

氷衛星内部海における テイラー柱の計算

神戸大学理学部惑星学科
流体地球物理学教育研究分野
中澤 恵人

目次

1. 序論

- 氷衛星とは
- 氷衛星の内部構造
- 内部海の運動
- 本研究で着目する運動

2. モデルの構築

- 支配方程式
- 座標系の導入
- コリオリの力
- テイラー・プラウドマンの定理

3. 先行研究の再現実験

- 先行研究の紹介
- 実験設定
- 実験結果
- 考察

氷衛星とは

- 氷衛星(icy satellite / ice moon) : 表面を氷に覆われた衛星, または, 主に氷で構成された衛星の総称
➤ 例: エウロパ, ガニメデ, エンセラダスなど
- これまで, ボイジャー探査機やカッシー探査機を用いた調査が行われた
➤ 内部構造を調べるには, 探査回数が不足

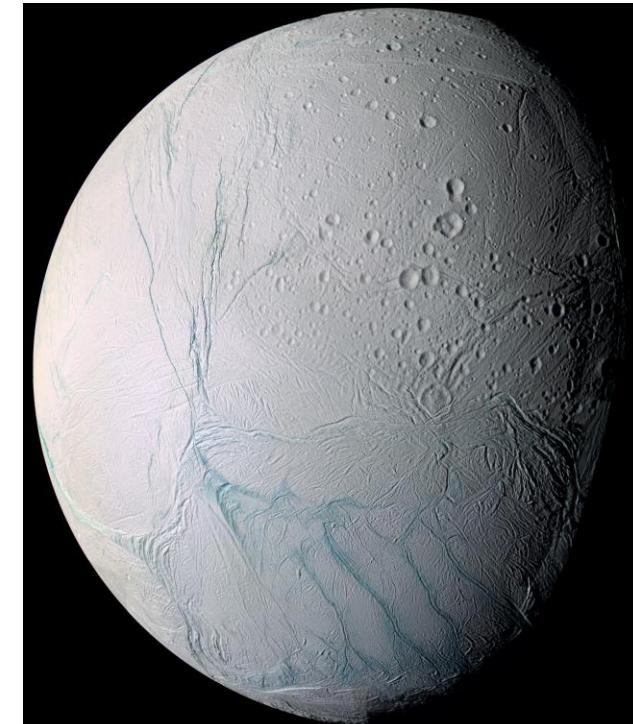


写真: エンセラダス
(カッシー探査機が2005年に撮影, NASA
より引用)

氷衛星の内部構造

氷衛星には、大きく分けて 3 種類の層が存在すると考えられている。(Soderlund, 2024)

● ケイ酸塩コア

- ケイ素(Si)と酸素(O)を主成分とする、ケイ酸塩鉱物からなる固体核のこと
- 相対的に高温であり、内部海に熱を伝える

● 内部海

- 液体の H_2O を主成分とする層
- ケイ酸塩コアから熱を受け取る

● 氷殻

- 固体の H_2O でできた層

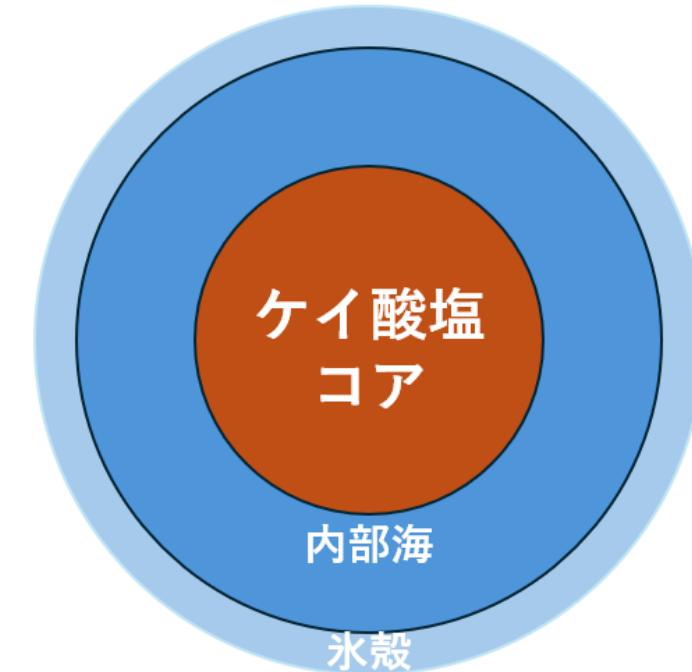


図: 氷衛星内部の模式図

内部海循環の駆動要因

主に **4種類の駆動要因**が考えられている (Bire et al., 2022)

1. ケイ酸塩コアからの加熱

- 天体形成時の初期熱や、放射性元素の崩壊熱

2. 潮汐加熱

- 主星(惑星)との距離に応じて、周期的に衛星が変形する。その際に生じる、衛星内の内部摩擦

3. H_2O の凍結と融解による塩分フラックス

- H_2O が凍結する際、周りに塩分を放出
 - 結果、周囲の水は相対的に重くなる
 - 重力によって沈み、対流を駆動する

4. 水の氷点が圧力に依存することによる、氷殻直下の温度変化

(前提) 圧力が高くなるにつれ、氷点は低くなる

- 場所によって氷殻の厚さが異なることで、内部海と氷殻の境界では水平方向の温度勾配が生まれる
- 右の図であれば、 $T_A > T_B$

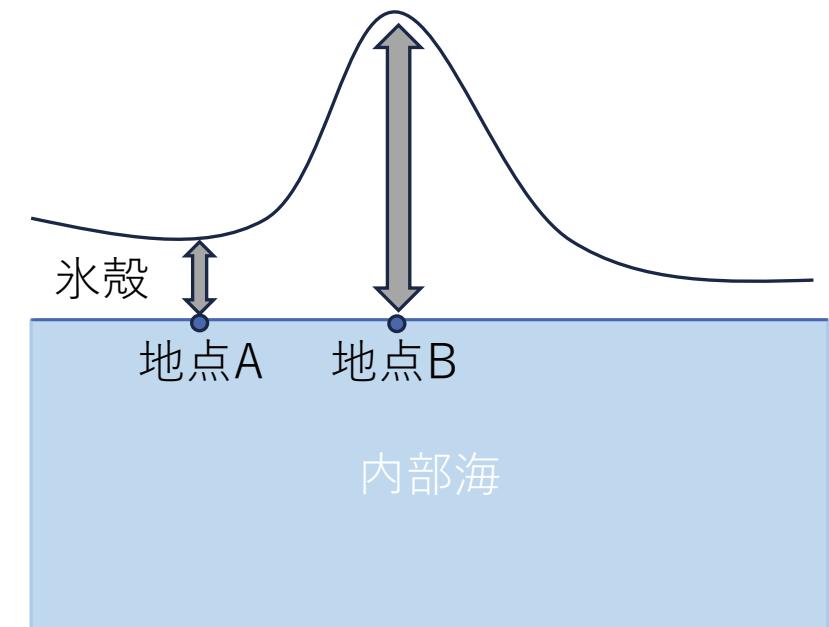


図: 4. 水の氷点が圧力に依存することによる、氷殻直下の温度変化の図

本研究で着目する運動

- 「1. ケイ酸塩コアからの加熱」のみに着目
 - 内部海でどのような熱伝導・対流が生じるのか
 - 内部海において、東西方向の流れはどのように分布するのか

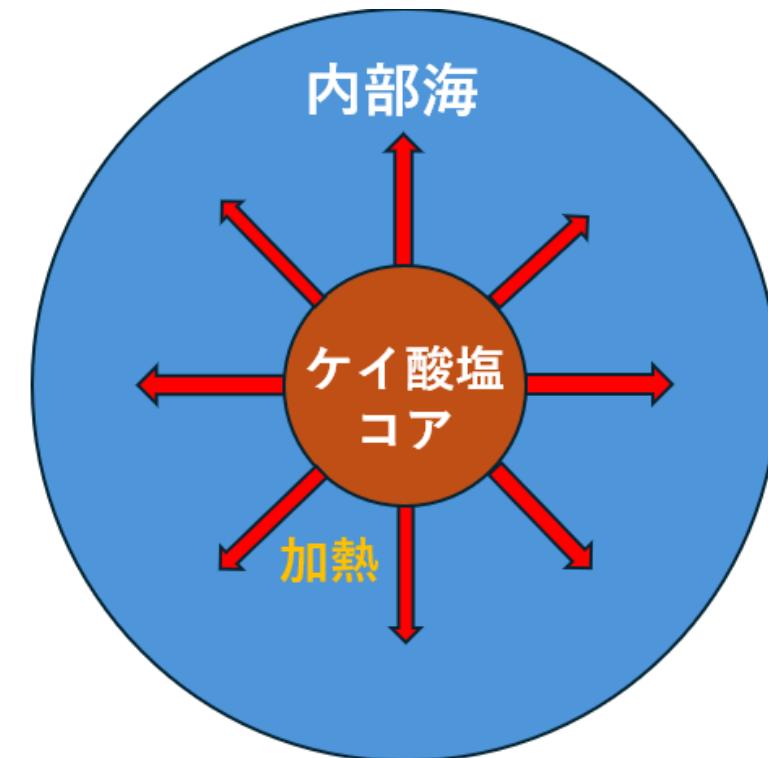


図: ケイ酸塩コアからの加熱

支配方程式

場の変数 $\theta(x, y, z, t)$ は, 水平一様な基本場 $\bar{\theta}(z)$ と, そこからの偏差 $\theta'(x, y, z, t)$ に分けて考える.

- 運動方程式(磁場なし, 非弾性近似した形, 基本場で静力学平衡を仮定)は,

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \mathbf{g} - \nabla \phi' + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}$$

- 連続の式(非弾性近似した形)は,

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{u}) = 0$$

上記の式に,

- ・ 重力は場所・時間に依らず一定 ($\phi' = 0$)
- ・ 自転角速度一定
- ・ ブシネスク近似(浮力以外の項では, 密度は $\bar{\rho} = \rho_0$ で一定と近似)を行うと・・・・・

$\frac{D}{Dt}$: 物質微分
 ρ : 密度
 p : 圧力
 ϕ : 重力ポテンシャル
 ν : 動粘性係数
 \mathbf{r} : 位置ベクトル
 \mathbf{u} : 流体の速度ベクトル
 $\boldsymbol{\Omega}$: 自転角速度ベクトル
 (太字はベクトルを表す)

支配方程式

場の変数 $\theta(x, y, z, t)$ は, 水平一様な基本場 $\bar{\theta}(z)$ と, そこからの偏差 $\theta'(x, y, z, t)$ に分けて考える.

- 運動方程式(磁場なし, 非弾性近似した形, 基本場で静力学平衡を仮定)は,

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g} - \nabla \phi' + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}$$

- 連続の式(非弾性近似した形)は,

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{u}) = 0$$

- ・ 重力は場所・時間に依らず一定 ($\phi' = 0$)
- ・ 自転角速度一定
- ・ ブシネスク近似(浮力以外の項では, 密度は $\bar{\rho} = \rho_0$ で一定と近似)

$\frac{D}{Dt}$: 物質微分
 ρ : 密度
 p : 圧力
 ϕ : 重力ポテンシャル
 ν : 動粘性係数
 \mathbf{r} : 位置ベクトル
 \mathbf{u} : 流体の速度ベクトル
 $\boldsymbol{\Omega}$: 自転角速度ベクトル
 (太字はベクトルを表す)

座標系の導入

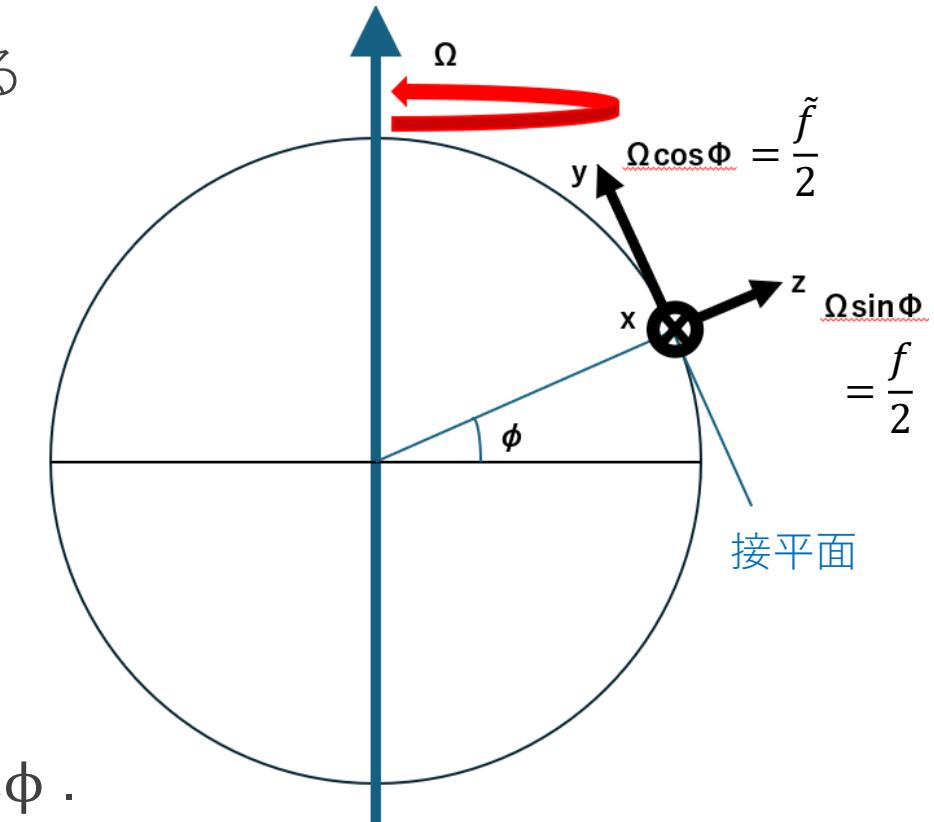
局所デカルト座標系(x, y, z) を導入し, 緯度 ϕ における接平面を考えると,

●運動方程式: $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{Du}{Dt} + \tilde{f}w - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + F^x \\ \frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} + F^y \\ \frac{Dw}{Dt} - \tilde{f}u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + F^z - \frac{\rho'}{\rho_0} g \end{cases}$$

ただし, $\nu \nabla^2 \mathbf{u} = (F^x, F^y, F^z)$, $f = 2\Omega \sin \phi$, $\tilde{f} = 2\Omega \cos \phi$.

緯度 ϕ において, f は鉛直成分, \tilde{f} は $2\boldsymbol{\Omega}$ の水平成分. 図: 緯度 ϕ における接平面と, $\boldsymbol{\Omega}$ の分解



コリオリの力(@地球大気)

- $f = 2\Omega \sin\phi$: コリオリパラメータと呼ばれる.
- $\tilde{f} = 2\Omega \cos\phi$: 非伝統的コリオリ項. 一般的に地球流体力学では, 伝統的近似により無視される.
➤ 伝統的近似: 自転ベクトル Ω の水平成分を無視. すなわち, \tilde{f} のかかる項を無視する近似.

総観規模のスケール (中緯度)	
水平スケール L	10^6 (m)
鉛直スケール H	10^4 (m)
水平風速 U	10 (m/s)
鉛直速度 W	10^{-2} (m/s)
時間スケール	10^5 (s)
コリオリパラメータ $f \sim \tilde{f}$	10^{-4} (s^{-1})
気圧の変動 p'	10^3 ($kg\ m^{-1}s^{-2}$)
気圧 p	10^5 ($kg\ m^{-1}s^{-2}$)
密度の変動 ρ'	10^{-2} ($kg\ m^3$)
密度 ρ_0	1 ($kg\ m^3$)
重力加速度 g	10 ($m\ s^{-2}$)



$$\frac{Du}{Dt} + \boxed{\tilde{f}w - fv} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + F^x$$

$\tilde{f}w \ll fv$ であり,
大小は逆転しにくい

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} + F^y$$

伝統的近似 ○

$$\frac{Dw}{Dt} - \tilde{f}u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + F^z - \frac{\rho'}{\rho_0} g$$

コリオリの力(@本研究)

総観規模のスケール(中緯度)

	地球大気	氷衛星内部海 (エンセラダス)
水平スケール L	10^6 (m)	10^5 (m)
鉛直スケール H	10^4 (m)	10^4 (m)
水平風速 U	10 (m/s)	10^{-2} (m/s)
鉛直速度 W	10^{-1} (m/s)	10^{-2} (m/s)
時間スケール T = L/U	10^5 (s)	10^7 (s)
コリオリパラメータ $f \sim \tilde{f}$	10^{-4} (s ⁻¹)	10^{-4} (s ⁻¹)
圧力の変動 p'	10^3 (kg m ⁻¹ s ⁻²)	10^2 (kg m ⁻¹ s ⁻²)
圧力 p	10^5 (kg m ⁻¹ s ⁻²)	10^6 (kg m ⁻¹ s ⁻²)
密度の変動 ρ'	10^{-2} (kg m ⁻³)	10^{-3} (kg m ⁻³)
密度 ρ_0	1 (kg m ⁻³)	10^3 (kg m ⁻³)
重力加速度 g	10 (m s ⁻²)	10^{-1} (m s ⁻²)

スケール解析

$$\begin{aligned}
 \frac{Du}{Dt} + \boxed{\tilde{f}w - fv} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + F^x & \text{スケールが同程度で} \\
 10^{-9} \quad 10^{-6} \quad 10^{-6} & & \text{あり, 大小が逆転する} \\
 \frac{Dv}{Dt} + fu &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} + F^y & \text{伝統的近似} \\
 10^{-9} \quad 10^{-6} & & \triangle \\
 \frac{Dw}{Dt} - \tilde{f}u &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + F^z - \frac{\rho'}{\rho_0} g \\
 10^{-10} \quad 10^{-6} \quad 10^{-5} & & \text{コリオリの力} > \text{浮力となる}
 \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \mathbf{u} = (F^x, F^y, F^z), f = 2\Omega \sin\phi, \tilde{f} = 2\Omega \cos\phi$$

※代表的なスケールの表において、黒色: 観測値、黄色: 先行研究の理論値、青色: 観測値・理論値をもとに計算した値である。

テイラー・プラウドマンの定理

地衡風バランスの式 (コリオリの力と圧力傾度力の釣り合いで)

$$2\Omega \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p$$

に対して、両辺回転($\nabla \times$)を取ると

$$\nabla \times (2\Omega \times \mathbf{u}) = \nabla \times \left(-\frac{1}{\rho_0} \nabla p \right)$$

スカラー場 ϕ に関して $\nabla \times \nabla \phi = 0$ なので、(右辺) = 0.

ベクトル公式※、非圧縮の式、自転角速度ベクトルが場所に依らないことを用いると、

$$\Omega \cdot \nabla \mathbf{u} = 0$$

ゆえに、速度勾配が Ω 成分を持たないため、運動が回転軸方向に一樣である。

特に回転する球殻流体の場合、右図のようになる。

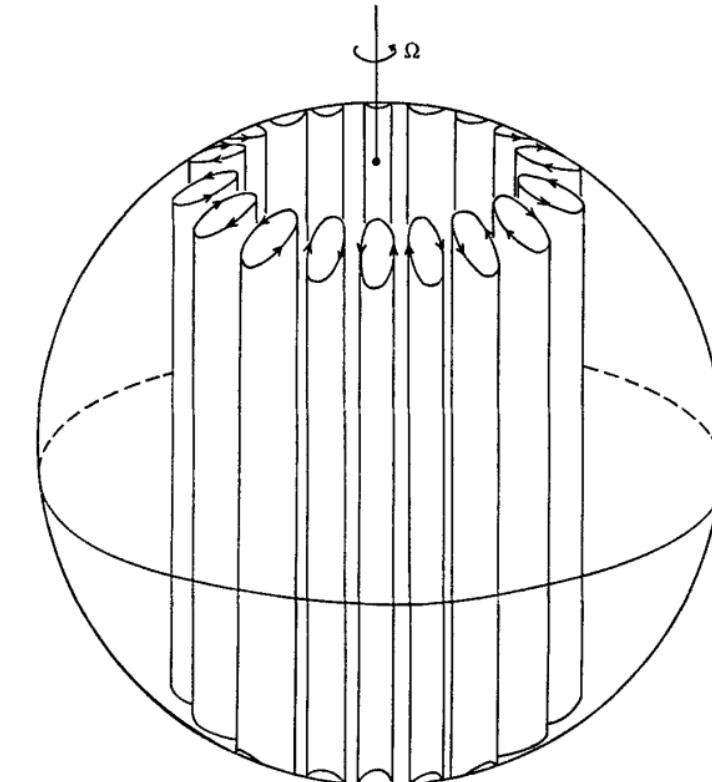


図: テイラー・プラウドマンの定理による
テイラー柱の様子. Busse(1970) より引用.

先行研究の紹介

Bire et al. (2022) の研究

- 研究内容: 底面加熱による氷衛星の海洋循環
- 手法: 数値シミュレーション
 - Julia のパッケージ Oceananigans.jl を使用
- 計算する座標系: デカルト座標系 (次ページ)
 - 球殻ジオメトリを, 直方体の箱として近似
- 境界条件 (本研究も同じ条件設定)
 - 東西: 周期的
 - 南北, 底面 ($z = -60 \text{ km}$ の面): 壁 (滑りなし)
 - 内部海の上面 ($z = 0 \text{ km}$ の面): 壁 (滑りあり)
 - $z = -60 \text{ km}$ から一定加熱 10 W/m^2 ,
 - $z = 0 \text{ km}$ で $T = 0^\circ\text{C}$

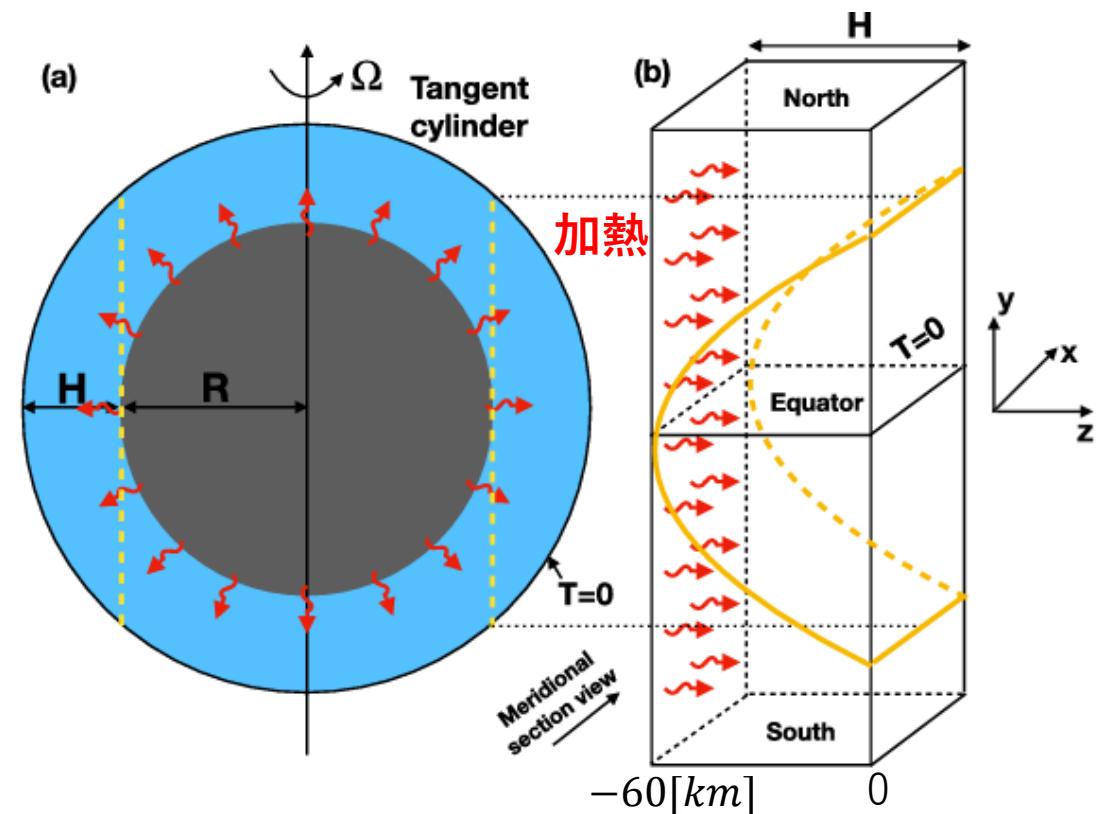


図: 氷衛星の内部海モデル(Bire et al., 2022).

※黄色の線は、氷衛星のケイ酸塩コアの接線円筒(Tangent Cylinder)であり、自転軸に平行。

先行研究の紹介

Bire et al. (2022) の研究

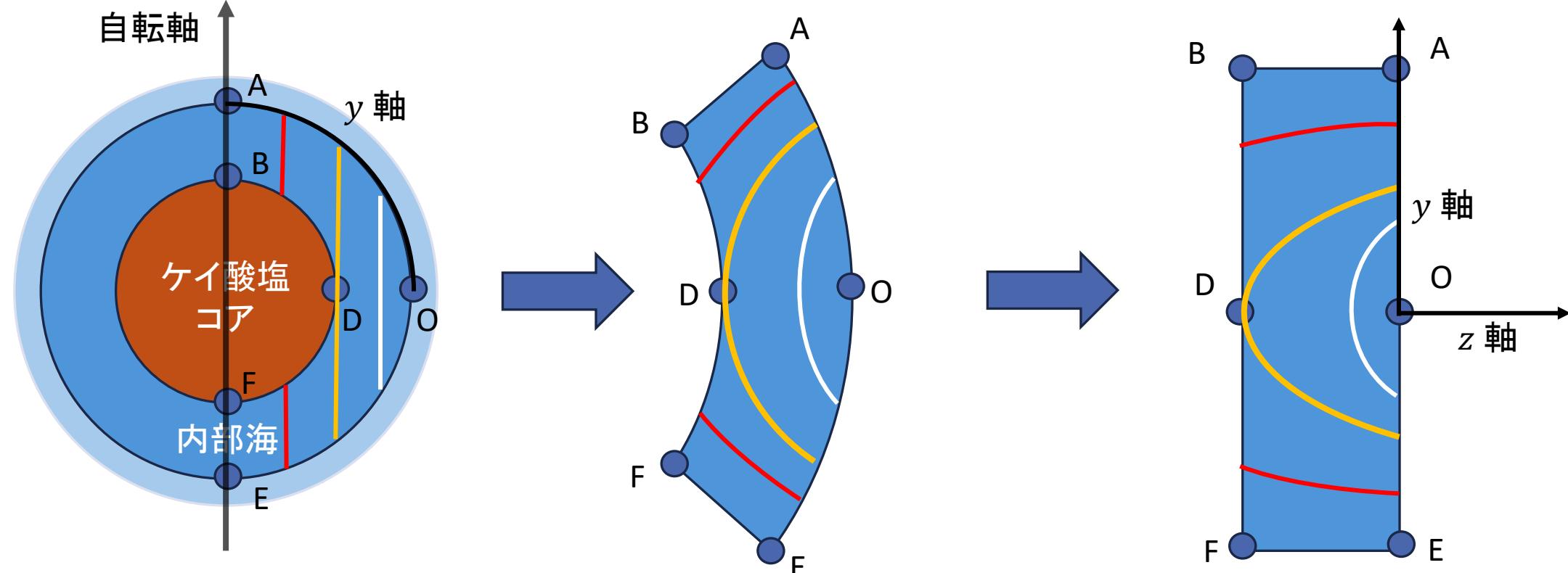


図: 球殻ジオメトリからデカルト座標系への近似. 黄・赤・白の線は、自転軸に平行な線.

先行研究の紹介

Bire et al. (2022) の研究

●接平面での方程式

➤成分ごとの運動方程式(既出)

$$\begin{cases} \frac{Du}{Dt} + \tilde{f}w - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + F^x \\ \frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} + F^y \\ \frac{Dw}{Dt} - \tilde{f}u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + F^z - \frac{\rho'}{\rho_0} g \end{cases}$$

➤ $\rho' = -\rho_0 \alpha (T - T_0)$ (線形状態方程式より)

➤連続の式(既出)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

➤温度移流の式

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa \nabla^2 T - \delta_{\text{top}} \frac{T - T_0}{\tau} + \frac{\delta_{\text{bottom}}}{\Delta z} \frac{Q}{\rho C_p}$$

冷却 加熱

$$\delta_{\text{top}} = \begin{cases} 1(z = 0[\text{km}]) \\ 0(z \neq 0[\text{km}]) \end{cases}$$

$$\delta_{\text{bottom}} = \begin{cases} 1(z = -60[\text{km}]) \\ 0(z \neq -60[\text{km}]) \end{cases}$$

κ : 熱拡散率

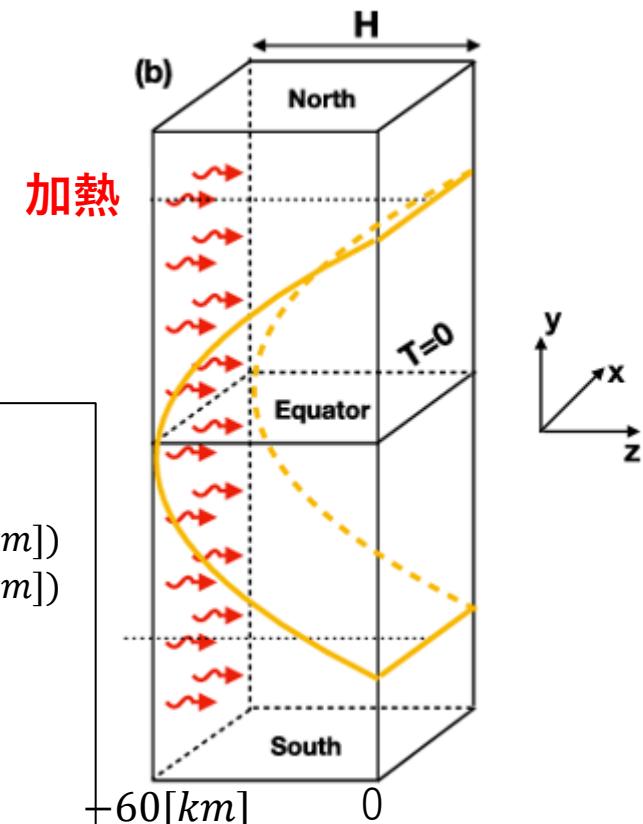
T_0 : 参照温度(0°C)

τ : 緩和時間

Q : 底面からの加熱

Δz : 鉛直格子間隔

C_p : 物質の比熱容量



先行研究の紹介

Bire et al. (2022) の研究

- 緯度 ϕ における f と \tilde{f} を表す式

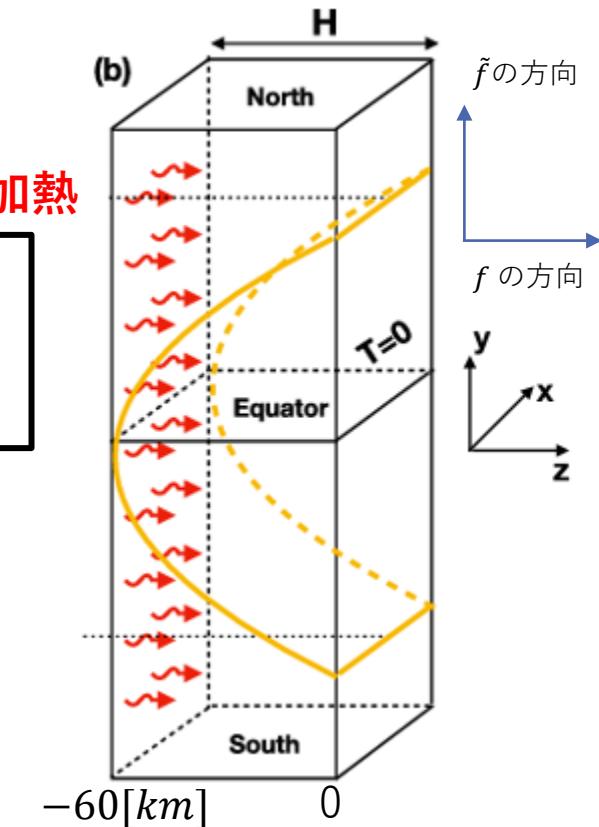
$$\begin{cases} \tilde{f} = 2\Omega \cos\left(\frac{y}{R}\right) \\ f = 2\Omega \sin\left(\frac{y}{R}\right) \end{cases}$$

近似していない形

R : 衛星中心から内部海の外縁までの距離

- f は, Ω (=黄色の線の方向) と平行.

Oceananigans.jl (本研究で使用するライブラリ) に, 標準機能としては備わっていない



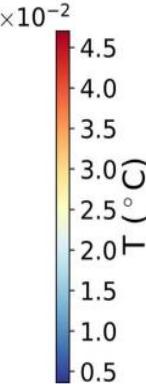
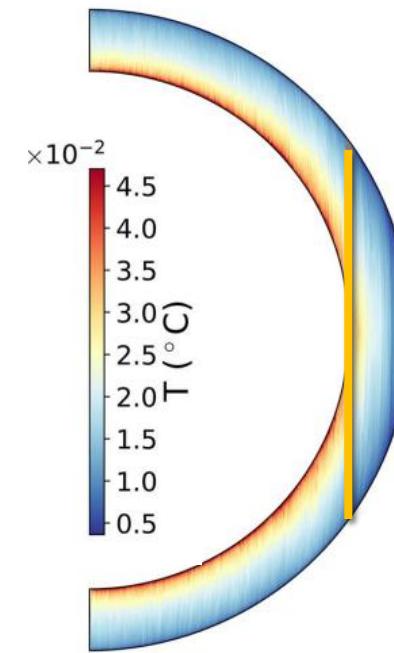
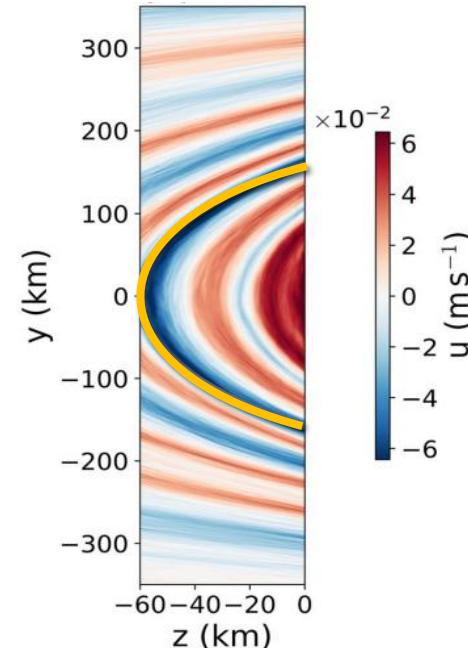
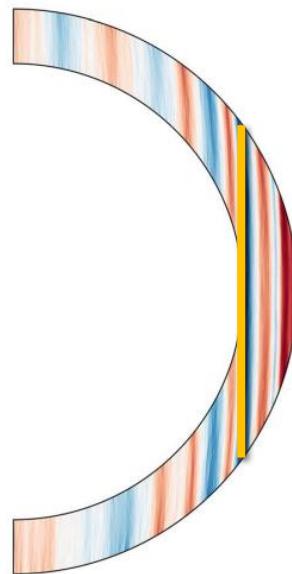
先行研究の紹介

Bire et al. (2022) の実験設定

項目	パラメータ	Bire et al., 2022
計算領域 (x)	L_x	$0 \text{ km} \leq x \leq 50 \text{ km}$
計算領域 (y)	L_y	$-395 \text{ km} \leq y \leq 395 \text{ km}$
計算領域 (z)	L_z	$-60 \text{ km} \leq z \leq 0 \text{ km}$
格子間隔	$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	0.3 km
粘性係数・熱拡散係数	ν, κ	0.02 m^2/s
時間刻み	Δt	?
自転角速度	Ω	$7.3 \times 10^{-5}/\text{s}$
衛星半径	R	251km
重力加速度	g	0.1 m/s^2
底面加熱	Q	10 W/m^2
初期温度	T	$T = 0$ (擾乱あり)
初期流速	u	$u = \mathbf{0}$
温度の緩和時間	τ	$\tau = 2 \times 10^6/\text{s}$

先行研究の紹介

- $x = 25[\text{km}]$ の子午面断面



実験設定

- プログラムは、先行研究と同じく、Julia のパッケージ Oceananigans.jl を用いて作成した。

```
# 3. モデルの定義
model = NonhydrostaticModel();
grid,
# coriolis = NonTraditionalBetaPlane(rotation_rate = Ω, latitude = θ, radius = R),
coriolis = nothing,
timestepper = :RungeKutta3,
advection = WENO(),
closure = closure,
buoyancy = buoyancy,
forcing = (T = T_forcing, u=u_forcing, v=v_forcing, w=w_forcing),
boundary_conditions = (u=no_slip_field_bcs, v=no_slip_field_bcs, w=no_slip_field_bcs, T=T_bcs),
tracers = (:T,)
)

# 初期条件設定
T_0(x, y, z) = 0.001*rand()
set!(model, u=0, v=0, w=0, T=T_0)
simulation = Simulation(model; Δt=100, stop_time=1e9)
conjure_time_step_wizard!(simulation, cfl=0.2, IterationInterval(1000))
```

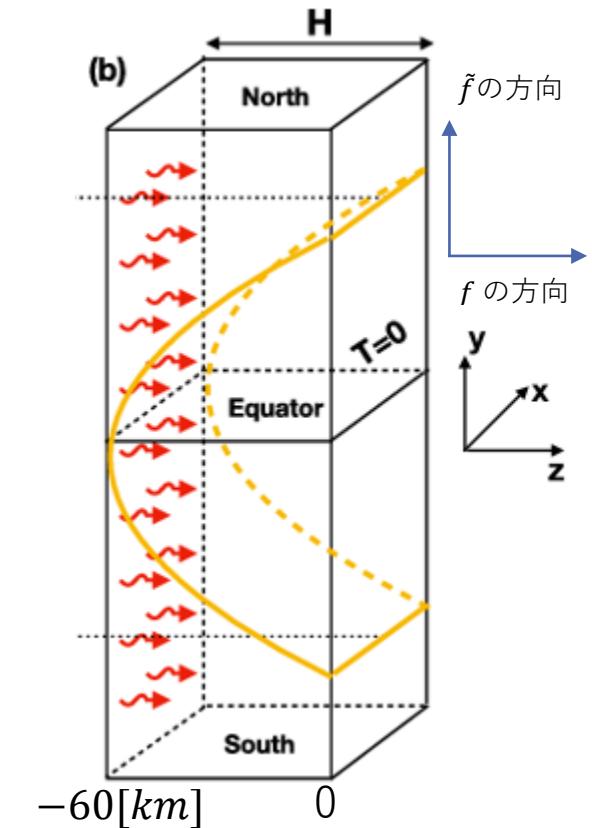
写真: プログラムの一部分。

実験設定

本研究 (Oceananigans.jl の標準機能を用いる)

$$\begin{cases} \tilde{f} = 2\Omega \left(1 - \frac{z}{R}\right) \\ f = 2\Omega \frac{y}{R} \end{cases} \quad \text{近似した形}$$

- Oceananigans.jl の標準機能である, 基準緯度 ϕ_0 付近の f を表す式(Dellar, 2011)を用いた.
- 基準緯度からずれると, 不正確な表現.
- f は, Ω (=黄色の線の方向) と平行ではない.



※ $f = (0, \tilde{f}, f)$.

※基準緯度 $\phi_0 = 0^\circ$ としている.

実験設定

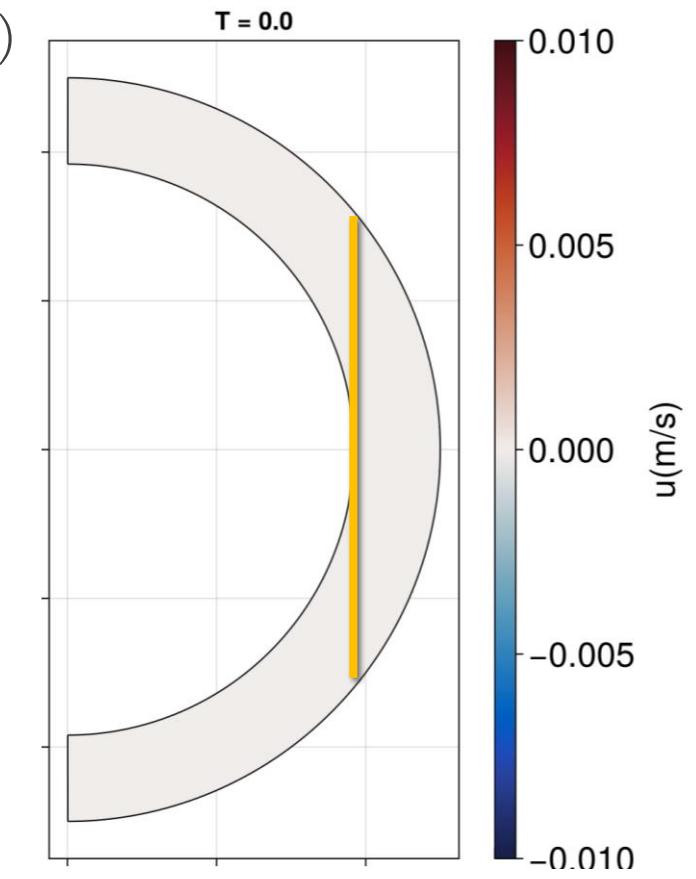
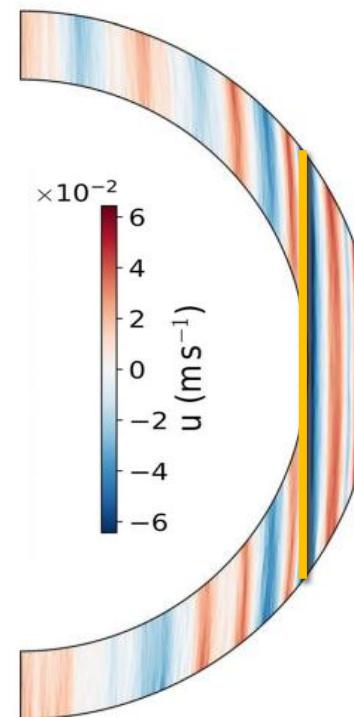
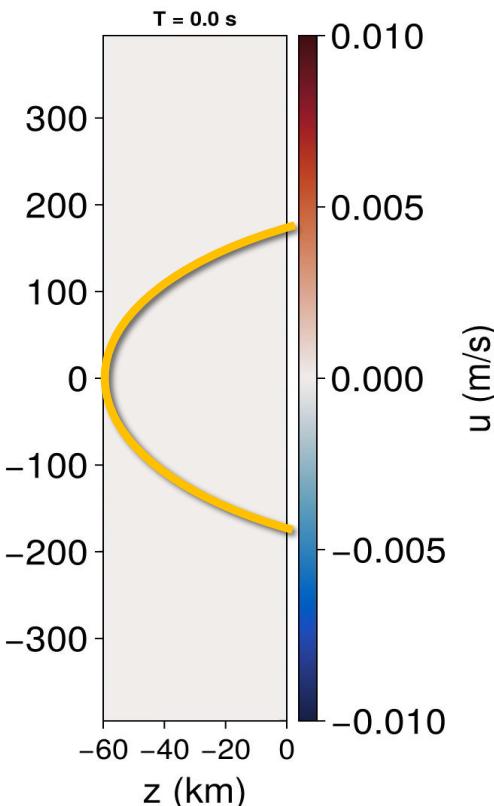
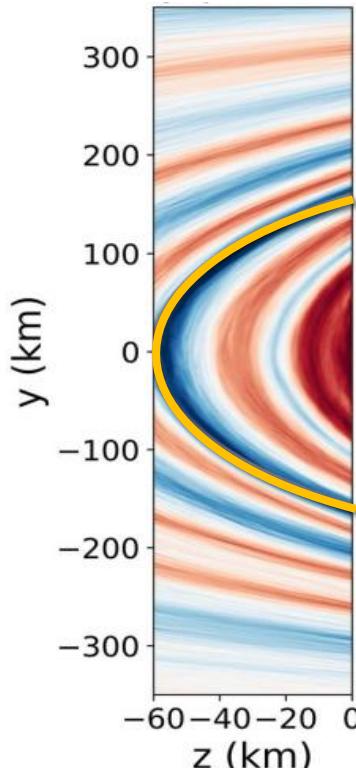
項目	パラメータ	本研究	Bire et al. (2022)
異なる設定			
格子間隔	$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	2 km	0.3 km
粘性係数・熱拡散係数	ν, κ	0.89 m ² /s	0.02 m ² /s
時間刻み	Δt	100 s	?

高解像度

- 本研究では、計算資源不足により、Bire らの研究よりも粗い解像度・大きな動粘性係数で計算を行う。
 - これにより、対流が駆動されるまでの時間が遅くなる可能性がある。

実験結果

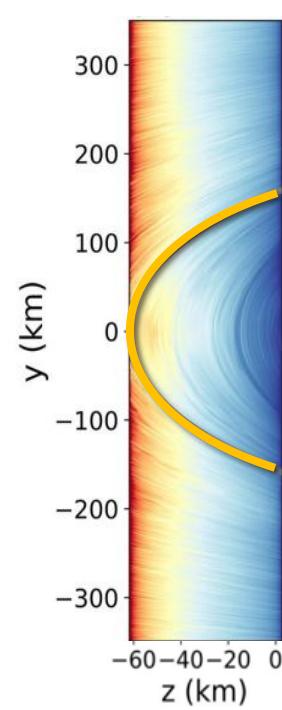
- $x = 25$ [km] の子午面断面の東西風分布 (約 1000 地球日まで)



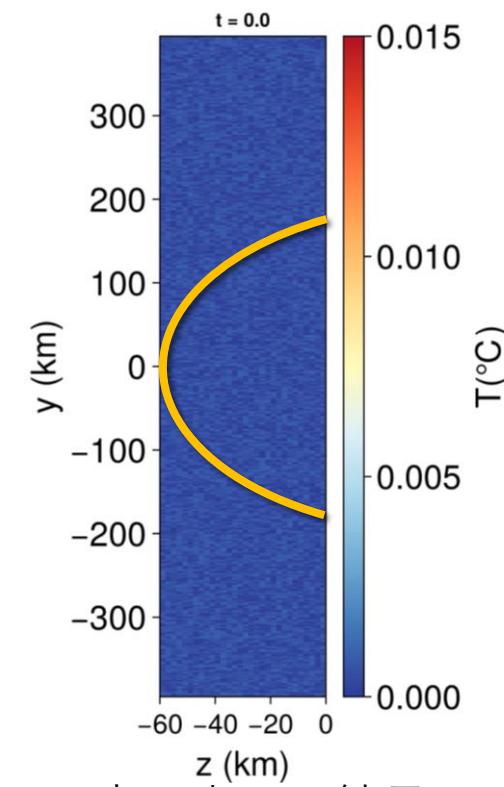
※先行研究と本研究では、カラーバーの値が異なることに注意

実験結果

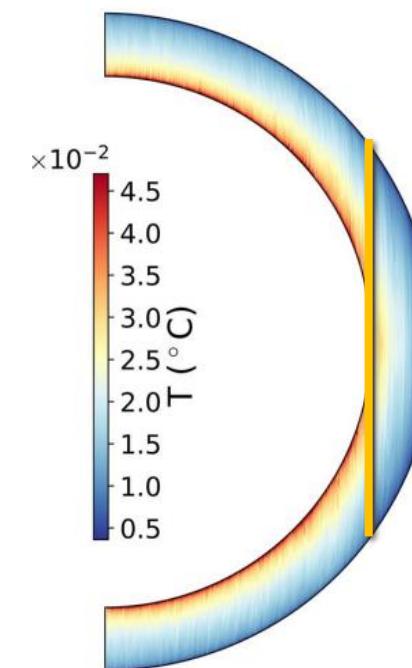
- $x = 25\text{km}$ 子午面断面の温度分布 (約 1000 地球日まで)



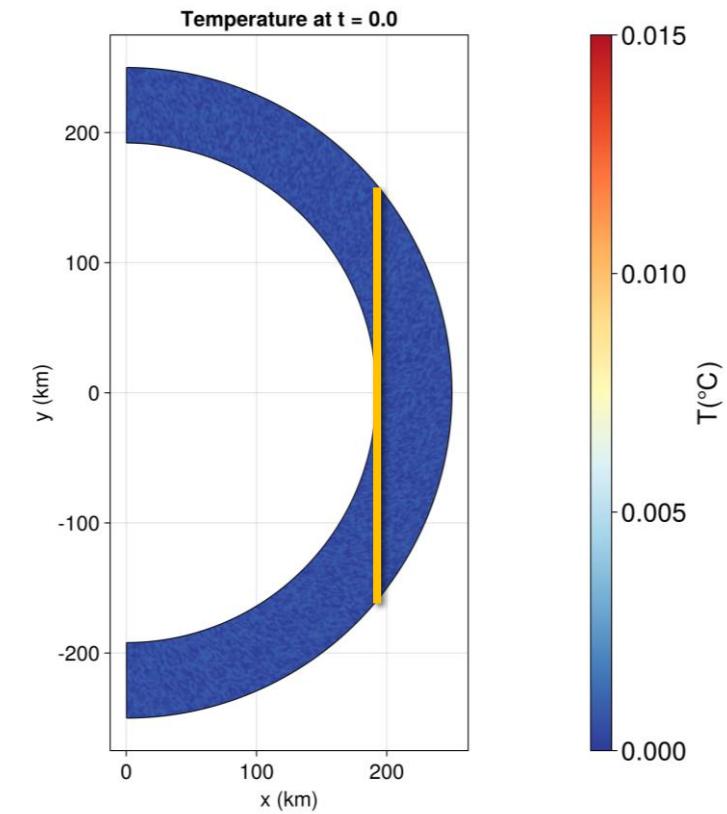
先行研究(Bire et al., 2022)



本研究での結果



先行研究(Bire et al., 2022)



本研究での結果

※先行研究と本研究では、カラーバーの値が異なることに注意

図: 氷衛星内部海における、子午面断面の温度分布 u (m/s)

考察

※先行研究と本研究では、カラーバーの値が異なることに注意

● 東西風分布

- ▶ 非伝統的コリオリ項 \tilde{f} の効果で、低緯度でテイラー柱が出現していると考えられる。
- ▶ 高緯度のテイラー柱は流速が小さく、自転角速度ベクトルの向きからは傾いている。

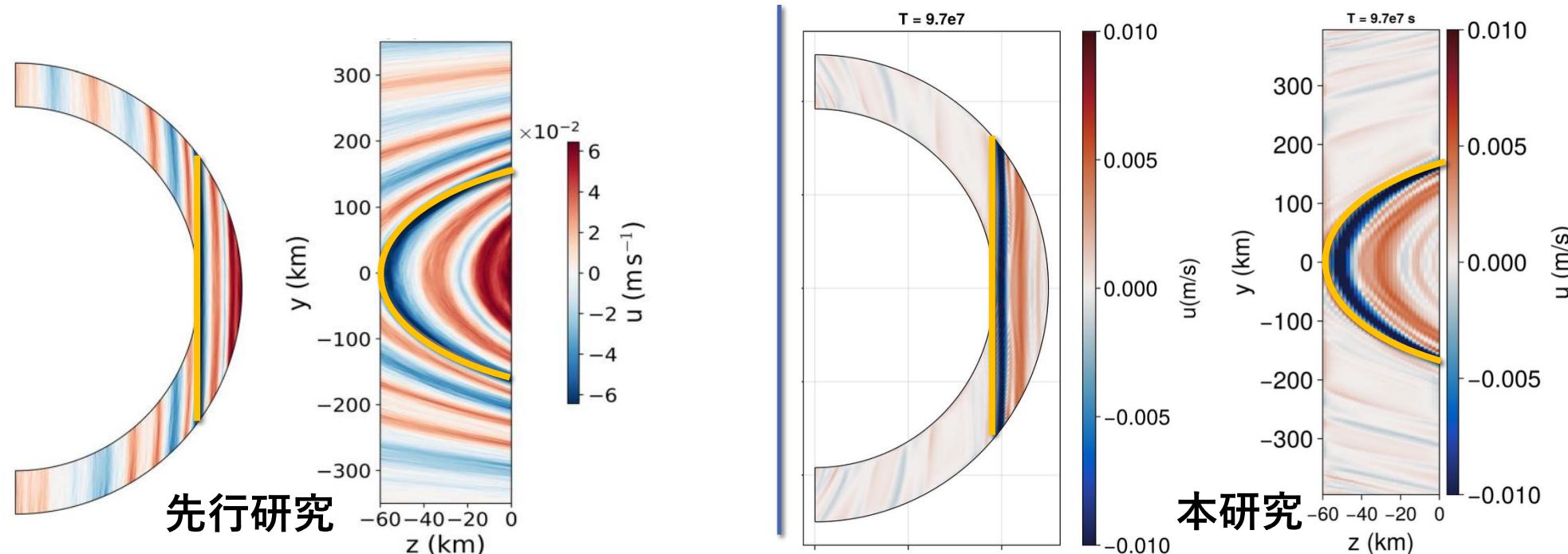


図: 氷衛星内部海における、子午面断面の東西風分布 u (m/s)

考察

● 温度分布

- ▶ 先行研究と比べ、領域全体の温度の値が低くなった。
- ▶ 底面($z = -60 [km]$)付近の水が徐々に暖められ、鉛直上向きに熱が伝わる様子が見えた。

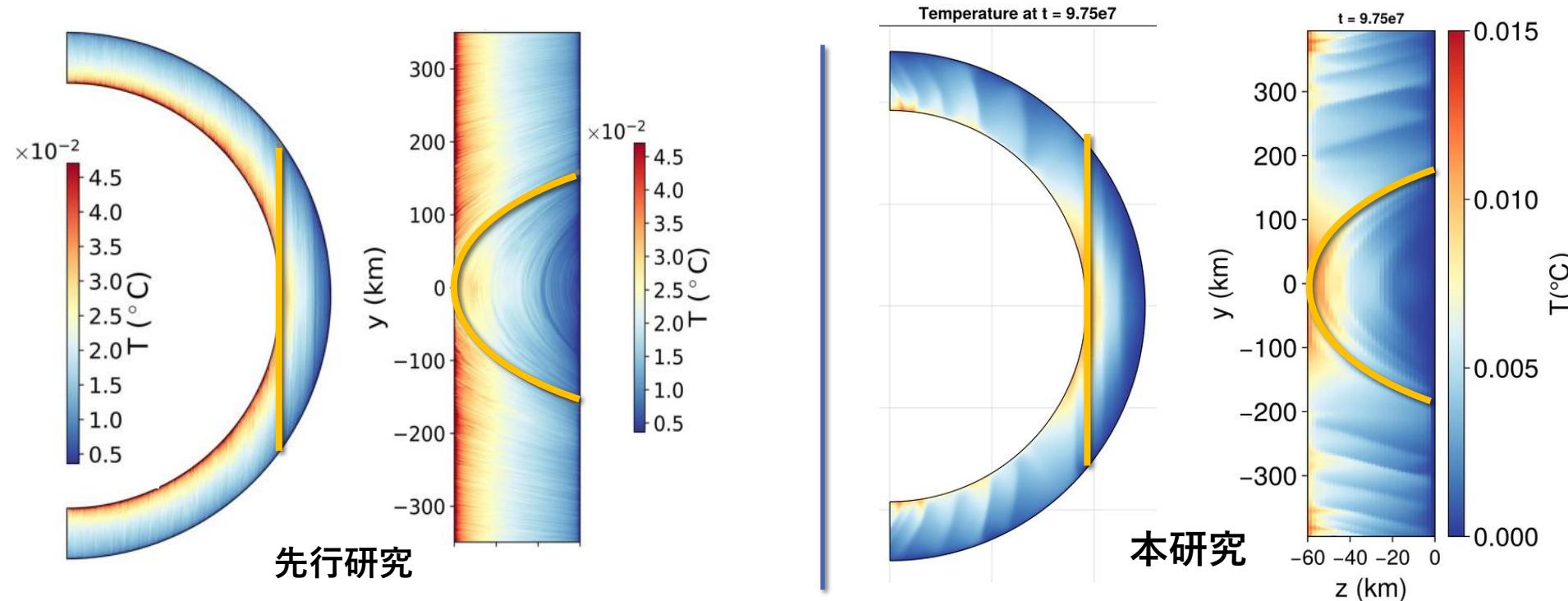


図: 氷衛星内部海における、子午面断面の温度分布 T (°C)

参考文献

- **Bire, S., Kang, W., Marshall, J., & Soderlund, K. M. (2022).** Exploring Ocean Circulation on Icy Moons Heated From Below. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 127(4), e2021JE007020.
- **Busse, F. H. (1970).** Thermal instabilities in rapidly rotating systems. *Journal of Fluid Mechanics*, 44(3), 441-460.
- **Soderlund, K. M. (2024).** The Physical Oceanography of Ice-Covered Moons. *Annual Review of Marine Science*, 16, 171-196.
- **Vallis, G. K. (2017).** *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- **国立天文台 暦計算室.** 暦Wiki「座標系/地心直交座標系」.
<https://eco.mtk.nao.ac.jp/koyomi/wiki/C4ACBcae2fc4acbcacbe0bba4.html> (参照日: 2026年1月20日).
- 株式会社キャットテックラボ. “【科学技術計算講座ミニ】流体解析の境界条件”. 科学技術計算ツール. 2021-07-21.
<https://cattech-lab.com/science-tools/lecture-mini-boundary-condition/>.
- 北畠尚子. 総觀気象学 理論編. 東京堂出版, 2021, 312p

付録 – スケール解析

★P11の推定値の導出

●鉛直スケール H

➤重力場測定と歳差運動から、およそ26~31kmであると結論づけられている (Čadek et al., 2016)

●水平速度 U

➤多くの先行研究 (例 : Tyler, 2011 や Soderlund et al., 2014) で示されている値を用いている。

●鉛直速度 W

➤Choblet et al. (2017) の鉛直プルームの値を引用した。

●圧力変動 p'

➤ y 成分に関して地衡風平衡を仮定した。

$$fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} \rightarrow fU = -\frac{1}{\rho_0} \frac{p'}{L} \rightarrow p' \sim 10^2 \text{ (kg m}^{-1}\text{s}^{-2}\text{)}$$

●密度変動 ρ'

➤温度移流の式のスケール解析より、 $\Delta T = 10^{-2}$ (K)

➤密度変動 $\rho' \sim \alpha \rho_{ref} \Delta T \sim 10^{-3}$ (kg m⁻³)

付録 – 粘性係数

★なぜ粘性係数を 0.89 に設定したのか

→結論：格子スケールでの現象の緩和時間を先行研究と合わせるため

運動方程式($\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \dots + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$)をスケール解析すると、

$\frac{1}{\tau} = \nu \frac{1}{(\Delta x)^2}$ であり、ゆえに、現象の緩和時間 $\tau = \frac{(\Delta x)^2}{\nu}$ と表される。

先行研究と本研究で、見たい現象は同一であるため、緩和時間を合わせる。すると、下の表のように $\nu = 0.89$ が求められる。

	粘性係数 ν (m ² /s)	格子間隔 Δx (m)	緩和時間 τ (s)
先行研究	0.02	300	4.5×10^6
本研究	0.89	2000	4.5×10^6

表: 緩和時間を一定にした場合の、粘性係数の値

付録 – 数値計算

★使用した計算方法は (Bire et al., 2022)と同じである。

- 時間積分スキーム
 - 3次ルンゲクッタ法
- 移流スキーム
 - 5次精度の WENO 法