

球面 σ 座標系での質量流線関数について

2024 年 10 月 30 日

竹広 真一

この文章では質量流線関数を用いた質量流束の記述について述べる．特に，質量流線関数の等値線が領域境界を横切ること，すなわち境界からの質量の流入流出が存在する状況での注意点をまとめる．具体的に静力学平衡を仮定した系における例を示す．

1 一般論

一般的な連続の式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1)$$

である．ここで ρ は密度， $\mathbf{u}$ は速度であり， $\rho \mathbf{u}$ は質量流束である．

質量流線関数は空間 2 次元かつ密度分布が時間変化しない場合に次のように定義できる．2 次元空間座標を (x_1, x_2) ，2 次元空間面の単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とすると，

$$\rho \mathbf{u} = \nabla \times (\psi \mathbf{n}) \quad (2)$$

で質量流線関数 $\psi(x_1, x_2)$ により質量流束を表現できる．このとき定常な連続の式を自動的に満たしている．

直交直線座標系 (x, y, z) で (y, z) 2 次元系だと $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$ に選んで，

$$\frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} = 0, \quad \rho u_y = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \rho u_z = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (3)$$

u_y, u_z のどちらかの成分を境界から積分することにより ψ が求められる．例えば $z = z_1$ で $u_z = 0$ とすると，

$$\psi(y, z) = \int_{z_1}^z (\rho u_z)(y, z) dz. \quad (4)$$

z 方向全領域で積分すると

$$\psi(y, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} (\rho u_z)(y, z) dz. \quad (5)$$

一方で, 連続の式を積分すると

$$\int \frac{\partial u_y}{\partial y} dz = -[u_z(z_2) - u_z(z_1)] = 0. \quad (6)$$

2 鉛直圧力 (p) 座標系

静力学平衡を仮定した系では鉛直座標として圧力 p を用いることができる. その場合の連続の式は

$$\nabla \cdot_h \mathbf{u}_h + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0, \quad (7)$$

である. ここで $\mathbf{u}_h$ は水平速度, $\nabla \cdot_h$ は水平発散である. この連続の式は時間変化項がないので常に質量流線関数を定義できる. しかしながら, その等値線は一般的には境界を横切り, 境界からの質量の流入流出が伴うことに注意が必要である.

3 σ 座標系

ここでは σ 座標系のプリミティブ方程式系における質量流線関数の定式化を行う.

球面座標でのプリミティブ方程式系における連続の式は

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma \pi = -D - \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma}, \quad D = \nabla_\sigma \cdot \mathbf{v}_H = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi). \quad (8)$$

ただし $\pi = \log p_s$, $\mathbf{v}_H = (u, v)$ は水平速度である. あるいは変形して

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla_\sigma p_s = -p_s D - p_s \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial p_s}{\partial t} + \nabla_\sigma \cdot (p_s \mathbf{v}_H) + \frac{\partial p_s \dot{\sigma}}{\partial \sigma}. \quad (9)$$

帯状平均成分を考える. さらに時間変化が小さいとして時間微分を無視すると

$$\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\overline{p_s v} \cos \varphi) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\overline{p_s \dot{\sigma}}) = 0. \quad (10)$$

この連続の式を満たすように質量流線関数を次のように定義する.

$$\overline{p_s v} = -\frac{g}{2\pi a \cos \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}, \quad \overline{p_s \dot{\sigma}} = \frac{g}{2\pi a^2 \cos \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}. \quad (11)$$

第 1 式を $\sigma = 0$ で $\Psi = 0$ として σ で積分すると¹,

$$\Psi = -\int_0^\sigma \frac{2\pi a \cos \varphi}{g} \overline{p_s v} d\sigma. \quad (12)$$

¹次元チェック. $\text{m}/(\text{m}/\text{s}^2) (\text{kg m}/\text{s}^2/\text{m}^2) (\text{m}/\text{s}) = \text{kg}/\text{s}$.