浅水波(一様回転系)

林 祥介

2014 年 04 月 18 日

1 基礎方程式とその線型化

1.1 線型化

一様回転系の浅水波の方程式は次のように書き下せる.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - f_0 v = -g\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + f_0 u = -g\frac{\partial h}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} + \frac{\partial Hv}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

ただし, f_0 はコリオリパラメータ (定数) であり, h は適当な基準位からの水面の変位を表わす.

さて, 静止状態 $(u = v = 0, H = H_0)$ の周りで線型化する. u, v, h が微小量であるとして,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f_0 v = -g\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f_0 u = -g\frac{\partial h}{\partial y}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H_0\frac{\partial u}{\partial x} + H_0\frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

1.2 波動方程式の導出

(5) ∼ (7) より (u, v) を消去すると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - gH_0\nabla^2 + f_0^2\right)\frac{\partial h}{\partial t} \quad = \quad 0. \tag{8}$$

ただし,

$$\nabla^2 \quad = \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

2 分散関係, 群速度

2.1 分散関係

(5) ∼ (7) または (8) の解として平面波解

$$
\begin{aligned}
u &= u_0 e^{i(kx+ly-\omega t)} && (9)\\
v &= v_0 e^{i(kx+ly-\omega t)} && (10)\\
h &= h_0 e^{i(kx+ly-\omega t)} && (11)
\end{aligned}
$$

を代入すると分散関係 $\omega = \omega(k,l)$ が得られる:

$$
\begin{aligned}
\omega &= 0, && (12)\\
&\pm\sqrt{gH_0(k^2+l^2)+f_0^2}. && (13)
\end{aligned}
$$

$\omega = 0$ のモードは定常渦 (構造は後述) であり, ± のついたモードは, いわゆる浅水波に対応する回転系でのモードである. $f_0 \to 0$ の極限では非回転系の分散関係に一致することに注意.

2.2 位相速度

分散関係 (12) または (13) を用いれば, 波数ベクトル方向の位相速度は

$$
\begin{aligned}
c &= 0, && (14)\\
&\pm\sqrt{gH_0+\frac{f_0^2}{k^2+l^2}}. && (15)
\end{aligned}
$$

となる.

2.3 群速度

同様にして

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{c}_g &= 0, && (16)\\
\pm\frac{gH_0}{\sqrt{gH_0(k^2+l^2)+f_0^2}}\boldsymbol{k} &= \frac{gH_0}{\omega}\boldsymbol{k}. && (17)
\end{aligned}
$$

図 1 に分散関係を示す.

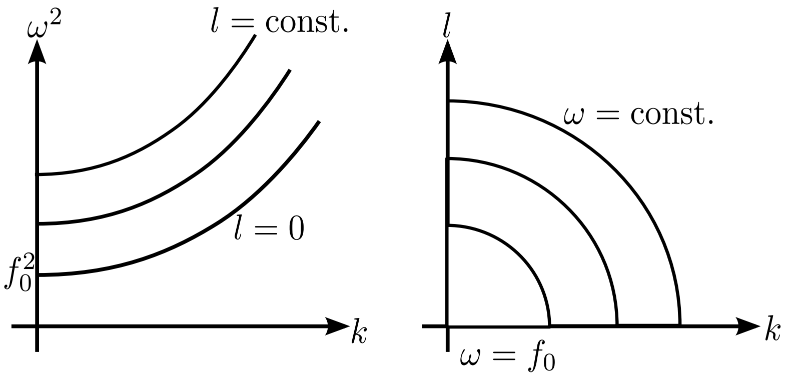

図 1: $f_0 \neq 0$ の浅水波の分散関係. (左) $l =$ 一定の曲線. (右) $\omega =$ 一定の曲線.

3 平面波の構造

水面の変位 h を基準にして他の変数の振幅を書き下せば

$$u_0 = \frac{k\omega + ilf_0}{\omega^2 - f_0^2} gh_0, \tag{18}$$

$$v_0 = \frac{l\omega - ikf_0}{\omega^2 - f_0^2} gh_0, \tag{19}$$

$$D_0 = \frac{(ik + il)\omega}{\omega^2 - f_0^2} gh_0, \tag{20}$$

$$\zeta_0 = \frac{(k^2 + l^2)f_0}{\omega^2 - f_0^2} gh_0, \tag{21}$$

$$q_0 = \left(\frac{(k^2 + l^2)f_0}{\omega^2 - f_0^2} gH_0 - f_0 \right) \frac{h_0}{H_0^2}. \tag{22}$$

ただし, D_0 は発散 $D \equiv \partial u/\partial x + \partial v/\partial y$ の振幅, ζ_0 は渦度 $\zeta \equiv \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ の振幅, q_0 は渦位の線型部分 $q \equiv \zeta/H_0 - f_0 h/H_0^2$ の振幅である.

$\omega = 0$ のモードに対しては明かに $D \equiv 0$ であり, 渦モードと呼んでしかるべきものであることがわかる:

$$u_0 = -\frac{il}{f_0} gh_0, \tag{23}$$

$$v_0 = +\frac{ik}{f_0} gh_0, \tag{24}$$

$$D_0 = 0, \tag{25}$$

$$\zeta_0 = -\frac{(k^2 + l^2)}{f_0} gh_0 \tag{26}$$

$$q_0 = \left(-\frac{(k^2 + l^2)}{f_0} gH_0 - f_0 \right) \frac{h_0}{H_0^2} \tag{27}$$

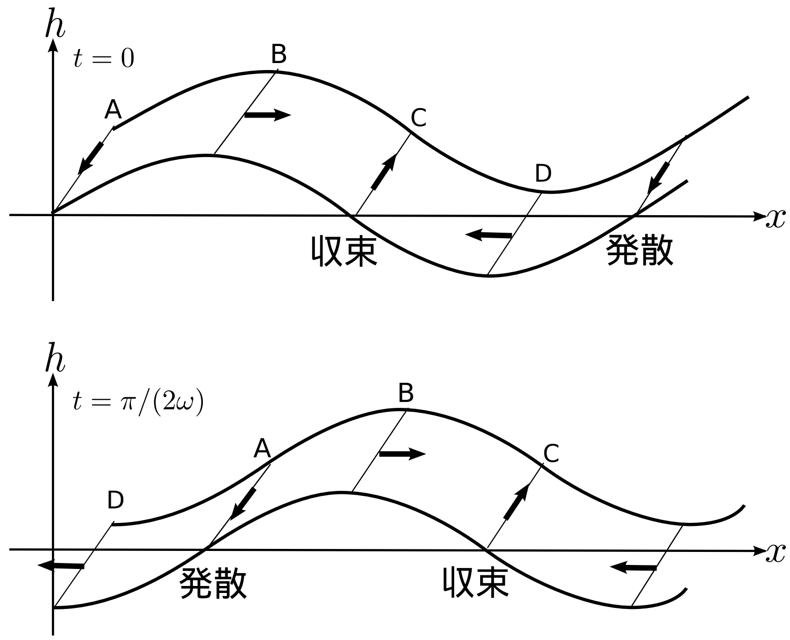

図 2: 浅水波の構造 ($f_0 > 0$ の場合).

$\omega \neq 0$ のモード, すなわち, 重力波モードに関しては系が回転していることの影響を受けて運動場も回転を行ないはじめる. 水面の変位が正である高圧部の周りではいわゆる「低気圧回転」, 水面の変位が負である定圧部の周りではいわゆる「高気圧回転」をおこなうことに注意. コリオリ力が圧力とバランスする形で働いているのではなく, 加速度を生み出す (収束にともなって回転が発生する) 形で働いているからである. ちなみに, 渦位の線型部分は 0 であることにも注意: ω^2 の部分には分散関係を代入して多少表現を簡単にすれば

$$u_0 = \frac{k\omega + ilf_0}{H_0(k^2+l^2)} h_0, \tag{28}$$

$$v_0 = \frac{l\omega - ikf_0}{H_0(k^2+l^2)} h_0, \tag{29}$$

$$D_0 = \frac{(ik+il)\omega}{H_0(k^2+l^2)} h_0, \tag{30}$$

$$\zeta_0 = \frac{f_0}{H_0} h_0, \tag{31}$$

$$q_0 = 0. \tag{32}$$

構造は図 2 に示してある (f_0 は正としている).

4 エネルギー保存則

(5) $\times u$ + (6) $\times v$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right) = -g(\nabla\cdot h\boldsymbol{v} - h\nabla\cdot\boldsymbol{v})$$

(7) を用いて $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ を消去すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(H_0\frac{u^2+v^2}{2}+\frac{1}{2}gh^2\right) = -gH_0\nabla\cdot h\boldsymbol{v} \tag{33}$$

この式を位相平均すればたやすく波のエネルギー保存則が得られる.

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{F} = 0. \tag{34}$$

位相関数 θ を用いた表現

$$\begin{aligned} u &= u_0e^{i\theta} \\ &= \frac{k\omega+ilf_0}{\omega^2-f_0^2}gh_0e^{i\theta}, \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} v &= v_0e^{i\theta} \\ &= \frac{l\omega-ikf_0}{\omega^2-f_0^2}gh_0e^{i\theta}, \end{aligned} \tag{36}$$

$$h = h_0e^{i\theta} \tag{37}$$

を使えば

$$\begin{aligned} E &\equiv H_0\frac{u^2+v^2}{2}+\frac{1}{2}gh^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(H_0|u_0|^2+H_0|v_0|^2+g|h_0|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{gH_0(k^2+l^2)(\omega^2+f_0^2)}{(\omega^2-f_0^2)^2}+1\right)g|h_0|^2 \end{aligned} \tag{38}$$

$\omega\neq 0$ のモードに対しては $f_0\to 0$ の極限では

$$\frac{gH_0(k^2+l^2)(\omega^2+f_0^2)}{(\omega^2-f_0^2)^2} \to \frac{gH_0(k^2+l^2)}{\omega^2} = 1 \tag{39}$$

であり位置エネルギー $gh^2/2$ と運動エネルギー $H_0(u^2+v^2)/2$ とは等分配になっているが, $f_0\neq 0$ では等分配ではなくなっていることに注意. また分散関係を用いれば

$$E = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega^2-f_0^2}g|h_0|^2 \tag{40}$$

一方エネルギーフラックスは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &\equiv gH_0 h\boldsymbol{v} \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{k}\frac{\omega}{\omega^2 - f_0^2} g^2 H_0 |h_0|^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega^2 - f_0^2} g|h_0|^2 \frac{gH_0}{\omega}\boldsymbol{k} \\ &= E\boldsymbol{c}_g \end{aligned} \tag{41}$$

ただし重力波モードの分散関係を用いている.

5 波の作用の保存則

方程式 (8) から出発して保存則を導く.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - gH_0\nabla^2 + f_0^2\right)h = 0. \tag{42}$$

漸近展開 (波線理論/WKBJ 法) を用いることにしよう. 微小パラメター ε を導入して

$$h = \sum_{n=0} \varepsilon^n A_n(X,Y,T)e^{i\Theta(X,Y,T)/\varepsilon} \tag{43}$$

と展開する. ただし

$$X = \varepsilon x,\ Y = \varepsilon y,\ T = \varepsilon t \tag{44}$$

である.

方程式に代入して ε のオーダーで整理すると次のようになる.

- ε^0 次

$$\left[-\left(\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)^2 + gH_0\left\{\left(\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right)^2\right\} + f_0^2\right]A_0 = 0. \tag{45}$$

- ε^1 次

$$i\left[2\frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial A_0}{\partial T} + A_0\frac{\partial^2\Theta}{\partial T^2} - gH_0\left\{2\frac{\partial\Theta}{\partial X}\frac{\partial A_0}{\partial X} + A_0\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2} + 2\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\frac{\partial A_0}{\partial Y} + A_0\frac{\partial^2\Theta}{\partial Y^2}\right\}\right]$$
$$\left[-\left(\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)^2 + gH_0\left\{\left(\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right)^2\right\} + f_0^2\right]A_1 = 0. \tag{46}$$

ここで, Θ の微分を振動数並びに波数

$$\omega = -\frac{\partial\Theta}{\partial T} \tag{47}$$
$$k = \frac{\partial\Theta}{\partial X} \tag{48}$$
$$l = \frac{\partial\Theta}{\partial Y} \tag{49}$$

で置き換えれば ε^0 次の式は既に得られている分散関係

$$\omega^2 = f_0^2 + gH_0(k^2 + l^2) \tag{50}$$

が再び得られる.

ε^1 次の式を書きなおすと

$$2\omega\frac{\partial A_0}{\partial T}+2gH_0\left\{k\frac{\partial A_0}{\partial X}l\frac{\partial A_0}{\partial Y}\right\}+A_0\left\{\frac{\partial \omega}{\partial T}+gH_0\left(\frac{\partial k}{\partial X}+\frac{\partial l}{\partial Y}\right)\right\} = 0 \quad (51)$$

(51)$\times A_0^*$ + (51)$^* \times A_0$ を計算すると

$$\frac{\partial}{\partial T}(\omega|A_0|^2)+\frac{\partial}{\partial X}(gH_0k\omega|A_0|^2)+\frac{\partial}{\partial Y}(gH_0l\omega|A_0|^2) = 0. \quad (52)$$

または,

$$\frac{\partial}{\partial T}(\omega|A_0|^2)+\frac{\partial}{\partial X}(c_{gx}\omega|A_0|^2)+\frac{\partial}{\partial Y}(c_{gy}\omega|A_0|^2) = 0. \quad (53)$$

ただし変形には

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial T}+\boldsymbol{c}_g\cdot\nabla\omega &= 0\\ \frac{\partial \omega}{\partial X}+\frac{\partial k}{\partial T} &= 0\\ \frac{\partial \omega}{\partial Y}+\frac{\partial l}{\partial T} &= 0\\ \boldsymbol{c}_g &= \frac{gH_0}{\omega}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

を用いた.

先の記号を用いれば

$$\frac{\partial}{\partial T}(\omega|h_0|^2)+\frac{\partial}{\partial X}(c_{gx}\omega|h_0|^2)+\frac{\partial}{\partial Y}(c_{gy}\omega|h_0|^2) = 0,$$

あるいは

$$\frac{\partial}{\partial T}(|h_0|^2)+\frac{\partial}{\partial X}(c_{gx}|h_0|^2)+\frac{\partial}{\partial Y}(c_{gy}|h_0|^2) = 0.$$

波数, 振動数保存則

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial T}+\boldsymbol{c}_g\cdot\nabla\omega &= 0\\ \frac{\partial k}{\partial T}+\boldsymbol{c}_g\cdot\nabla k &= 0\\ \frac{\partial l}{\partial T}+\boldsymbol{c}_g\cdot\nabla l &= 0\end{aligned}$$

があるので $|h_0|^2$ に 任意の関数 $f(k,l,\omega)$ をかけたものは実は保存量になるのである. 当然,

$$E = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega^2 - f_0^2} g|h_0|^2 \tag{54}$$

も得られることになる.