流体力学 授業資料 (2025-12-22)

5. 渦の記述

5.1 渦に関する緒量

- 渦度 (vorticity)

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \mathrm{rot}\boldsymbol{v} \ \ [\mathrm{sec}^{-1}]. \tag{1}$$

  渦度 $\boldsymbol{\omega}$ は局所的な渦の強さを表す量である.

- 循環 (circulation) 閉曲線 C に対して

$$\Gamma \equiv \int \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{x} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{S} \ [\mathrm{m}^2\,\mathrm{sec}^{-1}] \tag{2}$$

  を循環 (circulation) という. 循環 Γ は大域的な渦の強さを表す量である.

- 例
  - $\boldsymbol{v} = (a, 0, 0)$

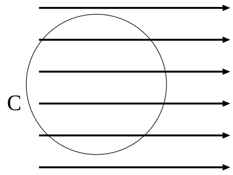


図 1: 渦度 例 1

  - $\boldsymbol{v} = (-ay, ax, 0)$

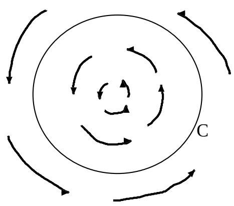


図 2: 渦度 例 2

  - $\boldsymbol{v} = (-ay/(x^2 + y^2), ax/(x^2 + y^2), 0)$: 渦糸

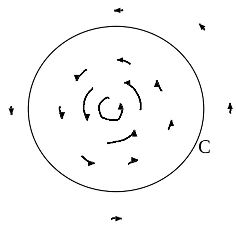


図 3: 渦度 例 3

- 渦線 (vortex line)
  ある時刻での渦度ベクトル場の積分. 渦線の微分方程式は以下である.
$$\frac{dx}{\omega_x(\boldsymbol{x},t)} = \frac{dy}{\omega_y(\boldsymbol{x},t)} = \frac{dz}{\omega_z(\boldsymbol{x},t)}. \tag{3}$$

- 渦管 (vortex tube)
  - 流れの中の 1 つの閉曲線 C の各点を通る渦線群によって形成される管.
  - 渦管上では Γ は閉曲線のとりかたによらず同じ値となる. その理由は以下の通り. まず, 図 4 に示す閉曲線 S_1 では
$$\int_{S_1} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{x} = \int \boldsymbol{\omega} d\boldsymbol{S} = 0 \tag{4}$$
    となる. なぜなら, 渦管の表面では, $\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{n}$ は直交し, そのため渦管の表面上では $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}dS = \boldsymbol{\omega}\cdot d\boldsymbol{S}$ の表面積分は 0 になるからである. よって,
$$0 = \int_{S_1} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{x} = \int_{c_1} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{x} - \int_{c_2} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{x} + \int_{\uparrow} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{x} + \int_{\downarrow} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{x}. \tag{5}$$
    よって
$$\int_{c_1} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{x} = \int_{c_2} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{x}. \tag{6}$$

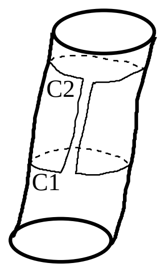


図 4: 渦管の循環. 積分経路全体を S_1 とする. 上の輪を c_1, 下の輪を c_2 とする.

5.2 渦度方程式

5.2.1 渦度方程式の導出

運動方程式
$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p - \mathrm{grad}\Phi + \boldsymbol{F} \tag{7}$$

の両辺に rot を作用すると

$$\mathrm{rot}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \mathrm{rot}\left\{(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\,\boldsymbol{v}\right\} = -\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p\right) - \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\Phi) + \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \tag{8}$$

となる. この式を変形する. 各項ごとに考える.

- (8) の左辺第二項 $\mathrm{rot}\left\{(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\,\boldsymbol{v}\right\}$

  まず, $(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}$ を以下のように書き換える.

$$(\mathrm{rot}\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v} - \mathrm{grad}\left(\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2}\right), \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v} - \mathrm{grad}\left(\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2}\right), \tag{10}$$

$$(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} + \mathrm{grad}\left(\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2}\right). \tag{11}$$

  ここで, ベクトル解析の公式 $(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{A} - \mathrm{grad}\left(\frac{|\boldsymbol{A}|^2}{2}\right)$ を使った.

  これより, $\mathrm{rot}\left\{(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\boldsymbol{v})\right\}$ は

$$\mathrm{rot}\left\{(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v}\right\} = \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}) + \mathrm{rot}\left\{\mathrm{grad}\left(\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2}\right)\right\} \tag{12}$$

$$= \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}). \tag{13}$$

  更に書き換える. ベクトル解析の公式

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}(\mathrm{div}\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\mathrm{div}\boldsymbol{A}) \tag{14}$$

  より

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}(\mathrm{div}\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}(\mathrm{div}\boldsymbol{\omega}). \tag{15}$$

  ここで, $\mathrm{div}\boldsymbol{\omega} = \mathrm{divrot}\boldsymbol{v} = 0$ を使うと

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}(\mathrm{div}\boldsymbol{v}). \tag{16}$$

- (8) の右辺第 1 項 $-\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p\right)$

  ベクトル解析の公式 $\mathrm{rot}(f\boldsymbol{A}) = (\mathrm{grad}f)\times\boldsymbol{A} + f\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ を使うと

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p\right) = \left(\mathrm{grad}\frac{1}{\rho}\right)\times\mathrm{grad}p + \frac{1}{\rho}\mathrm{rotgrad}p = -\frac{\mathrm{grad}\rho\times\mathrm{grad}p}{\rho^2} \tag{17}$$

  となる. ここで, $\mathrm{rotgrad}f = 0$ を使った.

- (8) の右辺第二項 $-\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\Phi)$

  ベクトル解析の公式 $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}f) = 0$ を使えば 0 となる.

最終的に

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\omega}\mathrm{div}\boldsymbol{v} + \frac{\mathrm{grad}\rho\times\mathrm{grad}p}{\rho^2} + \mathrm{rot}\boldsymbol{F}. \tag{18}$$

が得られる. これを渦度方程式 (vorticity equation) という.

5.2.2 渦度方程式の各項の意味

$\boldsymbol{\omega}$ の向きを z 方向にとって考える. 局所直交座標 ((x, y, z) 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, とする) を用いる.

- 渦度方程式 (18) 右辺第 1 項 : $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{v}$

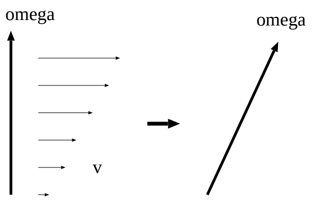
  変形すると

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{v} = \underbrace{\omega\frac{\partial v_x}{\partial z}\boldsymbol{e}_x + \omega\frac{\partial v_y}{\partial z}\boldsymbol{e}_y}_{\text{傾斜項}} + \underbrace{\omega\frac{\partial v_z}{\partial z}\boldsymbol{e}_z}_{\text{引き伸ばし項}} \tag{19}$$

  これは以下のように，運動による渦の変形を表す.

  1. 傾斜項 (tilting term) : $\boldsymbol{e_x}\omega\frac{\partial v_x}{\partial z} + \boldsymbol{e_y}\ \omega\frac{\partial v_y}{\partial z}$

     $\boldsymbol{\omega}$ 方向 (z 方向) に速度差があると，$\boldsymbol{\omega}$ が傾けられて，$\boldsymbol{\omega}$ に垂直な方向 (x, y 方向) の渦度成分ができることを示す.

  2. 引き伸ばし項 (stretching term) : $\boldsymbol{e_z}\omega\frac{\partial v_x}{\partial z}$

     収縮項 (shrinking term) とも言う. $\boldsymbol{e_z}\omega\frac{\partial v_x}{\partial z}$ は, 渦が引き延ばされると強度が強まることを示す.

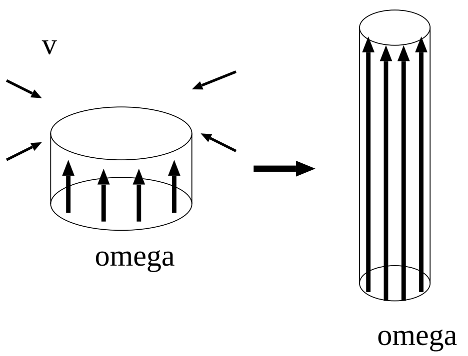
- 渦度方程式 (18) 右辺第 2 項 : $\omega\mathrm{div}\boldsymbol{v}$

  収束があると渦が強まることを示す.

  引き伸ばし項とあわせると

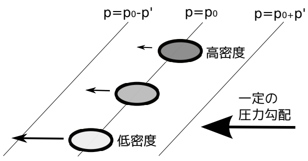
$$\omega\frac{\partial v_z}{\partial z}\boldsymbol{e}_z - \boldsymbol{\omega}\mathrm{div}\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{e}_z\ \omega\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) \tag{20}$$

  となる. これは, $\boldsymbol{\omega}$ に垂直な方向からの収束があると，渦の強さが強まることを示す.

- 渦度方程式 (18) 右辺第 3 項：傾圧項 (baroclinic term) $\dfrac{\mathrm{grad}\rho \times \mathrm{grad}p}{\rho^2}$

  圧力傾度が同じでも密度差があると，その加速度に差が生じ, その結果，渦度が変化する.



- 渦度方程式 (18) 右辺第 4 項: $\mathrm{rot}F$

  非保存的な外力による渦度変化を表す.

5.3 ラグランジュの渦定理

5.3.1 $\frac{\omega}{\rho}$ の式 (一般形)

渦度方程式を ρ で割る.

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\right)\boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\mathrm{div}\boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho^3}\mathrm{grad}\rho \times \mathrm{grad}p + \frac{1}{\rho}\mathrm{rot}\boldsymbol{F}. \tag{21}$$

左辺の Lagrange 微分項は以下のように変形される.

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \left(\frac{1}{\rho}\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{grad}\right)\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} - \boldsymbol{\omega}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\rho} + (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} - \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\frac{1}{\rho} \tag{22}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} + (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} - \boldsymbol{\omega}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\rho} + (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\frac{1}{\rho}\right\} = \frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} - \boldsymbol{\omega}\frac{d}{dt}\frac{1}{\rho}. \tag{23}$$

ここで, 連続の式 $\dfrac{d\rho^{-1}}{dt} = \rho^{-1}\mathrm{div}\boldsymbol{v}$ を使うと

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} - \boldsymbol{\omega}\rho^{-1}\mathrm{div}\boldsymbol{v} \tag{24}$$

となる. これを渦度方程式を ρ で割った式に代入すると, 以下となる.

$$\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\underbrace{-\boldsymbol{\omega}\rho^{-1}\mathrm{div}\boldsymbol{v}}_{\text{消える}} = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\right)\boldsymbol{v}\underbrace{-\boldsymbol{\omega}\rho^{-1}\mathrm{div}\boldsymbol{v}}_{\text{消える}} + \frac{1}{\rho^3}\mathrm{grad}\rho \times \mathrm{grad}p + \frac{1}{\rho}\mathrm{rot}\boldsymbol{F}, \tag{25}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\right)\boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho^3}\mathrm{grad}\rho \times \mathrm{grad}p + \frac{1}{\rho}\mathrm{rot}\boldsymbol{F}. \tag{26}$$

5.3.2 順圧流体 (バロトロピック流体) の場合: ラグランジュの渦定理

順圧流体で粘性も無視できる場合

$$\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\right)\boldsymbol{v} \tag{27}$$

よって

$$\begin{aligned}&t=0\text{ で }\boldsymbol{\omega}=0\text{ なら任意の }t\text{ で }\boldsymbol{\omega}=0\\&\text{ある時刻で }\boldsymbol{\omega}\neq 0\text{ ならば }t=0\text{ で }\boldsymbol{\omega}\neq 0\\&(\text{上記の対偶})\end{aligned} \tag{28}$$

となる. これをラグランジュの渦定理 (Lagrange's theorem on vorticity) という.

5.3.3 順圧流体における渦線の動き

流体とともに運動する線分 $\delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1$ の時間変化

$$\frac{d\boldsymbol{x}_2}{dt}-\frac{d\boldsymbol{x}_1}{dt}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_2)-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_1+\delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_1)+(\mathrm{grad}\boldsymbol{v})\cdot\delta\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_1), \tag{29}$$

すなわち

$$\frac{d\delta\boldsymbol{x}}{dt}=(\delta\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v} \tag{30}$$

を考える.
これと, ラグランジュの渦定理

$$\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}=\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot\mathrm{grad}\right)\boldsymbol{v} \tag{31}$$

により

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}-\lambda\delta\boldsymbol{x}\right)=\left\{\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}-\lambda\delta\boldsymbol{x}\right)\cdot\mathrm{grad}\right\}\boldsymbol{v}. \tag{32}$$

よって

$$\begin{aligned}t=0\text{ において}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}-\lambda\delta\boldsymbol{x}=0\text{ ならば}\\\text{任意の時刻において}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}-\lambda\delta\boldsymbol{x}=0\end{aligned} \tag{33}$$

$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}=\lambda\delta\boldsymbol{x}$ なので, $\delta\boldsymbol{x}$ は渦糸の接線ベクトルになっている.

5.4 循環定理

5.4.1 循環の時間変化の式の導出

c' を流体とともに運動する閉曲線とする. c' のまわりの循環 Γ の時間変化は

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\frac{d}{dt}\oint_{c'}\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{l}=\oint_{c'}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\delta\boldsymbol{l}+\oint_{c'}\boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{l} \tag{34}$$

$$=\oint_{c'}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\delta\boldsymbol{l}+\oint_{c'}\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{v}=\oint_{c'}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\delta\boldsymbol{l}+\oint_{c'}\frac{1}{2}\delta|\boldsymbol{v}|^2=\oint_{c'}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\delta\boldsymbol{l}. \tag{35}$$

この式に運動方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\dfrac{1}{\rho}\mathrm{grad}p - \mathrm{grad}\Phi + \boldsymbol{F}$ を代入すると

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\oint_{c'} \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p \cdot \delta\boldsymbol{l} + \oint_{c'} \boldsymbol{F} \cdot \delta\boldsymbol{l} \tag{36}$$

右辺第 1 項をストークスの定理 $\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}$ を使って変形すると

$$-\oint_{c'} \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p \cdot \delta\boldsymbol{l} = -\int_{S'} \mathrm{rot}\left(\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p\right) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{S'} \frac{\mathrm{grad}\rho \times \mathrm{grad}p}{\rho^2} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{37}$$

となる. ただし, ベクトル解析の公式 $\mathrm{rot}(f\boldsymbol{A}) = (\mathrm{grad}f) \times \boldsymbol{A} + f\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ を使った. 以上より,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{S'} \frac{\mathrm{grad}\rho \times \mathrm{grad}p}{\rho^2} \cdot d\boldsymbol{S} + \int_{S'} \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}. \tag{38}$$

5.4.2 ケルビンの循環定理とヘルムホルツの渦定理

- 順圧流体
- 粘性なし ($\boldsymbol{F} = 0$)

の時, Γ は流れに沿って保存する量となる:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0. \tag{39}$$

この式の意味するところは, 次のような表現がなされる.

- ケルビンの循環定理 (Kelvin's theorem on circulation)

  $\Gamma = \displaystyle\oint_{c'} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l}$ が保存

  流体粒子で作られた閉曲面についての循環は一定不変 (40)

- ヘルムホルツの渦定理 (Helmholtz's theorem on vortex)

  $\Gamma = \displaystyle\int_{S'} \boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{S}$ が保存

  渦管の強さは一定不変 (41)

5.5 (Ertel の) 渦位

5.5.1 渦位保存則 (順圧でない流体の保存則)

ラグランジュの渦定理で導いた式 (26) とエントロピーの式 $\frac{ds}{dt} = \frac{Q}{T}$ から

$$\frac{dq}{dt} = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \mathrm{grad}\right)\frac{Q}{T} + \frac{\mathrm{grad}\rho \times \mathrm{grad}p}{\rho^3} \cdot \mathrm{grad}s + \frac{\mathrm{rot}\boldsymbol{F}}{\rho} \cdot \mathrm{grad}s, \tag{42}$$

$$q \equiv \frac{(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{grad})s}{\rho} \tag{43}$$

が得られる. q を渦位 (potential vorticity) という.
渦位の式の導出方法は以下の通りである. $\frac{\omega}{\rho}$ の式に grad$s$ を内積する.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)\cdot \mathrm{grad}s+\left\{(\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{grad})\,\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right\}\cdot \mathrm{grad}s\\
&=\left\{\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\right)\boldsymbol{v}\right\}\cdot \mathrm{grad}s+\frac{\mathrm{grad}\rho\times \mathrm{grad}p}{\rho^3}\cdot \mathrm{grad}s+\frac{\mathrm{rot}\boldsymbol{F}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}s
\end{aligned}\tag{44}$$

この式の左辺第二項は以下のように変形できる.

$$\left\{(\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{grad})\,\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right\}\cdot \mathrm{grad}\ s \tag{45}$$

$$=(\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{grad})\left\{\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\right)s\right\}-\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot\{(\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{grad})\mathrm{grad}s\} \tag{46}$$

$$=(\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{grad})\left\{\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\right)s\right\}-\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\right)\{(\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{grad})\,s\}+\left\{\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\right)\boldsymbol{v}\right\}\cdot \mathrm{grad}\ s \tag{47}$$

これより, (44) は以下のようになる.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)\cdot \mathrm{grad}s+(\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{grad})\left\{\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\right)s\right\}-\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\right)\{(\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{grad})\,s\}\\
&=\frac{\mathrm{grad}\rho\times \mathrm{grad}p}{\rho^3}\cdot \mathrm{grad}s+\frac{\mathrm{rot}\boldsymbol{F}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}s
\end{aligned}\tag{48}$$

エントロピーの式に $\frac{\omega}{\rho}\cdot$ grad を作用させたもの

$$\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\right)\frac{\partial s}{\partial t}+\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\right)\{(\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{grad})\,s\}=\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\right)\frac{Q}{T} \tag{49}$$

と (48) の和をとると

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)\cdot \mathrm{grad}s+(\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{grad})\left\{\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\right)s\right\}+\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\right)\frac{\partial s}{\partial t}\\
&=\frac{\mathrm{grad}\rho\times \mathrm{grad}p}{\rho^3}\cdot \mathrm{grad}s+\frac{\mathrm{rot}\boldsymbol{F}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}s+\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\right)\frac{Q}{T},
\end{aligned}\tag{50}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\right)s\right\}+(\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{grad})\left\{\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\right)s\right\}\\
&=\frac{\mathrm{grad}\rho\times \mathrm{grad}p}{\rho^3}\cdot \mathrm{grad}s+\frac{\mathrm{rot}\boldsymbol{F}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}s+\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\right)\frac{Q}{T},
\end{aligned}\tag{51}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\right)s\right\}=\frac{\mathrm{grad}\rho\times \mathrm{grad}p}{\rho^3}\cdot \mathrm{grad}s+\frac{\mathrm{rot}\boldsymbol{F}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}s+\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\right)\frac{Q}{T} \tag{52}$$

5.5.2 渦位の性質

- 粘性なし ($\boldsymbol{F}=0$)
- 断熱 ($Q=0$)

の場合, 渦位は保存量

$$\frac{dq}{dt} = 0 \tag{53}$$

となる. なぜなら

$$\mathrm{grad}s = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_\rho \mathrm{grad}p + \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_p \mathrm{grad}\rho \tag{54}$$

なので,

$$\frac{\mathrm{grad}\rho \times \mathrm{grad}p}{\rho^3} \cdot \mathrm{grad}s = 0 \tag{55}$$

となるから.

5.5.3 循環の保存則と渦位保存則との関係

循環 Γ の時間変化の式,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{S'} \frac{\mathrm{grad}\rho \times \mathrm{grad}p}{\rho^2} \cdot d\boldsymbol{S} + \int_{S'} \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{56}$$

と断熱条件 ($Q = 0$) を充たす時の渦位の式

$$\frac{d}{dt}\frac{(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{grad})s}{\rho} = \frac{\mathrm{grad}\rho \times \mathrm{grad}p}{\rho^3} \cdot \mathrm{grad}s + \frac{\mathrm{rot}\boldsymbol{F}}{\rho} \cdot \mathrm{grad}s \tag{57}$$

との関係を考察する.
エントロピー s と $s + \delta s$ に挟まれた微小円柱 (質量 δm, 高さ δh, 底面積 δS) を考える (図 5).

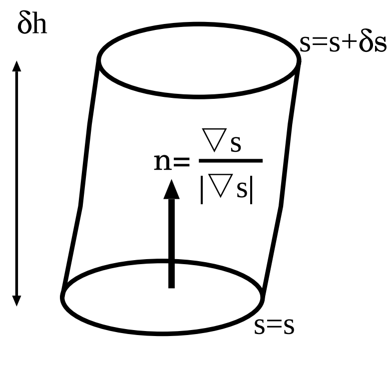


図 5: 等エントロピー面で作られた微小円柱.

この微小円柱では,

$$\delta s = \delta h |\mathrm{grad}s| = \frac{1}{\rho}\frac{\delta m}{\delta S}|\mathrm{grad}s| \tag{58}$$

したがって,

$$\delta S = \frac{1}{\rho}\frac{\delta m}{\delta s}|\mathrm{grad}s| \tag{59}$$

また面の方向ベクトル $\boldsymbol{n}$ は

$$\boldsymbol{n} = \frac{\mathrm{grad}s}{|\mathrm{grad}s|} \tag{60}$$

したがって, 底面における面積分は

$$\int_{S'} d\boldsymbol{S} = \int_{S'} \boldsymbol{n}\delta S = \left(\frac{\mathrm{grad}s}{|\mathrm{grad}s|}\right)\left(\frac{1}{\rho}\frac{\delta m}{\delta s}|\mathrm{grad}s|\right) = \frac{\mathrm{grad}s}{\rho}\frac{\delta m}{\delta s} \tag{61}$$

と評価できる. これから, 循環の時間変化の式は次のように書き換えられる.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{S'} \omega \cdot d\boldsymbol{S} \sim \frac{d}{dt}\frac{(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad})s}{\rho}\frac{\delta m}{\delta s} \tag{62}$$

$$\int_{S'} \frac{\mathrm{grad}\rho \times \mathrm{grad}p}{\rho^2} \cdot d\boldsymbol{S} + \int_{S'} \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} \sim \frac{d}{dt}\frac{(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad})s}{\rho}\frac{\delta m}{\delta s} \tag{63}$$

左辺の各項は次のように評価される.

$$\int_{S'} \frac{\mathrm{grad}\rho \times \mathrm{grad}p}{\rho^2} \cdot d\boldsymbol{S} \sim \frac{\mathrm{grad}\rho \times \mathrm{grad}p}{\rho^3} \cdot \mathrm{grad}s\frac{\delta m}{\delta s} \tag{64}$$

$$\int_{S'} \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} \sim \frac{\mathrm{rot}\boldsymbol{F}}{\rho} \cdot \mathrm{grad}s\frac{\delta m}{\delta s} \tag{65}$$

これから, 循環 Γ の時間変化の式は

$$\frac{d}{dt}\frac{(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{grad})s}{\rho}\frac{\delta m}{\delta s} = \frac{\mathrm{grad}\rho \times \mathrm{grad}p}{\rho^3} \cdot \mathrm{grad}s\frac{\delta m}{\delta s} + \frac{\mathrm{rot}\boldsymbol{F}}{\rho} \cdot \mathrm{grad}s\frac{\delta m}{\delta s} \tag{66}$$

と評価される. この式は, 渦位保存則の式に $\frac{\delta m}{\delta s}$ をかけたものとなっている. よって, 渦位保存則は循環定理の微分形表現であることがわかる.