

修士論文
浅水波の過剰反射とシアー不安定

東京大学海洋研究所海洋気象部門
竹広真一

1989年3月4日
1990年3月1日改訂第1版
1992年4月28日改訂第2版

¹ 現所属：東京大学理学部地球物理学科気象研究室

要旨

linear shear 流中を伝播する浅水波の振舞いを考察し、不安定モードとの関係を議論した。浅水波が turning level に入射すると振幅が大きくなって反射される過剰反射が生じる。これは disturbance momentum 保存則により説明することが出来る。一方不安定モードのもつ disturbance momentum は 0 である。これより disturbance momentum のやり取りからみると不安定モードと過剰反射は同じ現象であることがわかる。すなわち両符号の disturbance momentum を持つ波がシア一流中に存在し、片方の波が自分の持つ disturbance momentum と逆符号の disturbance momentum をもう一方の波に与えて自分が増幅する現象である。また、disturbance momentum, disturbance energy の符号が基本場の性質だけで決まる特別な場合には、これらの保存則から積分定理が導かれることを示した。

第1章 Introduction

19世紀後半の Reynolds の実験，あるいは Rayleigh による理論的な取扱以来，様々な流れの場について安定性を調べることが行われてきた．その目標は支配方程式系の解として求めた流れの場が自然界に実現し得るものであるか否かを判定することであった．また，あるときには安定性の吟味よりも不安定である（と判定された）流れの場がどのように他の状態へ移行するか，あるいは最も速く発達する擾乱はどのような構造かに興味が集まることもあった．例えば，層流状態から乱流状態への移行の出発点として流れの安定性が議論された．気象学においては南北温度傾度に伴う軸対称流の安定性から中緯度の低気圧を説明することが行われた．

流れの場の安定性は次のような手順で調べられる．安定性を調べる流れの場を基本場という．基本場に対して与えられた擾乱の振幅が微小であるとして支配方程式系を線型化する．これを解くことにより得られる擾乱の振舞いから基本場の安定性を判定する．

しかし一般的な流れの場について解くことが難しいため，多くの場合は簡単でしかも有用な結果が得られる2次元平行シア一流について安定性を調べることが行われた．このときにはさらに次のように手順を進めることが行われる．安定性を調べる流れの向きに x 軸，直角方向に y 軸をとる．擾乱の振舞いが $\exp(ik(x - ct))$ に比例すると仮定し変数分離を行う．その結果，線型方程式系を解くことが y 方向の境界条件を満たす固有値 c を求める固有値問題を解くことに帰着する．得られた固有値のうち一つでも $\text{Im}[c] > 0$ のものが存在すれば，対応する固有解は時間に関して指数的に増大する解（不安定モード）である．このとき基本場は不安定と判定される．

ところが最も簡単な2次元平行シア一流の場合でも，連続的に変化する流れについて固有値問題を解析的に解くことはほとんどの場合不可能であった．そこで計算機のなかった時代には， $\text{Im}[c] > 0$ の解が存在するための基本場に関する条件を求めることが行われた．それらは流体全体にわたる積分式から証明されるために積分定理と呼ばれる．例えば最も有名なものの一つとして Rayleigh の変曲点定理がある．主な積分定理を以下に挙げる．

- 非圧縮流体 (外力なし) (図 1 (a))

- Rayleigh-Kuo の定理 (Rayleigh(1880), Kuo(1949))
不安定モードが存在するためには場の渦度が極値を持たねばならない .

$$\frac{dQ}{dy} \equiv \beta - \frac{d^2U}{dy^2} = 0 \quad \text{at} \quad y = y_s, \quad y_1 < y_s < y_2$$

- Fjörtoft の定理 (Fjörtoft(1950))
 $U(y)$ が単調な関数で , かつ変曲点 $y_s : dQ/dy = 0$ がただ 1 つしか存在しない流れにおいて不安定モードが存在するためには , 変曲点において

$$\left(\frac{d^2Q}{dy^2} \right)_{y=y_s} \cdot \left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=y_s} > 0$$

を満たす必要がある .

- 非圧縮流体 (成層あり) (図 1 (b))

- Synge の定理 (Synge(1933))
不安定モードが存在するためには流れのどこかで

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \frac{dU}{dz} \right) - \frac{2(U - c_r)}{|U - c|^2} \rho N^2 = 0$$

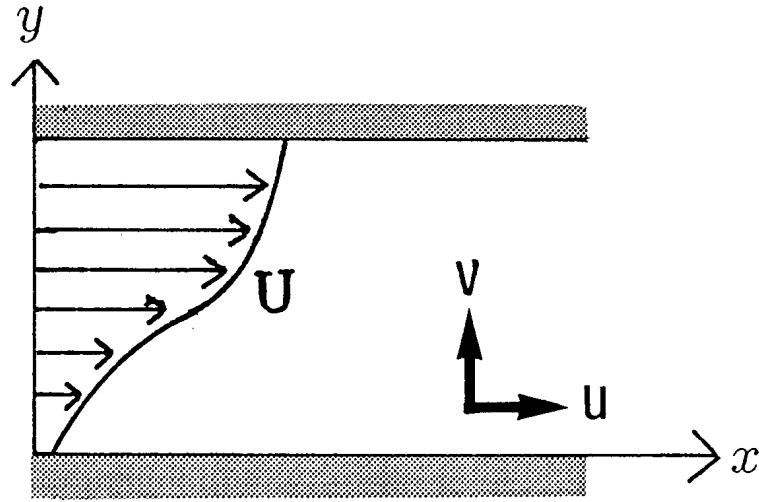
となる点が存在することが必要である . $N^2 \equiv -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz}$ は Brunt - Väisälä 振動数である .

- Miles-Howard の定理 (Miles(1961), Howard(1961))
不安定モードが存在するためには流れのどこかに Richardson Number が $1/4$ より小さい領域が存在することが必要である .

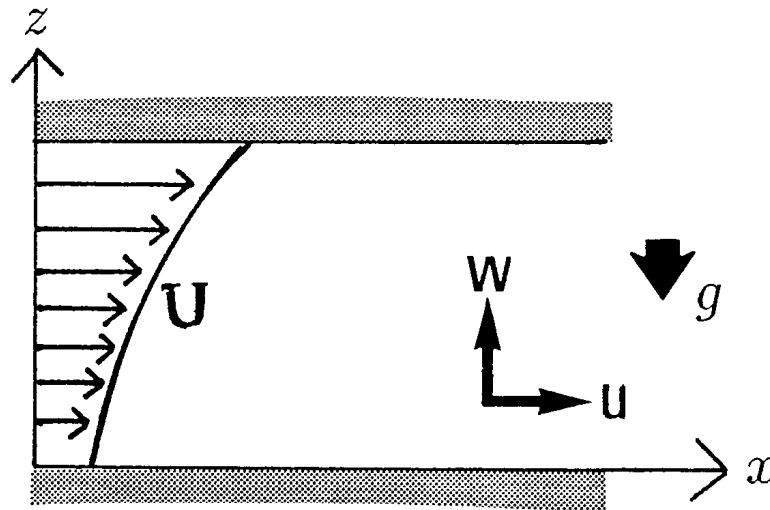
$$\text{Ri} \equiv \frac{N^2}{(dU/dz)^2} < \frac{1}{4}$$

- Shallow water (図 1 (c))

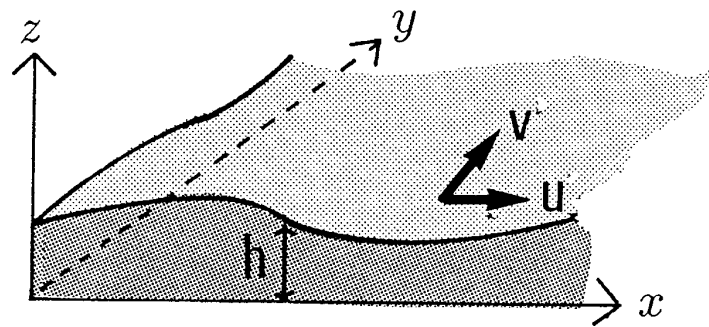
- Ripa の定理 (Ripa(1983))
流れが不安定であるためには , すべての実数 c について $(U - c)Q_y > 0$ あるいは $gH < (U - c)^2$ となる点の流れのどこかに存在することが必要である .
 $Q \equiv (f - \frac{dU}{dy})/H$ は場のポテンシャル渦度である .



(a) 非圧縮流体（外力なし）



(b) 非圧縮流体（成層あり）



(c) Shallow water

図1．二次元平行シアー流の不安定問題

やがて計算機が発達して様々な流れの安定性が計算できるようになると、基本場、境界条件をすこし変えただけで結果が大きく変化してしまうことがわかった。そのために結局状況ごとに固有値問題を解かねば安定性を議論できなかった。例えば外力のない非圧縮流体の linear shear 流では不安定モードは存在しない。しかし同じ linear shear でも成層が存在すると不安定になり得る。このことは成層が流体を安定させる方向に働くという印象に反する。また、Shallow Water においても linear shear は不安定になりうる。このように同じ linear shear でも結果はまちまちであり、直観に反する場合もある。

固有値問題として扱う場合はその手順が数学的であるため機械的に答えを出せる。しかし計算できることが即理解することにつながるとは限らない。例えば前出の積分定理も証明が純粋な数学的操作でのみ導かれるためにその物理的意味がわかりにくい。なぜ変曲点が無いと不安定でないのかわれわれは直観的イメージを持たないのである。固有モードについても同様である。 $\exp(ik(x - ct))$ に比例するという特定の振舞いをする擾乱（固有モード）のみ取り出したために、擾乱を流れの場に加えるとどのようになっていくかという因果関係を知らない。そのため固有値問題を状況ごとに解かねば流れの安定性がわからないのである。

このように、最も簡単な 2 次元平行シア一流の場合でさえその安定性は状況ごとに計算してみなければわからないという悲惨な状況である。しかもなぜ不安定であるのかという問いに対する物理的なイメージを持たない。本研究の目的はさまざまな 2 次元平行シア一流の安定性をひとまとめにして理解することである。理解するとはどういうことであろうか。そのために、われわれがよく知っている鉛筆の不安定を見てみよう。逆さまに立てられた鉛筆は不安定であることをわれわれは容易に理解できる。つついたら（つつかなくても）すぐ倒れてしまうことをよく経験している。擾乱を与えた後どのようなことが起こるかを想像できるので、すぐに不安定であると理解できるのである。しかし流れの場合は、擾乱をシア一流に加えたときどの様に振舞うかイメージを持たない。そこで次章では Linear shear 流をもつ Shallow Water を例に、シア一流に加えられた擾乱がどのように振舞うか、そのイメージを作ることにする。そのために波（シア一流中を伝播する擾乱）の性質を用いて「不安定」を記述することを行う。3 章では 2 章で得られたイメージからあらためて不安定モードについて考察する。

第2章 波による不安定の記述～過剰反射

2.1 シア一流中の波の伝播性質

Shallow Water の安定性は, Satomura(1981) が linear shear 流について調べている. ここでは十分シアが強ければ流れは不安定であるという結果が得られている. ここでは不安定である linear shear 流に対して擾乱を与えたらどうなるか考えてみる. 与えられた擾乱は浅水波としてシア一流中を伝播していくことが予想される. そこで波としての振舞いを調べるために, WKB 近似を用いてその伝播性質を調べる.

2次元浅水波方程式から出発する. 図1(c)に示した状況の下での浅水波方程式は次のように書ける.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) = 0. \quad (2.3)$$

基本場 $u = U(y)$, $v = 0$, $h = H (= \text{const.})$ に対する擾乱の線型方程式を作る.

(2.1) ~ (2.3) に $u = U(y) + u'$, $v = v'$, $h = H + h'$ を代入し擾乱量の2次以上の項を無視すると

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} = -g \frac{\partial h'}{\partial x}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + u' \frac{\partial v'}{\partial x} = -g \frac{\partial h'}{\partial y}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + U \frac{\partial h'}{\partial x} + H \frac{\partial u'}{\partial x} + H \frac{\partial v'}{\partial y} = 0. \quad (2.6)$$

となる. (2.4) ~ (2.6) から u', v' を消去すると, 変位だけの式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 h' - gH \nabla^2 h' \right\} + 2gH \frac{dU}{dy} \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial y} = 0. \quad (2.7)$$

が得られる. ここで 2-timing 法を用いる. ある微小 parameter を用いて新しい座標系 $(X, Y, T) = \varepsilon(x, y, t)$ を導入する. (X, Y, T) は (x, y, t) に比べてゆっくりとした空間時間変化を表わす

座標系である．表面変位 h' について次の形を仮定する (WKB 近似) ．

$$h' = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A_n(X, Y, T) e^{i \frac{\vartheta(X, Y, T)}{\varepsilon}}, \quad (2.8)$$

$$X = \varepsilon x, \quad Y = \varepsilon y, \quad T = \varepsilon t. \quad (2.9)$$

これは位相 $e^{i \frac{\vartheta(X, Y, T)}{\varepsilon}}$ が振幅 $A(X, Y, T)$ に比べて速く変化する波束を表わしている．さらに基本場の流れ $U(y)$ が y 方向にゆっくりと変化すると仮定する．すなわち $U = U(Y)$ である．(2.8) を (2.7) に代入し の order でまとめる． の 0 次から局所分散関係が次のように求まる．

$$\omega = Uk \pm \sqrt{gH(k^2 + l^2)} \quad (2.10)$$

ただし x 方向の局所波数 k , y 方向の局所波数 l , 振動数 ω の定義は次のとおりである．

$$k = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial X}, \quad (2.11)$$

$$l = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\partial \vartheta}{\partial Y}, \quad (2.12)$$

$$\omega = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -\frac{\partial \vartheta}{\partial T}, \quad (2.13)$$

$$(2.14)$$

流れの速度 U と波の位相速度 $c \equiv \frac{\omega}{k}$ が等しいところを critical level , y 方向波数 l が 0 になるところを turning level という． l が実数である領域は波として y 方向に伝播可能な波領域 (wavy) である． l が虚数となる領域は波として伝播できない領域 (evanescent) である．局所分散関係から求めた波伝播性質を表わしたのが図 2 である．critical level 付近が波伝播不可能な領域になっている．

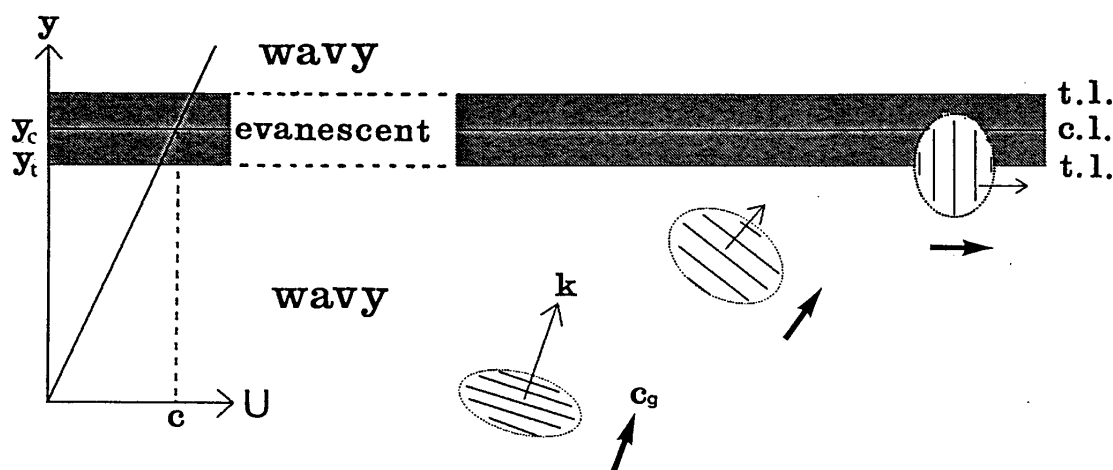


図 2. linear shear 流中の浅水波の伝播性質

図 2 のように $y \rightarrow -\infty$ から k, c 一定の波束を与え, その振舞いを考える．波束の y 方向の伝播速度は

$$c_{gy} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial l} = \sqrt{gH} \frac{l}{\sqrt{k^2 + l^2}} \quad (2.15)$$

$l \rightarrow 0$ で $c_{gy} \rightarrow 0$ となる．turning level に近づくとしたがって y 方向群速度が0になっていく．ある場所 y_0 に存在する波束が turning level に達するまでの時間は

$$\int_{y_0}^{y_t} \frac{dy}{c_{gy}} = \int_{l(y_0)}^0 \frac{1}{c_{gy}} \frac{dy}{dl} dl = \frac{l(y_0)}{2k(dU/dy)} \quad (2.16)$$

したがって波束は有限時間内に turning level に達することができる．しかし turning level に達した後波束がどうなるかは WKB 近似の範囲では予測できない．そこで線型方程式を数値的に解いてみた．線型方程式 (2.4) ~ (2.6) を x について Fourier 変換すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + ikU \right) u' + v' \frac{dU}{dy} = -ikgh', \quad (2.17)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + ikU \right) v' = -g \frac{\partial h'}{\partial y}, \quad (2.18)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + ikU \right) h' + H \left(iku' + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.19)$$

Gaussian 型の振幅をもつ波束を初期値として与えて (2.17) ~ (2.19) を時間積分した結果が図3である (Appendix.A)．turning level に達するまでは WKB 近似での考察どおりであるが，turning level に達した後は波伝播不可能な領域をすり抜けていく波束と turning level で反射する波束に分かれて，それぞれ波伝播不可能な領域から遠ざかる方向に伝播していく．注目すべきことは turning level に入射した波束に比べて反射した波束の振幅が大きくなる過剰反射となっていることである．

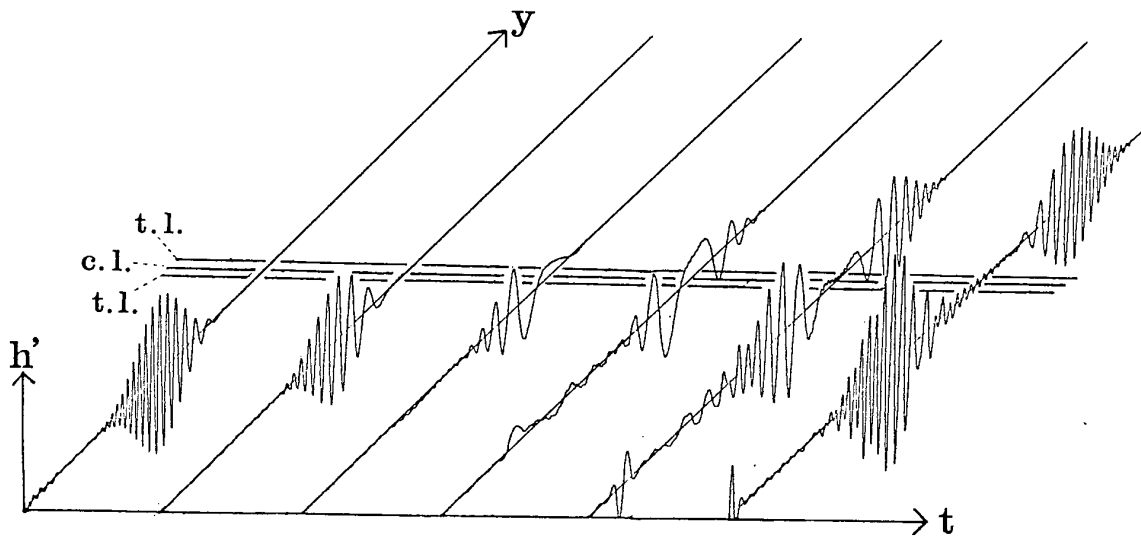


図 3. linear shear 流中を伝播する浅水波

2.2 disturbance momentum 保存則と過剰反射

過剰反射はどのようにして生じるのであろうか．そのために x 方向の運動量保存則から過剰反射を考えてみる．

浅水波方程式 (2.1) に h をかけ, (2.3) に u をかけて x について平均すると x 方向の運動量保存則が得られる．すなわち

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{hu}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{huv}) = 0. \quad (2.20)$$

上線は x についての平均を表わす． y 方向に積分することにより全運動量保存則が得られる．

$$\frac{dM}{dt} = 0, \quad M \equiv \int \overline{hudy} \quad (2.21)$$

ただし境界条件として $y \rightarrow \pm\infty$ で $v = 0$ とした (すなわち $y \rightarrow \pm\infty$ での運動量の入射, 射出はない)．

各物理量を次のように基本場と擾乱量, さらに擾乱によって引き起こされる高次の微小擾乱量に展開する．

$$u = U(y) + u' + u^{(2)}, \quad v = v' + v^{(2)}, \quad h = H + h' + h^{(2)} \quad (2.22)$$

これらを (2.21) に代入すると

$$M = M_0 + M_1 + M_2, \quad (2.23)$$

ただし

$$M_0 = \int HUdy, \quad (2.24)$$

$$M_1 = \int (H\overline{u^{(2)}} + U\overline{h^{(2)}})dy, \quad (2.25)$$

$$M_2 = \int \overline{h'u'}dy \quad (2.26)$$

である． M_2 は擾乱の持つ運動量, M_1 は擾乱によって引き起こされる高次の微小擾乱の持つ運動量である． $M_d \equiv M_1 + M_2$ は擾乱の存在するときと存在しないときの運動量の差である．これを disturbance momentum と呼ぶことにする．ところで M_0 は基本場の持つ運動量であり時間変化しない．全運動量が保存することから disturbance momentum は保存しなければならない．

さらにポテンシャル渦度保存則を用いて M_1 を y 方向変位 η' で表わすことができる (Appendix.B)．その結果 M_1 は

$$M_1 = \int \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dy^2} H^2 \overline{\eta'^2} dy, \quad (2.27)$$

となる．したがって disturbance momentum は

$$M_d = \int (\overline{h'u'} + \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dy^2} H^2 \overline{\eta'^2}) dy, \quad (2.28)$$

と表わすことができる．さて，linear shear 流の場合について disturbance momentum 保存則を考える． $\frac{d^2 U}{dy^2} = 0$ であるから $M_d = \int \overline{h'u'} dy$ である．さらに disturbance momentum を WKB 近似を用いて書き直すと

$$M_d \sim \int \left(-\frac{g}{U-c} \right) \overline{h'^2} dy. \quad (2.29)$$

となる．この式は，入射する波束の持つ disturbance momentum が正であれば波伝播不可能な領域を透過した波束の持つ disturbance momentum が負であることを示している．全 disturbance momentum が保存することから反射する波束の持つ disturbance momentum は入射波束に比べて大きくなる（図4）．これが過剰反射である．

すなわち過剰反射とは，入射波が自分の持つ disturbance momentum と逆符号の momentum を透過波に与えた結果，反射波の disturbance momentum が増加する現象であることがわかる．

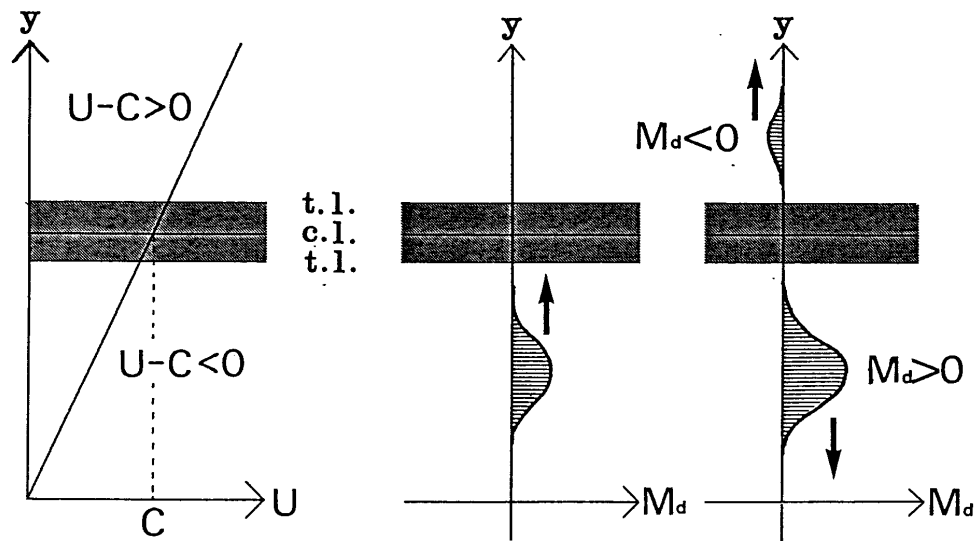


図4. 過剰反射のイメージ

2.3 Laser Formula

シア一流中を伝播する波が過剰反射を起こすこととシア一流が不安定であることとはどのような関係にあるのだろうか．両者を結びつける一種の思考モデルとして Laser Formula と呼ばれるものがある．この考え方に基づく一連の研究が Linzen 等によって行われている．彼等は内部重力波が存在する系や傾圧不安定について Laser Formula を用いて成長率を計算し，不安定モードのそれと比較している．Laser Formula の考え方は次のようなものである．

critical level に入射した波が R 倍 ($R > 1$) で反射される場において，入射波領域に壁をおくことを考える (図 5 (a))．入射波に対して R 倍の振幅を持つ反射波は壁ではねかえって critical level へ向かって入射する (図 5 (b),(c),(d))．これが新たな入射波となり再び 過剰反射 をおこし反射波の振幅は R^2 となる．これが繰り返されることにより振幅が時間に関して指数的に増大していく (図 5 (e))．

成長率は次のように計算される．反射壁 $y = y_b$ と turning level $y = y_t$ の間を波が伝播するのに要する時間 τ は

$$\tau = \int_y^{y_b} \frac{dy}{c_{gy}} \quad (2.30)$$

である．壁と critical level の間を 1 回往復する間に振幅が R 倍になるので

$$R = e^{2kc_i\tau}, \quad (2.31)$$

したがって成長率 kc_i は

$$kc_i = \frac{\log R}{2\tau} \quad (2.32)$$

と見積られる．しかし，全ての波が上記のような指数的增长をするのではない．壁ではねかえった入射波と，もともとの入射波の位相がずれる波は互いに打ち消しあって振幅が増大しないであろう．過剰反射を起こす波のうち，ある位相関係 (例えば壁と critical level の間が半波長の整数倍等) を満たす入射波と反射波だけが不安定モードとなると考えられる (Linzen 等はこれを量子化条件と言っている)．

反射壁と critical level の間を伝播する擾乱は critical level に突入するごとに逆符号の momentum を透過領域に出して自分が増幅していく．これが Laser Formula から得られる Shallow Water の不安定のイメージである．

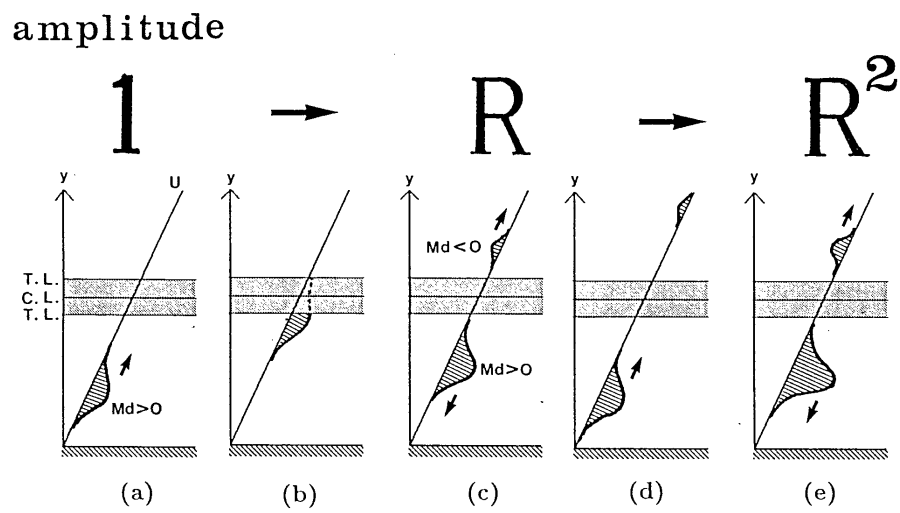


図 5. Laser Formula

2.4 Satomura(1981) との対応

Laser Formula の考え方でどの程度不安定モードを表現できるであろうか．このことを調べるために linear shear 流に加えられた擾乱の成長率を Laser Formula で計算し，固有値問題を解いて得られる不安定モードの成長率と比較してみた．図 6 (a) が Satomura(1981) の考える状況である．これを図 6 (b) のような波伝播状況での反射率から成長率を見積る．反射，透過率を見積もるには，透過波領域で critical level から遠ざかる方向に進む波しかないという境界条件を与えて定常解を求める (Appendix.C)．図 7 は $Fr=7.0, k=4.0$ での計算例である．critical level から遠方での定常解の振舞いから反射率，透過率が計算される (図 8)．不安定モードと対応させるにはさらに量子化条件が必要である．ここでは $Re[dh'/dy] = 0$ を用いた．

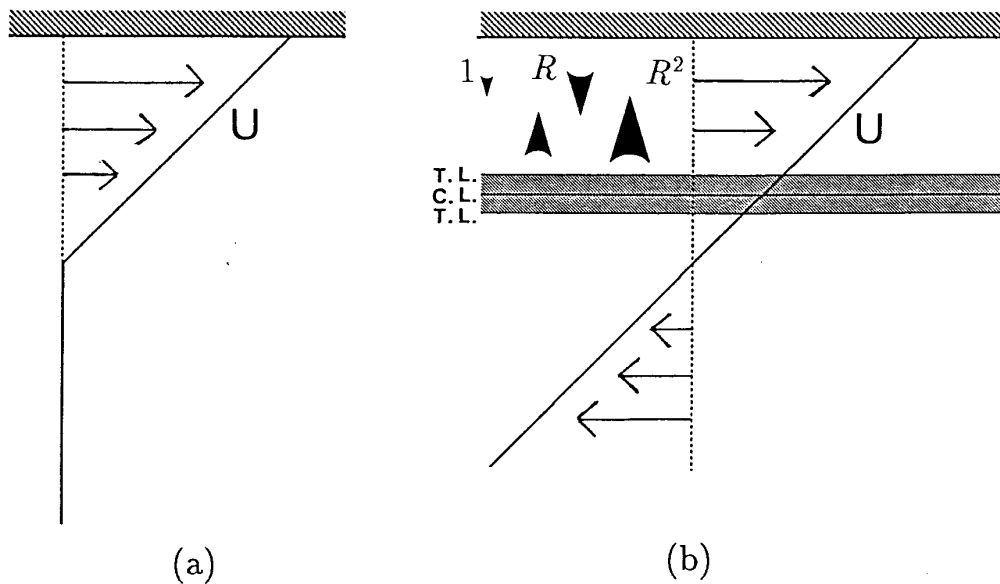


図 6. Satomura(1981) と Laser Formula による解釈

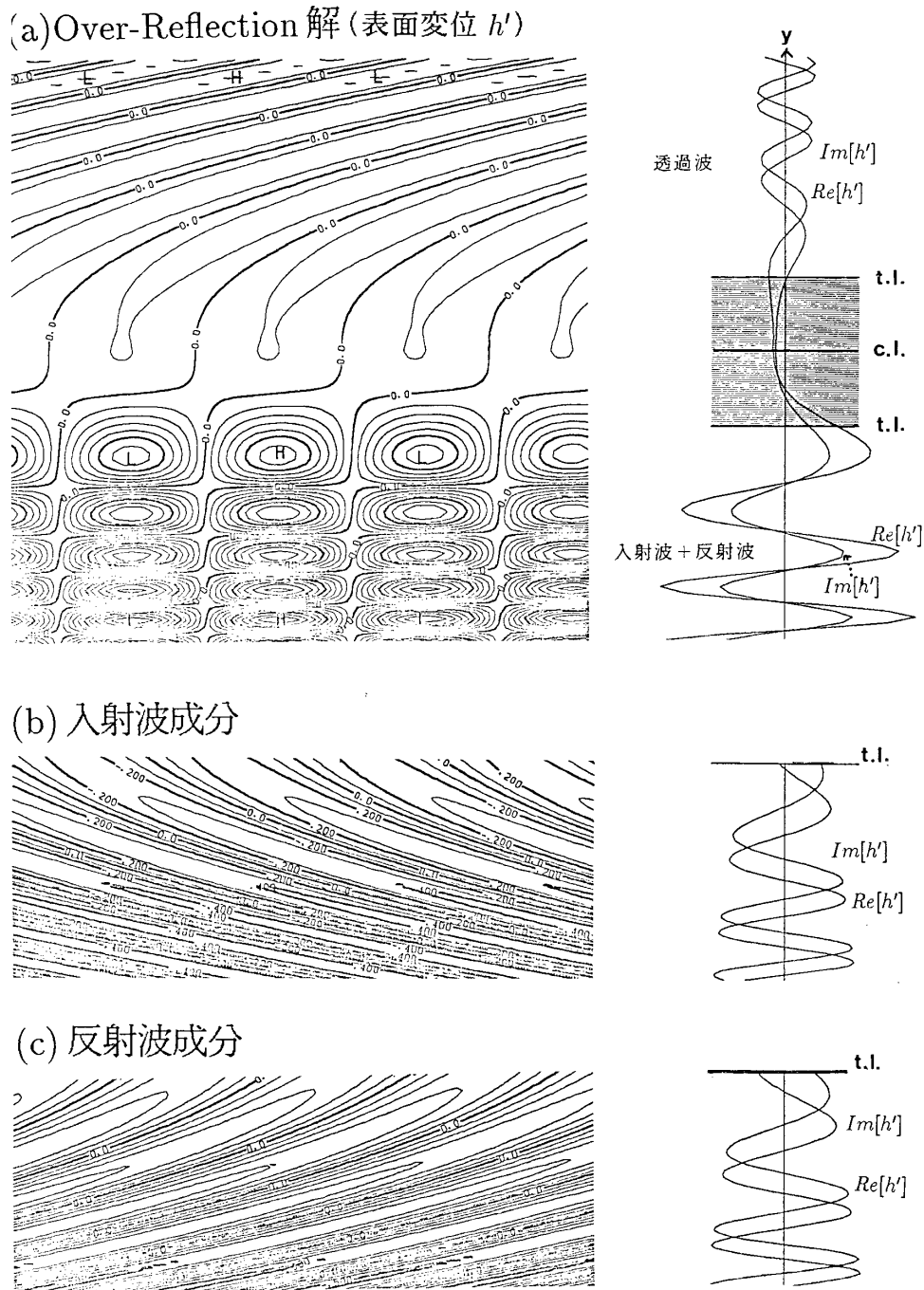


図 7. linear shear 流の浅水波の過剰反射解

結果を図9に示す。(a)は $Fr=5.0$ の場合,(b)は $Fr=7.0$ の場合の計算,上段はSatomura(1981),下段はLaser Formulaによる計算である. 図中 $c_r < \frac{1}{Fr}$ の部分は描いていない. この範囲の位相速度 c_r をもつモードは流れのprofileが折れ曲がっていることの影響をうけるのでLaser Formulaの分散関係,成長率と比較できない. 図中(\times)で示した部分も同じ理由で比較できない.

不安定モードの成長率に比べてLaser Formulaによって計算された成長率の方が大きい. その理由として一つには反射壁とturning levelの間の往復時間が正しく見積れないことが挙

げられる．WKB 近似では turning level に入射した波が反射されるまでに要する時間を計算できない．しかし重大な理由がもう一つある．過剰反射は線型方程式系の定常解であり，不安定モードは非定常解である．相反する性質をもつ二つの解を結びつけるところに根本的な無理がある．したがって成長率を定量的に比較することはあまり意味がない．Laser Formula はあくまで不安定をイメージする思考モデルとして扱うのが適当であり，成長率を定性的に表現できれば十分である．その意味では，図9の結果を見ると Satomura(1981)の不安定は Laser Formula で表現できるといえる．

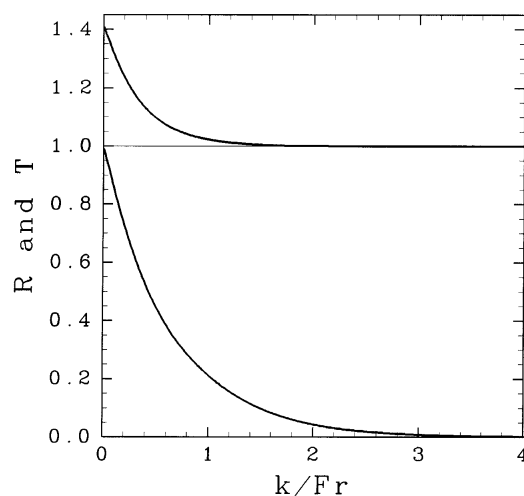


図8. 反射係数, 透過係数

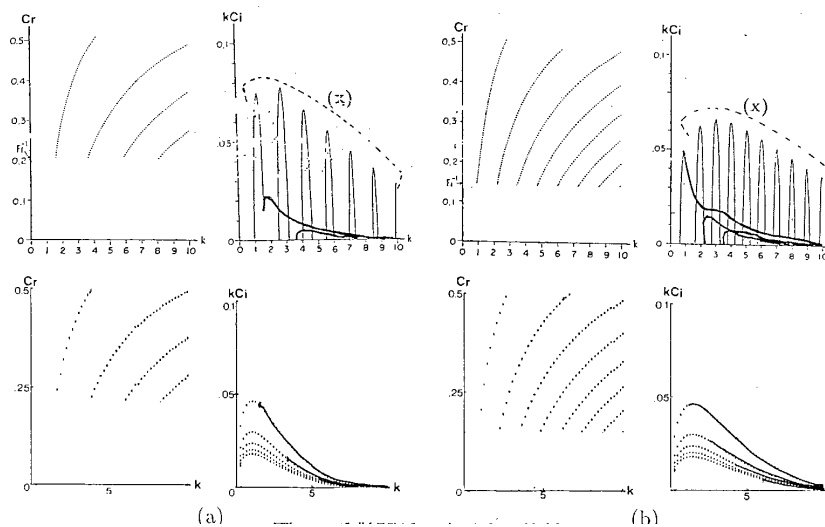


図9. 分散関係, 成長率の比較

第3章 固有値問題と保存則

linear shear 流中を伝播する浅水波の性質：過剰反射から不安定現象のイメージが得られた。すなわち不安定とは両符号の disturbance momentum を持つ波が存在できるときには、片方の波が自分の持つ disturbance momentum と逆符号の disturbance momentum をもう一方の波に与えて自分が増幅する現象である。

では、あらためて disturbance momentum 保存則から不安定モードをながめてみる。不安定モードは振幅が時間とともに増幅していく解である。disturbance momentum は振幅の2乗に比例する量である。しかし不安定モードについてもこれは保存しなければならない。したがって不安定モードの disturbance momentum は0である。

このことは、不安定モードには正符号の disturbance momentum を持つ擾乱の存在するところと負の disturbance momentum を持つ擾乱が存在するところがあり、それらの擾乱がそれぞれ増幅していくことを示す(図10)。正符号の disturbance momentum を持つ擾乱を中心に考えると、この擾乱は負の disturbance momentum を持つ擾乱に負の運動量を与えて自分が増幅していくとみることができる。これは過剰反射から得られたイメージと同じである。

特に擾乱の disturbance momentum の符号が基本場の性質だけで決まる特別な場合には、これらの保存則から積分定理が導かれる。一つ例を示そう。さきに求めた Shallow Water での disturbance momentum 保存則は

$$M_d = \int \left(\overline{h'u'} + \frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dy^2} H^2 \overline{\eta'^2} \right) dy. \quad (3.1)$$

であった。ここで $g \rightarrow \infty, h' \rightarrow 0$ の極限を取ると2次元非圧縮流体(外力なし)の状況に一致する。そのときの disturbance momentum は

$$M_d = \int \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 U}{dy^2} H^2 \overline{\eta'^2} \right) dy. \quad (3.2)$$

と書ける。disturbance momentum の符号は基本場の流れの曲率だけで決まる。disturbance momentum が正である擾乱と負である擾乱がどちらも存在するには流れのどこかで $\frac{d^2 U}{dy^2} = 0$ となる必要がある。これが Rayleigh の変曲点定理である。

これまでは disturbance momentum 保存則で議論した。同様の議論をエネルギー保存則について行うことができる(Appendix.D)。その結果、前出の積分定理と保存則の対応関係

がつけられる(表1)。

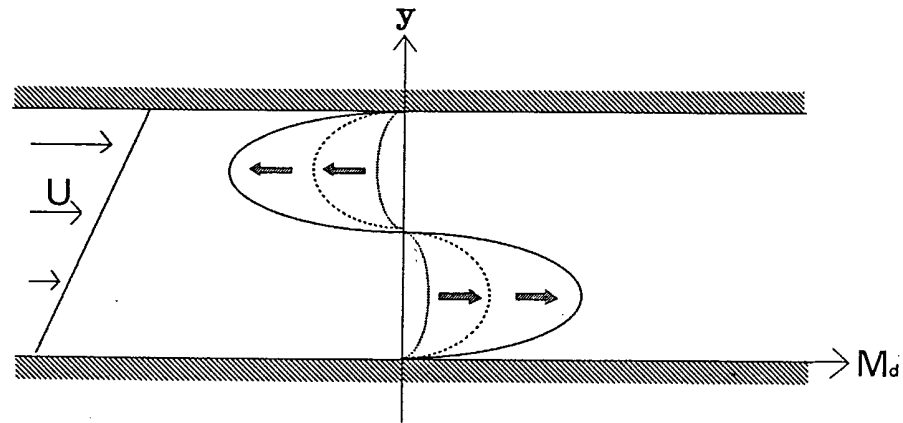


図10. 不安定モードのイメージ

	momentum 保存則	energy, momentum 保存則
非圧縮・外力なし	Rayleigh-Kuo の定理	Fjortoft の定理
非圧縮・成層あり	Synge の定理	
Shallow Water		Ripa の定理

表1 . 保存則と積分定理

第4章 まとめ・今後の問題点

linear shear 流中を伝播する浅水波を例にして，シア一流中を伝播する擾乱（波）の性質を用いて「不安定」を記述することを行った．得られた不安定のイメージは，両符号の disturbance momentum を持つ波がシア一流中に存在し，片方の波が自分の持つ disturbance momentum と逆符号の momentum をもう一方の波に与えて自分が増幅するというのである．積分定理のいくつかは disturbance momentum, disturbance energy が両方の符号の波が存在する不安定となるために必要であることを主張するものであった．

擾乱を「波」としてとらえることができるときには次のような利点がある．一つはシア一流に擾乱を与えたとき何が起こるかを，少なくとも数学的な固有値問題に比べて，イメージしやすいことである．他の一つは「波」という一般的な言葉で記述することにより異なる系での安定性を同じ考え方で議論できることが期待される．例えば前出の例を次のように解釈できる．外力のない非圧縮流体の linear shear 流に不安定モードが存在しないのはシア一流中を伝播する波がないことによる．しかし曲率のある流れでは基本場に渦度傾度が存在する．そのため擾乱は渦度波（Vorticity wave）として伝播できるので不安定になり得る．また同じ linear shear 流でも成層が存在すると不安定になるのは擾乱が内部重力波としてシア一流中を伝播することによる．Shallow Water において linear shear 流が不安定になりうるのも擾乱が浅水波として伝播するからである．

しかし残念ながら重大な問題点が残されている．それは critical level 付近における波の振舞いである．例えば内部重力波の場合には critical level まで波伝播可能な時は波が有限時間内に critical level まで達することができない．すなわち波の「吸収」がおきる（Bretherton(1966)）．浅水波の場合には critical level 付近が波伝播不可能な領域である．そのため critical level へ入射した波は critical level を通り越して反対符号の disturbance momentum を持つ波と相互作用が可能となり過剰反射をおこす．渦度波の場合は critical level まで波伝播可能であっても WKB 近似が成立しなくなるので擾乱がどのように振舞うか解いてみなければわからない．このように基本場の性質によって波の振舞いはいろいろな場合がある．

定常解（過剰反射解）を求めるときにも critical level の問題が生じる．一般に critical level は数学的に特異点であり，そこでは momentum flux にとびが存在する（linear shear 流中の浅水波の場合にとびが存在しない）．これは次の二つの点で問題を難しくしている．一つは critical level における Flux のとびを見積るには，critical level 付近の解を具体的に求めるしか方法が無いことである．他の一つは，critical level における特異性（Flux のとび）の物理的な解釈である．critical level において何が起きているのか，あるいは何が起こ

るのかを知るために浅水波以外の場合について時間発展問題を解いてみる必要がある。

このように、不安定を「波」の伝播性質で記述するにはまだ問題点が多い。しかし disturbance momentum のやりとりという観点からみると浅水波の過剰反射は不安定のイメージをよく表わしている。

第 A 章 線型浅水波方程式の数値積分

(2.17) ~ (2.19) を数値的に解くために用いたスキームを以下に示す .

$$\frac{v_j^{\tau+1} - v_j^\tau}{\Delta t} + ikU_j (\alpha v_j^{\tau+1} + \beta v_j^\tau) = -g \frac{h_j^\tau - h_{j-1}^\tau}{\Delta y}, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{u_j^{\tau+1} - u_j^\tau}{\Delta t} + ikU_j (\alpha u_j^{\tau+1} + \beta u_j^\tau) + \frac{U_{j+1/2} - U_{j-1/2}}{\Delta y} v_j^{\tau+1} = -ikgh_j^\tau, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{h_j^{\tau+1} - h_j^\tau}{\Delta t} + ik(U_{j+1/2} + U_{j-1/2})(\alpha h_j^{\tau+1} + \beta h_j^\tau) + H \left(iku_j^{\tau+1} + \frac{v_{j+1}^{\tau+1} - v_j^{\tau+1}}{\Delta y} \right) = 0. \quad (\text{A.3})$$

ただし $\alpha = \beta = 0.5$ とした . 図 3 は $Fr \equiv \frac{U^2}{gH} = 10.0, k = 0.5$ で計算を行った .

第B章 disturbance momentum , disturbance energy 保存則

B.1 浅水波方程式 ($\beta - plane$)

$\beta - plane$ での浅水波方程式から出発する .

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) = 0. \quad (\text{B.3})$$

ただし $f = f_0 + \beta y$ である . (B.1) $\cdot hu$ + (B.2) $\cdot hv$ と (B.3) よりエネルギー保存則が得られる¹ .

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left\{ \frac{1}{2}h(u^2 + v^2) + gh^2 \right\} v \right] = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$e = \frac{1}{2}h(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}gh^2. \quad (\text{B.5})$$

上線は x についての平均を表わす . y 方向に積分することにより全エネルギー保存則が得られる .

$$\frac{dE}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int e dy = 0. \quad (\text{B.6})$$

同様に (B.1) $\cdot h$ と (B.3) から運動量保存則が得られる .

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ h \left(u - \frac{f^2}{2\beta} \right) v \right\} = 0, \quad (\text{B.7})$$

$$m = h \left(u - \frac{f^2}{2\beta} \right), \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{dM}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int m dy = 0. \quad (\text{B.9})$$

¹ 境界を通してのエネルギー (運動量) の入射、射出がないものとする . 例えば $y \rightarrow \pm\infty$ で $v = 0$ など . 以下の場合も同様の仮定の下に議論する .

各物理量を基本場と擾乱量, さらに擾乱によって引き起こされる高次の微小擾乱量に展開する.

$$u = U(y) + u' + u^{(2)}, \quad v = v' + v^{(2)}, \quad h = H(y) + h' + h^{(2)} \quad (\text{B.10})$$

これらを (B.6), (B.9) に代入すると

$$E = E_0 + E_1 + E_2, \quad (\text{B.11})$$

$$E_0 = \int \frac{1}{2} H U^2 + \frac{1}{2} g H^2 dy, \quad (\text{B.12})$$

$$E_1 = \int \left(H U \overline{u^{(2)}} + g H \overline{h^{(2)}} + \frac{1}{2} \overline{h^{(2)}} U^2 \right) dy, \quad (\text{B.13})$$

$$E_2 = \int \left\{ \frac{1}{2} H (\overline{u'^2} + \overline{v'^2}) + U \overline{h' u'} + \frac{1}{2} g \overline{h'^2} \right\} dy, \quad (\text{B.14})$$

$$M = M_0 + M_1 + M_2, \quad (\text{B.15})$$

$$M_0 = \int H U dy, \quad (\text{B.16})$$

$$M_1 = \int \left\{ H \overline{u^{(2)}} + \left(U - \frac{f^2}{\beta} \right) \overline{h^{(2)}} \right\} dy, \quad (\text{B.17})$$

$$M_2 = \int \overline{h' u'} dy. \quad (\text{B.18})$$

$$(\text{B.19})$$

$E_2(M_2)$ は擾乱の持つエネルギー (運動量), $E_1(M_1)$ は擾乱によって引き起こされる高次の微小擾乱の持つエネルギー (運動量) である. $E_d \equiv E_1 + E_2 (M_d \equiv M_1 + M_2)$ は擾乱の存在するときと存在しないときのエネルギー (運動量) の差である. これを disturbance energy (disturbance momentum) と呼ぶことにする. ところで $E_0(M_0)$ は基本場の持つエネルギー (運動量) であり時間変化しない. 全エネルギー (運動量) が保存することから disturbance energy (disturbance momentum) は保存しなければならない.

E_2, M_2 の時間変化を計算する. (B.1) ~ (B.3) に (B.10) を代入して展開した一次の order の方程式は

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} - H Q v' = -g \frac{\partial h'}{\partial x}, \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + f u' = -g \frac{\partial h'}{\partial y}, \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + U \frac{\partial h'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (H u') + \frac{\partial}{\partial y} (H v') = 0. \quad (\text{B.22})$$

ただし $Q \equiv (f - \frac{dU}{dy})/H$ は基本場の持つポテンシャル渦度である. (B.20) $\cdot H u' + (B.21) \cdot H v' + (B.22) \cdot g h'$ を x 方向に平均し, y 方向に積分すると E_2 の時間変化が得られる.

$$\frac{dE_2}{dt} = - \int H^2 U \overline{q'v'} dy. \quad (B.23)$$

同様に (B.20) · h' + (B.22) · u' より M_2 の時間変化が得られる .

$$\frac{dM_2}{dt} = - \int H^2 \overline{q'v'} dy. \quad (B.24)$$

次に E_1, M_1 の時間変化を計算する . (B.1) ~ (B.3) に (B.10) を代入して展開した 2 次の式は

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + U \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} - Qv^{(2)} = -g \frac{\partial h^{(2)}}{\partial x}, \quad (B.25)$$

$$\frac{\partial v^{(2)}}{\partial t} + U \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} + u' \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \frac{\partial v'}{\partial y} + fu^{(2)} = -g \frac{\partial h^{(2)}}{\partial y}, \quad (B.26)$$

$$\frac{\partial h^{(2)}}{\partial t} + U \frac{\partial h^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(Hu^{(2)}) + \frac{\partial}{\partial y}(Hv^{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x}(h'u') + \frac{\partial}{\partial y}(h'v') = 0. \quad (B.27)$$

である . (B.25) · HU + (B.27) · $(gH + \frac{1}{2}U^2)$ より E_1 の時間変化の式が得られる .

$$\frac{dE_1}{dt} = \int H^2 U \overline{q'v'} dy. \quad (B.28)$$

(B.25) · H + (B.27) · $(H - \frac{f^2}{2\beta})$ より M_1 の時間変化が得られる .

$$\frac{dM_1}{dt} = \int_{y_1}^{y_2} H^2 \overline{q'v'} dy. \quad (B.29)$$

(B.23),(B.24),(B.28),(B.29) から再び disturbance energy , disturbance momentum 保存則が得られる .

$$\frac{dE_d}{dt} = \frac{d}{dt}(E_1 + E_2) = 0, \quad (B.30)$$

$$\frac{dM_d}{dt} = \frac{d}{dt}(M_1 + M_2) = 0. \quad (B.31)$$

$$(B.32)$$

ここでポテンシャル渦度保存則を用いて E_1, M_1 を y 方向の変位で表す . $-\frac{\partial}{\partial y}(B.20) + \frac{\partial}{\partial x}(B.21)$ と (B.22) から一次の order のポテンシャル渦度保存則が導かれる .

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) q' + \frac{dQ}{dy} v' = 0, \quad q' \equiv \frac{1}{H} \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} - Qh' \right). \quad (B.33)$$

ここで流体粒子の y 方向変位 η' を次のように定義する .

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta' = v'. \quad (B.34)$$

これを (B.33) に代入してポテンシャル渦度 Q' と変位 η' の関係が得られる .

$$q' = -\frac{dQ}{dy}\eta'. \quad (\text{B.35})$$

この関係を用いて $\overline{q'v'}$ を η' で表わすと

$$\overline{q'v'} = -\frac{1}{2} \frac{dQ}{dy} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\eta'^2}. \quad (\text{B.36})$$

となる . これを (B.28),(B.29) に代入すると ,

$$\frac{dE_1}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{2} \frac{dQ}{dy} H^2 U \overline{\eta'^2} dy, \quad \frac{dM_1}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{2} \frac{dQ}{dy} H^2 \overline{\eta'^2} dy. \quad (\text{B.37})$$

時間 t で積分すると E_1, M_1 は

$$E_1 = -\int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{2} \frac{dQ}{dy} H^2 U \overline{\eta'^2} dy, \quad M_1 = -\int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{2} \frac{dQ}{dy} H^2 \overline{\eta'^2} dy. \quad (\text{B.38})$$

となる . ただし積分定数は 0 とした . よって disturbance energy , disturbance momentum 保存則は

$$E_d = \int \left\{ \frac{1}{2} H (\overline{u'^2} + \overline{v'^2}) + U \overline{h'u'} + \frac{1}{2} g \overline{h^2} - \frac{1}{2} \frac{dQ}{dy} H^2 U \overline{\eta'^2} \right\} dy, \quad (\text{B.39})$$

$$M_d = \int \left(\overline{h'u'} - \frac{1}{2} \frac{dQ}{dy} H^2 \overline{\eta'^2} \right) dy. \quad (\text{B.40})$$

となる .

B.2 2次元非圧縮流体 (外力なし)

Shallow Water において $h' \rightarrow 0, g \rightarrow \infty$ の極限を取ると 2次元非圧縮流体 (外力なし) の状況に一致する . このときの disturbance energy , disturbance momentum 保存則は

$$E_d = \int \left\{ \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2}) - \frac{1}{2} \frac{dQ}{dy} U \overline{\eta'^2} \right\} dy, \quad (\text{B.41})$$

$$M_d = \int \left(-\frac{1}{2} \frac{dQ}{dy} \overline{\eta'^2} \right) dy. \quad (\text{B.42})$$

となる .

B.3 2次元非圧縮流体（成層あり）

重力場中の2次元非圧縮流体のしたがう方程式は

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (\text{B.43})$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g, \quad (\text{B.44})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (\text{B.45})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0. \quad (\text{B.46})$$

(B.43) · u + (B.44) · w と (B.45), (B.46) よりエネルギー保存則が得られる .

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\overline{\left\{ \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) + \rho g z + p \right\} w} \right] = 0, \quad (\text{B.47})$$

$$e = \frac{1}{2} \overline{\rho (u^2 + w^2)} + \bar{\rho} g z. \quad (\text{B.48})$$

上線は x についての平均を表わす . z 方向に積分することにより全エネルギー保存則が得られる .

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad E \equiv \int e dy. \quad (\text{B.49})$$

同様に (B.43) と (B.44) · u から運動量保存則が得られる .

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{(\rho u w)} = 0, \quad (\text{B.50})$$

$$m = \bar{\rho} \bar{u}. \quad (\text{B.51})$$

$$\frac{dM}{dt} = 0, \quad M \equiv \int m dy. \quad (\text{B.52})$$

各物理量を基本場と擾乱量 , さらに擾乱によって引き起こされる高次の微小擾乱量に展開する .

$$u = U(y) + u' + u^{(2)}, \quad w = w' + w^{(2)}, \quad \rho = \varrho(z) + \rho' + \rho^{(2)}, \quad p = P + p' + p^{(2)}. \quad (\text{B.53})$$

これらを (B.47), (B.50) に代入すると局所的な disturbance energy, disturbance momentum 保存則が得られる .

$$\frac{\partial e_d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \overline{\left(\varrho U u' + \frac{1}{2} \rho' U^2 + \rho g z \right) w} \right\} = 0, \quad (\text{B.54})$$

$$e_d = e_1 + e_2, \quad (\text{B.55})$$

$$e_1 = \varrho U \overline{u^{(2)}} + \overline{\rho^{(2)}} g z + \frac{1}{2} \overline{\rho^{(2)}} U^2, \quad (\text{B.56})$$

$$e_2 = \frac{1}{2} \varrho (\overline{u'^2} + \overline{w'^2}) + U \overline{\rho' u'}, \quad (\text{B.57})$$

$$\frac{\partial m_d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\varrho u' w' + \rho' U w' + \varrho U w^{(2)}}) = 0, \quad (\text{B.58})$$

$$m_d = m_1 + m_2, \quad (\text{B.59})$$

$$m_1 = \varrho \overline{u^{(2)}} + U \overline{\rho^{(2)}}, \quad (\text{B.60})$$

$$M_2 = \overline{\rho' u'}. \quad (\text{B.61})$$

$$(\text{B.62})$$

z 方向に積分することにより全 disturbance energy, disturbance momentum 保存則が得られる。

$$\frac{dE_d}{dt} = 0, \quad E_d \equiv E_1 + E_2, \quad (\text{B.63})$$

$$\frac{dM_d}{dt} = 0, \quad M_d \equiv M_1 + M_2. \quad (\text{B.64})$$

$$(\text{B.65})$$

また, (B.43)(B.46) に代入して展開した一次の order の方程式は

$$\varrho \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{dU}{dz} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (\text{B.66})$$

$$\varrho \left(\frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' g, \quad (\text{B.67})$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (\text{B.68})$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + U \frac{\partial \rho'}{\partial x} + w' \frac{d\rho}{dz} = 0. \quad (\text{B.69})$$

ここで流体粒子の z 方向変位 ζ' を次のように定義する。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \zeta' = w'. \quad (\text{B.70})$$

これを (B.69) に代入して

$$\rho' = -\frac{d\rho}{dz} \zeta'. \quad (\text{B.71})$$

この関係を用いて $\overline{\rho' w'}$ を ζ' で表わすことができる。

$$\overline{\rho'w'} = -\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dz} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\zeta'^2}. \quad (\text{B.72})$$

また, $-\partial/\partial y(\text{B.66}) + \partial/\partial x(\text{B.67})$ と (B.69) から渦度方程式が導かれる.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ \rho \frac{\partial w'}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} (\rho u') \right\} - \frac{d}{dz} \left(\rho \frac{dU}{dz} \right) w' = -g \frac{\partial \rho'}{\partial x}. \quad (\text{B.73})$$

この式に変位 ζ' をかけ, w', ρ' と ζ' の関係を用いて x について平均をとると

$$\frac{\partial}{\partial z} (\overline{\rho u' w'}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\overline{\left\{ \rho \frac{\partial w'}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} (\rho u') \right\} \zeta'} - \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left(\rho \frac{dU}{dz} \right) \overline{\zeta'^2} \right]. \quad (\text{B.74})$$

(B.59), (B.72), (B.74) より m_d を一次の微小擾乱量で表わすことができる.

$$m_d = \overline{\left\{ \rho \frac{\partial w'}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} (\rho u') \right\} \zeta'} - \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left(\rho \frac{dU}{dz} \right) \overline{\zeta'^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{d\rho}{dz} U \overline{\zeta'^2} \right). \quad (\text{B.75})$$

これから e_d を求めることができる.

$$\begin{aligned} e_d &= \frac{1}{2} \rho (\overline{u'^2} + \overline{w'^2}) + U \overline{\rho' w'} + \frac{1}{2} U \overline{\left\{ \rho \frac{\partial w'}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} (\rho u') \right\} \zeta'} \\ &\quad - \frac{1}{4} U \frac{d}{dz} \left(\rho \frac{dU}{dz} \right) \overline{\zeta'^2} + \frac{1}{4} U \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{d\rho}{dz} U \overline{\zeta'^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{d\rho}{dz} \overline{\zeta'^2} \right) g z. \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

第C章 linear shear 流中の浅水波の Over-Reflection 解

linear shear 流に対して無限遠から $e^{ik(x-ct)}$ の型の波を励起, 伝播させたときの定常解を求める. 透過波領域 ($y > 0$) において critical level から遠ざかる方向に進む波しか存在しない, という境界条件を用いる. 変位だけの式 (2.7) について $h' = \hat{h}'(y)e^{ik(x-ct)}$ を代入すると

$$\frac{d^2 \hat{h}'}{dy^2} - \frac{2}{U-c} \frac{dU}{dy} \frac{d\hat{h}'}{dy} + k^2 \left\{ \frac{(U-c)^2}{gH} - 1 \right\} \hat{h}' = 0. \quad (\text{C.1})$$

平均の深さ h , 特徴的な流れの速度 U_0 , シアーの強さ $\frac{dU}{dy}$ を用いて無次元化を行う.

$$(x, y) = L(x^*, y^*), \quad t = \frac{L}{U_0} t^*, \quad \hat{h}' = H h^*, \quad (\text{C.2})$$

$$U = U_0 U^*, \quad L = \frac{U_0}{dU/dy}. \quad (\text{C.3})$$

これらを (C.1) に代入すると無次元化した変位の式が得られる.

$$\frac{d^2 \hat{h}'}{dy^2} - \frac{2}{y} \frac{d\hat{h}'}{dy} + k^2 \{ Fr^2 y^2 - 1 \} \hat{h}' = 0. \quad (\text{C.4})$$

ただし y 座標の原点を critical level : $U - c = 0$ に選んだ. *は省略してある.

(C.4) を $y = 0$ のまわりの級数解として求めると (Satomura(1981)).

$$\hat{h}'_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n y^{2n+3}, \quad (\text{C.5})$$

$$A_1 = \frac{k^2}{10} A_0, \quad A_{n+1} = \frac{k^2}{(2n+5)(2n+2)} (A_n - Fr^2 A_{n-1}),$$

$$\hat{h}'_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n y^{2n}, \quad (\text{C.6})$$

$$B_1 = -\frac{k^2}{2} B_0, \quad B_{n+1} = \frac{k^2}{(2n+2)(2n-1)} (B_n - Fr^2 B_{n-1}). \quad (\text{C.7})$$

となる.

$y \rightarrow \pm\infty$ における (C.4) の解の振舞いを調べる. $\hat{h}' = |y| \tilde{h}'$ と変数変換すると (C.4) は

$$\frac{d^2 \tilde{h}'}{dy^2} + \left\{ k^2 (Fr^2 y^2 - 1) - \frac{2}{y^2} \right\} \tilde{h}' = 0. \quad (\text{C.8})$$

この式は $y \rightarrow \pm\infty$ で

$$\frac{d^2 \tilde{h}'}{dy^2} + k^2 Fr^2 y^2 \tilde{h}' = 0. \quad (C.9)$$

漸近する．これにWKB近似を適用して $y \rightarrow \pm\infty$ での漸近解が得られる．

$$\tilde{h}'_+ = |P|^{-1/4} \exp\left(i \int^y \sqrt{P} dy\right), \quad (C.10)$$

$$\tilde{h}'_- = |P|^{-1/4} \exp\left(-i \int^y \sqrt{P} dy\right). \quad (C.11)$$

ただし $P = k^2 Fr^2 y^2$ である． \tilde{h}'_+ は critical level から離れる方向， \tilde{h}'_- は critical level に向かう方向に進む波を表わす．境界条件を用いて解を定めよう．透過波領域 $y \rightarrow \infty$ においては critical level から離れる方向に進む波しかないので

$$\tilde{h}' \equiv \alpha \tilde{h}'_1 + \beta \tilde{h}'_2 \sim A \tilde{h}'_+ \quad (C.12)$$

となる．ただし $\tilde{h}'_{1,2}$ は $\hat{h}'_{1,2}$ を $|y|$ で割り算したものであり α, β, A は複素定数である．ここで \tilde{h}'_+ について $\frac{d\tilde{h}'_+}{dy} + \left(\frac{dP/dy}{4|P|} + i\sqrt{P}\right) \tilde{h}'_+ = 0$ が成り立つことから α と β の比が定まる．

$$\frac{\beta}{\alpha} = - \left[\frac{\frac{d\tilde{h}'_1}{dy} + \left(\frac{dP/dy}{4|P|} + i\sqrt{P}\right) \tilde{h}'_1}{\frac{d\tilde{h}'_2}{dy} + \left(\frac{dP/dy}{4|P|} + i\sqrt{P}\right) \tilde{h}'_2} \right]_{y=y_{obs}}. \quad (C.13)$$

y_{obs} は透過波側でWKB近似が十分成り立つ点である．

これより反射係数 R ，透過係数 T は次のように計算される．

$$R = - \left[\frac{\frac{d\tilde{h}'}{dy} + \left(\frac{dP/dy}{4|P|} - i\sqrt{P}\right) \tilde{h}'}{\frac{d\tilde{h}'}{dy} + \left(\frac{dP/dy}{4|P|} + i\sqrt{P}\right) \tilde{h}'} \right]_{y=-y_{obs}}, \quad (C.14)$$

$$T = - \frac{\left[\frac{d\tilde{h}'}{dy} + \left(\frac{dP/dy}{4|P|} - i\sqrt{P}\right) \tilde{h}' \right]_{y=y_{obs}}}{\left[\frac{d\tilde{h}'}{dy} + \left(\frac{dP/dy}{4|P|} + i\sqrt{P}\right) \tilde{h}' \right]_{y=-y_{obs}}}. \quad (C.15)$$

第 D 章 保存則からの積分定理の導出

D.1 Ripa の定理

不安定モードの disturbance energy E_d , disturbance momentum M_d は 0 である。したがって不安定モードが存在するには任意の定数 c について

$$E_d - cM_d = 0 \quad (\text{D.1})$$

となる必要がある。(B.39),(B.40) より

$$E_d - cM_d = \int \left[\frac{1}{2} H \overline{\left\{ u' + \frac{(U-c)h'}{H} \right\}^2} + \frac{1}{2} H \overline{v'^2} + \frac{1}{2} g \overline{h'^2} \left\{ 1 - \frac{(U-c)^2}{gH} \right\} - \frac{1}{2} \frac{dQ}{dy} H^2 (U-c) \overline{\eta'^2} \right] dy \quad (\text{D.2})$$

これより不安定であるための必要条件は、全ての实数 c について $(U-c) \frac{dQ}{dy} > 0$ あるいは $gH < (U-c)^2$ となる点が流れのどこかに存在することが必要である。これが Ripa の定理である。

D.2 Fj\o rtoft の定理

不安定モードの disturbance energy E_d , disturbance momentum M_d は 0 である。したがって不安定モードが存在するには任意の定数 c について

$$E_d - cM_d = 0 \quad (\text{D.3})$$

となる必要がある。(B.41),(B.42) より

$$E_d - cM_d = \int \left\{ \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2}) - \frac{1}{2} \frac{dQ}{dy} (U-c) \overline{\eta'^2} \right\} dy \quad (\text{D.4})$$

これより、不安定であるためには、全ての实数 c について $(U-c) \frac{dQ}{dy} > 0$ となる点が流れのどこかに存在することが必要である。

特に $U(y)$ が単調な関数で、かつ変曲点 $y_s : dQ/dy = 0$ がただ 1 つしか存在しない流れにおいては $c = U(y_s)$ と選ぶことによって *Fjφrtoft* の定理が導かれる。 $(U - c) \frac{dQ}{dy}$ を y_s のまわりに展開すると

$$\left(\frac{d^2Q}{dy^2}\right)_{y=y_s} \cdot \left(\frac{dU}{dy}\right)_{y=y_s} \cdot (y - y_s)^2 > 0$$

すなわち不安定であるためには

$$\left(\frac{d^2Q}{dy^2}\right)_{y=y_s} \cdot \left(\frac{dU}{dy}\right)_{y=y_s} > 0$$

となる必要がある。

D.3 Syngge の定理

非圧縮（成層あり）での M_d を流体粒子の変位で書き直す。 x 方向、 z 方向の変位 ξ, ζ を次のように定義する。

$$u' = \frac{D\xi'}{Dt} - \frac{dU}{dt}\zeta', \quad (\text{D.5})$$

$$w' = \frac{D\zeta'}{Dt} \quad (\text{D.6})$$

ただし $\frac{D}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)$ である。密度の擾乱 ρ' との関係は

$$\rho' = -\frac{d\rho}{dz}\zeta' \quad (\text{D.7})$$

であった。これらを (B.75) に代入して整理すると

$$M_d = -\int \rho \left(\frac{\partial \xi'}{\partial x} \frac{D\xi'}{Dt} + \frac{\partial \zeta'}{\partial x} \frac{D\zeta'}{Dt} \right) dz \quad (\text{D.8})$$

となる。ここで ξ, ζ が $\exp(i(kx - ct))$ に比例すると仮定する。 $\frac{\partial}{\partial x}(\xi, \zeta) = ik(\xi, \zeta)$, $\frac{\partial}{\partial t}(\xi, \zeta) = -ikc(\xi, \zeta)$ を用いてさらに変形すると

$$M_d = \int \left\{ \frac{1}{4} \frac{d}{dz} \left(\rho \frac{dU}{dz} \right) - \frac{N^2(U - c_r)}{2|U - c|^2} \right\} |\zeta'|^2 dz. \quad (\text{D.9})$$

となる。不安定モードが存在するためには $M_d = 0$ となる必要がある。したがって不安定モードが存在するためには

$$\frac{1}{4} \frac{d}{dz} \left(\rho \frac{dU}{dz} \right) - \frac{N^2(U - c_r)}{2|U - c|^2} \quad (\text{D.10})$$

が流れのどこかで符号を変えなければならない。これが Syngge の定理である。

文献

- Bretherton, F.P., 1966 : Gravity waves in shear. *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, **92**, 466-480
- Hayashi, Y.-Y. and W.R. Young, 1987 : Stable and unstable shear modes of rotating parallel flows in a shallow water. *J. Fluid Mech.*, **184**, 477-504
- Howard, L.N., 1961 : Note on a paper of John W. Miles. *J. Fluid Mech.*, **10**, 509-512
- Kuo, H.L., 1949 : Dynamic instability of two-dimensional nondivergent flow in a barotropic atmosphere., *J. Met.*, **6**, 105-122
- Lindzen, R.S. and A.J. Rosenthal, 1976 : On the instability of Helmholtz velocity profile in stably stratified fluids when a lower boundary layer is present. *J. Geophys. Res.*, **81**, 1561-1571
- Lindzen, R.S. and K.K. Tung, 1978 : Wave overreflection and shear instability. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1626-1632
- Lindzen, R.S., Farrel, B., and K.K. Tung, 1980 : The Concept of Wave Over-reflection and Its Application to Baroclinic Instability. *J. Atmos. Sci.*, **37**, 44-63
- Lindzen, R.S. and A.J. Rosenthal, 1981 : A WKB asymptotic analysis of baroclinic instability. *J. Atmos. Sci.*, **38**, 619-629
- Lindzen, R.S. and A.J. Rosenthal, 1983 : Instability in a stratified fluid having one critical level. Part 3 : Kelvin-Helmholtz instabilities as overreflected waves. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 530-542
- Lindzen, R.S. and J.W. Barker, 1985 : Instability and wave over-reflection in stably stratified shear flow. *J. Fluid Mech.*, **151**, 189-217
- Lindzen, R.S., 1988 : Instability of plane parallel shear flow (Toward a mechanistic picture of how it works). *PAGEOH*, **126**, 103-121
- Miles, J.W., 1961 : On the stability of heterogeneous shear flows. *J. Fluid Mech.*, **10**, 496-508
- Rayleigh, Lord, 1880 : On the stability or instability of certain fluid motions. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **11**, 57-70

- Ripa,P.,1983 : General stability conditions for zonal flows in a one layer model on the -plane or the sphere. *J. Fluid Mech.*, **126**, 463-489
- Rosenthal,A.J. and R.S.Lindzen,1983 : Instability in a stratified fluid having one critical level. Part 1: Results. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 509-520
- Rosenthal,A.J. and R.S.Lindzen,1983 : Instability in a stratified fluid having one critical level. Part 2: Using concepts of overreflection. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 521-529
- Satomura,T.,1981 : An investigation of shear instability in a shallow water. *J. Met. Soc. Japan*, **59**, 148-167
- Synge,J.L.,1933 : The stability of heterogeneous liquids. *Trans. Roy. Soc. Can. Sec.3*,**27**, 1-18