

6.3 準地衡予報

非地衡風鉛直運動は流れが発展するに連れて、温度風バランスの維持に必要な不可欠な役割を果たすが、地衡風循環の発展は ω の構造を介さずに求められる。ジオポテンシャルの時間変化 $\chi \equiv \partial\Phi/\partial t$ を定義すると、地衡風渦度方程式 (6.19) は

$$\frac{1}{f_0} \nabla^2 \chi = -\mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right) \boxed{+ f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}}. \quad (6.21)$$

(6.7) から地衡風は Φ で表現できるので、(6.21) の右辺は従属変数 Φ , ω のみに依存する。これを閉じさせるために、熱エネルギー方程式に f_0/σ をかけ、 p について微分し

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial \chi}{\partial p} \right) = -\frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{f_0}{\sigma} \mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right] \boxed{- f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}} - f_0 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\kappa J}{\sigma p} \right) \quad (6.22)$$

を得る。

非地衡風鉛直運動 ω は (6.21), (6.22) の左辺で正負逆の効果をもつ。

鉛直方向の伸長

静力学方程式 (6.2) を用いて (6.22) の左辺を

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial \chi}{\partial p} \right) = -R f_0 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\sigma p} \frac{\partial T}{\partial t} \right) = -f_0 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{S_p} \frac{\partial T}{\partial t} \right) \approx -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{f_0}{S_p} \frac{\partial T}{\partial p} \right)$$

とすると、左辺は規格化された静的安定性アノマリー（すなわち、標準大気の数である S_p からの静的安定性のずれの尺度）の局所的な変化率と解釈することができる。ただし、 $S_p = p\sigma/R$ は対流圏において高度とともにゆっくりとしか変化しないという事実を用いた。 $T = T_{tot} - T_0$ なので、

$$f_0 S_p^{-1} \partial T / \partial p$$

は S_p で除された局所的な静的安定性のアノマリーに比例する。渦度の単位にするため、 f_0 をかける。

断熱的な渦度の伸長 ($\frac{\partial \omega}{\partial p} > 0$) について、相対渦度と静的安定性アノマリーを比較したのが以下の表である。

	相対渦度の時間変化 (6.21) 左辺	静的安定性アノマリーの時間変化 (6.22) 左辺
渦度の伸長 (各式の傾向)	正	負
断熱な流体柱の伸長	増加 (ケルビンの 循環定理)	減少 (上部の断熱膨張冷却と 下部の断熱圧縮加熱による温度差解消)

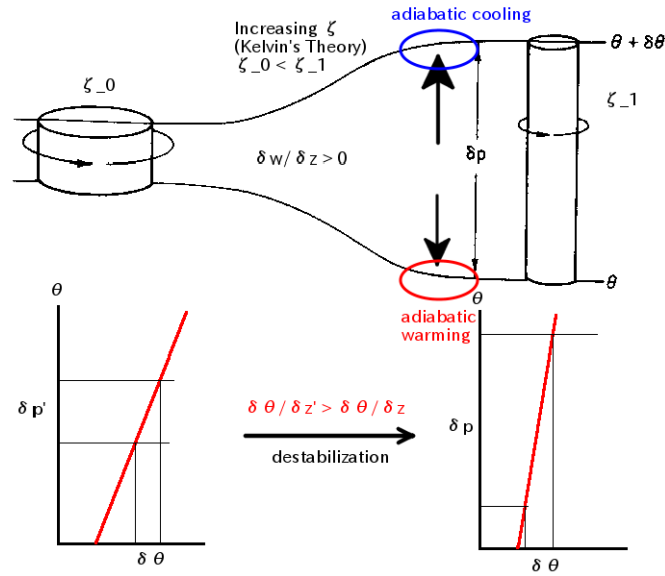


図 6.9: 渦度の伸長に伴う流体柱の不安定化.

純粋な地衡風運動 ($\omega = 0$) は順圧流 (圧力依存性がない流れ) あるいは東西軸対称流 (x 依存性がない流れ) のように、非常に特殊な条件でのみ、(6.21), (6.22) の解となる^{*1}. ゆえに、鉛直運動の構造 $\frac{\partial \omega}{\partial p}$ の役割は (6.21) の渦度の移流と (6.22) の温度の移流に必要な各ジオポテンシャルの時間変化の間で整合性を維持することである.

^{*1}(6.21) はジオポテンシャルの水平 (微分) 構造についての式, (6.22) はジオポテンシャルの鉛直構造についての式であり、互いに独立した構造を記述する方程式である. これを 1 つにまとめるのが渦度の伸長を表す項であるため、もし純粋な地衡風運動であれば、非地衡風に由来する ω はゼロとなるので、これらの式は

$$\frac{1}{f_0} \nabla^2 \chi = -V_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right), \tag{6.21}$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial \chi}{\partial p} \right) = -\frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{f_0}{\sigma} V_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right] \tag{6.22}$$

となり、 $\Phi(\chi)$ という 1 つの変数について独立な 2 つの支配方程式を出すことになるので、一般的な解は特殊な条件が成り立つときのみ存在する. 例えば、順圧流や東西軸対称流などは、水平方向のジオポテンシャル構造と鉛直方向のジオポテンシャル構造を関係づける別の関係をもつので、これをもとに 2 つの式は関連付けられる (つまり、渦度の伸長がなくなったために 2 つを結びつけられなかったが、圧力方向 (高度方向) への依存性がなかったり、東西方向への依存性がなかったりという渦度の伸長の関係に代わる別の関係式が用意できるような運動であれば問題ないということ).

6.3.1 ジオポテンシャルの時間変化

$J = 0$ とし, (6.21) と (6.22) で ω を消去すると, Φ の場の 3 次元構造を用いてジオポテンシャルの局所的な変化率を決定するための方程式

$$\underbrace{\left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \right) \right]}_{A(\text{相対渦度の時間変化})} \chi = \underbrace{-f_0 \mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f \right)}_{B(\text{渦度移流})} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial p} \left[-\frac{f_0^2}{\sigma} \mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right]}_{C(\text{層厚の移流})} \quad (6.23)$$

を得る. この式はジオポテンシャル傾向方程式と呼ばれる. Φ の構造がある時刻で既知であると, 項 B, C は既知の強制項とみなされ, (6.23) は未知の χ についての線形偏微分方程式となる^{*2}.

(6.23) の定性的な概念は, 項 A が χ の場について空間の 2 階微分を含んでおり, マイナスの χ に比例する^{*3}ことに気をつけると理解できる. ただし, 6.2.2 での議論から, 中緯度システムにおいて, 短波では相対渦度の移流が卓越, 長波では惑星渦度の移流が卓越するということである. まず, (6.23) 式は

$$\begin{aligned} \text{相対渦度の時間変化} &= - \text{ジオポテンシャルの時間変化} \\ &= - \text{項 B(惑星渦度の移流 + 相対渦度の移流)} - \text{項 C(層厚移流の鉛直微分)} \end{aligned}$$

という関係である. このうち, 対流圏上部では, 渦度の移流が卓越する. 各項について図 6.7 を用いてまとめたものが以下である.

	領域 I (トラフ背面)	領域 II (トラフ前面)	リッジの軸	トラフの軸
渦度の移流 (Ver. 短波)	正	負	0	0
ジオポテンシャルの時間変化	正	負	0	0
渦度の時間変化	負	正	0	0

ゆえに, 渦度移流は移流が発生している高度での擾乱の強さを変化させることはできない. この移流は擾乱を水平に伝播させ, 鉛直に広げるように作用するだけである.

システムの増幅, 減衰に対する主要なメカニズムは, 項 C に含まれている. この項は水

^{*2} χ についてはポアソン型方程式となる.

^{*3} $\chi = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ であるため, ジオポテンシャルが三角関数的な構造をしているなら, 2 回微分で負号のついた自身に戻ってくることから理解される.

平の層厚移流の圧力変化率に関する。層厚は定義から温度に比例する。つまり、項 C は温度の水平移流と考えられる^{*4}。層厚の移流は傾圧波が発達するとき、500 hPa でのトラフとリッジの線の下で下部対流圏で大きさが最大となる傾向にある。項 C はマイナスの温度移流の圧力変化率（すなわち、プラスの温度移流の高度変化率）に比例するので、しばしば温度差移流と呼ばれる。

温度差移流は擾乱の発達とともに上層のアノマリーを強化する。500 hPa のリッジより下で温暖前線に伴う強い暖気の移流が存在し、一方、500 hPa のトラフより下では寒冷前線に伴う強い寒気の移流が存在する。前者は層厚を増加させ、ゆえに上層のリッジを高くする。後者は層厚を減少させ、上層のトラフを深くする。500 hPa 高度より上では温度勾配が通常弱く、等温線はしばしば等高度線にほぼ平行となるので、温度移流は小さくなる傾向にある。したがって、(6.23) の項 B と比して強制項 C は下部対流圏に集中するが、ジオポテンシャルの傾向の応答は強制の存在する高度に制限されずに、鉛直方向に広がるので、上に示したように波動が発達するとき、温度差移流は上層のトラフを深くし、リッジを立てる。

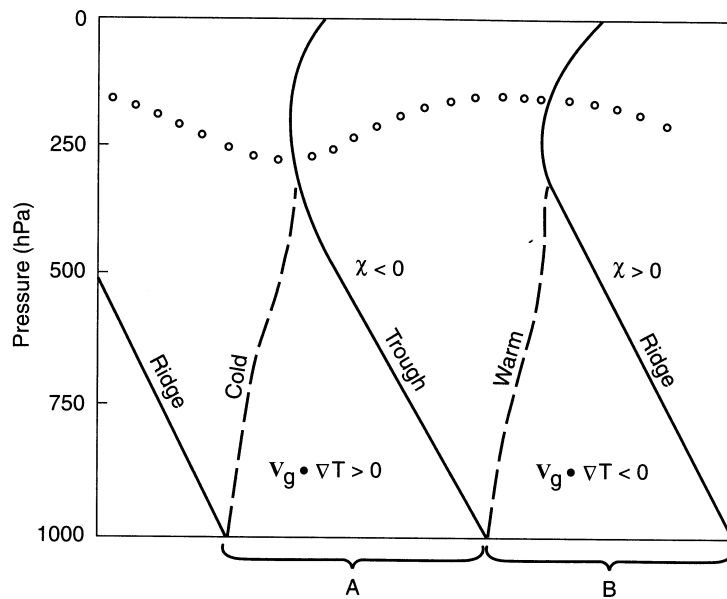


図 6.10: 上層の高度の傾向に対して、温度移流の関係を示す発達中の総観規模擾乱の東西断面図。A, B はそれぞれ下部対流圏における寒気と暖気の移流領域を表す。

このことを説明する図が 6.10 である^{*5}。以下の表にまとめる。

^{*4}層厚 Z_T は定義から $Z_T = \frac{\phi_1 - \phi_0}{g} \propto \langle T \rangle$.

^{*5}実際に AGCM における傾圧不安定実験で再現される傾圧波擾乱の鉛直構造は付録参照。

	領域 A (寒気移流)	領域 B (暖気移流)
$-V_g \cdot \nabla(-\partial\Phi/\partial p)$	負	正
$\partial[-V_g \cdot \nabla(-\partial\Phi/\partial p)]/\partial p$	負	正
ジオポテンシャルの時間変化	負	正
相対渦度の時間変化	正	負
軸の値	低下	増加

ゆえに、渦度の移流がゼロとなる^{*6}500 hPa のトラフとリッジの軸に沿って、傾向方程式は発達する波動に対して

$$\chi = \frac{\partial\Phi}{\partial t} \sim \begin{cases} \frac{\partial}{\partial p} \left[-V_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial\Phi}{\partial p} \right) \right] > 0 & (\text{リッジで}) \\ < 0 & (\text{トラフで}) \end{cases}$$

と記述される。したがって、温度差移流がたとえ下部対流圏にしかなかったとしても、これは発達するシステムの上層のトラフとリッジを強化する。

定性的には、温度差移流の効果は、500 hPa のトラフより下の大気柱の中への寒気の移流がその気柱の厚さを減らし、それによって地表面気圧の補償による上昇がない限り、500 hPa 面の高度が下がるため、という理由で理解できる。リッジの下の気柱への暖気移流は明らかにそれと反対の効果となる。

まとめると、非断熱加熱がないとき、中緯度の総観規模システムが傾圧過程を通して強くなるので、水平の温度移流はゼロであってはならない。8章で示すように、上で暗に述べられている温度移流のパターンは運動エネルギーに対するポテンシャルエネルギーの変換を意味している。

6.3.2 準地衡ポテンシャル渦度方程式

(6.23) 式で示されているジオポテンシャルの傾向方程式はジオポテンシャルの変化によって引き起こされる過程（そしてそれに伴うトラフやリッジの強化）の物理的な動機付けについて有効である。同様に、 χ の傾向は渦度と温度の移流という簡単にまとめられた過程と関係づけられる。しかし、方程式のこの形は準地衡ポテンシャル渦度と呼ばれる一般的な場に対する保存式という真の性質を隠すことになる。(6.23) を保存形にするため、項 C を

$$-V_g \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial\Phi}{\partial p} \right) - \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial V_g}{\partial p} \cdot \nabla \frac{\partial\Phi}{\partial p}$$

と表記する。

^{*6}つまり項 B の効果がゼロとなる場所。

温度風関係式 $f_0 \partial \mathbf{V}_g / \partial p = \mathbf{k} \times \nabla(\partial \Phi / \partial p)$ を用いると、上式の第 2 項はゼロとなり、第 1 項は項 B と合わせられる。すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla \right) q = \frac{D_g q}{Dt} = 0 \quad (6.24)$$

となる。ここで、 q は

$$q \equiv \left[\frac{1}{f_0} \nabla^2 \Phi + f + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right] \quad (6.25)$$

で定義される準地衡ポテンシャル渦度である。

(6.25) 式の 3 つの項は左から順に、地衡風相対渦度、惑星渦度、伸長渦度である。あるパーセルが大気中を移動するとき、これらはそれぞれ変化する。しかし、(6.24) によると、これらの和は地衡風運動に対して保存され、(6.21)、(6.22) と整合的である。それは、断熱的な流れに対して、絶対渦度の変化が伸長渦度の変化と逆の成分でバランスするというを示している。

スカラー q は 4.3 で議論したエルテルのポテンシャル渦度 P の線形化された形に比例する。しかし、エルテルのポテンシャル渦度とは異なり、 q は渦度の単位をもち、等圧面でのジオポテンシャルの分布によって一意に決められる。ここで、エルテルのポテンシャル渦度は等エントロピー面上での断熱的な運動について保存される一方、 q は等圧面上での地衡風運動について断熱条件の下で保存される。この理由から、いくつかの教科書では擬ポテンシャル渦度と呼ばれている。しかし、一般に、 q は準地衡ポテンシャル渦度と呼ばれる。

(6.25) によると、準地衡ポテンシャル渦度はマイナスのジオポテンシャルに比例する傾向にある。 q の局所的な増加はトラフの発達に関係し、一方で q の減少はリッジの発達に関係する。 q は地衡風運動についての保存量であるので、 q の地衡風移流による傾向は純粋に診断することができる。さらに、(6.24) は地衡風があらゆる点で等 q 線に平行であるなら、(すなわち $\mathbf{V}_g \cdot \nabla q = 0$ であるなら、) その時間変化がゼロ(すなわち流れは定常)となる。

初期の Φ の分布と、適切な境界条件が与えられると、(6.24)、(6.25) からジオポテンシャル場の発展が予測できる。下部境界は $p_0 = 1000$ hPa に対応し、その面で ω はゼロとなるので、(6.13b) から 1000 hPa 面での地衡風運動に対する下部境界条件は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla \right) \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \Big|_{p=p_0} = 0 \quad (6.26)$$

と仮定される。

6.3.3 ポテンシャル渦度の逆変換性

方程式系 (6.24) - (6.26) と Φ の適切な側面および上端境界条件は地衡流の発展を完全に規定する。ゆえに、断熱条件の下で、大規模な中緯度での気象システムの発展は、内部領

域における地衡流にしたがう準地衡ポテンシャル渦度の保存 ((6.25)) と下部境界に沿った地衡流にしたがう温度の保存 ((6.26)) という 2 つの制限によって完全に決定される。

境界の効果が無視できるなら、ポテンシャル渦度の分布のみがジオポテンシャルの分布ひいては温度と地衡風の分布も決める。ポテンシャル渦度の場合からジオポテンシャル場を求める過程は、ポテンシャル渦度の逆変換性と呼ばれる。 Φ は自身の 2 回微分で q を表現するので、局所的な q のアノマリーに伴うジオポテンシャルの擾乱は、 q の偏差の領域を越えて水平、鉛直方向に広がるであろう。この遠隔的な効果は簡単な例でイメージすることができる^{*7}。

簡単化のため、静的安定パラメータ σ は高度について一定と仮定し、 $\hat{z} \equiv p(\sigma^{1/2}/f_0)$ で定義される鉛直方向の伸縮座標を導入する。すると、(6.25) は

$$q = f + q' = f + \frac{1}{f_0} \left(\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial \hat{z}^2} \right) \quad (6.27)$$

となる。ここで、 q' 、 Φ' はそれぞれポテンシャル渦度とジオポテンシャルの偏差を表す。

ここで、ポテンシャル渦度のアノマリーが (x, y, \hat{z}) 座標系の球空間で一定な正のポテンシャル渦度 q_0 の小さなボールと仮定する。すると、そのボールが初め中央に存在しているとすると、 q' は極座標 $r \equiv (x^2 + y^2 + \hat{z}^2)^{1/2}$ を用いて、

$$q' = \frac{1}{f_0^2 r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial r} \right) \quad (6.28)$$

と表される。ここで、

$$q' = \begin{cases} q_0, & (r \leq b) \\ 0, & (r > b) \end{cases}$$

である。

$r = b$ で Φ' と $\partial \Phi' / \partial r$ における連続性の要求を満足する (6.28) の解は容易に

$$\Phi' = \begin{cases} -f_0 q_0 (b^2/2 - r^2/6), & (r \leq b) \\ -f_0 q_0 b^3 / (3r), & (r > b) \end{cases} \quad (6.29)$$

であることが示される^{*8}。

図 6.11 は^{*9}この小さなポテンシャル渦度のアノマリーによって引き起こされた温位と地衡風のパターンを示している。この応答の定性的な説明は以下および図 6.12 のようにまとめられる。

^{*7}これは電磁気学における電荷分布とその分布から生まれる電位の分布と同じ類推で理解することもできる。電磁気学でもこのような効果を遠隔作用と表現している。

^{*8}導出は付録参照。

^{*9}この結果を解析解ではなく、支配方程式から直接数値計算して求めたものは付録参照。また、解析解の考察と別の形の強制についての応答も見ている。

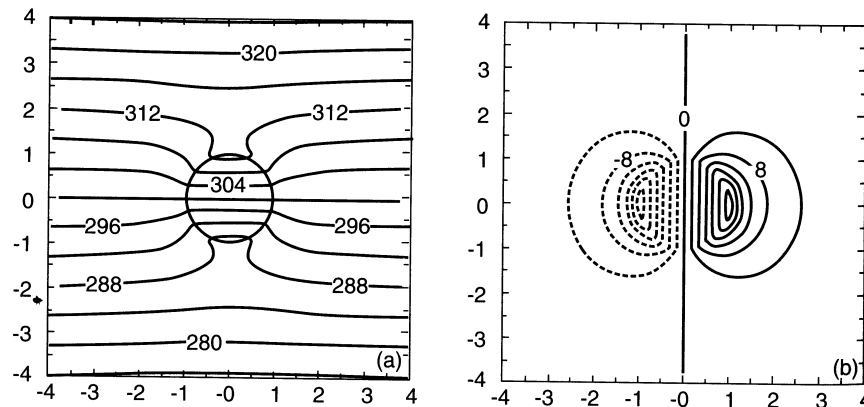


図 6.11: 無次元の半径を単位とする一定のポテンシャル渦度のボールによって引き起こされる温位(左)と地衡風(右)を示した鉛直断面図. 一定の標準大気のパテンシャル渦度がポテンシャル渦度のボールによって引き起こされるアノマリーに加えられる. (右)実線は紙面の奥への流れを表し, 破線は紙面から手前への流れを表す. 水平方向とスケールされた鉛直方向の距離はポテンシャル渦度のボールの半径で規格化されている. ボールに対して 250 km の水平距離は 2000 km を表し, 鉛直距離では 20 km を表す(浮力振動数はコリオリ振動数の 100 倍と仮定). (Thorpe and Bishop, 1995 より出典)

- θ 面の分布を見ると、Region2 では正の PV アノマリによって周りより安定度が高くなっている。
- PV アノマリの遠隔作用によって、アノマリの存在しない Region1 で安定度が低くなる。
- PV は今保存しなければならない。また、PV は絶対渦度と安定度の和なので、Region1 では安定度が下がった分だけ、渦度を増やして PV を保存しなければならない。
- Region1 に正の相対渦度のアノマリができる。
- Region1 の正の相対渦度アノマリが PV のアノマリによって形成される地衡風のアノマリとなる。
- Region2 でも、PV が保存しなければならない。ただし、ここでは元々の PV とそれにアノマリの分が追加された量で保存する。
- Region2 の安定度の増加はこの PV アノマリによるものであり、安定度を増加させてもなお PV アノマリが余っていれば、その分を正の渦度として引き起こす。
- これらによって引き起こされた相対渦度のアノマリから得られる地衡風が図 6.11 であったり、図??に示されている。

このように、ポテンシャル渦度のアノマリで引き起こされる地衡風はアノマリの境界を越えて十分遠くまで広がる。

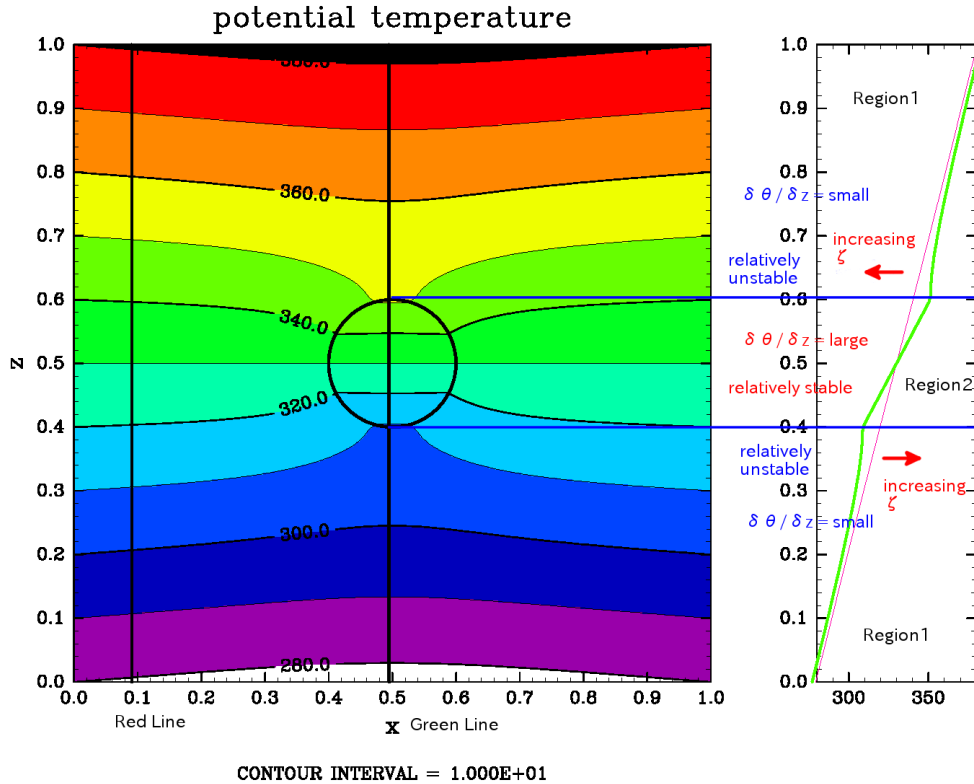


図 6.12: 有限領域に PV アノマリがある場合の領域内と領域外での安定性の違い. 赤線が領域を通っていない鉛直軸での温位分布を示し、環境場を代表していると思ってよい。緑線が領域内を通る温位分布であり、環境場からどの程度安定性が変化しているのかが見ることが出来る。Region1 がアノマリの存在しない領域、Region2 がアノマリの存在する領域を示す。

6.3.4 ポテンシャル渦度の鉛直方向のカップリング

ある高度でのポテンシャル渦度のアノマリーは別の高度でジオポテンシャルのアノマリー（とそれによる地衡風）を発生させる。これは、下部対流圏において上層の擾乱の影響に対する重要な結果である。上層のポテンシャル渦度の変化による下部対流圏でのジオポテンシャルの変化の発生は簡単な例で示せる。

上部対流圏の流れは (6.20) のジオポテンシャル構造で特徴づけられるとする。すると、そのポテンシャル渦度は $q = f + Q(p) \sin kx \cos ly$ で表現される。ここで、 $Q =$

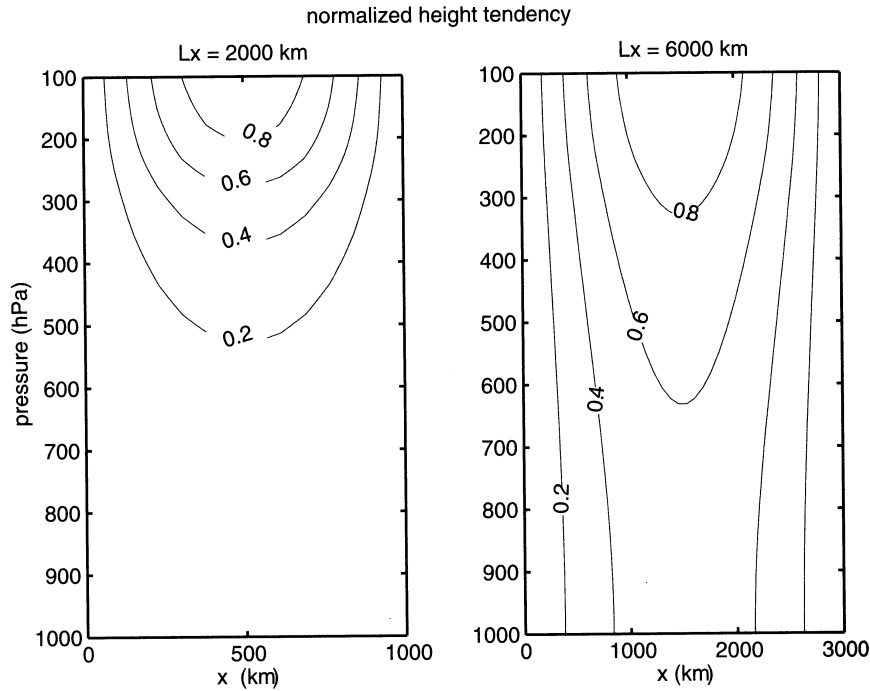


図 6.13: 250 hPa より上空に制限されているポテンシャル渦度のアノマリーの移流によって強制されるジオポテンシャル高度の時間変化の鉛直方向への広がり. 上げられる高度の時間変化は 100 hPa 高度でのそれらの値で規格化されている. 東西波長 2000 km (左) と 6000 km (右) に対する解. ここで, $l = 0$, $k = 2\pi/L_x$, $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\sigma = 2 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ Pa}^{-2} \text{ s}^{-2}$ である.

$-(k^2 + l^2)^2 A + (f_0/\sigma)\partial^2 A/\partial p^2$, σ は一定と仮定する^{*10}. もし, f の緯度方向の変化が無視されると, 準地衡ポテンシャル渦度方程式は

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\mathbf{V}_g \cdot \nabla q = -U \frac{\partial q}{\partial x} = -kUQ \cos kx \cos ly$$

と表現されるので, 再び $\chi = \partial \Phi / \partial t$ とおくと,

$$\frac{1}{f_0} \nabla^2 \chi + \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial^2 \chi}{\partial p^2} = -kUQ \cos kx \cos ly \quad (6.30)$$

となる. これは, ジオポテンシャルの傾向について解かれる.

$$\chi(x, y, p, t) = X(p, t) \cos kx \cos ly$$

と仮定し, (6.30) に代入すると, ジオポテンシャルの時間変化の鉛直依存性に対する方程式を得る. すなわち,

$$\frac{d^2 X}{dp^2} - \lambda^2 X = -\frac{\sigma}{f_0} kUQ \quad (6.31)$$

^{*10} (原文脚注) 実際, σ は対流圏において圧力とともに大きく変化する. しかし, 本節での定性的な議論では複雑となるため変化しないと仮定する.

である. ここで, $\lambda^2 \equiv (k^2 + l^2) \sigma f_0^{-2}$ である. 式 (6.31) はある高度でのポテンシャル渦度の移流が強制となり, (圧力単位で測られたときの) 鉛直スケールが λ^{-1} となる鉛直構造の振幅をもつ χ の応答を生成することを示している. ゆえに, 大きな水平スケール (小さな k) の擾乱に伴う上層の渦度移流は振幅の損失をほとんどせずに地表面まで広がるジオポテンシャルの時間変化を生成する^{*11}. つまり, (6.31) の微分演算子は鉛直方向に応答を広げるので, ある高度での強制は別の高度に影響を与える.

^{*11} 上式は非斉次方程式ではあるが, 一般解が圧力座標についての指数関数型で記述される. つまり, $X \propto e^{\pm \lambda p}$ という形になる. よって, 振幅 X の e-folding scale は λ^{-1} となる. したがって, $\lambda^{-1} \propto \sqrt{k^2 + l^2}^{-1}$ となる. このことから, 振幅の減衰するスケールは水平方向の擾乱の波長 (スケール) に依存することがわかる. 具体的には, k, l が大きいほど (水平スケールが小さいほど) 高度とともに急速に減衰する. 逆もまたしかり. よって, 本文の記述と整合的である.

(6.29) 式導出

(6.28) とその下の強制項の条件, および境界での接続条件から, (6.29) を導出する. まず, ジオポテンシャルのアノマリーはここでは r のみの関数であることから, (6.28) 式は

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) = q' f_0 r^2$$

と書き直される. この式について, $0 \leq r \leq b$ と $r > b$ に分けて解を求める. $0 \leq r \leq b$ では,

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) = q_0 f_0 r^2$$

であるから,

$$\Phi'_i = \frac{f_0 q_0}{6} r^2 - \frac{C}{r} + D$$

となる. ここで, C, D は境界条件と物理条件から求められる積分定数である. 物理条件から, $r = 0$ で Φ'_i は有限値でなければならないので, $C = 0$ である. よって, $0 \leq r \leq b$ での一般解は

$$\Phi'_i = \frac{f_0 q_0}{6} r^2 + D$$

となる. 次に, $r > b$ での方程式は,

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) = 0$$

であるので, この解は

$$\Phi'_o = -\frac{E}{r} + F$$

となる. ここで, E, F は先と同様に境界条件と物理条件から得られる定数である. アノマリーは $r \rightarrow \infty$ でゼロでなければならないという物理的条件から, $F = 0$ となることがわかる. よって, $r > b$ での一般解は,

$$\Phi'_o = -\frac{E}{r}$$

となる. さらに, Φ'_i と Φ'_o が境界で連続的に接続しなければならないという接続条件から,

$$\Phi'_i(b) = \Phi'_o(b), \quad \left. \frac{d\Phi'_i}{dr} \right|_{r=b} = \left. \frac{d\Phi'_o}{dr} \right|_{r=b}$$

を満たさなければならない. これより, 残りの積分定数について,

$$\frac{f_0 q_0}{6} b^2 + D = -\frac{E}{b}, \quad \frac{f_0 q_0}{3} b = \frac{E}{b^2}$$

という連立方程式が得られるので, これらを解くと,

$$E = \frac{f_0 q_0}{3} b^3, \quad D = -\frac{f_0 q_0}{2} b^2$$

が得られる. よって, 得られる解は

$$\Phi' = \begin{cases} -f_0 q_0 (b^2/2 - r^2/6), & (r \leq b) \\ -f_0 q_0 b^3/(3r), & (r > b) \end{cases} \quad (6.29)$$

となることがわかる.

(6.27) の直接数値計算および解の考察

以下に, (6.27) の直接数値計算による計算結果をいくつか掲載する. 最初は原文と同様にテーブル関数型のアノマリー、後はガウシアン型の強制を与えたジオポテンシャルの応答である。

解析解について少し考察を行う。地衡風は (6.7) を計算することで容易に求められる。ただし, 球座標系で表記されている Φ' はデカルト座標系に直し, $r = b$ の前後でそれぞれの領域に対応する解を用いなければならない。そのような点に注意すると, アノマリーによって引き起こされる地衡風 V_g は

$$V_g = \frac{k}{f_0} \times \nabla \Phi'$$

で計算されるので, $0 \leq r \leq b$ について,

$$u_g = -\frac{f_0 q_0 y}{3}, \quad v_g = \frac{f_0 q_0 x}{3} \quad \Rightarrow \quad V_g = \frac{f_0 q_0}{3} k \times R$$

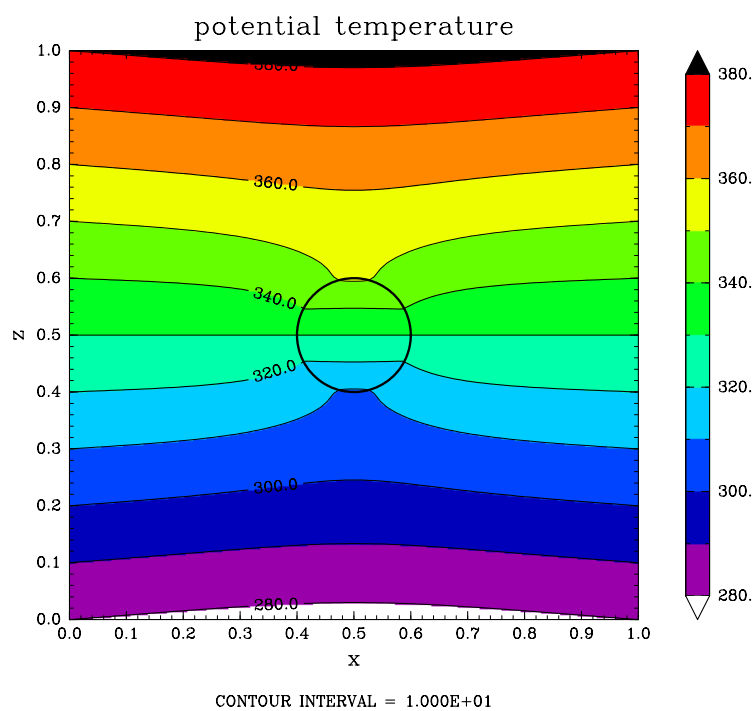
$r > b$ について,

$$u_g = -\frac{f_0 q_0 b^3 y}{3r^3}, \quad v_g = \frac{f_0 q_0 b^3 x}{3r^3} \quad \Rightarrow \quad V_g = \frac{f_0 q_0 b^3}{3r^3} k \times R$$

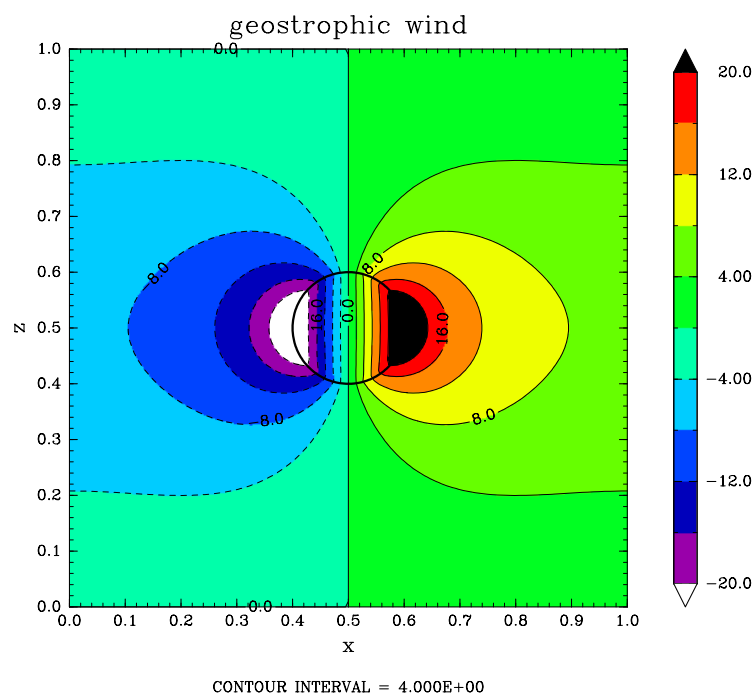
となるのがわかる。ここで, R は球の中心を原点とし, デカルト座標系の z 軸を一致させた円筒座標系における水平方向の位置ベクトルである。この結果と図 6.11 を見ると, 強制の存在する領域では, z 軸を原点として地衡風が軸に比例する形で変化していることがわかる。また, 強制の存在する領域外でも, z 軸に対称に応答が見られるが, こちらは強制の中心から離れるにしたがい値が減少していることがわかる。これらは解析解と同様の振る舞いである。

AGCM における傾圧波擾乱

図 6.16 は実際に AGCM の傾圧不安定実験において観測される傾圧波擾乱の鉛直構造および, 水平構造である。図 6.10 の模式図で見られるような波構造の傾きが存在し, トラフの軸の東西で温度構造が変化していることがわかる。

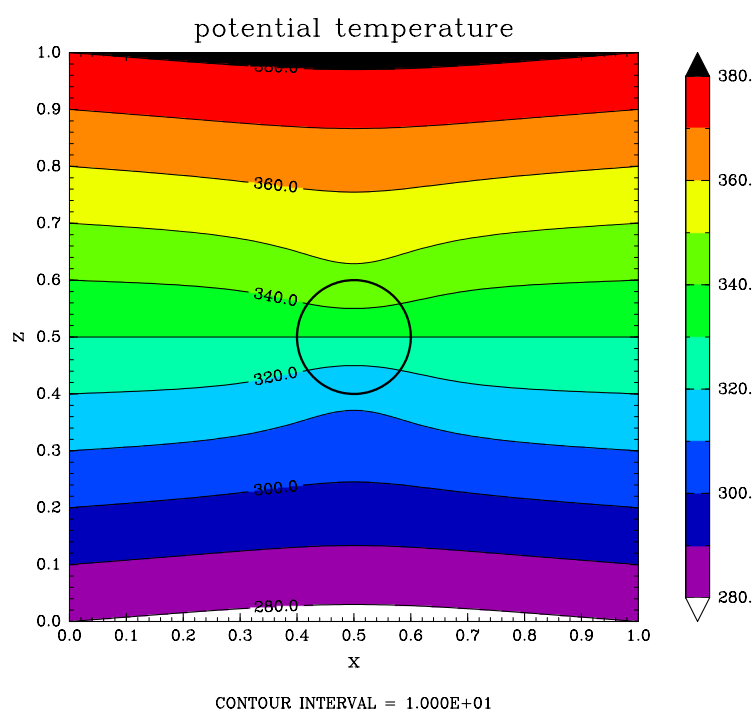


(a)

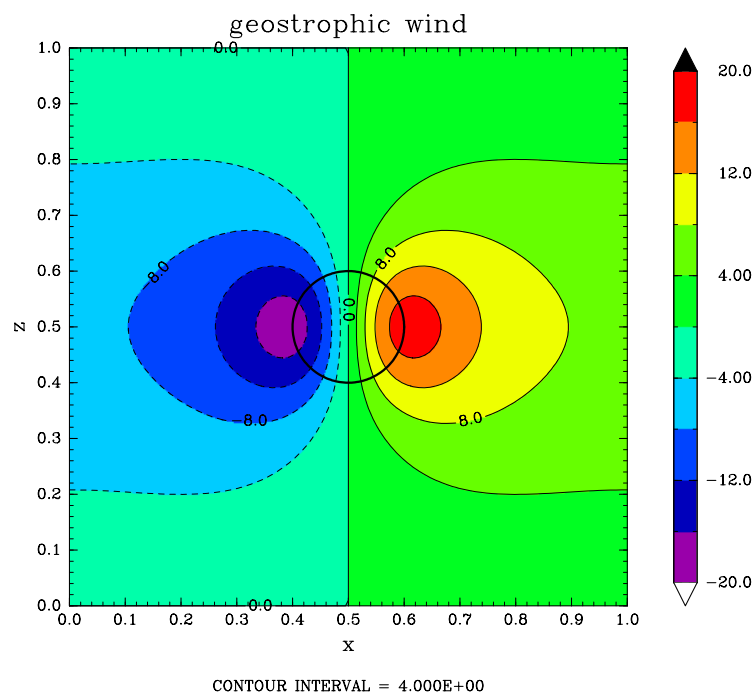


(b)

図 6.14: 図 6.11 の再現実験. アノマリは領域の中央にテーブル関数型で与えた. 円形の実線はアノマリーの外郭. 上が温位場, 下がジオポテンシャルのアノマリから得られる地衡風.

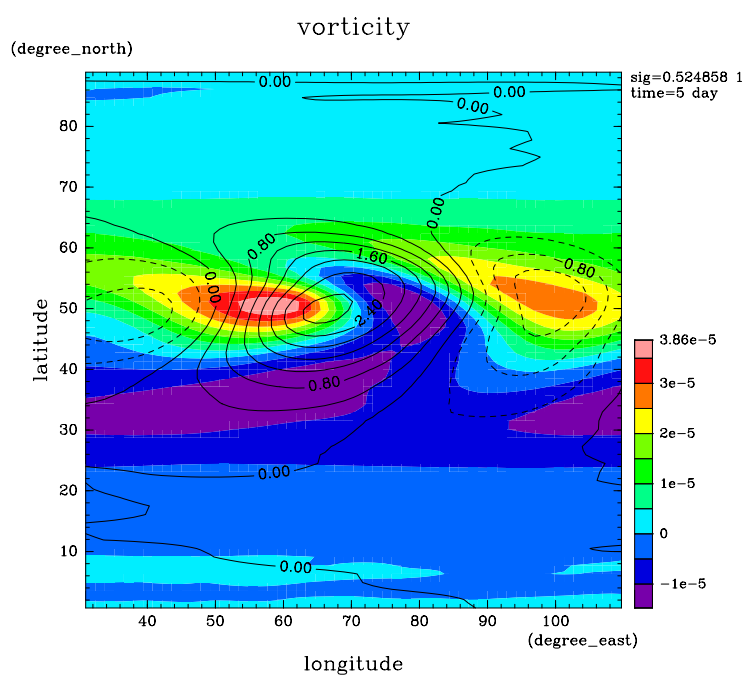


(a)

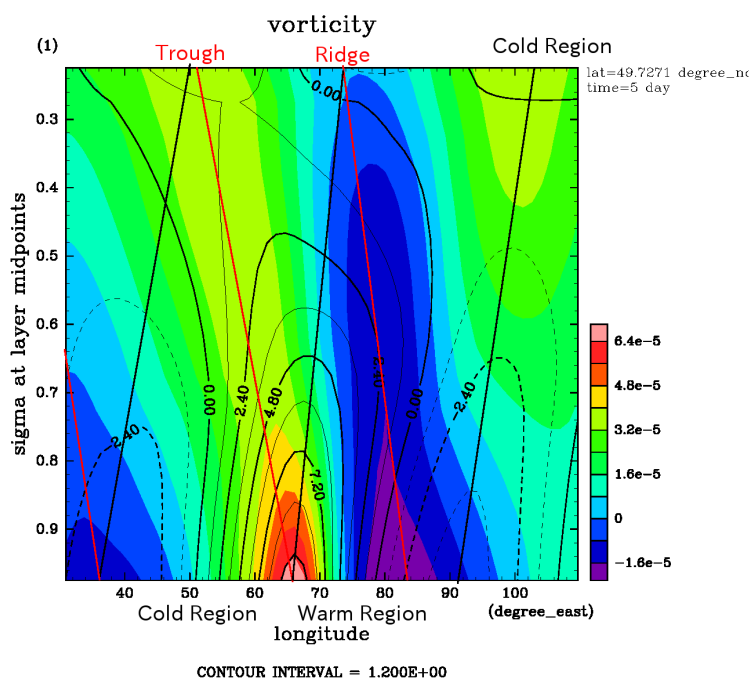


(b)

図 6.15: アノマリは領域中央にピークをもつガウシアン型. 円形の実線はガウシアン半値幅境界. 上が温位場, 下がジオポテンシャルのアノマリから得られる地衡風.



(a)



(b)

図 6.16: 図 6.10 の再現実験. カラーが相対渦度, 等値線が温度の東西平均アノマリ. (a) が高度約 500 hPa 面での傾圧波の水平構造, (b) が緯度約 50 度における傾圧波の鉛直構造.