

Korteweg-de Vries 方程式のソリトン解に関する考察

高橋 由実子

地球および惑星大気科学研究室

1. はじめに

ソリトンとは非線形方程式の解として現れる孤立波の一つである。ソリトンの特徴的な性質は、複数のソリトンが衝突の前後でそれぞれの振幅などの個性を保つことである。この性質は粒子的性質と呼ばれ、この性質をもつことが、孤立波 (solitary wave) の粒子 (-on) を意味するソリトンの名前の由来である。

本研究で取り上げる Korteweg-de Vries 方程式 (以降、K-dV 方程式と略す) は、1895年に D. J. Korteweg と G. de Vries によって、浅水系の表面を伝わる波に対して導かれた方程式であり、K-dV 方程式は一般的に、 x を位置、 t を時間、 u を水面の変位などとして、以下のような形で書くことができる。

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

この方程式に対し1965年に、N. J. Zabusky と M. D. Kruskal が数値計算を用いることによって初めて、ソリトンを発見した。そのため、K-dV 方程式はソリトン解をもつ方程式のなかでも代表的なものとして知られている。K-dV 方程式もまた、浅水系の流体以外にもさまざまな物理現象の支配方程式として現れる。本研究ではソリトンを理解する第一歩として、この K-dV 方程式を例にとり、解析と数値計算によって考察を行う。

2. 1 ソリトン解

定性的な考察

まず、K-dV 方程式

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

の二項目、三項目の効果を用いた方程式にして考える。

二項目 (非線形項) の効果

- 三項目を0とした方程式

$$u_t - 6uu_x = 0$$

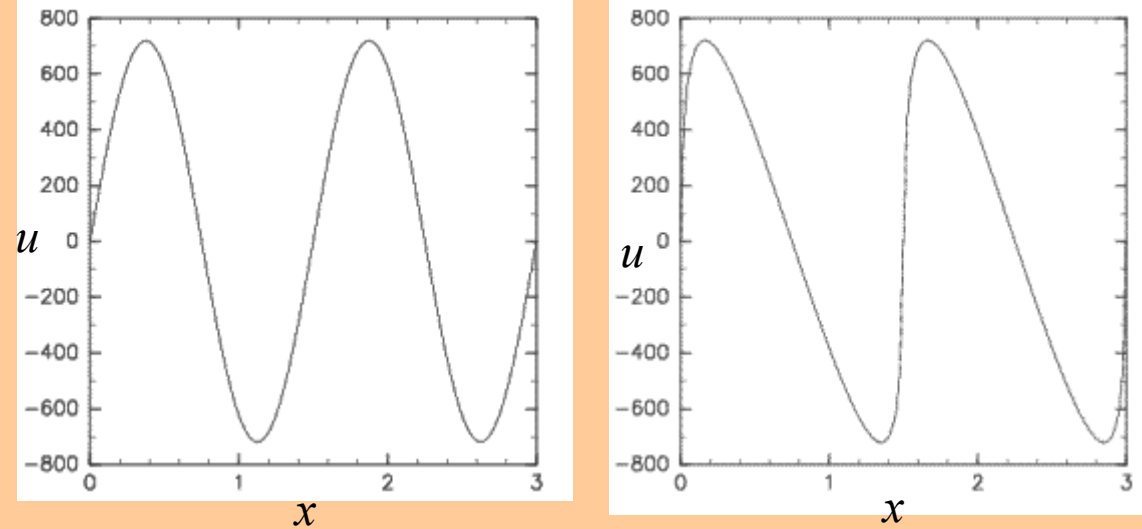
の解は f を任意の関数として

$$u = f(x + 6ut)$$

- 解の位相速度は $-6u$

- 変位 u が大きいほど位相速度が大きくなる。したがって最初に与えた波の波形は時間とともに変形していく。

数値計算による結果



- 傾きが正の部分ではより傾きが急になっていき、逆に傾きが負の部分では傾きは緩やかになっていく。

三項目 (分散項) の効果

- 二項目を0とした方程式

$$u_t - u_{xxx} = 0$$

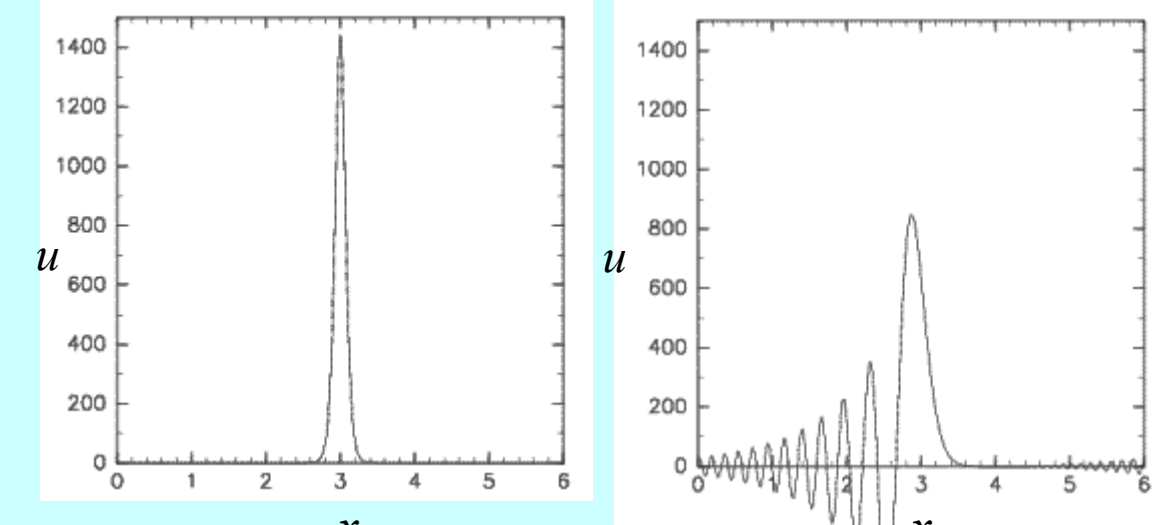
の解は α_n, β_n をフーリエ係数として

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos(k_n x - \omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(k_n x - \omega_n t)$$

とあらわされる (k, ω は波数, 振動数)

- 群速度は $v_{gn} = -3k_n^2$
 - 複数の波数をもつ波は波数ごとに群速度が異なるので分散していく。波数の大きい波ほど速く伝播する。

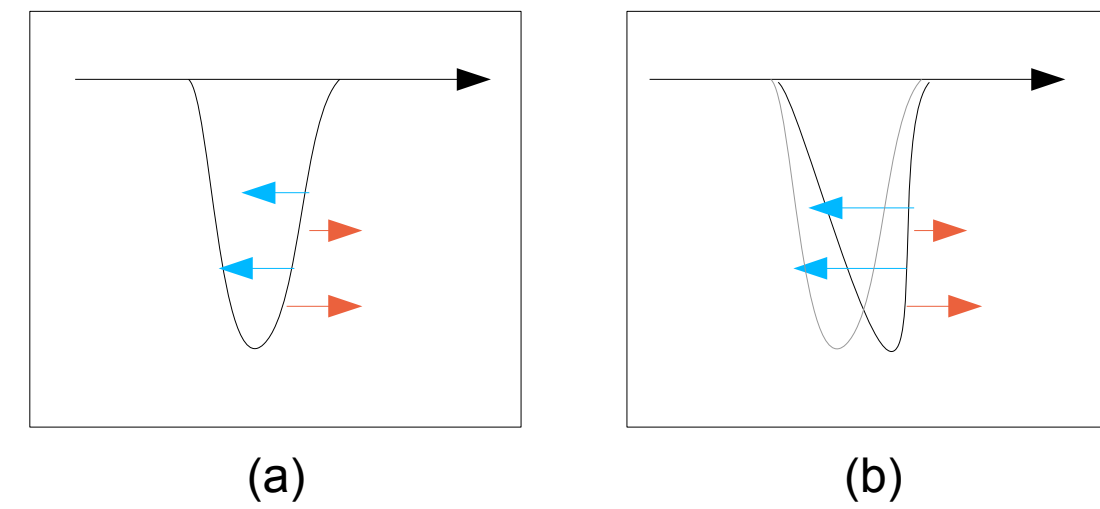
数値計算の結果



- 振幅が小さい波ほど早く分散する。
 - フーリエ係数より波数が大きい波ほど振幅が大きい。

以上の二つをまとめると以下のように、孤立波解が可能となることが説明される。

- はじめ、右図の (a) のような孤立波が、非線形項によって負の変位を持つ波は振幅が大きいほど正の方向へ速く進み (b) のようになるとする。
- 波が突っ立った部分は空間のせまい領域で波が変化することを意味するので、波数の大きな波が励起されたと解釈できる。よって分散項の効果により大きくなるか、負の向き速度が大きくなって (a) の状態に戻る。
- すなわち、二つの項の効果がつりあうと孤立波が形を変えずに伝播する。



それぞれの項がつりあうイメージ。青矢印が分散項、赤矢印が非線形項による変位 x 方向への速さを表す。

解析解からの考察

解析解は以下のように求まる。

$$u = -A \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{A}{2}} (x - 2At - x_0) \right\}$$

- $A > 0$ より振幅は負
- 孤立波の位相速度は $2A$
 - 孤立波は振幅が大きいほど速く伝播する
- 振幅が最大の点から sech の引数が 1 となる点までの距離を孤立波の幅と定義すると、その幅は $1/\sqrt{A/2}$
 - 振幅が大きほど孤立波は鋭くなる

1 ソリトン解は以上のような特徴をもつ孤立波が一定の速度で形を変えずに伝播する解である。

3. 2 ソリトン解

解析解からの考察

- K-dV 方程式の 2 ソリトン解は導出は可能だが、形が複雑で考察が難しい。そこで $t \rightarrow \pm \infty$ の解の漸近形を考える。
- 2 ソリトン解の漸近形
1 ソリトン解の形の孤立波を二つ考え、それぞれの波数を k_1, k_2 ($k_1 > k_2$) とすると、漸近形は以下のようにかける。

- $t \rightarrow -\infty$ のとき

$$u = \sum_{i=1}^2 [-2k_i^2 \operatorname{sech}^2 \{k_i x - k_i^3 t - \delta_i^{(-)}\}]$$
$$\delta_1^{(-)} = -\frac{1}{2} \ln A_1, \quad \delta_2^{(-)} = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{A_3}{A_1} \right)$$

- $t \rightarrow +\infty$ のとき

$$u = \sum_{i=1}^2 [-2k_i^2 \operatorname{sech}^2 \{k_i x - k_i^3 t - \delta_i^{(+)}\}]$$
$$\delta_1^{(+)} = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{A_3}{A_2} \right), \quad \delta_2^{(+)} = -\frac{1}{2} \ln A_2$$

ただし

$$i = 1, 2, \quad A_3 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 A_1 A_2$$

- $t \rightarrow \pm \infty$ で 2 つのソリトンそれぞれの振幅の大きさは変わっていない。
- 位相に注目すると、初期位相 δ を無視すれば、 $t \rightarrow \pm \infty$ のソリトンの位置は、 $x \sim 4k_i^2 t, i = 1, 2$
 $k_1 > k_2$ であるから、振幅の大きいソリトンの位置は、 $t \rightarrow -\infty$ で振幅の小さいソリトンの位置よりも負の方向にある。しかし、 $t \rightarrow +\infty$ では、大きいソリトンの位置は小さいソリトンより正の方向にある。つまり大きいソリトンが小さいソリトンを追い越している。
- 一方、 $t \rightarrow -\infty$ と、 $t \rightarrow +\infty$ とのそれぞれのソリトンの位相差 Δ をとると
$$\Delta_1 = \frac{1}{2k_1} \ln \frac{A_1 A_2}{A_3}, \quad \Delta_2 = \frac{1}{2k_2} \ln \frac{A_3}{A_1 A_2}$$
となり、位相差が生じることがわかる。

数値計算

2 ソリトン解の数値計算は以下の形の K-dV 方程式を支配方程式とした。

$$u_t - uu_x + u_{xxx} = 0$$

計算スキーム

- K-dV 方程式の二次の保存量までを考慮し、以下のように離散化を行った。

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{2\Delta t} = u_i^j \frac{(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j)}{6\Delta x} + \frac{(u_{i+1}^j)^2 - (u_{i-1}^j)^2}{6\Delta x} - \frac{u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j}{2(\Delta x)^3}$$

ただし空間に関する添え字が i 、時間は j 、時間と空間の刻み幅がそれぞれ $\Delta x, \Delta t$ である。

数値計算の設定

- 計算領域は 3.0、格子点数は 256、時間きざみ幅は 2.0×10^{-7} 、時間積分は 25000 回
- 初期波形は

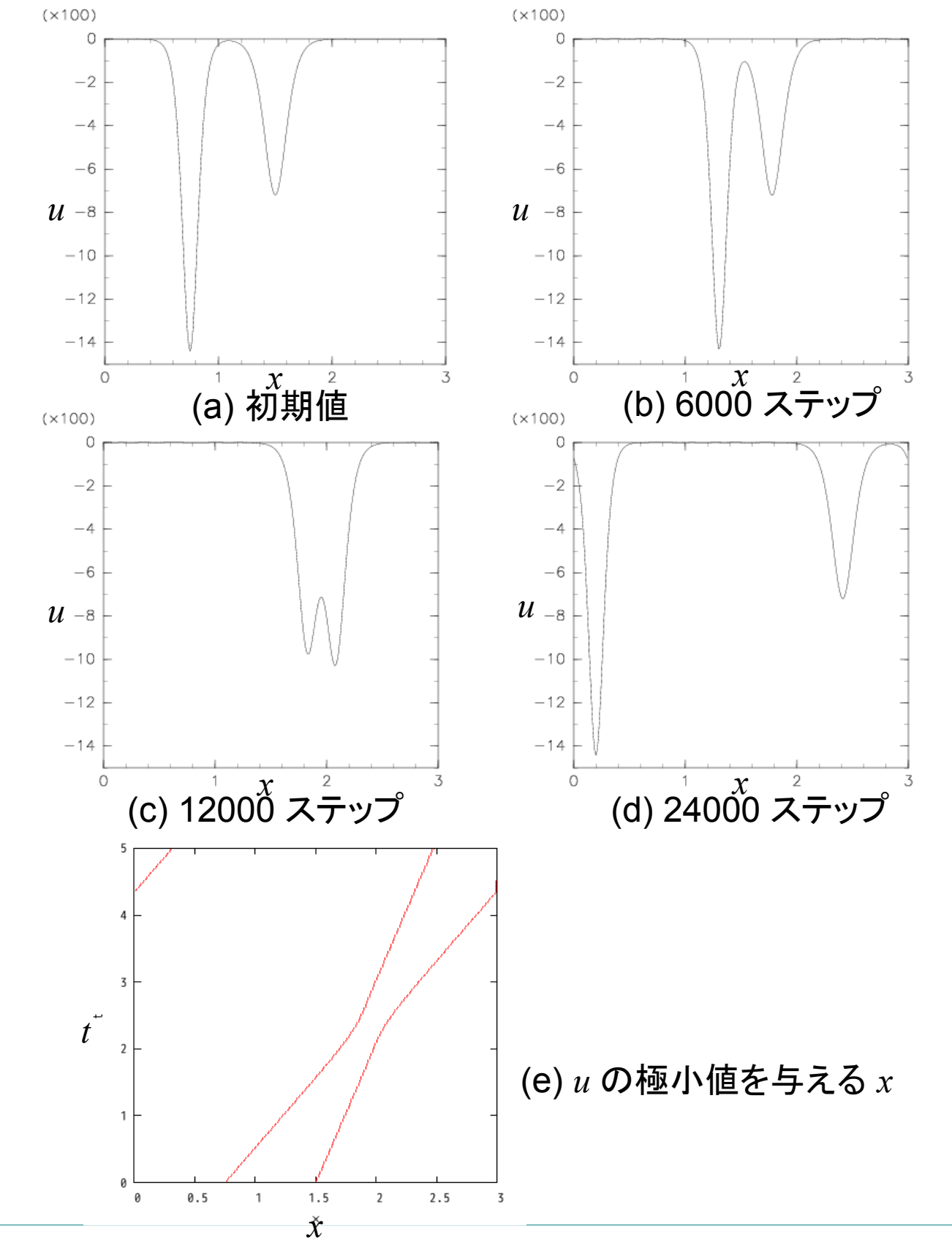
$$u = -U_1 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x - X_1}{\sqrt{2\alpha/U_1}} \right) - U_2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x - X_2}{\sqrt{2\alpha/U_2}} \right)$$

$$\alpha = 6.0, \quad U_1 = 1440.0, \quad U_2 = 720.0, \quad X_1 = 3.0/4.0, \quad X_2 = 3.0/2.0$$

数値計算の結果

計算結果を右図に示す。

- ソリトンは x が正の方向へ進む。(c) はソリトン同士が接近し、もとの振幅が大きくなると同時に振幅が小さく、小さなソリトンは振幅が大きくなっていることがわかる。(d) は衝突した後である。二つのソリトンの振幅がそれぞれ初期波形で与えた振幅まで戻っている。
- (e) で 2 つのソリトンが衝突するところに注目すると、線型波のようにピークが 1 つになっていない。また 2 つのソリトンが近付いたとき、軌道が曲がっている。これは位相が変化していることを意味する。また、衝突前の直線軌道と衝突後の直線軌道は平行だがずれている。これが位相のずれ Δ を意味する。



4. まとめ

K-dV 方程式のソリトン解の性質を、解析解と数値計算を用いて考察した。

- K-dV 方程式は、非線形項と分散項の効果がつりあうとき孤立波解が可能となることを示唆し、解析解から 1 ソリトン解の性質を確認した。
- 2 ソリトン解は衝突の前後でソリトンの個性が変化しないこと、衝突の際には線型波のように単純な重ね合わせにはならないことを確認した。

謝辞

数値計算の可視化には、地球流体電脳倶楽部によって開発された DCL を用いた。

参考文献

- 戸田盛和, 1995: 物理学 30 講シリーズ 3 波動と非線形問題 30 講, 朝倉書店, pp219
- 戸田盛和, 渡辺慎介, 1984: 共立物理学講座 6 非線形力学, 共立出版株式会社, pp183
- 渡辺慎介, 1985: ソリトン物理入門, 倍風館, pp249
- 山下達也, 2007: ソリトンの数理 - 逆散乱法による KdV 方程式の解法 -, 北海道大学卒業論文
- Zabusky, J. N. and Kruskal, M. D., 1965: Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 240-243.