

非静力学モデルの方程式系

理学部 地球惑星科学科 地球および惑星大気科学研究室 今関 翔 (指導教員: 林 祥介)

1. はじめに

- 積乱雲は強い上昇流により発達し、激しい集中豪雨をもたらす。鉛直方向の運動が重要である積乱雲を数値シミュレーションするには非静力学方程式系が適するだろう。実際、気象庁や米国の実績のある数値モデルにも非静力学方程式系が用いられている。
- 本研究では非静力学系モデルが使われる理由の考察、非静力学方程式系の分類・定式化をする。

2. なぜ非静力学か

- 当初、現業に使われていた気象モデルは静力学系に基づくものであった。まずは、静力学系が主に用いられてきた理由を考察する。ここで静力学と非静力学とは何かを簡単にまとめる。

静力学系	(運動の水平スケール) >> (運動の鉛直スケール) という場を考える。そのため大気の大気鉛直方向の運動を水平方向と比べて極めて小さいものと見なし、運動方程式を近似する静力学近似を行う。
非静力学系	(運動の水平スケール) ≒ (運動の鉛直スケール) という場を考える。そのため静力学近似が破綻し、静力学系よりも計算が複雑となる。非静力学系の運動スケールに当てはまるものとしては上昇気流が卓越する積乱雲がそうである。

静力学系と非静力学系の違いから、非静力学方程式系は複雑なため計算に時間がかかり、現業には向かないものであったことが考えられる。そのため、静力学系が主に使われていたのだろう。

静力学系・非静力学系モデルの予測値の比較

T.Kato (1997) では静力学・非静力学方程式系に基づく数値モデルでのシミュレーション結果の比較が行われ、下記の表は降水に関する予測値を比較したものである。

なお、この比較実験では気象研究所の非静力学系モデル(Ikawa and Saito 1991) とそのモデルに静力学近似を適用した静力学系モデル(Kato and Saito 1995) が用いられている。

T.Kato 1997

Δx	Scheme	$P_{a>1}N[\times 10^{11} m^2]$	T.Kato 1997		T.Kato 1997	
			$\frac{P_{a>1}H}{P_{a>1}N}$	$P_{total}N[\times 10^9 kg]$	$\frac{P_{total}H}{P_{total}N}$	$\frac{P_{total}H}{P_{total}N}$
5 km	PES	1.13	1.22	1.61	1.25	
	PMS	1.14	1.21	1.55	1.24	
10 km	PES	0.97	1.12	1.55	1.12	
	PMS	0.99	1.06	1.49	1.10	
	MAS	1.67	1.06	2.32	1.06	

積分時間(9時間)の間に非静力学モデルが予想した、1 mm 以上の降水があった領域面積 $P_{a>1}$ 及び総降水量 P_{total} 、非静力学モデルに対する静力学モデルの予想比。 Δx は格子サイズで、HとNはそれぞれ静力学(hydrostatic)モデルと非静力学(Non-hydrostatic)モデルを意味する。PES, PMS, MASは異なる三つの降水スキームである。

二つのモデルの予測値の比から、静力学系のモデルは非静力学系のモデルに比べ、降水面積と総降水量を過大評価していることがわかる。

なぜ非静力学か

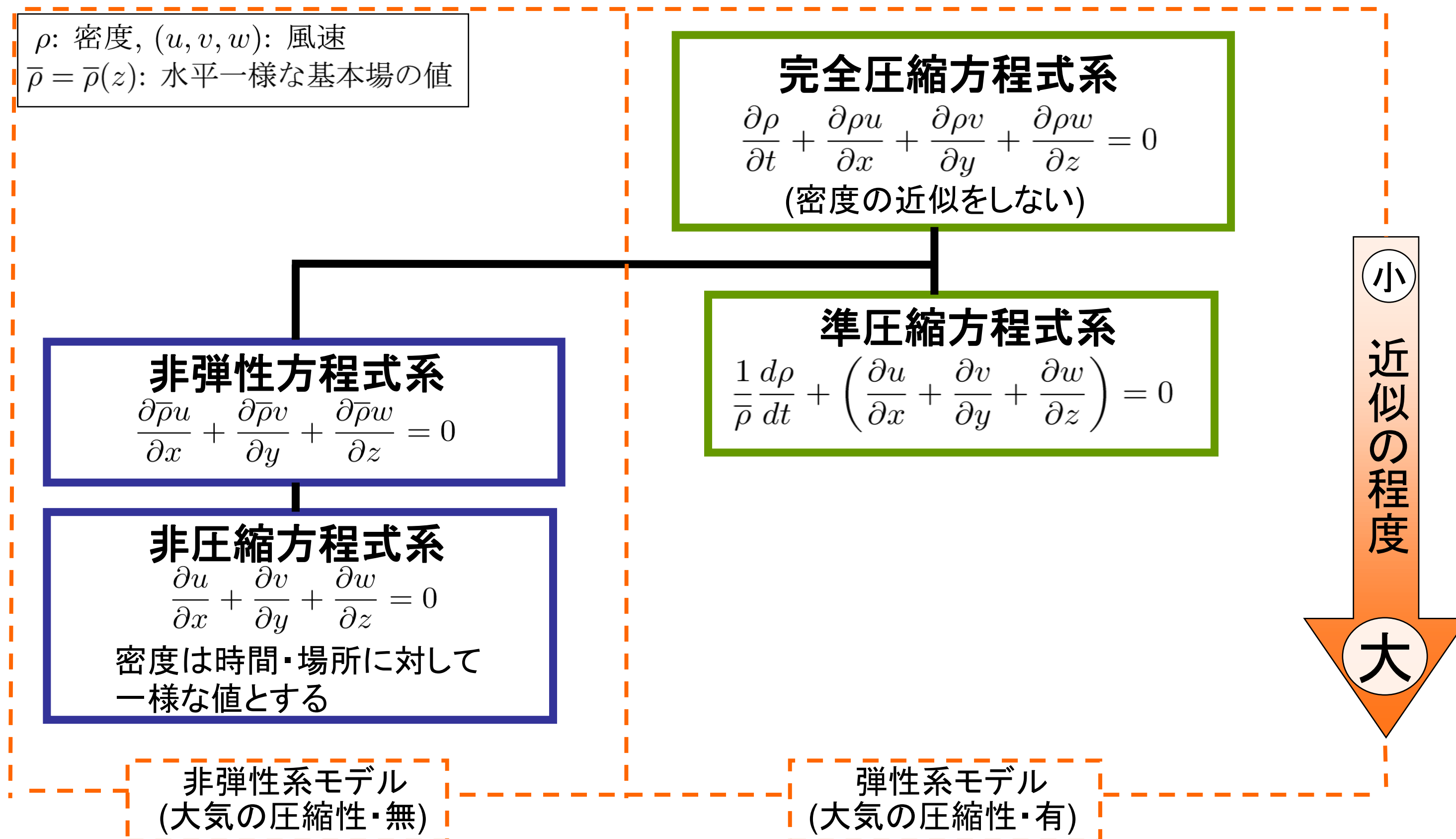
上昇流が卓越する積乱雲は鉛直の運動を無視できないため静力学近似で扱うには限界があり、非静力学方程式系を用いる必要がある。

ただし、非静力学系では3成分の運動方程式を扱うため、静力学系に比べて計算が複雑になる。

しかし、計算機の性能の向上により複雑な計算が可能となってきていることから非静力学系モデルによる計算が現実的なものとなった。

3. 非静力学方程式系の分類

非静力学方程式系は大気の圧縮性の有無などの密度の近似の仕方によって分類され、それは連続の式によって表現される。以下に分類の概略図を載せる。



4. 定式化

- 完全圧縮方程式系は密度の近似を行っていない、非静力学方程式系の最も基本となるものである。非静力学系の定式化をする上でこれを理解することは重要であるため、ここでは完全圧縮方程式系について述べる。
- なお、この定式化では地球回転の影響は無視し、乾燥大気を扱う。さらに場の変数は水平一様な基本場 $\bar{\phi}(z)$ とそこからの変動 $\phi'(x, y, z, t)$ に分けて考える。

<完全圧縮方程式系(弾性系モデル)>

完全圧縮方程式系モデルは大気の圧縮性を認め、近似を行わない厳密な連続の式と状態方程式から、気圧を予報するものである。

<基礎方程式系(変数・係数の説明は下部に記す)>

- 連続の式: $\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$ (質量保存)

大気の圧縮性を示す項

- 運動方程式

$$\begin{cases} x \text{ 方向: } \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial \rho uw}{\partial z} \right) + \frac{\partial \rho p'}{\partial x} = \nu \rho \nabla^2 u \\ y \text{ 方向: } \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho vu}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho vw}{\partial z} \right) + \frac{\partial \rho p'}{\partial y} = \nu \rho \nabla^2 v \\ z \text{ 方向: } \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho wu}{\partial x} + \frac{\partial \rho wv}{\partial y} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} \right) + \frac{\partial \rho p'}{\partial z} = -\rho' g + \nu \rho \nabla^2 w \end{cases}$$

圧力傾度力 (x, y, z 方向の $\frac{\partial \rho p'}{\partial x}$ 項)

質量フラックスの時間変化・移流項 (x, y, z 方向の $\frac{\partial \rho u^2}{\partial x}$ 項)

密度偏差による浮力 (z 方向の $-\rho' g$ 項)

- 運動方程式のフラックス形式への書き換えにより、側面境界を通しての質量移流を計算しやすくしている

- 浮力は状態方程式を用いて密度偏差から直接求められる。

- 熱の式

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} = \frac{Q}{C_p \pi} + \kappa \nabla^2 T \rightarrow \text{エントロピーの定義式を熱力学第一法則と温度を用いて書き換えた}$$

- 状態方程式

$$\rho = \frac{p}{R\theta\pi}$$

(u, v, w): 風の3成分, T : 気温, p : 気圧, ρ : 密度, θ : 温位, ν : 動粘性係数,
 π : エクスナー関数(無次元化した気圧), C_p : 乾燥大気の定圧比熱
 Q : 非断熱加熱, κ : 熱拡散係数, R : 乾燥大気に対する気体定数)

<気圧の予報方程式>

- 状態方程式と連続の式を用いることで気圧の予報方程式が以下のように得られた。

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = -C_s^2 \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) + C_s^2 \frac{\rho}{\theta} \frac{\partial \theta'}{\partial t}$$

風速による大気の発散 (左辺の括弧内)

大気の熱膨張 (右辺)

$\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) = -\partial \rho' / \partial t$: 大気の圧縮性

非断熱加熱・熱拡散 (右辺)

上式に現在の風速、気圧、温度の値を与えれば気圧の単位時間当たりの変化量が得られ、気圧の予報値がわかる。

完全圧縮方程式系は、連続の式・運動方程式・熱の式・状態方程式でその方程式系を閉じている。しかし、気圧の予報方程式を求め、状態方程式の代わりに用いることで、密度・風速・気圧・温度の6つの未知変数に対する、6つの時間に関する一階微分方程式で方程式系を閉じられるようになる。

5. まとめ

- 本研究では積乱雲のように鉛直の運動が重要な現象に対する非静力学系の必要性の考察と非静力学系の分類・定式化を行った。
- 静力学系・非静力学系の比較から、非静力学系の必要性が確かめられた。
- 非静力学方程式系の分類は連続の式に表される密度の近似の仕方によって分けられる。
- 完全圧縮方程式系は密度の近似を行わず、厳密な連続の式を用いるものである。
- 完全圧縮方程式系の状態方程式と連続の式から気圧の予報方程式が得られた。

6. 参考文献

- 浅井富雄, 新田尚, 松野太郎著, 2000, 基礎気象学, 朝倉書店, 202pp.
- Ikawa, M., Saito, K., 1991: Description of a nonhydrostatic model developed at the Forecast Research Department of the MRI, *Tech.Rep.of the MRI*, 28, 238pp.
- Kato, T., Saito, K., 1995: Hydrostatic and non-hydrostatic simulation of moist convection: The applicability of hydrostatic approximation to a high-resolution model, *J.Meteor.Soc. Japan*, 73, 58-77.
- Kato, T., 1997: Hydrostatic and Non-hydrostatic Simulations of Moist Convection; Review and Further Study, *Meteorology and Atmospheric Physics*, 63, 39-51.
- 加藤輝之, 1999: 湿潤対流における非静力学効果, 気象研究ノート, 非静力学モデル, 日本気象学会版, 196, 153 - 167.
- 日本気象学会編, 1998: 気象科学事典, 東京書籍, 637pp.
- Ogura, Y., Takahashi, T., 1971: Numerical simulation of the life cycle of a thunderstorm cell, *Mon.Wea.Rev.*, 99, 895-911.
- 齊藤和雄, 1999: 非静力学モデルの分類, 気象研究ノート, 非静力学モデル, 日本気象学会版, 196, 19 - 35.
- Yamasaki, M., 1986: A three-dimensional tropical cyclone model with parameterized cumulus convection, *Papers/Meteor.Geophys.*, 37, 205-234.
- Zhang, D.-L., Hsie, E.-Y., Moncrieff, M.W., 1988: A comparison of explicit and implicit predictions of convective and stratiform precipitating weather systems with a meso- B-scale numerical model, *Quart.ZRoy.Meteor.Soc.*, 114, 31-60.