

球面 σ 座標系での Transformed Eulerian Mean 方程式系について

2026 年 10 月 10 日 竹広 真一

この文書では, 経度 λ , 緯度 φ , 動径 σ からなる球面 σ 座標系での Transformed Eulerian Mean (TEM) 方程式を構成する.

1 支配方程式

連続の式, 運動方程式経度成分, 熱力学の式は,

$$\frac{d\pi}{dt} + \nabla_H \cdot \mathbf{v}_H + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{du}{dt} - fv - \frac{uv}{a} \tan \varphi = -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{RT}{a \cos \varphi} \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} + \mathcal{F}_\lambda, \quad (2)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{RT}{C_p} \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla \pi + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} \right) + \frac{Q}{C_p}. \quad (3)$$

ここで $\pi = \log p_s$, d/dt は σ 系でのラグランジュ微分であり,

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_H + \dot{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}. \quad (4)$$

ただし $\mathbf{v}_H = (u, v)$ は速度経度, 緯度成分である.

1.0.1 TEM を構成するための方程式系

TEM の導出のために支配方程式を変形する. 連続の式に p_s をかけて変形すると,

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \nabla_H \cdot (p_s \mathbf{v}_H) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (p_s \dot{\sigma}) = 0. \quad (5)$$

熱力学の式は, 元々,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C_p \rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Q}{C_p} \quad (6)$$

であるから、温位 $\theta = T(p_0/p)^\kappa$ を導入して、

$$\frac{d}{dt} \log \theta = \frac{Q}{C_p T}, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{Q}{T}. \quad (7)$$

ここで $s = C_p \log \theta$ はエントロピーである。さらに連続の式を適用して、

$$\frac{\partial}{\partial t}(p_s s) + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda}(p_s s u) + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda}(p_s s v \cos \varphi) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(p_s s \dot{\sigma}) = p_s \frac{Q}{T}. \quad (8)$$

最後に角運動量保存則を導く。運動方程式経度成分に $p_s a \cos \varphi$ をかけて変形すると¹

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p_s m}{\partial t} + \nabla_H \cdot (m p_s \mathbf{v}_H) + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}(m_p p_s v \cos \varphi) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(m p_s \dot{\sigma}) \\ &= -p_s \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - RT \frac{\partial p_s}{\partial \lambda} + p_s a \cos \varphi \mathcal{F}_\lambda, \end{aligned} \quad (9)$$

ただし $m = u a \cos \varphi$ は局所角運動量, $m_p = \Omega a^2 \cos^2 \varphi$ は惑星角運動量である。

経度平均を施すと、

$$\frac{\partial \overline{p_s}}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\overline{p_s v} \cos \varphi) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\overline{p_s \dot{\sigma}}) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \overline{m}}{\partial t} + \nabla_H \cdot (\overline{m \mathbf{v}_H}) + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\overline{m_p v} \cos \varphi) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\overline{m \dot{\sigma}}) = -\overline{p_s \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}} - \overline{RT \frac{\partial p_s}{\partial \lambda}} + \overline{p_s a \cos \varphi \mathcal{F}_\lambda}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{p_s s}) + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\overline{p_s s v} \cos \varphi) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(\overline{p_s s \dot{\sigma}}) = \overline{p_s \frac{Q}{T}}. \quad (12)$$

¹左辺に $a \cos \varphi$ をかけると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(u a \cos \varphi) + u \frac{\partial u}{\partial \lambda} + v \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} + -u v \sin \varphi + 2 v a \Omega \sin \varphi \cos \varphi + \dot{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}(u a \cos \varphi) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(u a \cos \varphi) + u \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi}(u a \cos \varphi) + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\Omega a^2 \cos^2 \varphi) + \dot{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}(u a \cos \varphi). \end{aligned}$$

更に p_s をかけて連続の式を用いると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(p_s u a \cos \varphi) + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda}(p_s u^2 a \cos \varphi) + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}(p_s u a \cos \varphi) v \cos \varphi \\ &+ \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}(p_s \Omega a^2 \cos^2 \varphi) v \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial \sigma}(p_s u a \cos \varphi \dot{\sigma}) \\ &= \frac{\partial p_s m}{\partial t} + \nabla_H \cdot (m p_s \mathbf{v}_H) + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}(m_p p_s v \cos \varphi) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(m p_s \dot{\sigma}) \end{aligned}$$

ただし $m = u a \cos \varphi$ は局所角運動量, $m_p = \Omega a^2 \cos^2 \varphi$ は惑星角運動量である。

$p_s v = V$, $p_s \dot{\sigma} = W$ と表し, 平均と擾乱に分離して $u = \bar{u} + u'$, $s = \bar{s} + s'$, $V = \bar{V} + V'$, $W = \bar{W} + W'$ と表す. ただし ' 量は経度平均が 0 である. すると,

$$\frac{\partial \bar{p}_s}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\bar{V} \cos \varphi) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\bar{W}) = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{p}_s \bar{m}}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\bar{m} \bar{V} \cos \varphi) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\bar{m} \bar{W}) + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (m_p \bar{V} \cos \varphi) \\ &= -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\overline{m' V'}) \cos \varphi - \frac{\partial}{\partial \sigma} (\overline{m' W'}) - p_s \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - RT \frac{\partial p_s}{\partial \lambda} + \overline{p_s a \cos \varphi \mathcal{F}_\lambda}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{p}_s \bar{s}) + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\bar{s} \bar{V} \cos \varphi) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\bar{s} \bar{W}) = -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\overline{s' V'}) \cos \varphi - \frac{\partial}{\partial \sigma} (\overline{s' W'}) + \overline{p_s \frac{Q}{T}}. \quad (15)$$

以下では簡単のため, 連続の式の第 1 項の時間変化が無視できるとする. すなわち, $\frac{\partial \bar{p}_s}{\partial t} = 0$ として扱うと,

$$\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\bar{V} \cos \varphi) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\bar{W}) = 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{p}_s \bar{m}}{\partial t} + \frac{\bar{V}}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\bar{m} + m_p) + \bar{W} \frac{\partial \bar{m}}{\partial \sigma} \\ &= -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\overline{m' V'}) \cos \varphi - \frac{\partial}{\partial \sigma} (\overline{m' W'}) - p_s \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - RT \frac{\partial p_s}{\partial \lambda} + \overline{p_s a \cos \varphi \mathcal{F}_\lambda}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{p}_s \bar{s}) + \frac{\bar{V}}{a} \frac{\partial \bar{s}}{\partial \varphi} + \bar{W} \frac{\partial \bar{s}}{\partial \sigma} = -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\overline{s' V'}) \cos \varphi - \frac{\partial}{\partial \sigma} (\overline{s' W'}) + \overline{p_s \frac{Q}{T}}. \quad (18)$$

2 TEM の導出

TEM 方程式を構成するために, エネルギー方程式の渦フラックス項 φ 成分を残差循環 (Residual Circulation) として取り込むことから始める. すなわち,

$$\bar{V}^* = \bar{V} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\overline{s' V'}}{\bar{s}_\sigma} \right), \quad \bar{W}^* = \bar{W} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\overline{s' V'}}{\bar{s}_\sigma} \right). \quad (19)$$

この残差循環 $(\bar{V}^*, \bar{W}^*)$ は連続の式を満たしている.

$$\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\bar{V}^* \cos \varphi) + \frac{\partial \bar{W}^*}{\partial \sigma} = 0. \quad (20)$$

残差質量流線関数 Ψ^* を次のように導入すると

$$\bar{V}^* = -\frac{g}{2\pi a \cos \varphi} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \sigma}, \quad \bar{W}^* = \frac{g}{2\pi a^2 \cos \varphi} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \varphi}, \quad \Psi^* = -\frac{2\pi a \cos \varphi}{g} \int_0^\sigma \bar{V}^* d\sigma \quad (21)$$

エネルギー方程式は次のようになる².

$$\frac{\partial \overline{p_s \bar{s}}}{\partial t} + \frac{\bar{V}^*}{a} \frac{\partial \bar{s}}{\partial \varphi} + \bar{W}^* \frac{\partial \bar{s}}{\partial \sigma} = -\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\overline{s' W'} - \bar{s}_\varphi \frac{\overline{s' V'}}{\bar{s}_\sigma} \right) + \overline{p_s \frac{Q}{T}}. \quad (22)$$

角運動量保存則を残差循環 $\bar{V}^*$, $\bar{W}^*$ で表すと³,

$$\frac{\partial \overline{p_s \bar{m}}}{\partial t} + \frac{\bar{V}^*}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\bar{m} + m_p) + \bar{W}^* \frac{\partial \bar{m}}{\partial \sigma} = \nabla_H \cdot \mathcal{F} - \overline{p_s \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}} - \overline{RT \frac{\partial p_s}{\partial \lambda}} + \overline{p_s a \cos \varphi \mathcal{F}_\lambda}, \quad (23)$$

$$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_\varphi, \mathcal{F}_\sigma), \quad (24)$$

$$\mathcal{F}_\varphi = -\overline{m' V'} + \frac{\partial \bar{m}}{\partial \sigma} \left(\frac{\overline{s' V'}}{\bar{s}_\sigma} \right), \quad \mathcal{F}_\sigma = -\overline{m' W'} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\bar{m} + m_p) \left(\frac{\overline{s' V'}}{\bar{s}_\sigma} \right). \quad (25)$$

3 確認のための例題

3.1 基本場

表面圧力は一定一様 p_s とする.

²右辺を構成する際の計算は

$$\begin{aligned} & -\frac{\bar{s}_\varphi}{a} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\overline{s' V'}}{\bar{s}_\sigma} \right) + \frac{\bar{s}_\sigma}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\overline{s' V'}}{\bar{s}_\sigma} \right) \\ &= -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\bar{s}_\varphi \frac{\overline{s' V'}}{\bar{s}_\sigma} \right) + \frac{\overline{s' V'}}{a \bar{s}_\sigma} \frac{\partial \bar{s}_\varphi}{\partial \sigma} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\bar{s}_\sigma \cos \varphi \frac{\overline{s' V'}}{\bar{s}_\sigma} \right) - \frac{\overline{s' V'}}{\bar{s}_\sigma} \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{s}_\sigma}{\partial \varphi} \\ &= -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\bar{s}_\varphi \frac{\overline{s' V'}}{\bar{s}_\sigma} \right) + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi \overline{s' V'}) \end{aligned}$$

³残差循環で表すことによる角運動量保存則の右辺への寄与を計算すると,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\bar{m} + m_p) \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\overline{s' V'}}{\bar{s}_\sigma} \right) + \frac{\partial \bar{m}}{\partial \sigma} \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\overline{s' V'}}{\bar{s}_\sigma} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\bar{m} + m_p) \left(\frac{\overline{s' V'}}{\bar{s}_\sigma} \right) \right] + \left(\frac{\overline{s' V'}}{\bar{s}_\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\bar{m} + m_p) \\ & \quad + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial \bar{m}}{\partial \sigma} \left(\cos \varphi \frac{\overline{s' V'}}{\bar{s}_\sigma} \right) \right] - \left(\cos \varphi \frac{\overline{s' V'}}{\bar{s}_\sigma} \right) \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \bar{m}}{\partial \sigma} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\bar{m} + m_p) \left(\frac{\overline{s' V'}}{\bar{s}_\sigma} \right) \right] + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial \bar{m}}{\partial \sigma} \left(\cos \varphi \frac{\overline{s' V'}}{\bar{s}_\sigma} \right) \right]. \end{aligned}$$

帯状平均エントロピーは σ の 1 次関数, 擾乱が鉛直一様の $Y_1^1 = \cos \varphi \cos \lambda$ を与える.

$$s = s_0 + \Gamma \sigma + s_1 \cos \varphi \cos \lambda, \quad (26)$$

これを温度に変換すると, $s = C_p \log \theta = C_p \log T \left(\frac{p_0}{p_s} \right)^\kappa = C_p \log T \sigma^{-\kappa}$ より,

$$T = \sigma^\kappa \exp \left(\frac{s}{C_p} \right) = \sigma^\kappa \exp \left[\frac{1}{C_p} (s_0 + \Gamma \sigma + s_1 \cos \varphi \cos \lambda) \right]. \quad (27)$$

$\sigma = 1$ での平均温度を T_0 とすれば,

$$T = \sigma^\kappa \exp \left(\frac{s}{C_p} \right) = T_0 \sigma^\kappa \exp \left\{ \frac{1}{C_p} [\Gamma(\sigma - 1) + s_1 \cos \varphi \cos \lambda] \right\}. \quad (28)$$

帯状速度場は次のような鉛直シアーを持つ場合を考える.

$$u = u_0 \sigma \cos \varphi. \quad (29)$$

3.2 帯状循環場

残差循環第 1 項のチェックのため, 帯状擾乱速度場を次のように与える.

$$T = 0 \quad (30)$$

$$u = 0, \quad v = v_0 \sin 2\varphi \cos(\pi\sigma), \quad \dot{\sigma} = w_0(1 - 3 \sin^2 \varphi) \sin(\pi\sigma). \quad (31)$$

このとき

$$\frac{\overline{s'V'}}{\bar{s}_\sigma} = 0, v' = w' = 0, \quad (32)$$

であるから,

$$V^* = p_s v_0 \sin 2\varphi \cos(\pi\sigma), \quad W^* = p_s w_0(1 - 3 \sin^2 \varphi) \sin(\pi\sigma), \quad (33)$$

$$\Psi^* = -\frac{2ap_s v_0}{g} \sin 2\varphi \cos \varphi \sin(\pi\sigma), \quad (34)$$

$$\mathcal{F}_\varphi = \mathcal{F}_\sigma = 0. \quad (35)$$

3.3 波擾乱その 1

EP フラックス第 1 項のチェックのため, 波擾乱速度場を次のように与える.

$$T = 0, \quad (36)$$

$$u = u_1 \sin^2 2\varphi \cos \lambda \cos(\pi\sigma), \quad (37)$$

$$v = v_1 \sin 2\varphi \cos \lambda \cos(\pi\sigma), \quad (38)$$

$$\dot{\sigma} = w_1 \cos \varphi \cos \lambda \sin(\pi\sigma). \quad (39)$$

このとき

$$\frac{\overline{s'V'}}{\overline{s_\sigma}} = 0, \quad m' = u'a \cos \varphi = u_1 a \sin^2 2\varphi \cos \varphi \cos \lambda \cos(\pi\sigma), \quad (40)$$

であるから,

$$V^* = W^* = \Psi^* = 0, \quad (41)$$

$$\mathcal{F}_\varphi = -\overline{m'V'} = \frac{p_s a u_1 v_1}{2} \sin^3 2\varphi \cos \varphi \cos^2(\pi\sigma), \quad (42)$$

$$\mathcal{F}_\sigma = -\overline{m'W'} = \frac{p_s a u_1 w_1}{4} \sin^2 2\varphi \cos^2 \varphi \sin(2\pi\sigma), \quad (43)$$

3.4 波擾乱その 2

残差循環第 2 項, および EP フラックス第 2 項のチェックのため, 擾乱場を次のように与える.

$$T = \sigma^\kappa \exp \left[\frac{1}{C_p} (s_1 \cos \varphi \cos 2\lambda) \right], \quad (44)$$

$$u = 0, \quad v = v_1 \sin 2\varphi \cos 2\lambda \cos(\pi\sigma), \quad \dot{\sigma} = 0. \quad (45)$$

このとき,

$$\frac{\overline{s'V'}}{\overline{s_\sigma}} = \frac{p_s s_1 v_1}{\Gamma} \sin \varphi \cos^2 \varphi \cos(\pi\sigma), \quad (46)$$

$$m = u_0 a \sigma \cos^2 \varphi, \quad \frac{\partial m}{\partial \sigma} = u_0 a \cos^2 \varphi, \quad \frac{1}{a} \frac{\partial m}{\partial \varphi} = -2u_0 \sigma \cos \varphi \sin \varphi, \quad (47)$$

$$m_p = \Omega a^2 \cos^2 \varphi, \quad \frac{1}{a} \frac{\partial m_p}{\partial \varphi} = -2a\Omega \cos \varphi \sin \varphi, \quad (48)$$

であるから,

$$V^* = \frac{\pi p_s s_1 v_1}{\Gamma} \sin \varphi \cos^2 \varphi \sin(\pi \sigma), \quad (49)$$

$$W^* = \frac{p_s s_1 v_1}{a \Gamma} \cos^2 \varphi (1 - 4 \sin^2 \varphi) \cos(\pi \sigma), \quad (50)$$

$$\Psi^* = \frac{2\pi a p_s s_1 v_1}{g \Gamma} \sin \varphi \cos^3 \varphi [\cos(\pi \sigma) - 1] \quad (51)$$

$$\mathcal{F}_\varphi = \frac{u_o a p_s s_1 v_1}{\Gamma} \sin \varphi \cos^4 \varphi \cos(\pi \sigma), \quad (52)$$

$$\mathcal{F}_\sigma = \frac{2u_o p_s s_1 v_1}{\Gamma} \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi (u_0 \sigma + \Omega a) \cos(\pi \sigma). \quad (53)$$