験では, 格子点数や初期値を変化させていくつかの実験を行い, 全球平均太陽放射フラックスに対しての氷線緯度の依存性を計算する. このモデルは, Sellers (1969) [4] の定式化に従う.

2.1　南北 1 次元エネルギーバランスモデル

2.1.1　支配方程式系

このモデルの支配方程式は, 以下の四つの項からなる方程式である.

$$C\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = F_s - F_{OLR} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{D(1-x^2)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right\} \tag{2.1}$$

ここで, x は緯度の正弦, t [s] は時間, T [K] は地表面温度, C は熱容量, D は拡散係数である. 本研究では, Lindzen (1990) [3] の値を参照し, $C = 1.0$ [J/K/m^2], $D = 0.2$ [W/m^2/K] とした. また, F_s は太陽放射フラックス, F_{OLR} は惑星放射フラックス, そして, 式中の右辺第三項は, 水平熱輸送によって吸収されるフラックスである. さらに, 太陽放射フラックス (F_s), 惑星放射フラックス (F_{OLR}) は, 以下のように書ける.

$$F_s = Qs(x)(1-\alpha(x)) \tag{2.2}$$

$$F_{OLR} = A + BT(x,t) \tag{2.3}$$

ここで, Q は全球平均太陽放射フラックス, A, B は定数, α はアルベドである. また, これらの値に関しても, Lindzen (1990) [3] の値を参照し, $A = 212.15$ [W/m^2], $B = 1.55$ [W/m^2/K] とした. $s(x)$ は, 年平均太陽放射フラックスの子午面分布であり, 二次のルジャンドル近似を用いることで,

$$s(x) = 1 + s_2 p_2(x) = 1 + s_2\frac{(3x^2-1)}{2} \tag{2.4}$$

と表される．ここで, $s_2 = -0.482$ であり, これは, Lindzen (1990) [3] の値を参照したものである．また, $s(x)$ は, 全球に渡って面積積分を行うことで球の表面積となるように規格化され, 今回の計算領域においては, 1 となるように規格化されている.[*1]

2.1.2 境界条件

このモデルでは, 物理量を東西平均し, 南北対称としている．計算領域は赤道 $(x = 0)$ から, 極 $(x = 1)$ である．また, 計算領域の両端においては熱の出入りはゼロとするため, 境界条件は,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0 \quad (x = 0), \tag{2.5}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0 \quad (x = 1), \tag{2.6}$$

である.

2.1.3 離散化の方法

ここでは, 離散化の方法について説明する．本研究で行う実験での計算領域は, 赤道から極までである．その領域を $x = 0$ を赤道, $x = 1$ を極として, N 個の領域に分割し, それぞれの領域における物理量の平均的な値をその中心に置く．そして, その中心に置いた点を計算上の格子点とし, 方程式を空間に対して離散化する.

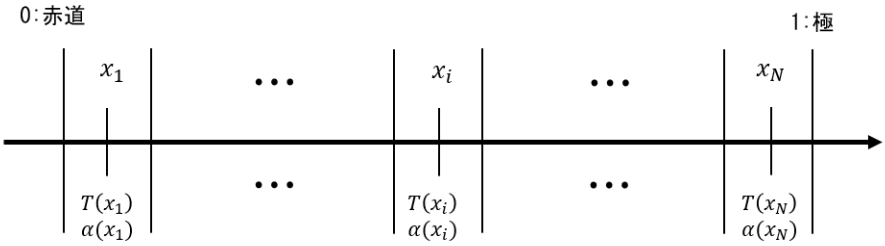


図 2.1: 離散モデルにおける変数配置

[*1] $s(x)$ については付録 A を見よ.

従って, (2.1) は, 下に示す (2.7) のように書ける.

$$
\begin{aligned}
C\frac{\partial T_i(t)}{\partial t} &= Qs(x_i)(1-\alpha(x_i)) - (A + BT_i(t)) \\
&\quad + \frac{D}{\Delta x^2}[(1-x_{i+\frac{1}{2}}^2)(T_{i+1}(t) - T_i(t)) - (1-x_{i-\frac{1}{2}}^2)(T_i(t) - T_{i-1}(t))]
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

ここで, i は格子点番号, Δx は格子点間隔である.

2.2 数値計算の解法

上記で説明したエネルギーバランスモデルを用いて, 氷線緯度の太陽定数依存性を調べるために, 二種類の方法を用いる. 一つは, 地表面温度の時間発展を計算することで定常状態を求め, 安定解を求める方法である. (2.7) を時間に対しても離散化すると,

$$
\begin{aligned}
C\frac{T_i^{l+1} - T_i^l}{\Delta t} &= Qs(x_i)(1-\alpha(x_i)) - (A + BT_i^l) \\
&\quad + \frac{D}{\Delta x^2}[(1-x_{i+\frac{1}{2}}^2)(T_{i+1}^l(t) - T_i^l(t)) - (1-x_{i-\frac{1}{2}}^2)(T_i^l(t) - T_{i-1}^l(t))]
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

となる. この式において右辺が, 10^{-5} [W/m^2] よりも小さくなるとき収束したと判断する. もう一つは, ある格子点に水の凝固点温度, $T_k = 271.15$ [K], を与え, $T_1, \cdots, T_{k-1}, T_{k+1}, \cdots, T_N, Q$ を未知数とする連立一次方程式を作成し, その連立方程式を行列を用いて計算する. 以下にその方法を具体的に示す. 空間に対して離散化した方程式 (2.7) をまず以下のように式変形し, i を 1 から N まで変化させた際の連立一次方程式を作成する.

$$
\begin{aligned}
-\frac{D}{(\Delta x)^2}(1-x_{i-\frac{1}{2}}^2)T_{i-1} + \left\{B + \frac{D}{(\Delta x)^2}(1-x_{i+\frac{1}{2}}^2) + \frac{D}{(\Delta x)^2}(1-x_{i-\frac{1}{2}}^2)\right\}T_i \\
- \frac{D}{(\Delta x)^2}(1-x_{i+\frac{1}{2}}^2)T_{i+1} - s(x_i)(1-\alpha(x_i))Q = -A
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

次に, $T_1, \cdots, T_{k-1}, T_{k+1}, \cdots, T_N, Q$ を未知数として, $A\vec{x} = \vec{b}$ の形の行列に変形する.

$$\begin{pmatrix} M'_{1,0}+M'_{1,1} & M'_{1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 & Q'_1 \\ M'_{2,1} & M'_{2,2} & M'_{2,3} & \dots & 0 & 0 & Q'_2 \\ 0 & M'_{3,2} & M'_{3,3} & \dots & 0 & 0 & Q'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M'_{N-1,N-1} & M'_{N-1,N} & Q'_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M'_{N,N-1} & M'_{N,N}+M'_{N,N+1} & Q'_N \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \dots & \delta_{N-1} & \delta_N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{N-1} \\ T_N \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A \\ -A \\ -A \\ \vdots \\ -A \\ -A \\ 271.15 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

ここで, T_i は, i 番目の格子点の温度, $M'_{i,j}$ は, i 番目の格子点の T_j の係数, Q'_i は, i 番目の格子点の Q の係数である. また, δ_i は, $i = k$ のとき, $\delta_i = 1$ をとり, $i \neq k$ のとき, $\delta_i = 0$ をとる. この行列を計算することで, 安定解である部分凍結解を含む不安定解を求める.

2.3 アルベドの設定

本研究では, アルベドをサブグリッドスケールでの氷の面積を考慮して設定する. 以下に, それぞれの緯度帯に置ける温度を表す図を示す (図 2.2). この図を見ると, 縦向きの赤い線分と横向きの水の凝固点温度となる赤い直線が交わる点よりも左側では, 地表面温度は水の凝固点温度よりも大きく, また, 右側では, 小さくなっている. 従って, 凝固点温度である緯度よりも極側では, 氷床が発達し, アルベドが大きくなり, 赤道側では, 氷床が存在せず, アルベドが低くなることが分かる. そこで, 格子点間の温度分布を線形と仮定し, 格子内の凝固点温度を下回る面積と上回る面積を推定して, 格子領域の面積に対するそれぞれの面積の比を重みとして, 平均をとることで格子内のアルベドを求める. ここで, 氷床が存在するときのアルベドを 0.6, 氷床が存在しないときのアルベドを 0.1 とすると, アルベドは,

$$\begin{aligned} \alpha(x_i) &= \frac{1}{\Delta x}\int_{\Delta x} \alpha(x)\ dx \\ &= \frac{1}{\Delta x}\int_{\Delta x} [0.6\beta(T) + 0.1(1-\beta(T))]\ dx \end{aligned} \tag{2.11}$$

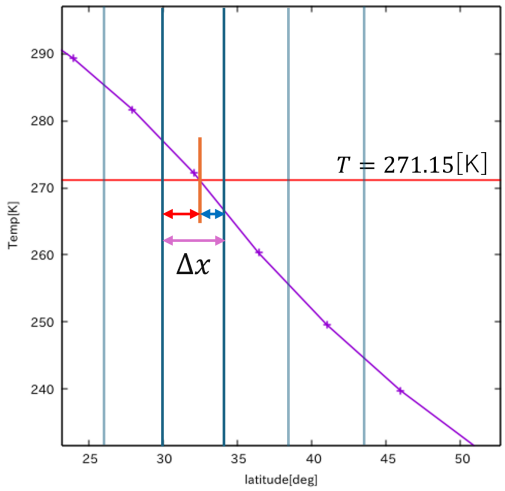


図 2.2: 地表面温度の緯度分布が水の凝固点温度を横切るときのアルベドの面積比を表した図. 横軸: 緯度, 縦軸: 地表面温度. 横向きの赤線は, 水の凝固点温度, 縦の青い線は格子領域を表し, 地表面温度が水の凝固点温度を横切る格子を濃い青線で囲んでいる. 赤の矢印線は, アルベドが 0.1, 青の矢印線は, 0.6 の領域を表す.

である. ここで,

$$\beta(T) = \begin{cases} 1 \ (T(x) \leq 271.15 \text{ K}) \\ 0 \ (T(x) > 271.15 \text{ K}) \end{cases} \tag{2.12}$$

$$T(x) = T(x_i) + \frac{T(x_{i+1}) - T(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \tag{2.13}$$

である. これにより, 各格子内のアルベドを算出する.

2.4 実験設定

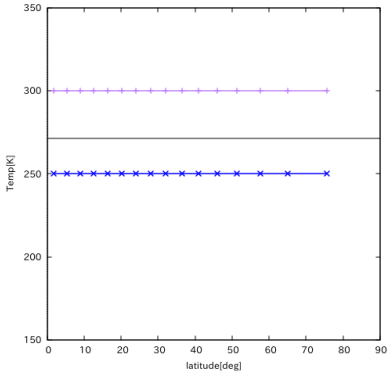
今回の実験では, 四種類の実験を行う. 実験の各名称は次のとおりである. [GIC250], [NIC300], [PIC6_300-250], [PIC11_300-250]. 各実験では, 初期値を変化させて実験を行う. [GIC250] では, $0 \leq x \leq 1$ の範囲で, 初期値を $T(x) = 250$ K とし, [NIC300] では, $0 \leq x \leq 1$ の範囲で, 初期値を $T(x) = 300$ K としている. また, [PIC6_300-250] では, 初期値を $T(x) = 250$ $(x \geq 0.4)$, $T = 300$ $(x < 0.4)$ とし, [PIC11_300-250] では, 初期値を $T(x) = 250$ $(x \geq 0.72)$, $T = 300$ $(x < 0.72)$ とし, 緯度によって初期値を変化せている. (表 2.1)

今回の実験では, 標準実験として格子点数を $N = 16$ として各計算を行い, 全球

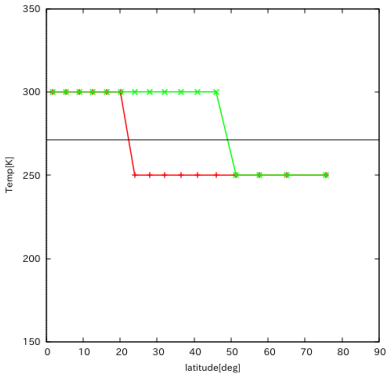
平均太陽放射フラックスは, 250 [W/m^2] - 500 [W/m^2] で変化させる (表 2.2).

表 2.1: 初期値の設定

実験名	実験設定
[GIC250]	$T(x) = 250$ K $(0 \leq x \leq 1)$
[NIC300]	$T(x) = 300$ K $(0 \leq x \leq 1)$
[PIC6_300-250]	$T(x) = \begin{cases} 300 \text{ K } (x < 0.4) \\ 250 \text{ K } (x \geq 0.4) \end{cases}$
[PIC11_300-250]	$T(x) = \begin{cases} 300 \text{ K } (x < 0.72) \\ 250 \text{ K } (x \geq 0.72) \end{cases}$



(a) [GIC250] と [NIC300] の初期温度分布. 青線が [GIC250], 紫線が [NIC300] を表す. 黒線は, $T = 271.15$ $[K]$



(b) [PIC6_300-250] と [PIC11_300-250] の初期温度分布. 赤線が, [PIC6_300-250], 緑線が, [PIC11_300-250] を表す. 黒線は, $T = 271.15$ $[K]$

図 2.3: 格子点数が $N = 16$ のときの, 各実験における初期温度分布

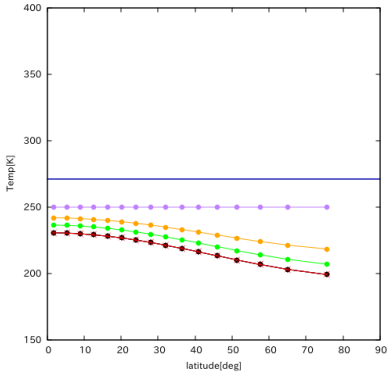
第3章　実験結果

この章では, 本研究で行った実験の結果を示し, 説明を行う. まず, 地表面温度の時間発展によって求められる解の基本構造を説明する. その後, 時間発展によって得られる, 太陽定数と氷線緯度の関係についての説明を行う. そして, 行列の計算によって得られた不安定解と時間発展によって得られた安定解の図との比較を行い, 考察する.

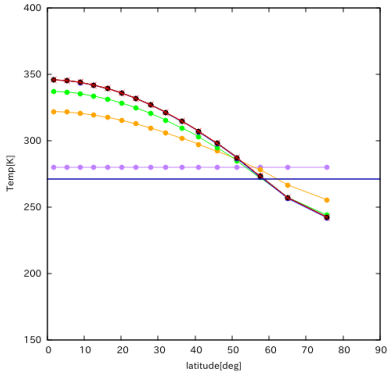
3.1　解の基本構造

地表面温度の各緯度における時間発展の図を示す (図 3.1). この図より, 全球平均太陽放射フラックスの値を変化させずに, 初期値を変化させることで三つの基本的な惑星気候の状態を見ることができる. すべての緯度で地表面温度が水の凝固点温度を下回り, 全球が氷床で覆われる, 全球凍結状態 (a). もう一つは, ある緯度で地表面温度が水の凝固点温度を下回り, 赤道から極の間に氷線を持つ, 部分凍結状態 (b). そして, すべての緯度で地表面温度が水の凝固点温度を上回り, 全球で氷床が見られない, 無凍結状態 (c) である. このように, 初期値を変化させることで, 惑星気候は三種類の異なる定常状態をとることがわかる.

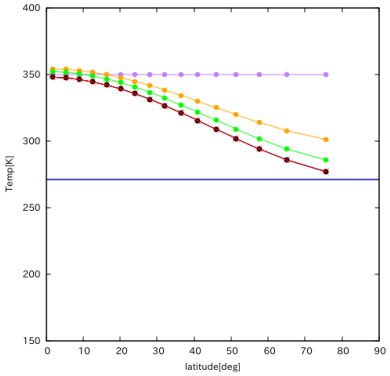
次に, 初期値 $T = 280$ [K], $Q = 320$ [W/m^2] における, (2.1) の右辺のそれぞれの平衡状態における各フラックスの単位面積当たりの加熱率の図を示す (3.2). 長波放射フラックスを表す青線は, このモデルでは, 拡散型の水平熱輸送を用いたことで, 温度の緯度分布は連続的となっている. そのため, 温度の一次関数である長波放射フラックス (図の青線) は連続的な分布となっている. また, アルベドをサブグリッドスケールにおいて氷床となる面積を推定し, 各格子点の値を与えているので, 太陽放射フラックス (図の赤線) についても連続的な分布となっている. 水平熱輸送によって吸収されるフラックス (図の紫線) は, この二つのフラックスとの合計値がゼロとなるように値を持つので, その分布も連続的となる. そして, 三つのフラックスの合計値 (図の緑線) は, 三つのフラックスが釣り合うことで, すべての緯度でゼロとなる.



(a) 初期値 250 K



(b) 初期値 280 K



(c) 初期値 350 K

図 3.1: それぞれの初期値における, $Q = 320$ [W/m^2] のときの地表面温度の時間発展の図. 紫: 0 秒, 橙: 5000 秒, 緑: 10000 秒, 青: 50000 秒, 桃: 100000 秒, 黒: 200000 秒, 赤: 平衡時, 紺: $T = 271.15$ [K] (水の凝固点温度) である. また, それぞれの図は, 左上図: 全球凍結状態, 右上図: 部分凍結状態, 下図: 無凍結状態である.

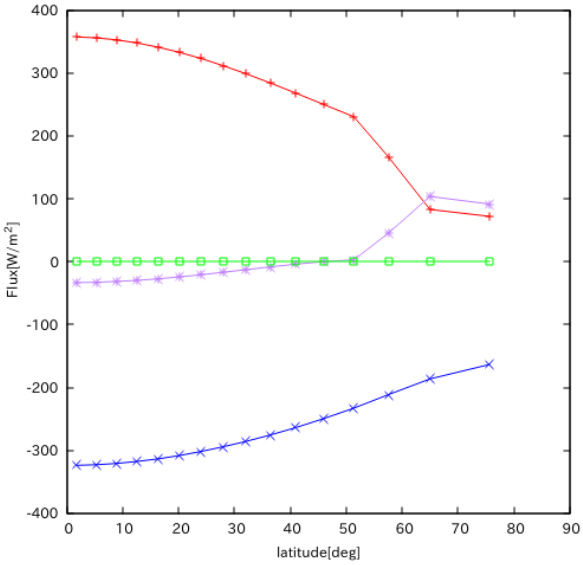


図 3.2: 初期値 $T = 280$ [K], $Q = 320$ [W/m^2] における, 平衡状態における各フラックスの単位面積当たりの加熱率の図. 赤は, 太陽放射による加熱率, 紫は, 水平熱輸送によって吸収されるフラックス, 青は, 長波放射による加熱率, 緑は, 各加熱率の合計を表す.

3.2 時間発展によって得られる安定解

地表面温度の時間発展によって得られる, 各初期値における全球平均太陽放射フラックスと氷線緯度の関係図を示す (図 3.3). この図を見ると, 赤道上, 30° から 70°, そして, 90° の極に解が存在していることがわかる. これらの解は, 赤道付近に見られるものから順に, 全球凍結解, 部分凍結解, 氷なし解を表し, 初期値によって複数の安定状態をとる太陽定数が存在することもわかる. Q が 289 [W/m^2] よりも小さいと, 四つの実験すべてにおいて解は全球凍結解となる. また, 289 [W/m^2] から 332 [W/m^2] の間には, 部分凍結解が存在する. その中で, 289 [W/m^2] から 310 [W/m^2] の間では, ある全球平均太陽放射フラックスの値に対して, 部分凍結解と全球凍結解の二種類の解が存在していることが分かり, 310 [W/m^2] から 332 [W/m^2] の間では, ある全球平均太陽放射フラックスの値に対して, 三つの安定解が存在していることがわかる. そして, それよりも全球平均太陽放射フラックスが大きくなると, 安定解は全球凍結解と氷なし解の二種類となり, さらに, 460 [W/m^2] よりも大きくなると, 安定解は氷なし解のみとなる.

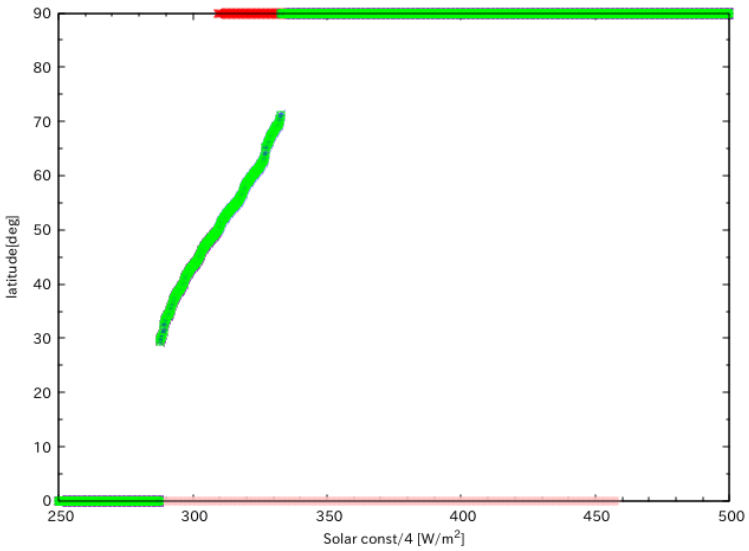
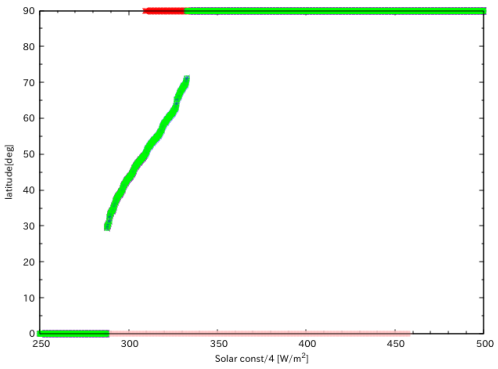
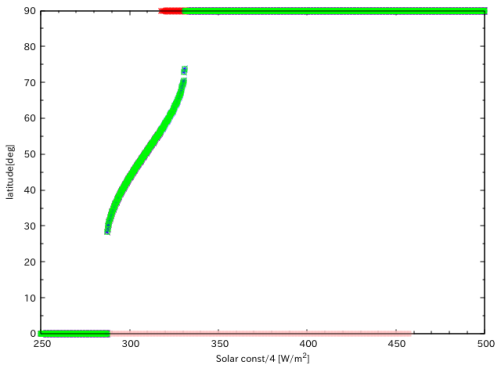


図 3.3: 地表面温度の時間発展によって得られる各初期値のにおける全球平均太陽放射フラックスと氷線緯度の関係図. 桃: [GIC250], 赤: [NIC300], 青: [PIC6_300-250], 緑: [PIC11_300-250] である. また, 格子点数は $N = 16$ である. 0° の点は, 全球凍結解, 30° から 70° 付近の点は, 部分凍結解, 90° の点は, 氷なし解である.

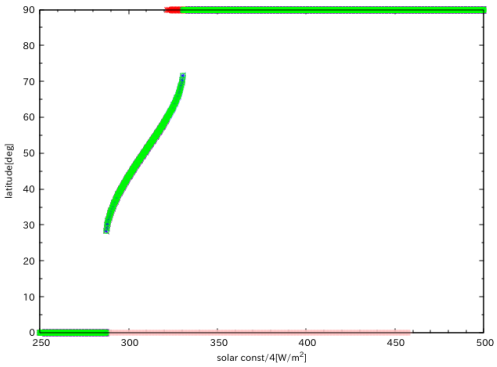
しかし, この図では, 格子点数が少ないため解を正確に表すことができていない可能性がある. そこで, 格子点数を大きくすることで解像度を高め, それぞれの解がどのような状態をとるのかを見る. 下に, 格子点数を $N = 16$, $N = 50$, $N = 500$ と変化させた図を示す (図 3.4). この図より, 格子点数を大きくすることで, [NIC300] (赤) における極に見られる氷なし解の左の端が, 格子点数が 16 から 500 になるにつれて 10 [W/m^2] ほど大きくなっていることが分かる. さらに, 部分凍結解は, 格子点数にかかわらず, ほとんど変化していないように見える. これを確かめるために, 図 3.3 の三つの図を重ねて描画した図を下に示す (図 3.5). この図より, 全球凍結解, 氷なし解は一致しており, 部分凍結解もよく一致していることがわかる. 従って, 部分凍結解は, 格子点数に依存せずほぼ同じ解を持つことが分かり, 全球凍結解も格子点数に依存していないが, 氷なし解は格子点数に依存していることがわかる.



(a) 格子点数 $N = 16$



(b) 格子点数 $N = 50$



(c) 格子点数 $N = 500$

図 3.4: 地表面温度の時間発展によって得られる安定解において格子点数を変化させた図.

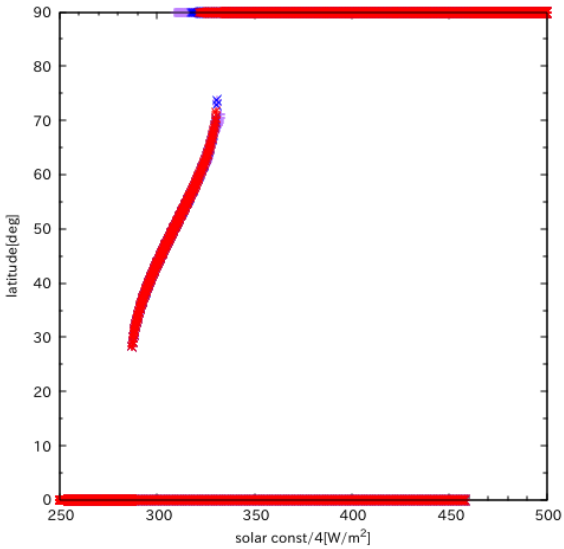


図 3.5: 図 3.4 の三つの図を重ねて描画した図. 紫: $N = 16$, 青: $N = 50$, 赤: $N = 500$ である.

3.3 行列計算によって得られる安定解と不安定解

$N = 16$ における行列計算によって得られた, 安定解と不安定解の両方を含む (安定解は部分凍結解のみ) 図を示す (図 3.6). 地表面温度の時間発展によって得られる安定解の図 (図 3.3) を見ると, 緯度が $0°$ から $30°$ の領域と, $70°$ から $90°$ の領域には安定解が存在しないことがわかる. そして, 図 3.6 を見ると, その領域に安定解の図では見られない解が存在することがわかる. また, 図 3.3 において部分凍結解が見られる領域でもある解を見ることができる.

この領域に存在する解が時間発展を計算した際の部分凍結解と一致することを示すために, 格子点数 $N = 16$ における, 安定解の図と図 3.6 を重ねて描画した図を示す (図 3.7). 図 3.7 より, 部分凍結解については二つの方法で求めた解がよく一致していることがわかる. また, 紫の線で描かれた解において, 部分凍結解以外の解の赤道側の解は全球凍結解の近くに存在しているが, 極側の解は格子点の極側の端が $75°$ 付近に存在しているため, それより高緯度側に解が見られない. そこで, 図 3.7 の格子点数を $N = 500$ とした図を示す (図 3.8). 図 3.8 より, 格子点数を変化させても, 部分凍結解は二つの方法でよく一致しており, さらに, 紫の線で描かれた解はその端が全球凍結解と氷なし解の端と一致している.

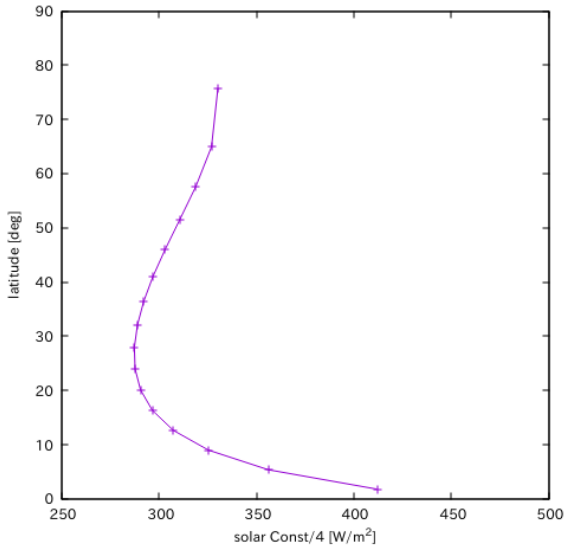


図 3.6: ある緯度が水の凝固点温度になるときの全球平均太陽放射フラックスの値を行列計算によって求めた図. 格子点数は $N = 16$ である.

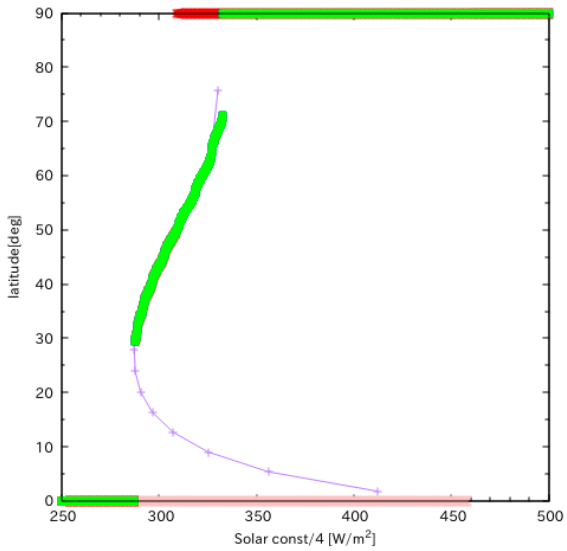


図 3.7: 図 3.3 に 図 3.6 を重ねて描画した図. 格子点数は $N = 16$ である.

最後に, 図 3.8 について, 解の考察を行う. 紫で描画された点が不安定解を表し, それ以外の色で描画された点は安定解を表す. 赤道側の 0° から 30° に見られる不安定を大氷冠不安定という. ここでは, 大氷冠不安定についての考察を行うために, 全球平均太陽放射フラックスの値が $Q = 350$ [W/m^2] の時を考える. このとき, 安定解は全球凍結解と氷なし解の二種類が存在し, 不安定解は大氷冠不安定が存在する. 今, 大氷冠不安定において平衡状態にあると仮定する. その状態から何らかの原因で温度が少し上昇 (下降) すると, それにより氷床が衰退 (拡大) する. このとき, 氷線緯度をその緯度に保つには全球平均太陽放射フラックスの値が小さく (大きく) なる必要がある. しかし, 全球平均太陽放射フラックスは一定であるので, その値は平衡状態を維持できる値よりも大きい (小さい) ままとなる. また, 全球的にアルベドが少し減少 (増加) することで, より多くの太陽放射フラックスを吸収 (反射) することができ, さらに温度が上昇 (下降) する. これらによって, 氷床が暴走的に衰退 (拡大) し, 氷なし解 (全球凍結解) に収束する. このように, 氷床が衰退することで, より多くのエネルギーを吸収することができるようになり, さらに氷床が衰退するように, ある現象がさらにその現象を加速させるような働きを正のフィードバック効果 (アイスアルベドフィードバック) という. 以上のようにして, 大氷冠不安定では温度の微小な変化によって急速に惑星気候が変化する. そして, 一度安定状態に収束すると, その状態からは簡単には抜け出せず, 安定解がなくなる臨界点を超えなければ気候ジャンプを起こすことはできない. つまり, $Q = 350$ [W/m^2] において, 一度全球凍結状態へと気候ジャンプすると, 全球平均太陽放射フラックスが強くなり, 約 460 [W/m^2] を超えなければ氷なし解へと気候

ジャンプすることはなく, 全球凍結状態を維持することとなる. また, 部分凍結解においては, 上記のように温度の微小な変化が起こり, 氷床の衰退 (拡大) が生じても, その氷線緯度において平衡状態を維持できる全球平均太陽放射フラックスの値は大きく (小さく) なる必要があり, 全球平均太陽放射フラックスは一定であるので, 氷床がさらに衰退せずに拡大 (拡大せずに衰退) する. これにより部分凍結解では惑星気候が安定となる.

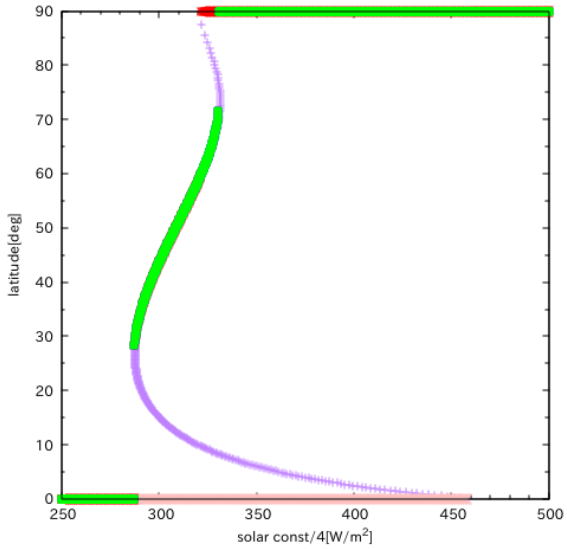


図 3.8: 図 3.7 の格子点数を $N = 500$ として描画した図. 安定解と重なっていない, 紫で描画された点が不安定解を表す. また, 0° から 30° の赤道側に見られる不安定解は大氷冠不安定を表し, 約 70° より極側に見られる不安定解は, 小氷冠不安定を表す.

第4章　結論

本研究では, 南北 1 次元エネルギーバランスモデルを用いて氷線緯度の太陽定数への依存性を二種類の方法を用いて数値計算し, 考察した. 一つは, 地表面温度の時間発展を計算し収束値を求め, 惑星気候のとりうる三つの安定状態 (全球凍結解, 部分凍結解, 氷なし解) を描画した. これによると, 同じ全球平均太陽放射フラックスの値を用いても, 初期値によって収束する安定状態は異なり, 特に, 全球平均太陽放射フラックスが, 約 310 [W/m^2] から 330 [W/m^2] の間では, 初期値によって三つの安定状態のいずれかをとることが分かった. また, 部分凍結解は格子点数を大きくしてもほとんど変化せず, 格子点数に依存しないが, 全球凍結解は, 格子点数を大きくすると, 安定解が得られる全球平均太陽放射フラックスが 10 [W/m^2] ほど大きくなることもわかった. もう一つの方法は, EBM において時間微分項をゼロとし, 地表面温度と全球平均太陽放射フラックスを未知数とする連立一次方程式を作成し, その解を行列計算によって求めるというものである. この計算では, 時間発展の計算では求めることができなかった不安定解を描画することができ, 時間発展によって求めた安定解の図と重ねて描画することで, 不安定解の振る舞いがどのようなものかを考察することができた. その考察によって, 赤道側に見られる大氷冠不安定の考察を行うことができ, 安定解と不安定解の違いについての考察をすることができた. 極側に見られる不安定解は小氷冠不安定というが, この不安定についての考察は本論文では行うことができていないため, 今後の課題である.

付録 A $s(x)$ について

太陽放射 (F_s) を全球に渡って面積積分を行う. このとき, アルベドは X の関数だが, 簡単のため全球で一定値をとるとする. 惑星の表面積を S とすると, 太陽放射 (F_s) の面積積分は次のようになる.

$$\begin{aligned}\int_S F_s \mathrm{d}S &= \int_S Qs(x)(1-\alpha)\mathrm{d}S \\ &= Q(1-\alpha)\int_S s(x)\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{A.1}$$

ここで, 球の半径を r, 経度方向の角度を θ, 緯度方向の角度を ϕ とすると, 球の表面における微小面積は, $\mathrm{d}S = r^2\cos\phi\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi$ と表せる. また, 本研究では $x = \sin\phi$ であるので, $\mathrm{d}x = \cos\phi\ \mathrm{d}\phi$. 従って, $\mathrm{d}S = r^2\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}x$ となり, (A.1) は次のように計算できる.

$$\begin{aligned}\int_S F_s \mathrm{d}S &= Q(1-\alpha)r^2\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\left\{1+s_2\frac{3x^2-1}{2}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta \\ &= Q(1-\alpha)r^2\cdot 2\pi\cdot 2 \\ &= Q(1-\alpha)\cdot 4\pi r^2 \end{aligned} \tag{A.2}$$

よって, $s(x)$ を全球積分することで球の表面積となる. 従って, 今回の南北 1 次元エネルギーバランスモデルでは東西平均を行い, 赤道から極までを 0 から 1 として計算しているため, 0 から 1 において積分すると, 1 となる.

謝辞

本研究を行うにあたって, 高橋芳幸准教授には研究内容の方針を示していただき, 定期的な研究相談や基礎理論読書会, 大気セミナーにおいても数多くの助言を頂きました. 樫村博基講師には大気セミナーにおいて研究内容に関する助言や発表に関する改善点について, また, 基礎理論読書会においても数多くの指導をしていただきました. 林祥介特命教授には大気セミナーや基礎理論読書会において数多くの助言を頂きました. また, 地球および惑星大気科学研究室の皆様にも研究, 発表に関する助言を頂きました. ここに深く感謝申し上げます.

参考文献

[1] Budyko, M. I., 1969:The effect of solar radiation variations on the climate of the earth, *Tellus*, **21**, 611-619.

[2] Dennis L. Hartmann, 1994: Global Physical Climatology, Academic Press, 411 pp

[3] Lindzen, R. S., 1990: Dynamics in Atmospheric Physics, *CAMBRIDGE*, 310 pp.

[4] Sellers, W. D., 1969: A climate model based on the energy balance of the earth-atmosphere system, *J. Appl. Meteor.*, **8**, 392-400.

[5] 田近 英一, 2009: 凍った地球 スノーボールアースと生命進化の物語, 新潮社, 195 pp

[6] 松田 幸樹, 2018: 大気海洋海氷結合モデルの開発と海惑星気候に対する海洋大循環の影響に関する数値実験, 神戸大学理学研究科修士論文