

氷衛星内部海におけるテイラー柱の計算

中澤 恵人

神戸大学 理学部 惑星学科
流体地球物理学教育研究分野

2026/03/25

要旨

木星以遠の氷衛星内部には液体の H_2O から成る「内部海」が存在すると考えられている。本論文では、ケイ酸塩コアからの加熱を唯一の熱源と仮定し、テイラー柱と呼ばれる、回転する球殻流体における柱状の速度場構造の計算を行った。モデルとして、非伝統的コリオリ項を含む非静水圧モデルを構築した。計算には Julia 言語ベースの `Oceananigans.jl` を用い、先行研究である Bire et al. (2022) の計算ドメインおよび物理パラメータを模倣した。結果、低緯度では流速の大きいテイラー柱が出現したものの、高緯度では自転軸から傾いた向きに流速の小さいテイラー柱が形成された。これは、全球での正確なコリオリの力ではなく赤道付近のみで正確なコリオリの力となる関数を適用した影響であると考えられる。また、粘性係数依存性を調べたところ、粘性を小さくした場合は流速の緯度依存性が縮小し、粘性を大きくした場合はテイラー柱が消失する結果が得られた。

目次

第1章	はじめに	1
1.1	氷衛星の概要	1
1.2	研究の目的	2
1.3	実験方針	2
1.4	本論文の構成	3
第2章	支配方程式系と物理的近似	4
2.1	支配方程式系	4
2.2	座標系の導入	5
2.3	伝統的近似	6
2.4	β 平面近似	9
2.5	テイラー柱	10
第3章	モデルの構築と方程式	12
3.1	モデルの説明	12
3.2	実験で使用する数値モデル	14
3.3	本研究で用いる方程式	14

3.4	実験設定	15
第4章	テイラー柱の計算 (実験 1)	16
4.1	実験 1 の設定	16
4.2	計算の結果	18
4.3	考察	22
4.3.1	高緯度におけるテイラー柱の傾き	22
4.3.2	粗い格子点間隔	23
第5章	動粘性係数依存性の評価 (実験 2)	24
5.1	実験 2 の設定	24
5.2	実験 2 の結果	24
5.2.1	動粘性係数を小さくした場合 ($\nu = 0.02$ [m ² /s])	24
5.2.2	動粘性係数を大きくした場合 ($\nu = 20$ [m ² /s])	24
5.3	実験 2 の考察	27
5.3.1	動粘性係数を小さくした場合 ($\nu = 0.02$ [m ² /s])	27
5.3.2	動粘性係数を大きくした場合 ($\nu = 20$ [m ² /s])	27
第6章	結論	28
	謝辞	35
	参考文献	36

第1章 はじめに

1.1 氷衛星の概要

我々の住む太陽系は、太陽と、その周りを回る惑星で構成されている。惑星の近傍には、その惑星の周りを公転する衛星が存在する。特に木星や土星などの巨大ガス惑星の周囲には、氷衛星 (icy satellites / icy moons) と呼ばれる衛星が存在する。氷衛星とは、表面を氷の殻で覆われた衛星である。代表例は、木星の衛星であるエウロパやガニメデ、土星の衛星であるエンセラダスなどである。氷衛星の観測は、ボイジャー探査機やカッシーニ探査機によって行われており、特にエンセラダスでは極付近から H_2O を含むプルームが確認されている。観測事実に基づき、氷衛星は、内部に氷や液体の水および岩石核を持つと理論的に推定されている。氷衛星には、内部海と呼ばれる液体の H_2O が主成分である層を持つものも存在し、内部海の層の下には、高温で固体のケイ酸塩コアがあると推定されている (図 1.1)。液体の H_2O と固体のケイ酸塩コアを持つという特徴は、地球のそれと一致しており、生命が存在する可能性が高いのではないかと考えられている。氷衛星の内部海には海洋循環が存在し、それを駆動する要因は主に以下の 4 つであると想定される; ケイ酸塩コアからの加熱、 H_2O の凍結と融解によって生じる塩分フラックス^{*1}、水の氷点圧力が圧力に依存することによる氷殻直下の温度変化、そして潮汐加熱である (Bire et al. , 2022).

^{*1}海氷が生成される際、塩分は氷の結晶構造に取り込まれず、周囲の水に放出される。結果として周囲の水は相対的に塩分を多く含むため重くなり、沈んで対流を駆動する。

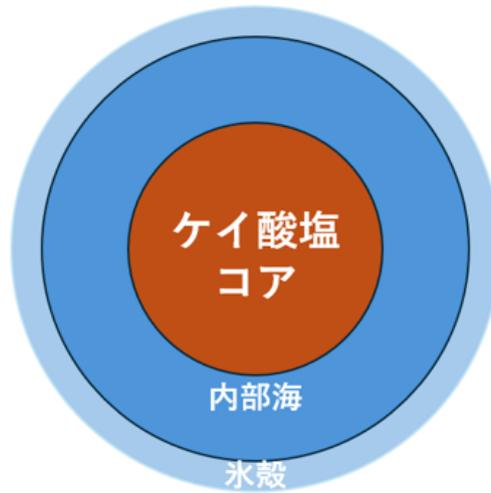


図 1.1: 内部海を持つ氷衛星の内部構造の例. 中心から外側に向かって順に, ケイ酸塩コア, 内部海, 氷殻である.

1.2 研究の目的

本研究の目的は, 氷衛星の内部海において, ケイ酸塩コアからの加熱がどのような海洋循環を形成しているのかを明らかにすることである.

1.3 実験方針

本研究では, 氷衛星の内部海に底からの加熱のみが存在すると仮定し, その加熱で生じる対流による熱輸送と, 氷衛星内部海における東西向きの流れの計算を行う. 先行研究として, (Bire et al. , 2022) を参考にしている.

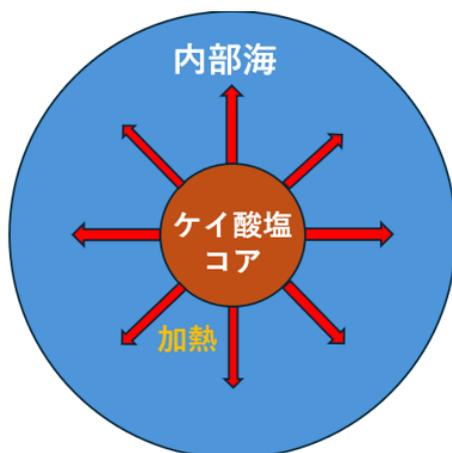


図 1.2: 本研究で仮定する加熱要因の図.

1.4 本論文の構成

本論文の構成は以下のとおりである。第 2 章では、氷衛星内部海の運動の概要を記述する。第 3 章では、本研究で用いるモデルについて述べる。第 4 章では、テイラー柱計算の実験設定と結果を示す。第 5 章では、粘性係数を変えた実験の結果を示す。第 6 章では、まとめを行う。

第2章 支配方程式系と物理的近似

2.1 支配方程式系

海洋力学を支配する方程式は、連続の式 (2.0a)、運動方程式 (2.0b)、塩分保存の式 (2.0c)、温位の式 (2.0d)、状態方程式 (2.0e)、ポアソン方程式 (2.0f)、誘導方程式 (2.0g)、そして磁気単極子が存在しない条件 (2.0h) である (Ingersoll 2005). ここで、非弾性近似 (運動方程式から音波を除去する近似) を用いて密度の関数を簡略化し、線形状態方程式を仮定している.

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0, \quad (2.0a)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g} - \nabla \phi' + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\mu_0 \rho_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}, \quad (2.0b)$$

$$\frac{DS'}{Dt} = Q_1, \quad (2.0c)$$

$$\frac{D\theta'}{Dt} = \frac{\theta_0}{T_0} \frac{Q_2}{c_p}, \quad (2.0d)$$

$$\rho' = \rho_0 \left(-\alpha \theta' + \beta S' + \frac{1}{\rho_0 c_s^2} p' \right), \quad (2.0e)$$

$$\nabla^2 \phi' = 4\pi \mathcal{G} \rho', \quad (2.0f)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla \times \mathbf{B} \right), \quad (2.0g)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.0h)$$

密度 ρ , 圧力 p , 重力ポテンシャル ϕ , 塩分 S , 温位 θ は、既知の基準場 (断熱的・静水圧的, 添字 0 で表す) と摂動 (プライムで表す) に分けて記述している. \mathbf{u} は流体の速度場, \mathbf{g} は重力加速度, $\boldsymbol{\Omega}$ は衛星の自転角速度ベクトル, \mathbf{B} は磁束密度ベクトル, $\frac{D}{Dt}$ は物質微分, \mathbf{r} は位置ベクトル, ν は動粘性係数である. また, μ_0 は真空の透磁率, σ は電気伝導率, c_p は定圧比熱, \mathcal{G} は万有引力定数, c_s は音速, α は熱膨張係数, β は塩分収縮係数, T_0 は基準温度を表す. また, Q_1 および Q_2 はそれぞれ塩分と熱の出入りを表す.

また, 式 (2.0b) において, $\phi' = 0$, $\mathbf{B} = 0$, $\frac{d\Omega}{dt} = 0$, $S = 0$, プシネスク近似 (浮力以外の項では, 密度一定と近似) を適用すると, 連続の式と運動方程式は, 以下のように変形される.

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.2)$$

2.2 座標系の導入

座標系を導入し, 運動方程式の変形を行う. 図 2.1 のようにデカルト座標系を考える. (x, y, z) 軸をそれぞれ東, 北, 鉛直上向きを正として, 回転角速度を Ω , 緯度を ϕ とする. このとき, 緯度 ϕ を中心とした局所接平面のデカルト座標系では, 衛星の回転ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ は次のように表記される.

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

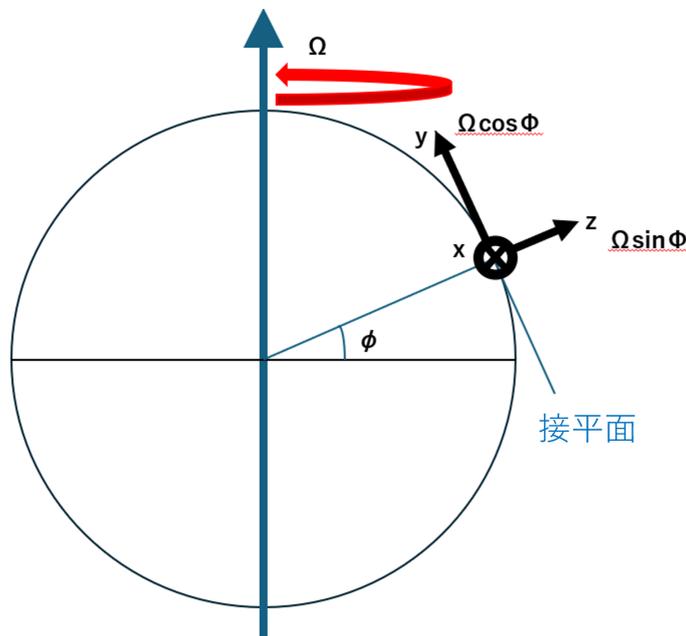


図 2.1: 衛星の自転ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ を, 緯度 ϕ におけるデカルト座標系の成分に分解した図.

また, 速度 $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ との外積を計算すると,

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = \Omega \begin{pmatrix} w \cos \phi - v \sin \phi \\ u \sin \phi \\ -u \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

式 (2.2) に式 (2.4) を代入して各成分ごとに書き下す. $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ であることに注意して, $b = -\frac{\rho'}{\rho_0}g$ とおくと,

$$\frac{Du}{Dt} + \tilde{f}w - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + F^x \quad (2.5a)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} + F^y \quad (2.5b)$$

$$\frac{Dw}{Dt} - \tilde{f}u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + F^z + b \quad (2.5c)$$

となる. なお,

$$(F^x, F^y, F^z) = \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.6)$$

であり, 粘性項である. 動粘性係数 ν の物理的意味は, 流体の隣り合った部分が異なる速度を持つとき, この速度差をなくすように接線応力が現れる性質である. また, $f = 2\Omega \sin \phi$, $\tilde{f} = 2\Omega \cos \phi$ であり, 特に f はコリオリパラメータと呼ばれる.

2.3 伝統的近似

伝統的近似は, 運動方程式の水平成分では鉛直流速 w がかった項, 鉛直成分ではコリオリ項をそれぞれ無視する近似である. 伝統的近似は, 地球流体力学でよく使われる近似である. 伝統的近似の適用条件は, 現象の水平スケール L が, 現象の鉛直スケール H よりも十分に大きい ($H \ll L$) 場合である.

地球大気を例にあげ, 運動方程式における各項の大小関係 (スケール解析) を考える. 地球大気 (中緯度) における総観規模のスケールを下表 2.1 に示す.

運動方程式をこれらの値でスケール解析し, 各項の大きさを比較すると, 以下のようになる.

表 2.1: 地球大気における代表的なスケール (中緯度)

変数	記号	値 (オーダー)
水平スケール	L [m]	10^6
鉛直スケール	H [m]	10^4
水平風速	U [m/s]	10
鉛直速度	W [m/s]	10^{-2}
時間スケール	T [s]	10^5
コリオリパラメータ	f, \tilde{f} [s^{-1}]	10^{-4}
気圧変動	p' [$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$]	10^3
密度変動	ρ' [$kg\ m^{-3}$]	10^{-2}
基準密度	ρ_0 [$kg\ m^{-3}$]	1
重力加速度	g [m/s^2]	10

$$\underbrace{\frac{Du}{Dt}}_{10^{-4}} + \underbrace{\tilde{f}w}_{10^{-6}} - \underbrace{fv}_{10^{-3}} = -\underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x}}_{10^{-3}} + F^x \quad (2.7a)$$

$$\underbrace{\frac{Dv}{Dt}}_{10^{-4}} + \underbrace{fu}_{10^{-3}} = -\underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y}}_{10^{-3}} + F^y \quad (2.7b)$$

$$\underbrace{\frac{Dw}{Dt}}_{10^{-7}} - \underbrace{\tilde{f}u}_{10^{-3}} = -\underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z}}_{10^{-1}} + F^z - \underbrace{\frac{\rho'}{\rho_0} g}_{10^{-1}} \quad (2.7c)$$

(2.7) 式においては、右辺の圧力傾度力の項や浮力項に比べ $\tilde{f}u$ が十分小さく、その大小関係はほとんどの ϕ で成り立つ。伝統的近似を適用する場合に無視される、式 (2.7a) の左辺第 2 項と式 (2.7c) の左辺第 2 項は、合わせて非伝統的コリオリ項 (non-traditional coriolis terms) と呼ばれる。

次に本研究の対象である氷衛星の内部海において、運動方程式の各項の重要性を評価するためにスケール解析を行う。本研究では、最も簡潔な階層構造 (内側から ケイ酸塩コア, 内部海, 氷層) を持つと考えられる、エンセラダスを想定する。地球大気 (中緯度) とエンセラダス内部海におけるスケールを比較したものを下表に示す。

表 2.2: 代表的なスケールの比較 (中緯度)

変数	記号	地球大気	エンセラダスの内部海
水平スケール	L [m]	10^6	10^5
鉛直スケール	H [m]	10^4	10^{4*}
水平風速・流速	U [m/s]	10	10^{-2*}
鉛直速度	W [m/s]	10^{-1}	10^{-2*}
時間スケール	$T = L/U$ [s]	10^5	$10^{7\dagger}$
コリオリパラメータ	f, \tilde{f} [s^{-1}]	10^{-4}	10^{-4}
気圧・圧力変動	p' [$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$]	10^3	$10^{2\dagger}$
密度変動	ρ' [$kg\ m^{-3}$]	10^{-2}	$10^{-3\dagger}$
基準密度	ρ_0 [$kg\ m^{-3}$]	1	$10^{3\dagger}$
重力加速度	g [m/s^2]	10	10^{-1}

無印：観測値, *：先行研究の理論値, †：理論値から計算値 (導出は付録参照)

上記の氷衛星におけるスケールを用いて運動方程式を評価すると、各項のオーダーは以下の通りとなる。なお、粘性項は他の項に比べてスケールが小さいため、無視している。

$$\underbrace{\frac{Du}{Dt}}_{10^{-9}} + \underbrace{\tilde{f}w}_{10^{-6}} - \underbrace{fv}_{10^{-6}} = -\underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x}}_{10^{-6}} + F^x \quad (2.8a)$$

$$\underbrace{\frac{Dv}{Dt}}_{10^{-9}} + \underbrace{fu}_{10^{-6}} = -\underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y}}_{10^{-6}} + F^y \quad (2.8b)$$

$$\underbrace{\frac{Dw}{Dt}}_{10^{-10}} - \underbrace{\tilde{f}u}_{10^{-6}} = -\underbrace{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z}}_{10^{-5}} + F^z - \underbrace{\frac{\rho'}{\rho_0} g}_{10^{-7}} \quad (2.8c)$$

注目すべきは、式 (2.8c) において $\tilde{f}u$ (10^{-6}) の項が浮力項 (右辺第 3 項) よりも大きいことである。特に、コリオリ力が浮力よりも大きい場合、左辺のコリオリ力が右辺の圧力傾度力とつり合う。よって本研究では、伝統的近似を適用せず、非伝統的コリオリ項を保持した方程式で計算する。

2.4 β 平面近似

β 平面近似とは, コリオリパラメータ f が緯度によって変化することを, 局所的な平面上で一次関数として近似する方法である. $f = 2\Omega$ と定義すると, 式 (2.3) と f, \tilde{f} の関係式は,

$$\mathbf{f} = 2\Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\Omega \cos \phi \\ 2\Omega \sin \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{f} \\ f \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

と表される. ここで, ある緯度 ϕ_0 から $\Delta\phi$ だけ離れた近傍を考える. 図 2.1 のように緯度 ϕ における接平面で直線直交座標系を定めると,

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 + \Delta\phi \\ &\simeq \phi_0 + \frac{y}{R} \end{aligned} \quad (2.10)$$

なので,

$$\begin{aligned} \sin \phi &\simeq \sin\left(\phi_0 + \frac{y}{R}\right) \\ \cos \phi &\simeq \cos\left(\phi_0 + \frac{y}{R}\right) \end{aligned}$$

と表される. 1 次のテイラー展開を行うと,

$$\begin{aligned} \sin\left(\phi_0 + \frac{y}{R}\right) &\simeq \sin \phi_0 + \cos \phi_0 \cdot \frac{y}{R} \\ \cos\left(\phi_0 + \frac{y}{R}\right) &\simeq \cos \phi_0 - \sin \phi_0 \cdot \frac{y}{R} \end{aligned}$$

である. よって, 式 (2.9) は,

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{f} \\ f \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 2\Omega \cos \phi_0 - 2\frac{y}{R}\Omega \sin \phi_0 \\ 2\Omega \sin \phi_0 + 2\frac{y}{R}\Omega \cos \phi_0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

と書き直すことが出来る. ここで, $f_0 = 2\Omega \sin \phi_0$, $\tilde{f}_0 = 2\Omega \cos \phi_0$, $\beta = \frac{2\Omega \cos \phi_0}{R}$, $\gamma' = \frac{2\Omega \sin \phi_0}{R}$ とおくと,

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{f}_0 - \gamma'y \\ f_0 + \beta y \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

と変形される. 式の形を見ると, 接平面上におけるコリオリパラメータ f に緯度依存性が追加されていることが分かる. なお伝統的近似を適用して β 平面近似を行う場合は, 式 (2.8) が近似され, \tilde{f} の項が消えてしまうため, 自転の角速度ベクトルの水平成分を無視することになる. すなわち, $\tilde{f}_0 - \gamma'y$ の項を 0 に置き換えた形で,

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_0 + \beta y \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

である.

2.5 テイラー柱

式 (2.2) において, コリオリ力と圧力傾度力が釣り合っている場合を考える.

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p \quad (2.14)$$

に対して, 両辺の回転 ($\nabla \times$) を取ると,

$$\nabla \times (2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) = \nabla \times \left(-\frac{1}{\rho_0} \nabla p \right) \quad (2.15)$$

となる. スカラー場 ϕ に関して $\nabla \times \nabla \phi = 0$ が成り立つため, 右辺は 0 となる.

ここで, 以下のベクトル公式

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

を用い, 非圧縮の条件 ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) および自転角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ が場所に依らない定数であることを考慮すると, 次式が導かれる.

$$(2\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

回転軸に平行な z 軸をおくと, $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ と表されるため,

$$\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

と変形できる. これは, 速度の各成分について回転軸方向の微分が 0 になることを意味し, 自転角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ と速度勾配が必ず垂直であることを示す. つまり, 運動が $\boldsymbol{\Omega}$ 方向に一様である. 特に高速回転する球殻流体においては, この定理に従って回転軸に平行な円筒状の流体構造であるテイラー柱 (Taylor column) が形成される. 本研究では自転する氷衛星を考え, 内部海においてテイラー柱の出現を確認する.

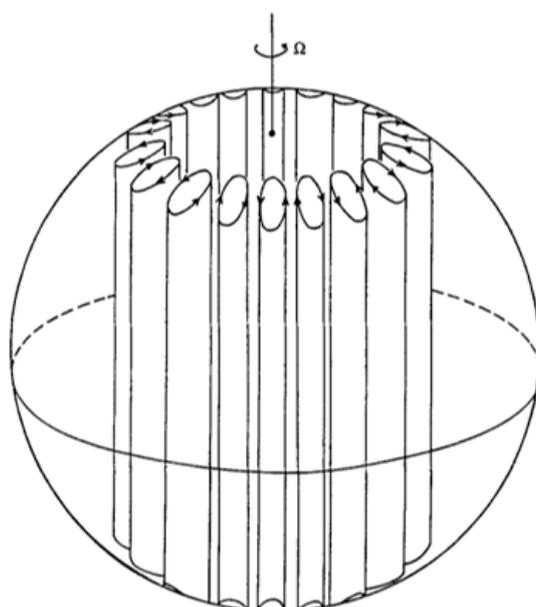


図 2.2: 高速回転する球殻流体におけるテイラー柱の様子. Busse(1970) より引用.

第3章 モデルの構築と方程式

3.1 モデルの説明

氷衛星を、以下の図 3.2 のようなモデルで表現する。(a) は、氷衛星の断面を表している。灰色の領域は半径 R のケイ酸塩コアを表し、青色で示された深さ H の液体海洋に包まれている。氷殻は外部の白色領域であり、図示されていない。放射状に外側を指す赤い矢印は、海洋底での加熱による強制浮力フラックス B を表す。上境界は氷殻と接しているため、温度は 0°C に設定している。平衡状態では、底面から発生する熱流は上面を通じて失われる。システム全体の回転軸は Ω に沿う。ここで R, H はそれぞれ内半径と外半径である。2本の黄色点線は接円筒を示す。この接円筒は、半径 R の球の外側に接する円筒である。(b) は、北極から南極までの球殻の断面において、内部海を平面と仮定した直線直交座標系である(図 3.1)。極は、物質の出入りが無い壁とし、東西方向の流れは周期的である。示されているように、球殻の接円筒は、直線直交座標系において放物線状の面となる。

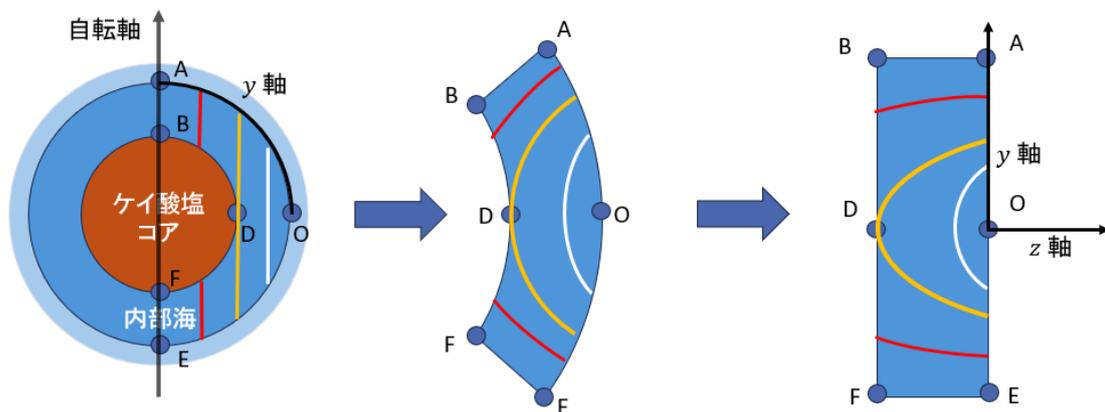


図 3.1: 球殻ジオメトリからデカルト座標系への近似。黄・赤・白の線は、自転軸に平行な線

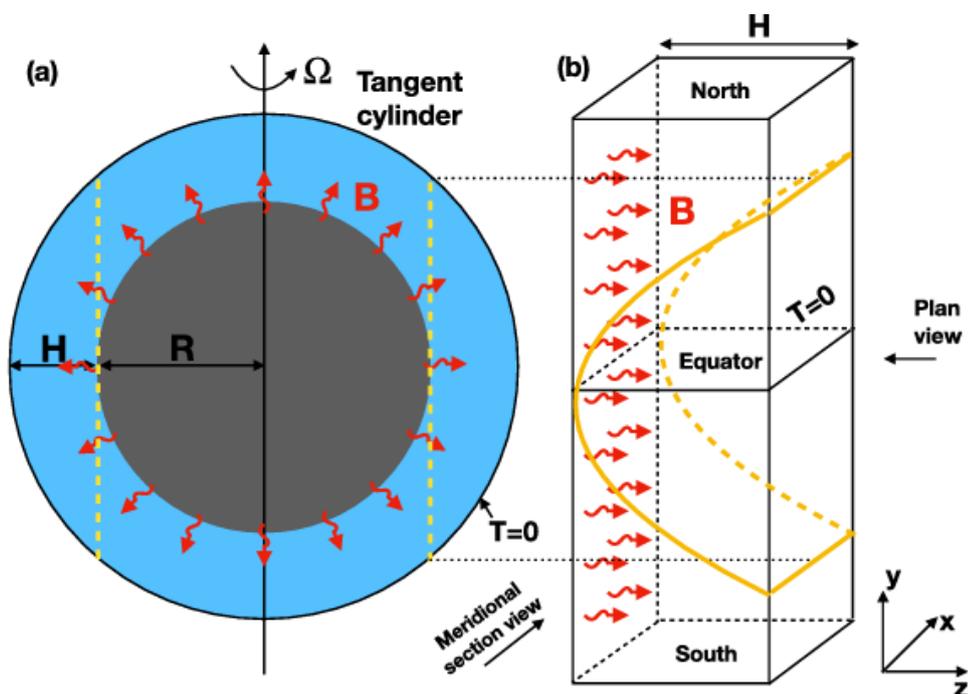


図 3.2: (a) 氷衛星の断面のモデル. R はケイ酸塩コアの半径, H は内部海の深さである. 赤い矢印は浮力フラックス, 黄色い破線は接円筒. (b) 極と極をつなぐ深部 β 平面モデル. 左側の x - y 面から加熱される. 右側の x - y 面は $T = 0$ である. 図は (Bire et al., 2022) より引用.

3.2 実験で使用する数値モデル

本研究では、海洋シミュレーション用に開発されたオープンソースソフトウェアである Oceananigans.jl (Ramadhan et al., 2020, 2021) を使用する。このソフトウェアは、マサチューセッツ工科大学 (MIT) を中心とした Climate Modeling Alliance (CliMA) によって、従来の Fortran ベースのモデルが抱える計算コストや実装の複雑さを解消し、現代的な計算環境へ適応させることを目的として開発された。Oceananigans.jl は、Julia プログラミング言語で書かれており、CPU・GPU 両方での計算が可能である。鉛直対流や小規模な乱流を扱うための非静力学モデル (NonhydrostaticModel) と、全球・広域スケールの計算に適した静力学面自由モデル (HydrostaticFreeSurfaceModel) の両方をサポートしている。本研究の氷衛星内部海のような、鉛直運動が重要な系では非静力学モードを選択できる点が大きな利点である。

3.3 本研究で用いる方程式

本研究で用いる方程式は、以下のとおりである。非圧縮流体を考えるため、式 (2.1) において ρ_0 が定数であると仮定して、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.1)$$

を用いる。また、運動方程式として、既出の

$$\frac{Du}{Dt} + \tilde{f}w - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + F^x \quad (2.5a)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} + F^y \quad (2.5b)$$

$$\frac{Dw}{Dt} - \tilde{f}u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + F^z + b \quad (2.5c)$$

を用いる。浮力項 b を表す方程式は、

$$b = \alpha g(T - T_0) \quad (3.3)$$

としている。これは線形の状態方程式から導かれ、 α は熱膨張係数である。 T_0 は参照温度であり、浮力が 0 になる温度である。

コリオリパラメータ f, \tilde{f} は、Oceananigans.jl に備え付けられた関数を、を基準緯

度 $\phi_0 = 0^\circ$ として使用する.

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{f} \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\Omega \left(1 - \frac{z}{R}\right) \\ 2\Omega \frac{y}{R} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

式 (2.11) の非伝統的 β 平面近似において基準緯度 $\phi_0 = 0^\circ$ とした場合と比較すると, z 依存性が追加されている. これは, デカルト座標系において曲率項 (メトリック項) を無視しつつ, エネルギーおよび角運動量の保存則を満たすために必要な幾何学的補正である (Dellar, 2011). この式は, 基準緯度 ϕ_0 (本研究では赤道) 近傍においてのみ成り立つ式である.

温度場の時間変化の式は,

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa \nabla^2 T - \delta_{\text{top}} \frac{T - T_0}{\tau} + \frac{\delta_{\text{bottom}}}{\Delta z} \frac{Q}{\rho_{\text{ref}} C_p} \quad (3.5)$$

としている. 右辺第 1 項は熱拡散, 右辺第 2 項は冷却, 右辺第 3 項は加熱を示す. ここで, κ は熱拡散係数, T_0 は参照温度, Δz は鉛直格子間隔, τ は緩和時間, Q は加熱量, ρ_{ref} は参照密度, C_p は比熱容量である. また, $\delta_{\text{bottom}}, \delta_{\text{top}}$ に関して,

$$\delta_{\text{top}} = \begin{cases} 1 & (z = 0 \text{ [km]}) \\ 0 & (z \neq 0 \text{ [km]}) \end{cases}$$

$$\delta_{\text{bottom}} = \begin{cases} 1 & (z = -60 \text{ [km]}) \\ 0 & (z \neq -60 \text{ [km]}) \end{cases}$$

である. この項を用いることにより, 加熱は底面のみ, 冷却は上面のみではたらく.

3.4 実験設定

本研究で行う全ての実験において, 境界条件は, 東西方向は周期的, 南北・底面は滑りなしの壁, 天井面は自由滑りの壁とする. 数値計算では, 5 次の WENO スキーム^{*1}, 3 次のルンゲクッタ法を用いて計算した. WENO スキームは空間を離散化するスキーム, ルンゲクッタ法は時間積分を滑らかにを行うためのスキームである.

^{*1}Weighted Essentially Non-Oscillatory の略.

第4章 テイラー柱の計算 (実験 1)

4.1 実験 1 の設定

実験 1 では, Bire et al. (2022) を参考として実験を行う. 特に, Bire et al. (2022) 内の ○ の条件を模倣する. これは, 氷衛星であるエンセラダスの値を用いた実験である. $0 \leq x \leq 50$ [km], $-395 \leq y \leq 395$ [km], $-60 \leq z \leq 0$ [km] の領域を対象とした計算を行う. 初期温度は, 平均温度 $T = 0$, 速度 $u = 0$ として, 温度場に一定の擾乱を与えた. 与える定数値は, 自転速度 $\Omega = 5.3 \times 10^{-5}$ [s⁻¹], 衛星半径 $R = 251 \times 10^3$ [m], 重力加速度 $g = 0.1$ [m/s²], $z = -60$ [km] の面からの加熱 $Q = 10$ [W/m²] であり, これらは全て Bire et al. (2022) と同じ値である. なお, Bire et al. (2022) では, $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.3$ [km] で行っているが, 本研究では計算資源不足のため, $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 2$ [km] と解像度を粗くして計算を行っている. またそれに伴い, 式 (2.5) の式にスケール解析を行い, 格子スケールの現象の緩和時間を一致させるために動粘性係数を $\nu = 0.89$ [m²/s] にしている.*¹

*¹動粘性係数を 0.89 [m²/s] にした手順は, 付録を参照のこと.

表 4.1: 実験 1 の計算設定と先行研究 (Bire et al. , 2022) との比較

項目	パラメータ	本研究 (実験 1)	Bire et al. (2022)
共通の設定			
計算領域 (x)	L_x		0 ~ 50 km
計算領域 (y)	L_y		-395 ~ 395 km
計算領域 (z)	L_z		-60 ~ 0 km
自転角速度	Ω		$5.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
衛星半径	R		251 km
重力加速度	g		0.1 m/s ²
底面加熱	Q		10 W/m ²
初期温度	$T _{t=0}$	0 (微小な摂動を与える)	
初期流速	$\mathbf{u} _{t=0}$	$\mathbf{0}$	
塩分濃度	S		0 g/m ³
熱膨張係数	α		$1.67 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$
海水密度	ρ		1024 kg/m ³
海水の比熱容量	C_p		4000 J/(kg · K)
変更した設定			
格子間隔	$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	2 km	0.3 km
動粘性係数	ν	0.89 m ² /s	0.02 m ² /s
時間刻み	Δt	100 s	(記載なし)
CFL 数	CFL	0.2	(記載なし)

4.2 計算の結果

表 4.1 の設定をもとに計算を行った結果が、以下である。はじめに東西風について、図 4.1 の右の結果が得られた。 $y = 0$ を軸とする放射線状の縞模様が確認でき、先行研究の東西風パターンを定性的に再現している。一方、先行研究と比べて東西風の速度の絶対値が小さく、中緯度帯・高緯度帯での模様は不明瞭である。

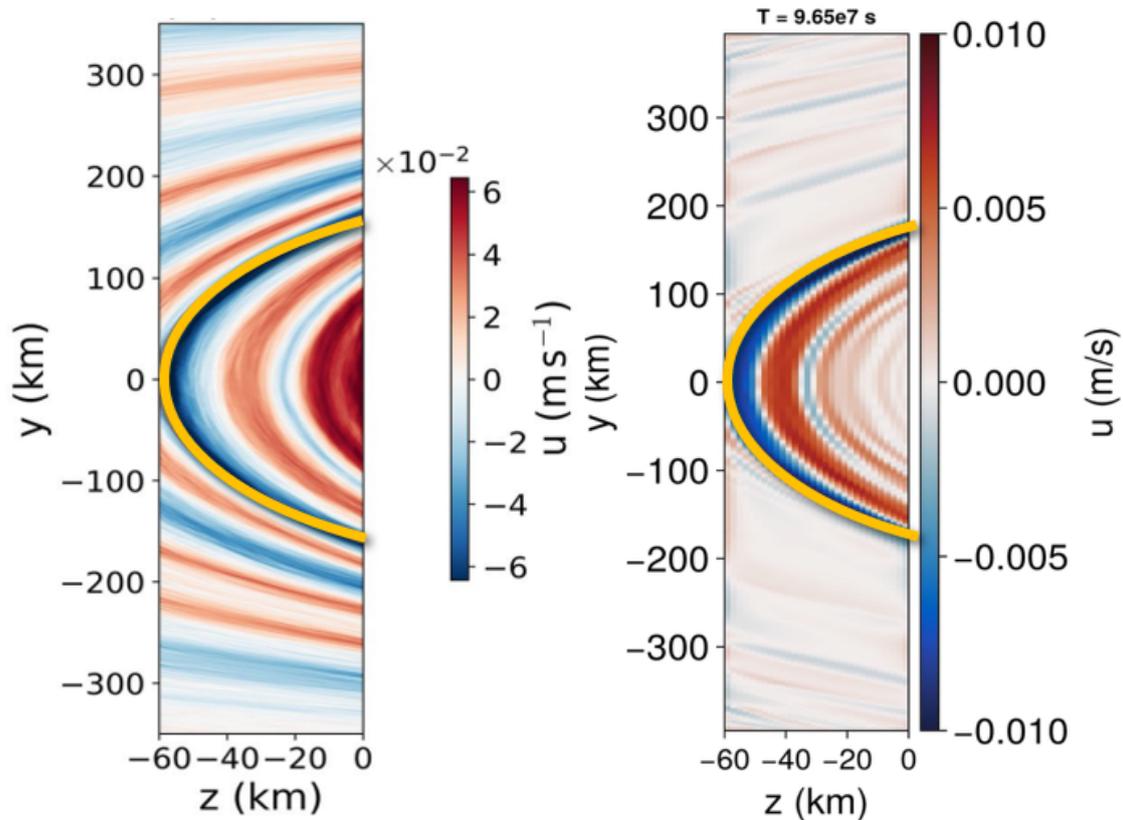


図 4.1: 内部海における $x = 25$ km 子午面断面での、東西向き速度分布。東向きの風を正、西向きの風を負の値で表現している。黄色の線は、ケイ酸塩コアに接する接線円筒であり、回転軸と平行である。両図では、カラーバーの示す値が異なることに注意。左図は、Bire et al. (2022) より引用。

次に、計算した値をそのまま用いて球殻領域へマッピングしたところ、以下の図のようになった。これを見ると、極付近でのテイラー柱が自転角速度ベクトルの向き（図における黄色線の向き）から傾いている。

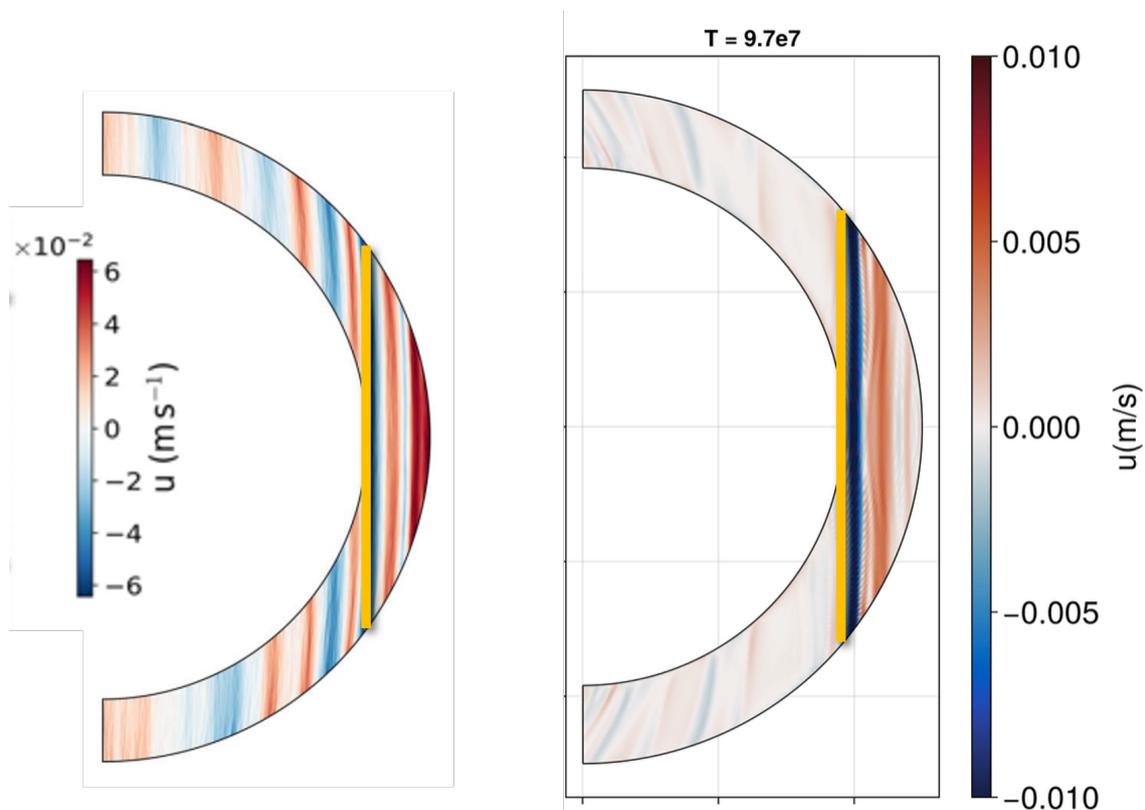


図 4.2: 直交座標系で計算した東西風 u の分布を、球殻領域にマッピングした図。両図では、カラーバーの示す値が異なることに注意。左図は、Bire et al. (2022) より引用。

また、温度分布は以下の図 4.3 の通りとなった。温度分布を色付けすると、低緯度において $y = 0$ を軸とした放射状の縞模様となることを再現している。しかし先行研究に比べると、領域内の温度差が小さく、 z 軸方向の温度勾配が小さい。

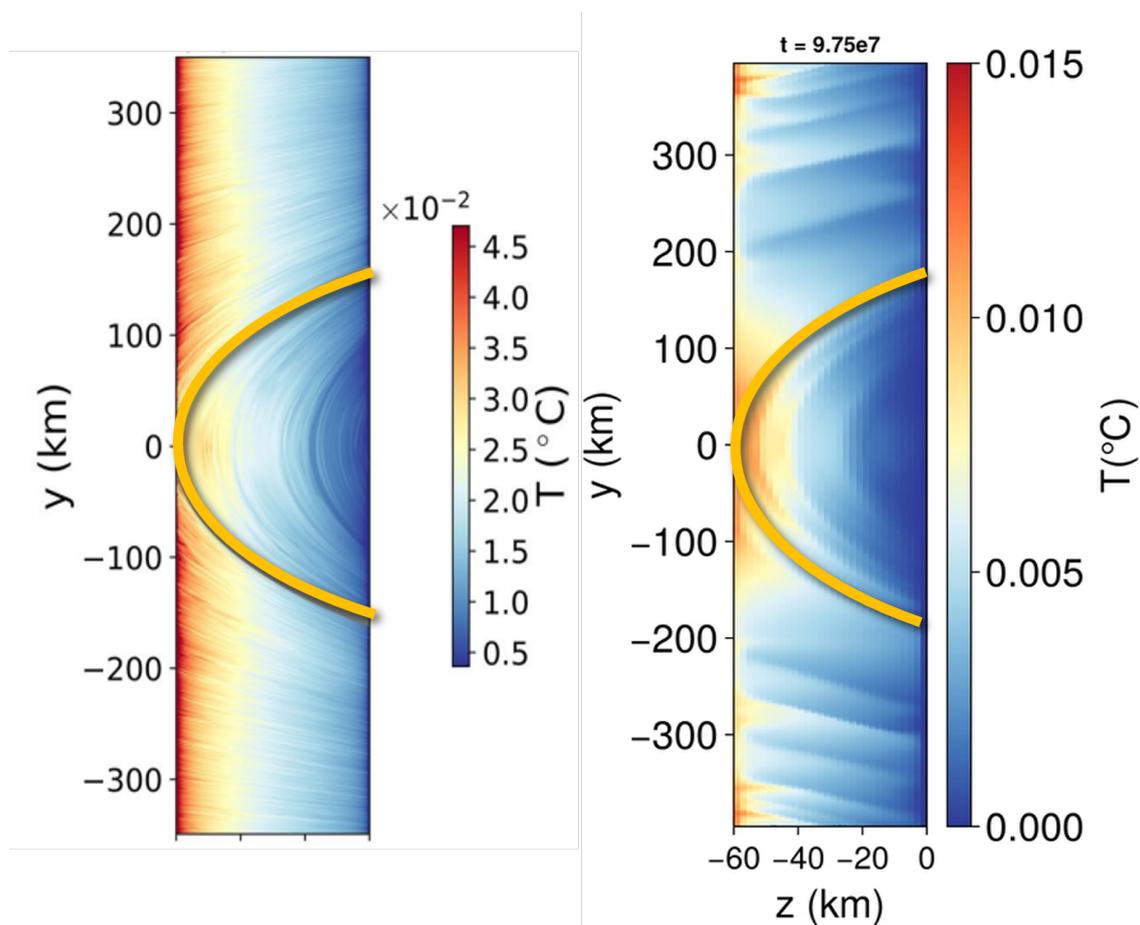


図 4.3: $x = 25$ km での断面における温度分布。相対的に高温の領域を赤、低温の領域を青で表現している。両図では、カラーバーの示す値が異なることに注意。左図は、Bire et al.(2022) より引用。

東西風の場合と同様に、計算した値を球殻領域へマッピングしたところ、以下の図のようになった。

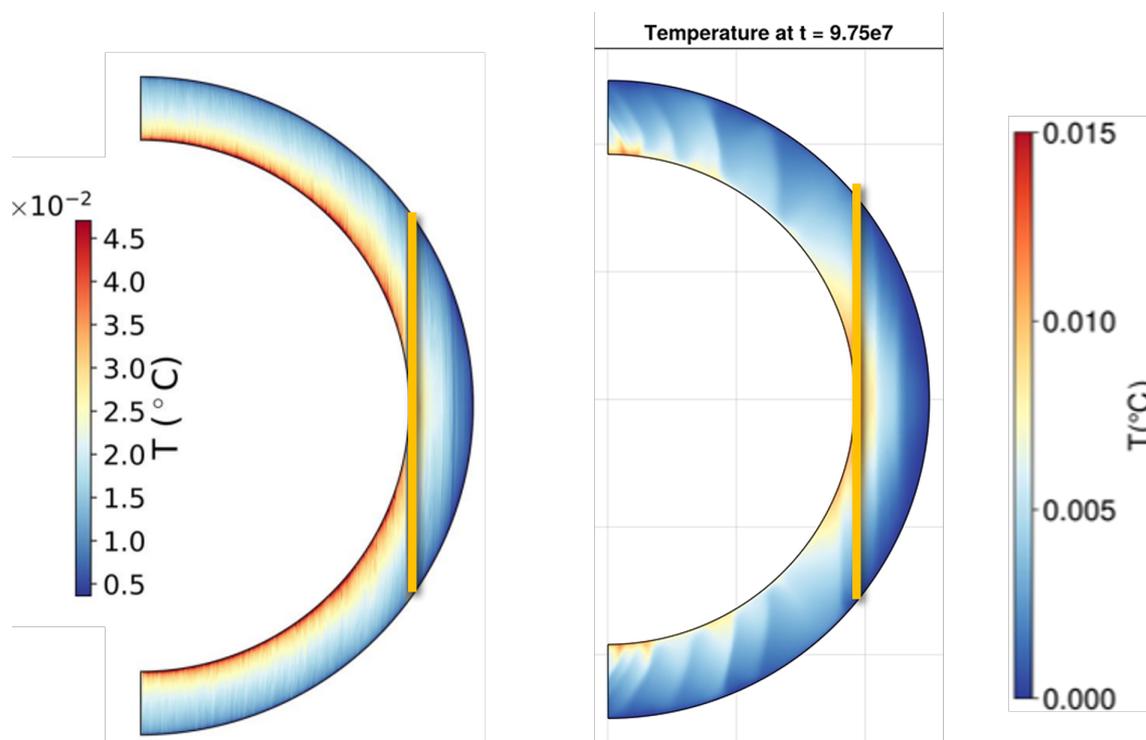


図 4.4: 直交座標系で計算した温度 T の分布を、球殻領域にマッピングした図。両図では、カラーバーの示す値が異なることに注意。左図は、Bire et al.(2022) より引用。

4.3 考察

4.3.1 高緯度におけるテイラー柱の傾き

本研究で用いたコリオリ力の形は、局所的なコリオリ力を示す形であり、近似した形となっている。そのため、今回のような全球を対象とした計算においては、基準緯度 ϕ_0 からずれた緯度では不正確なコリオリ力となった。

なお、先行研究である Bire et al. (2022) では、コリオリパラメータを以下の式で取り込んでいる。

$$\mathbf{f}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{f}_B \\ f_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\Omega \cos\left(\frac{y}{R}\right) \\ 2\Omega \sin\left(\frac{y}{R}\right) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

ここで y 軸が球殻の表面に沿うような向きであることを考えると、この式の形は、緯度 ϕ の位置での正確な 2Ω の水平・鉛直成分である。しかしこの式は、Oceananigans.jl で標準機能となっておらず、計算資源の不足により本研究では用いることが出来なかった。本研究でのコリオリパラメータは、

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{f} \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\Omega \left(1 - \frac{z}{R}\right) \\ 2\Omega \frac{y}{R} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

である。式 (4.1) と式 (3.4) の y における値を代入して計算する。

表 4.2: コリオリパラメータの比較 ($z = 0$ km, $R = 251$ km, $\Omega = 5.3 \times 10^{-5}$ rad/s)

y [km]	\tilde{f}_B (4.1)	\tilde{f} (3.4)	f_B (4.1)	f (3.4)	備考
0	1.1×10^{-4}	1.1×10^{-4}	0	0	赤道
130	9.2×10^{-5}	1.1×10^{-4}	5.3×10^{-5}	5.5×10^{-5}	低緯度
260	5.4×10^{-5}	1.1×10^{-4}	9.1×10^{-5}	1.1×10^{-4}	中緯度
394	1.1×10^{-7}	1.1×10^{-4}	1.1×10^{-4}	1.7×10^{-4}	北極点付近

$y = 394$ km は概ね北極点を示し、 \tilde{f}_B は十分に小さくほぼ 0 である。特に高緯度において、本研究におけるコリオリパラメータ \tilde{f} の値が先行研究でのコリオリパラメータ \tilde{f}_B より大きい。この状態を図示すると、以下の図のようになる。

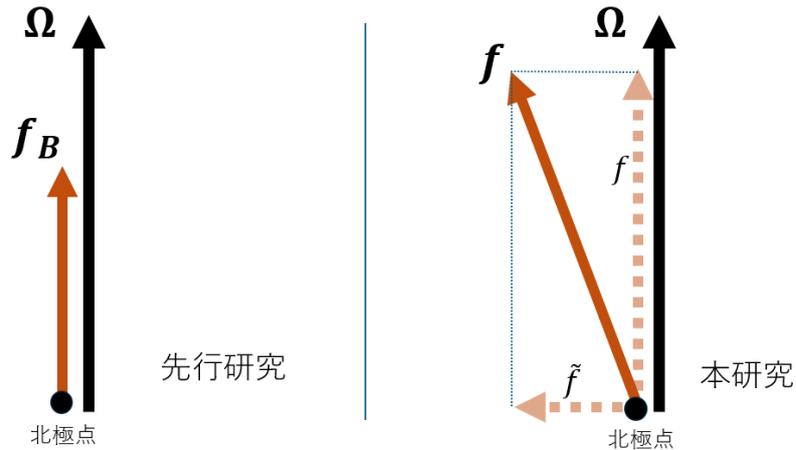


図 4.5: 各研究での北極点における f_B , f を表した図. 黒色矢印は, 本来の自転角速度ベクトルの向きを示す. オレンジ色の実線の矢印は, 各研究において設定した角速度ベクトルの方向である. 左図は先行研究, 右図は本研究.

f は 2Ω である. そのため, f と Ω の方向は一致する. しかし本研究では, \tilde{f} の値が緯度に依らず一定であり, 北極点付近でも \tilde{f} の値が 0 ではない. そのため, 結果的に f の向きが Ω と一致していない. ここでテイラー柱について思い出すと, 以下の方程式が成り立つ.

$$f \cdot \nabla \mathbf{u} = 0 \quad (2.16)$$

f の向きとテイラー柱の伸びる方向が一致する. 本研究における Ω の方向は図 4.5 のように左に傾いている. よって, テイラー柱の伸びる方向も左に傾いたと考えられる.

4.3.2 粗い格子点間隔

表 4.1 で述べた通り, 本研究では, Bire et al. (2022) よりも約 7 倍大きい空間格子間隔を用いて計算している. その影響で, 対流が駆動されるまでの時間が遅くなり, 温度場・速度場ともに十分な計算ができていない可能性がある.

第5章 動粘性係数依存性の評価 (実験2)

5.1 実験2の設定

実験2では、実験1での論文再現から動粘性係数 ν の値を変えた実験を行う。 $\nu = 0.89 [\text{m}^2/\text{s}]$ の他の動粘性係数として、 $\nu = 0.02 [\text{m}^2/\text{s}]$, $\nu = 20 [\text{m}^2/\text{s}]$ として計算を行った。動粘性係数以外の値はすべて同じとして計算している。

5.2 実験2の結果

5.2.1 動粘性係数を小さくした場合 ($\nu = 0.02 [\text{m}^2/\text{s}]$)

東西方向の流速分布については、東西方向の流速の緯度依存性が小さくなった。また、 $\nu = 0.89 [\text{m}^2/\text{s}]$ の場合よりもそれぞれのテイラー柱が細く出現した。温度分布については、 $\nu = 0.89 [\text{m}^2/\text{s}]$ の場合よりも多数の地点で対流が生じ、熱が上面まで伝わる様子が見えた。

5.2.2 動粘性係数を大きくした場合 ($\nu = 20 [\text{m}^2/\text{s}]$)

温度分布については、粘性を小さくした場合 ($\nu = 0.02 [\text{m}^2/\text{s}]$)、多数の地点で対流が生じ、熱が上面まで伝わる様子が見えた。動粘性係数を大きくした場合 ($\nu = 20 [\text{m}^2/\text{s}]$)、対流が生じず、熱拡散のみで熱が伝わる様子が見えた。動粘性係数を大きくした場合 ($\nu = 20 [\text{m}^2/\text{s}]$)、同一のカラーバーではテイラー柱が出現しなかった。

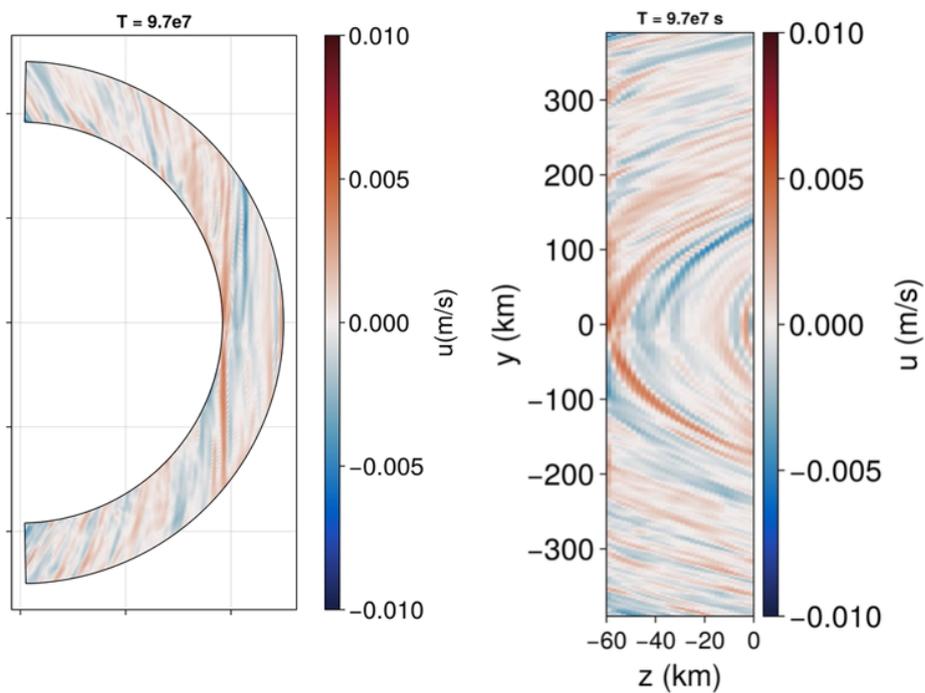


図 5.1: 動粘性係数 ν を 0.02 [m^2/s] として計算した, $x = 25$ [km] 断面における東西方向の流速分布.

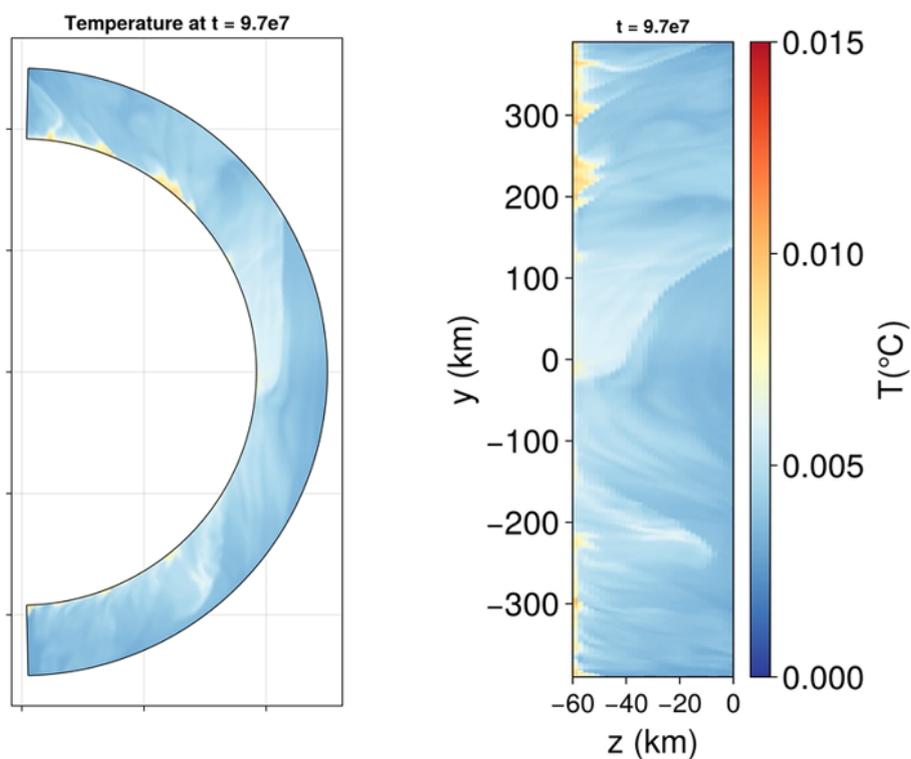


図 5.2: 動粘性係数 ν を 0.02 [m^2/s] として計算した, $x = 25$ [km] 断面における東西方向の流速分布.

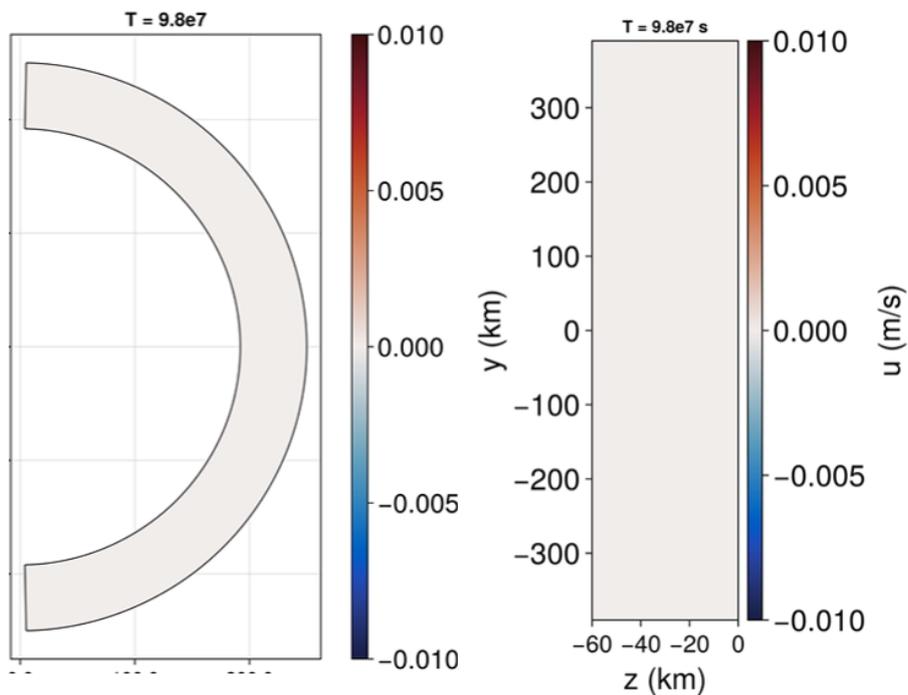


図 5.3: 動粘性係数 ν を $20 \text{ [m}^2/\text{s]}$ として計算した, $x = 25 \text{ [km]}$ 断面における温度分布.

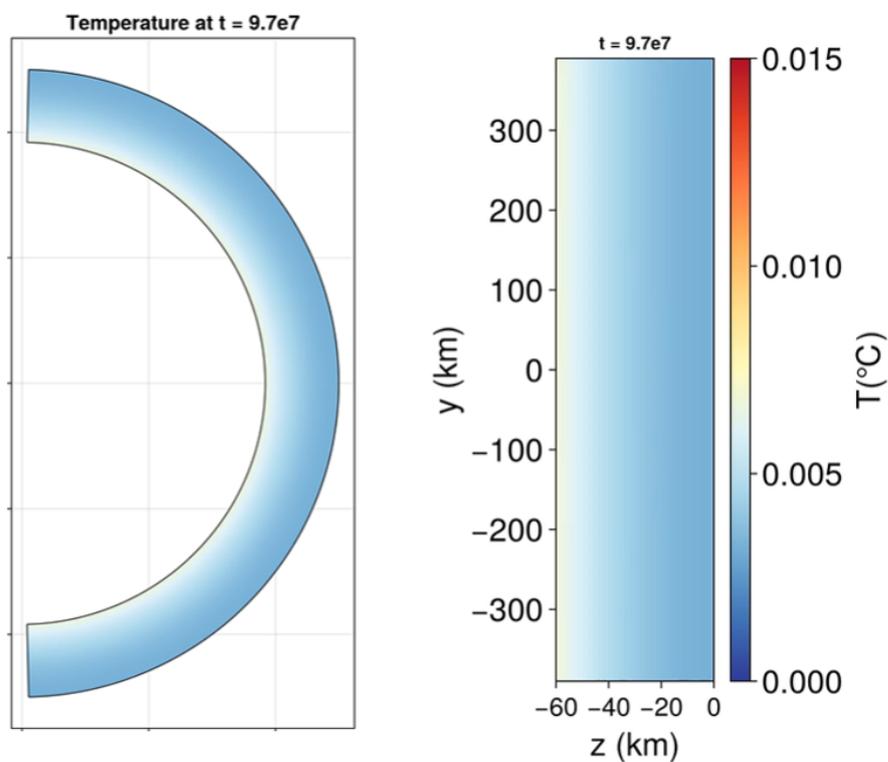


図 5.4: 動粘性係数 ν を $20 \text{ [m}^2/\text{s]}$ として計算した, $x = 25 \text{ [km]}$ 断面における温度分布.

5.3 実験2の考察

5.3.1 動粘性係数を小さくした場合 ($\nu = 0.02 \text{ [m}^2/\text{s]}$)

動粘性係数を $\nu = 0.89 \text{ [m}^2/\text{s]}$ から $\nu = 0.02 \text{ [m}^2/\text{s]}$ へと小さくした場合、テイラー柱が細くなった。これは、動粘性係数を小さくしたことにより、流体の隣り合う部分の速度差が生じやすくなった結果、細いテイラー柱が形成されたと考えられる。

また、特に温度分布について、 $\nu = 0.02 \text{ [m}^2/\text{s]}$ の場合よりも $\nu = 0.89 \text{ [m}^2/\text{s]}$ の場合の方が先行研究と定性的に類似している。これは、格子スケールの現象の緩和時間を合わせたことによる影響だと考えられる。

5.3.2 動粘性係数を大きくした場合 ($\nu = 20 \text{ [m}^2/\text{s]}$)

動粘性係数を $\nu = 0.89 \text{ [m}^2/\text{s]}$ から $\nu = 20 \text{ [m}^2/\text{s]}$ へと大きくした場合、対流・テイラー柱ともに現れなかった。これは、運動において粘性による摩擦が支配的であると考えられる。温度分布に関しては、熱対流は生じずに熱伝導のみが生じていると考えられる。東西方向の速度分布に関しては、カラーバーの刻み幅を小さくすれば見える可能性がある。

第6章 結論

本研究では、氷衛星内部海を対象に、数値計算ライブラリ Oceananigans.jl を用いたシミュレーションを行った。まず、動粘性係数 $\nu = 0.89 \text{ [m}^2/\text{s]}$ とした計算により、低緯度域において明瞭なテイラー柱が出現することを確認した。その後、 ν を $0.02 \text{ [m}^2/\text{s]}$ および $20 \text{ [m}^2/\text{s]}$ へと変化させ、東西方向の速度場の変化を調査した。今後の課題として、本研究におけるコリオリの力の定式化では、正確な値が得られる範囲が一部の緯度に限定されていたという制約がある。そのため、正確なコリオリの力をモデルに組み込み、より広い緯度帯での正確な計算を行う必要がある。また、本研究では3通りの動粘性係数についてのみ計算を行ったが、今後は ν に関して、より多くの設定値で計算することで、動粘性係数とテイラー柱の物理的関係性について考察を深めたい。

付録 A 熱対流の実験

付録 A は, 熱対流の様子を再現した実験である. この実験は, 動作確認を目的としたトイ・モデルである. 実験 A - 1 では, 2 次元の熱対流を再現する. $0 \leq x \leq 100$ [m], $0 \leq z \leq 100$ [m] の領域で, $\Delta x = \Delta z = 1$ [m] としたデカルト座標系を用いた計算を行う. また, 実験 A - 2 では, 3 次元の熱対流を再現する. $0 \leq x \leq 100$ [m], $0 \leq y \leq 100$ [m], $0 \leq z \leq 100$ [m] の領域で, $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 5$ [m] としたデカルト座標系を用いた計算を行う. ここでは地球環境を考え, 重力加速度 $g = 9.8$ [m/s²] とする. この実験では加熱を早めるため $Q = 4 \times 10^7$ [W/m²] とした.

表 6.1: 実験 A-1 および実験 A-2 の計算設定

項目	パラメータ	実験 A-1	実験 A-2
格子間隔	$\Delta x, \Delta y, \Delta z$	1 m	5 m
計算領域 (x)	L_x	0 ~ 100 m	
計算領域 (y)	L_y	0 ~ 100 m	
計算領域 (z)	L_z	0 ~ 100 m	
重力加速度	g	9.8 m/s ²	
底面加熱	Q	4×10^7 W/m ²	
初期温度	$T _{t=0}$	0 (微小な摂動を与える)	
初期流速	$\mathbf{u} _{t=0}$	$\mathbf{0}$	
塩分濃度	S	0 g/m ³	
熱膨張係数	α	1.67×10^{-4} K ⁻¹	
海水密度	ρ	1024 kg/m ³	
海水の熱容量	C_p	4000 J/(kg · K)	
動粘性係数	ν	0.02 m ² /s	

実験 A - 1 2次元の熱対流

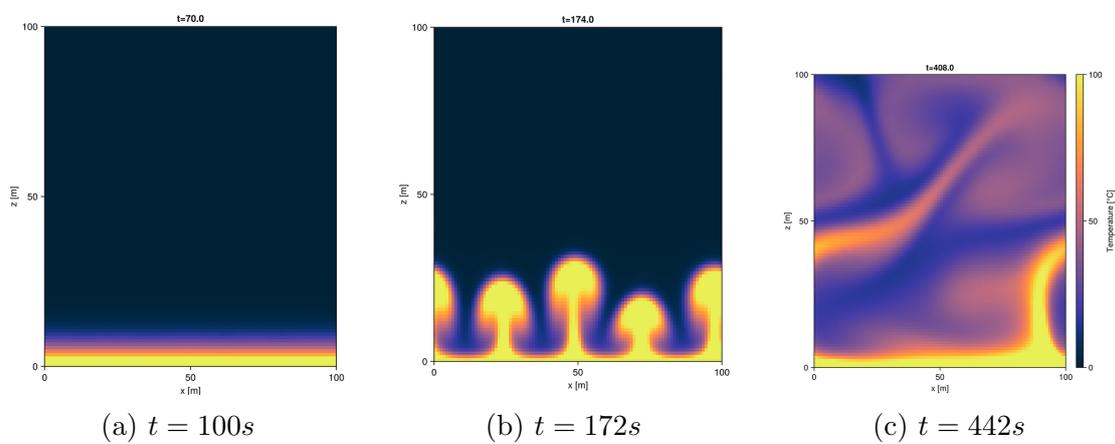


図 6.1: 熱対流の時間経過の様子

図 6.1 において, 時間が経つとともに海水が暖められ, 対流が起きる様子が見えた.

実験 A - 2 3次元の熱対流

以下の図は、3次元の熱対流シミュレーションを行った図である。左から、 $x = 50$ [m] で切った断面、 $y = 50$ [m] で切った断面、 $z = 50$ [m] で切った断面である。

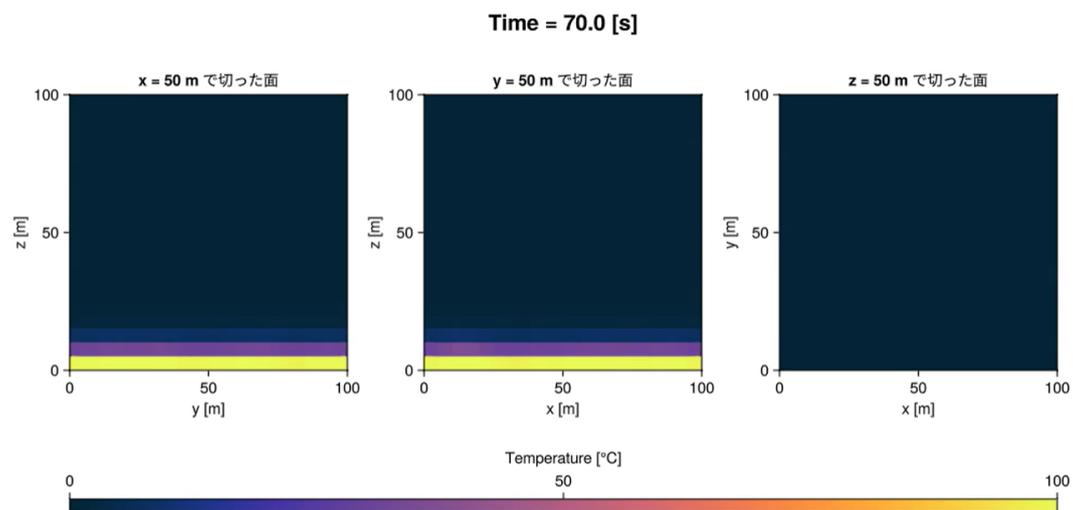


図 6.2: $t = 70$ s の様子. 対流はまだ起きていない。

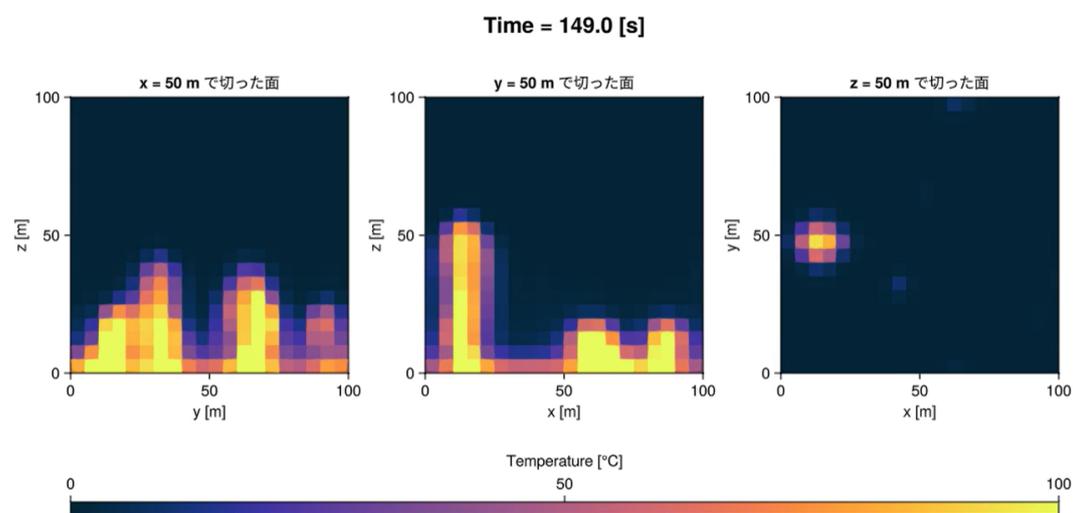


図 6.3: $t = 149$ s の様子. 対流が起き始めている。

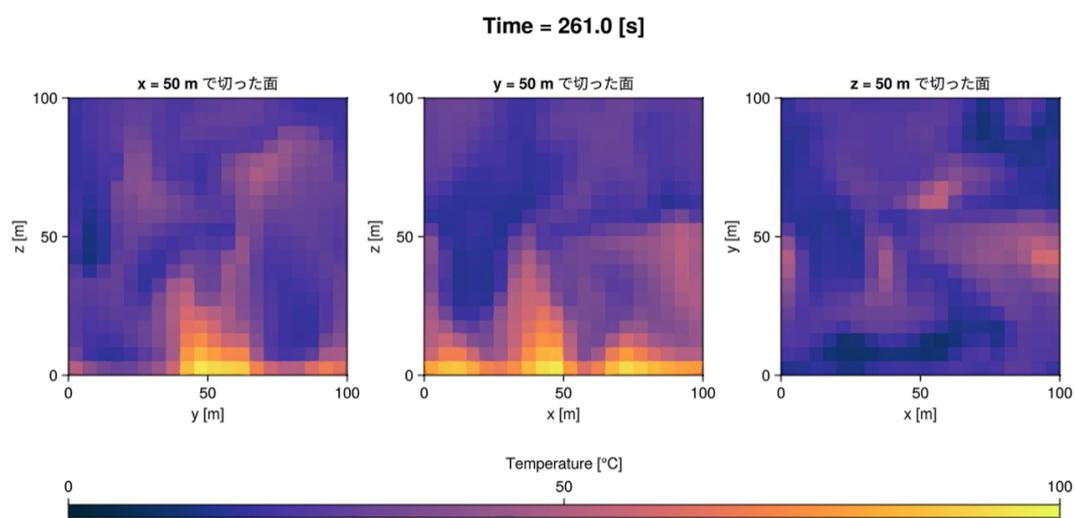


図 6.4: $t = 261$ s の様子. 領域全体の温度が高くなっている.

付録 2 代表的スケールの推定

表 2.2 に示したエンケラドゥス内部海における各物理量の代表的スケールは、先行研究および支配方程式のバランスに基づいて以下のように推定した。

まず、幾何学的なスケールについて、水平スケール L はエンケラドゥスの半径 ($R \approx 251$ [km]) と同程度のオーダーである 10^5 [m] とした。鉛直スケール (海の厚さ) H については、重力場測定および秤動の観測データに基づく (Cadec, 2016) の推定に従い、 10^4 [m] オーダーを採用した。

流速のスケールについては、数値シミュレーションによる先行研究 (Tyler2011, Soderlund2014) を参照し、代表的な水平流速を $U \sim 10^{-2}$ [m/s] と設定した。鉛直速度 W は、Choblet et al. (2017) の局所的な熱水プルームの値 10^{-2} [m/s] を用いた。

次に、力学的な変動量のスケールを見積もる。圧力変動 p' については、水平運動量方程式の y 成分において、コリオリ力と圧力勾配力が釣り合う地衡流平衡

$$fu \sim -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} \quad (6.1)$$

を仮定した。これにより、

$$p' \sim \rho_0 f L U \approx 10^3 \times 10^{-4} \times 10^5 \times 10^{-2} = 10^2 \text{ [kg m}^{-1}\text{s}^{-2}] \quad (6.2)$$

を得る。

密度変動 ρ' については、温度場の支配方程式 (式 3.5) における熱の移流と供給のバランスを用いて評価した。まず内部熱源による温度変動をスケール解析すると、

$$\frac{T}{\tau} \sim \frac{Q}{\rho C_p H} \quad (6.3)$$

である。これより、 $\Delta T \sim 10^{-2}$ [C°] と見積もることができる。線形状態方程式 $\rho' \approx \alpha \rho_{ref} \Delta T$ を適用することで、

$$\rho' \sim 10^{-4} \times 10^3 \times 10^{-2} = 10^{-3} \text{ [kg m}^{-3}] \quad (6.4)$$

というオーダーを導出した。

付録 3 粘性・拡散係数の設定

本研究では、格子スケールの現象における緩和時間 τ を先行研究 (Bire et al., 2022) と一致させるため、動粘性係数 ν および熱拡散率 κ を調整した。ここで、プラントル数 ($Pr = \nu/\kappa$) を 1 と仮定し、運動量と熱の拡散効率が等しい系を考える。

動粘性係数を 0.02 から 0.89 へと変更させた。これは、格子スケールの現象の緩和時間を先行研究と合わせるためである。温度移流の式 (3.5) の左辺、右辺第 1 項に関してスケール解析を行う。すると、

$$\frac{T}{\tau} = \frac{\kappa T}{(\Delta x)^2} \quad (6.5)$$

であり、これを τ について解くと、

$$\tau = \frac{(\Delta x)^2}{\kappa} \quad (6.6)$$

であり、この値 τ を一定としたい。その場合、 Δx は計算資源によりこれ以上小さくすることが出来ないため、 κ を大きくする。計算した表は以下のとおりである。

表: 格子スケールの現象の緩和時間を一定にした場合の、粘性係数の値

	熱拡散係数 κ , 動粘性係数 $\nu(\text{m}^2/\text{s})$	格子間隔 $\Delta x(\text{m})$	緩和時間 $\tau(\text{s})$
先行研究	0.02	300	4.5×10^6
本研究	0.89	2000	4.5×10^6

謝辞

本研究を行うにあたって、樫村講師には研究内容の方針を示していただき、定期的な研究相談や基礎理論読書会、セミナーなど大変多くの場面で指導をしていただきました。はしもとじょーじ教授には、基礎理論読書会やセミナーにおいて、地球流体力学の知識や日本語表現等に関するご指導いただきました。また、地球および惑星大気科学研究室の皆様には、セミナー発表や基礎理論読書会の際、助言をいただきました。ご指導いただきました全ての皆様に感謝申し上げます。

参考文献

- [1] Soderlund, K. M. (2024). The Physical Oceanography of Ice-Covered Moons. *Annual Review of Marine Science*, 16, 171-196.
- [2] Ingersoll, A. P. (2005). Boussinesq and Anelastic Approximations Revisited: Potential Energy Release during Thermobaric Instability. *Journal of Physical Oceanography*, 35(8), 1359–1369.
- [3] Bire, S., Kang, W., Marshall, J., & Soderlund, K. M. (2022). Exploring Ocean Circulation on Icy Moons Heated From Below. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 127(4), e2021JE007020.
- [4] Busse, F. H. (1970). Thermal instabilities in rapidly rotating systems. *Journal of Fluid Mechanics*, 44(3), 441-460.
- [5] Choblet, G., Tobie, G., Sotin, C., Kalousová, K., & Grasset, O. (2017). Enceladus 's hydrothermal activity should be driven by its porous core. *Nature Astronomy*, 1(12), 841-847.
- [6] 北畠尚子 (2021). 『総観気象学 理論編』. 東京堂出版.
- [7] Vallis, G. K. (2017). *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- [8] 岩山隆寛. 地球流体力学講義ノート. 2002-06-18.