

# Kelvin-Helmholtz 不安定の数値シミュレーション

神戸大学理学部地球惑星科学科  
地球および惑星大気科学研究室  
佐藤 緩奈

平成 25 年 2 月 21 日

## 要旨

本論文では, 平行シア一流で発生する Kelvin-Helmholtz 不安定についての研究を行う. 平行シア一流の定式化と線形安定性解析を行い, Kelvin-Helmholtz 不安定が起こる仕組みを調べる. 支配方程式の数値計算も行い, 線形安定性解析と数値計算の結果の比較を行う.

---

# 目次

第 1 章 序論	3
第 2 章 完全流体の基礎方程式とその第一積分	5
2.1 基礎方程式	5
2.1.1 連続の式	5
2.1.2 運動方程式	7
2.1.3 エネルギー方程式	9
2.1.4 状態方程式	13
2.1.5 2.1 節のまとめ	14
2.2 Bernoulli の定理	15
2.2.1 運動方程式の第 1 積分への準備	15
2.2.2 渦なしの流れ	16
2.2.3 保存場での定常流	16
2.2.4 密度が一様な流れ	17
第 3 章 渦	19
3.1 渦度と循環	19

---

3.2	渦管の強さ . . . . .	20
3.3	渦に関する諸定理 . . . . .	21
3.3.1	Kelvin の循環定理 . . . . .	21
3.3.2	Helmholtz の渦定理 . . . . .	22
3.3.3	Lagrange の渦定理 . . . . .	24
<b>第 4 章</b>	<b>Kelvin-Helmholtz 不安定</b>	<b>27</b>
<b>第 5 章</b>	<b>非圧縮粘性流体の方程式</b>	<b>36</b>
<b>第 6 章</b>	<b>数値計算</b>	<b>40</b>
6.1	支配方程式のスペクトル表現 . . . . .	40
6.2	計算設定 . . . . .	42
<b>第 7 章</b>	<b>まとめ</b>	<b>50</b>
	<b>参考文献</b>	<b>52</b>

# 第1章 序論

地表から高度約 10 km までの大気最下層を対流圏という。ここでは、水蒸気の凝結を伴う空気の鉛直運動に対して不安定であることにより盛んに対流がおこり、複雑な大気運動が生じている。その中の 1 つに晴天乱気流がある。これは対流圏と成層圏の境界である圏界面の下側に現れるジェット気流の周辺で、高度に伴う速度差により発生する。予測が困難で、雲を伴わないことが多いため発見も難しく遭遇時には航空機の運航に著しい影響を与える。本論文ではこの晴天乱気流の原因とされる Kelvin-Helmholtz 不安定を研究する。

Kelvin-Helmholtz 不安定とは、速度の異なる流体の境界面で生じる不安定であり、境界面は渦巻状の流れとなる。雲などがある場合には Kelvin-Helmholtz 不安定によって起こる界面での渦巻状の流れは図 1 のように特徴的な形の雲となり見ることができる。

Helmholtz(1868) は渦面の不安定性の物理性質を数語で記述しているが、Kelvin(1871) はその線形不安定性を完全に解析し、この不安定現象の名がついた。

本論文では、平行シア一流の定式化と線形安定性解析を行い、Kelvin-Helmholtz 不安定が起こる仕組みをまとめ、線形解を導出する。さらに、支配方程式の数値計算と線形安定性解析を比較し、どのような違いがあるか調べる。

本論文の構成は以下のとおりである。第 2 章で完全流体の基礎方程式と Bernoulli の定理を導出する。第 3 章で渦度と循環、渦に関する諸定理について述べる。第 4 章では、平行シア一流の定式化と線形安定性解析を行う。さらに、第 5 章では数値計算で用いる非圧縮粘性流体の方程式の導出と無次元化を行う。第 6 章で支配方程式の数値計算を行い、第 4 章での線形安定性解析と比較する。第 7 章はまとめである。



図1 Kelvin-Helmoltz 不安定で生じた波状雲

## 第 2 章 完全流体の基礎方程式とその 第一積分

### 2.1 基礎方程式

連続の式, 運動方程式, エネルギー方程式, 状態方程式の 4 つの基礎方程式を導く.

#### 2.1.1 連続の式

流体内に, 空間に固定された閉曲面  $S$  をとり, その面要素の面積を  $dS$ ,  $S$  の表面に立てられた外向き法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とし, 流体粒子の速度を  $\mathbf{u}$ , 密度を  $\rho$  とする. また, 面  $S$  で囲まれた空間の体積を  $V$ , その体積要素を  $dV$  で表す.(図 2.1.1 参照.) 面  $S$  で囲まれた流体に対して質量保存則を適用する. 単位時間当たりの  $V$  の質量変化は

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

と表せる. これは単位時間に面  $S$  を通って  $V$  内に流入する流体の質量

$$- \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$$

と等しいはずである. ここで  $\mathbf{n}$  は外向きベクトルであるため, 流れ込む流体に対しては負符号がついている. よって,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS.$$

ここで Gauss の定理により

$$\int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) dV$$

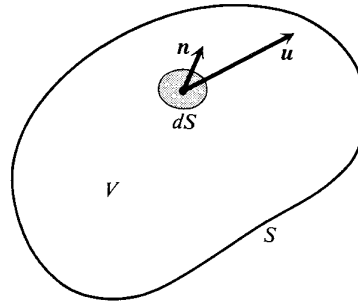


図 2.1.1 閉曲面  $S$ , その面要素の面積を  $dS$ ,  $S$  の表面に立てられた外向き法線ベクトル  $\mathbf{n}$ , 面  $S$  で囲まれた空間の体積  $V$ , 流体粒子速度  $\mathbf{u}$  を表す図

と書き換えられる. したがって上の方程式は

$$\int_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right\} dV = 0$$

と書ける. 閉曲面  $S$  は任意にとることができるので, 上式の内積分関数はゼロにならなければならない. したがって, 流れのいたる所で

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1.1)$$

が必要かつ十分である. (2.1.1) は Lagrange 微分によって

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.1.2)$$

とも書ける. (2.1.1) または (2.1.2) を **連続の式** という.

非圧縮性流体では, 密度  $\rho$  は運動によって変化せず,

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (2.1.3)$$

である. よって非圧縮性流体においては (2.1.2) は

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.1.4)$$

と簡単化される.



## 2.1.2 運動方程式

2.1.1 節の場合と同様に、固定閉曲面  $S$  で囲まれた流体に対して、運動量の保存則を適用する。単位時間当たりの  $V$  内の流体の運動量の時間変化は

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV \quad (2.1.5)$$

である。流体粒子に働く力は面積力と体積力がある。単位面積当たりの力を  $\mathbf{P}(\mathbf{n})$  とし、単位質量当たりの流体粒子に働く力を体積力を  $\mathbf{K}$  とする。 $\mathbf{P}(\mathbf{n})$  としたのは、 $\mathbf{P}$  は面要素  $d\mathbf{S}$  方向  $\mathbf{n}$  に依存するためである。(2.1.5) は、単位時間に面  $S$  を通る運動量の流入量

$$- \int_S (\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS,$$

面  $S$  における面積力の力積

$$\int_S \mathbf{P}(\mathbf{n}) dS,$$

面  $S$  内の流体に働く体積力の力積

$$\int_V \rho \mathbf{K} dV$$

の和に等しくなければならない。すなわち、

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = - \int_S (\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \mathbf{P}(\mathbf{n}) dS + \int_V \rho \mathbf{K} dV.$$

これを和の規約を用いて書けば、

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho u_i dV = - \int_S \rho u_i u_j n_j dS + \int_S p_{ij} n_j dS + \int_V \rho K_i dV. \quad (2.1.6)$$

上式で応力テンソルを  $\mathbf{p} = p_{ij}$  とし、面積力を  $\mathbf{P}(\mathbf{n}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = p_{ij} n_j \mathbf{e}_i$  としており、 $K_i$  は単位質量当たりの流体粒子に働く  $i$  方向の体積力を表す。(2.1.6) で、Gauss の定理より右辺 1 項目と、右辺 2 項目はそれぞれ、

$$\begin{aligned} - \int_S \rho u_i u_j n_j dS &= \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) dV, \\ \int_S p_{ij} n_j dS &= \int_V \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} dV \end{aligned}$$

と書けるから (2.1.6) は

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho u_i dV = - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) dV + \int_V \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} dV + \int_V \rho K_i dV$$

と表せる.  $V$  は任意にとることができるため, 2.1.1 節の場合と同様に非積分関数はゼロとなる. したがって, 流れのいたる所で方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}(p_{ij} - \rho u_i u_j) + \rho K_i \quad (2.1.7)$$

が成立しなければならない. この方程式を **運動方程式** という. さらに, (2.1.7) の左辺と, 右辺第 2 項目を展開するとそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) &= \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t}, \\ -\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) &= -\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \end{aligned}$$

となる. 連続の式 (2.1.1) を考慮すると第 1 式右辺第 2 項と第 2 式右辺第 2 項は相殺され, 運動方程式 (2.1.7) は

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} &= \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} - \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho K_i \\ \iff \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \rho K_i \\ \iff \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + K_i \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

と書き換えることができる. (2.1.8) において Lagrange 微分を用いると以下のように書ける.

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + K_i. \quad (2.1.9)$$

粘性がない, すなわち運動中でも接線応力が現れない流体, 完全流体, においては, 流体に働く応力は圧力のみである. よって応力  $p_{ij}$  は Kronecker のデルタを使って

$$p_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (2.1.10)$$

と表せるので, (2.1.9) は

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + K_i, \quad (2.1.11)$$

あるいはベクトル形で

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \mathbf{K} \quad (2.1.12)$$

と書ける. (2.1.11) あるいは (2.1.12) を **完全流体の運動方程式**, または **Euler の運動方程式** という.

### 2.1.3 エネルギー方程式

流体の持つエネルギーとしては、単位体積当たりの運動エネルギー  $\frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2$ 、単位体積当たりの内部エネルギー  $\rho U$  を考慮しなければならない。  $U$  は単位質量当たりの内部エネルギーである。更に、流体の温度が一樣でないとき流体の運動とは無関係におこる熱の移動、熱伝導、による熱流も取り入れなければならない。単位時間に単位面積を通る熱量をあらわす熱流ベクトルを  $\boldsymbol{\theta}$  とする。

2.1.1, 2.1.2 節の場合と同様、固定閉曲面  $S$  で囲まれた流体に対してエネルギー保存則を適用すると、面  $S$  の流体の全エネルギーの単位時間当たりの変化は

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + U \right) dV \quad (2.1.13)$$

である。これは、単位時間当たりに  $S$  を通じて  $V$  内に流入する全エネルギー、

$$- \int_S \rho \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + U \right) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS$$

熱量の流入量

$$- \int_S (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) dS,$$

面  $S$  において面積力がなす仕事

$$\int_S (\mathbf{P}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}) dS,$$

および体積力がなす仕事

$$\int_V \rho (\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}) dV$$

の和に等しい。すなわち、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + U \right) dV = & - \int_S \rho \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + U \right) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS - \int_S (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}) dS \\ & + \int_S (\mathbf{P}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}) dS + \int_V \rho (\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}) dV. \end{aligned}$$

これを和の規約を用いて書くと

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + U \right) dV = & - \int_S \rho \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + U \right) u_i n_i dS - \int_S \theta_i n_i dS \\ & + \int_S p_{ij} n_i u_j dS + \int_V \rho K_i u_i dV. \quad (2.1.14) \end{aligned}$$

ここでも Gauss の定理を用いて, (2.1.14) 右辺 2 項目, 3 項目をそれぞれ

$$\begin{aligned} - \int_S \theta_i n_i dS &= \int_v \frac{\partial \theta_i}{\partial x_i} \\ \int_S p_{ij} n_i u_j dS &= \int_v \frac{\partial}{\partial x_i} (p_{ij} u_j) dV \end{aligned}$$

と変形し, 2.1.1, 2.1.2 節と同じ論法を用いると, 流れのいたるところで

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + U \right) \right\} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ p_{ij} u_j - \rho \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + U \right) u_i - \theta_i \right\} + \rho K_i u_i \quad (2.1.15)$$

が成立しなければならない. これを **エネルギー方程式** という.

(2.1.15) の左辺, 右辺 2 項をそれぞれ展開すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + U \right) \right\} &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + U \right) + \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + U \right) \frac{\partial \rho}{\partial t}, \\ - \frac{\partial}{\partial x_i} \rho \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + U \right) u_i &= - \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + U \right) \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) - \rho u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + U \right). \end{aligned}$$

第1式右辺第2項と第2式右辺第1項は連続の式 (2.1.1) より相殺されるので, (2.1.15) は Lagrange 微分を用いて単位質量当たりの全エネルギー  $\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + U$  に対する方程式,

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + U \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (p_{ij} u_j - \theta_i) + K_i u_i \quad (2.1.16)$$

の形に書くことができる. 一方, 運動方程式 (2.1.8) から, 単位質量当たりの運動エネルギー  $\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2$  に対する方程式が導かれる. 以下でそのことを示す. 運動方程式 (2.1.8) の両辺に  $\rho u_i$  を掛けると

$$\rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_i \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \rho u_i K_i. \quad (2.1.17)$$

(2.1.17) 左辺は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \rho u_i u_i u_j \right) - \frac{1}{2} u_i u_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_j} \right) \quad (2.1.18)$$

と書ける. なぜなら上式を展開すると, 第1項は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) &= \frac{1}{2} \left\{ u_i u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\} \\ &= \frac{1}{2} u_i u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}, \end{aligned}$$

第2項は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \rho u_i u_i u_j \right) &= \frac{1}{2} \left\{ u_i u_i \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial(u_i u_i)}{\partial x_j} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ u_i u_i \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} + \rho u_j \left( u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} u_i u_i \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} + \rho u_j u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \end{aligned}$$

となるので, 第3項も考慮すると (2.1.18) は

$$\rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

となり, (2.1.17) の左辺となるためである. 一方, (2.1.18) は, 展開すると

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{1}{2} u_i u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \frac{\partial(u_i u_i)}{\partial t} \right\} + \left\{ \frac{1}{2} u_i u_i \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} + \frac{(\rho u_j)}{2} \frac{\partial(u_i u_i)}{\partial x_j} \right\} \\ &- \frac{1}{2} u_i u_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} \right) = \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_i u_i}{2} \right) + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{u_i u_i}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

とも書ける. よって, (2.1.17) は (2.1.19) により

$$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_i u_i}{2} \right) + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{u_i u_i}{2} \right) \right\} = u_i \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + \rho u_i K_i \quad (2.1.20)$$

となる. 両辺を  $\rho$  ではらうと

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} u_i + K_i u_i \quad (2.1.21)$$

となり, 運動方程式 (2.1.8) から, 単位質量当たりの運動エネルギー  $\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2$  に対する方程式が導かれた. (2.1.16) と (2.1.21) の差をとれば, 単位質量当たりの内部エネルギー  $U$  に対する方程式

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{1}{\rho} p_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta_i}{\partial x_i} \quad (2.1.22)$$

が得られる. (2.1.16), (2.1.21), (2.1.22) もまた, それぞれの意味でのエネルギー保存を表すエネルギー方程式である.

完全流体の場合, 応力  $p_{ij}$  は Kronecker のデルタを使って

$$p_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (2.1.10)$$

と表せるので, エネルギー方程式 (2.1.22) は

$$\frac{DU}{Dt} = -\frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\theta} \quad (2.1.23)$$

となる。(2.1.23) はまた, 連続の式 (2.1.2) から

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right)$$

となることを考慮すると,

$$\frac{DU}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\theta} \quad (2.1.24)$$

と書ける. 流体が運動しているときは, 流体は一般に熱平衡にない. しかし, 熱平衡からの偏差は流体の運動によって引き起こされたものであるから, その大きさはひずみ程度であると考えられる. また, 流体の温度が一様でないときにも流体は一般に熱平衡にないが, この場合にも熱平衡からの偏差は温度の変化程度であると考えられるから, 温度変化のあまり大きくない範囲を考えるとときは静止している場合と同じく, 流体は熱平衡にあるとできる. ここで, 熱力学の第1法則により, 2つの平衡状態の間の変化に際して系の単位質量当たりの流入する熱量  $\delta Q$  は

$$\delta Q = dU + pd \left( \frac{1}{\rho} \right) \quad (2.1.25)$$

と表せる.  $dU$  は変化に際しての系の内部エネルギーの変化,  $d \left( \frac{1}{\rho} \right)$  は比体積の変化を表す. また, 熱力学の第2法則により単位質量当たりのエントロピー  $S$  を用い, 2つの熱平衡状態の間の変化に際する熱の流入量を

$$\delta Q = TdS \quad (2.1.26)$$

と表せる. (2.1.25) により (2.1.26) は

$$TdS = dU + pd \left( \frac{1}{\rho} \right) \quad (2.1.27)$$

と書ける.(2.1.27) により流体の運動に沿った変化に際して

$$T \frac{DS}{Dt} = \frac{DU}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) \quad (2.1.28)$$

が成り立つ. したがって, (2.1.24) は

$$T \frac{DS}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{\theta} \quad (2.1.29)$$

の形に書ける. (2.1.29) は完全流体における熱量の収支を表し, エントロピー変化がもつばら熱伝導によってもたらされることを示している. 温度勾配があまり大きな値をとらない範囲では熱伝導は Fourier の法則

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\theta} = -\kappa \operatorname{grad} T \quad (2.1.30)$$

に従う。比例定数  $\kappa (> 0)$  は熱伝導率である。流体が熱伝導法則 (2.1.30) に従うとすれば, (2.1.29) は

$$\begin{aligned} T \frac{DS}{Dt} &= -\frac{\kappa}{\rho} \operatorname{div}(\operatorname{grad} T) \\ &= -\frac{\kappa}{\rho} \Delta T \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

となる。したがって, 完全流体が断熱的, つまり  $\kappa = 0$  であるとき (2.1.31) から

$$\frac{DS}{Dt} = 0 \quad (2.1.32)$$

となり, エントロピーは流れによって保存される。このような流れを等エントロピー流という。

### 2.1.4 状態方程式

2.1.3 節で述べたように, 流体はエネルギー保存法則を満足する。つまり熱力学の法則に従い, 粘性や熱伝導の小さい場合には粘性によって発生する熱や温度差に応じて伝導される熱は非常に小さいから, 状態変化は断熱的すなわち等エントロピー的におこるものと考えられる。

空気などの気体では理想気体の過程が非常によい近似で成り立つことが知られる。それゆえ状態方程式として

$$p = \frac{R}{m} \rho T \quad (2.1.33)$$

を採用することができる。ここで  $T$  は絶対温度,  $m$  は気体の分子量,  $R$  は気体定数である。気体が等温変化をする場合には  $T = \text{const}$  であるから, (2.1.33) は

$$p \propto \rho \quad (2.1.34)$$

を与える。気体が断熱変化をする場合には, 温度の代わりにエントロピー  $S$  を状態変数に用い, 理想気体の状態変化を  $S$ , 圧力  $p$ , 密度  $\rho$ , で記述すると

$$p = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \rho^\gamma \exp\left(\frac{S - S_0}{C_v}\right) \quad (2.1.35)$$

と書ける。ここで添字のついた物理量はある基準となる状態を表す。また,  $\gamma$  は定積比熱  $C_v$  と定圧比熱  $C_p$  の比

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (2.1.36)$$

である. 断熱変化では  $S = \text{const}$  であるから (2.1.35) から

$$p \propto \rho^\gamma \quad (2.1.37)$$

が得られる. 等温変化では  $p \propto \rho$ , 断熱変化では  $p \propto \rho^\gamma$  が成り立つのでこれらの関係を一括して

$$\rho = f(p) \quad (2.1.38)$$

の形に表すことができる. これを **流体の状態方程式** という. このように, 密度  $\rho$  が圧力  $p$  の一義的な関数として表されるような流体を順圧流体という.

### 2.1.5 2.1 節のまとめ

完全流体の運動を支配する基礎方程式は以下のように与えられる.

連続の式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.1.1)$$

運動方程式:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}p + \mathbf{K}. \quad (2.1.12)$$

エネルギー方程式: ここでは完全流体がさらに断熱的である ( $\kappa = 0$ ) と仮定する.

$$\frac{DS}{Dt} = 0. \quad (2.1.32)$$

順圧流体の状態方程式:

$$\rho = f(p). \quad (2.1.38)$$



## 2.2 Bernoulli の定理

### 2.2.1 運動方程式の第 1 積分への準備

前節で完全流体の運動を取り扱うために必要な方程式を導いたので、具体的に運動方程式を取り扱う。ベクトル恒等式<sup>\*1</sup>

$$\mathbf{A} \times \text{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{2} \text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \mathbf{A} \quad (\text{A})$$

を用いると

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \text{rot} \mathbf{u} &= \frac{1}{2} \text{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} \\ \iff (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} &= \frac{1}{2} \text{grad} q^2 - \mathbf{u} \times \text{rot} \mathbf{u} \end{aligned}$$

と書ける。上式と Lagrange 微分を用いると、運動方程式 (2.1.12) は

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} q^2 - \mathbf{u} \times \text{rot} \mathbf{u} \\ \iff \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \mathbf{K} - \frac{1}{2} \text{grad} q^2 + \mathbf{u} \times \text{rot} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.2.39)$$

と変形できる。順圧流体であるとしているので、

$$P = \int \frac{dp}{\rho} \quad (2.2.40)$$

も圧力  $p$  の関数であり、この圧力関数  $P$  を用いれば

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} p = \text{grad} P \quad (2.2.41)$$

と書けるから、(2.2.39) は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{K} - \text{grad} \left( P + \frac{1}{2} q^2 \right) + \mathbf{u} \times \text{rot} \mathbf{u} \quad (2.2.42)$$

と表せられる。とくに、外力が保存力の場合にはポテンシャルを  $\Omega$  として、

$$\mathbf{K} = -\text{grad} \Omega \quad (2.2.43)$$

と書けるから、(2.2.42) は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\text{grad} \left( P + \frac{1}{2} q^2 + \Omega \right) + \mathbf{u} \times \text{rot} \mathbf{u} \quad (2.2.44)$$

となる。以下のいくつかの特別な場合には運動方程式 (2.2.42) または (2.2.44) はただちに積分することができ、第 1 積分定理を与える。

<sup>\*1</sup>導出は付録 A 参照。

### 2.2.2 渦なしの流れ

渦なしのとき渦度

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot} \mathbf{u} = 0 \quad (2.2.45)$$

であるから

$$\mathbf{u} = \text{grad} \phi \quad (2.2.46)$$

となる. 速度ポテンシャルを  $\phi$  とおいた. (2.2.45), (2.2.46) を考慮すると, 運動方程式 (2.2.44) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \phi &= \mathbf{K} - \text{grad} \left( P + \frac{1}{2} q^2 \right) + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \\ \iff \text{grad} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + P + \frac{1}{2} q^2 \right) &= \mathbf{K} \end{aligned} \quad (2.2.47)$$

となる. これは, 流れが渦なしであるためには外力  $\mathbf{K}$  が保存力でなければならないことを示す. そこで外力  $\mathbf{K}$  のポテンシャルを  $\Omega$  として

$$\mathbf{K} = -\text{grad} \Omega \quad (2.2.43)$$

と書けば, (2.2.47) はただちに積分できて

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + P + \frac{1}{2} q^2 + \Omega = f(t) \quad (2.2.48)$$

が得られる. ここで  $f(t)$  は時間の任意関数であり, 空間的にはいたるところで一定である. (2.2.48) を一般化された **Bernoulli の定理**, あるいは, 速度ポテンシャルから圧力を決める式と考えることもできるので **圧力方程式** ともいう.

### 2.2.3 保存場での定常流

流れが時間とともに変化しない定常流では  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$  なので, 運動方程式 (2.2.44) は保存場において,

$$\text{grad} \left( P + \frac{1}{2} q^2 + \Omega \right) = \mathbf{u} \times \text{rot} \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \quad (2.2.49)$$

となる.

$$\left( P + \frac{1}{2} q^2 + \Omega \right) = B \quad (2.2.50)$$

を置き,  $B$  を Bernoulli 関数と呼ぶことにすると (2.2.49) は

$$\text{grad}B = \mathbf{u} \times \text{rot}\mathbf{u} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \quad (2.2.51)$$

と書ける. 右辺はベクトル  $\mathbf{u}$  およびベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  に直交しているから, 左辺の量は流線および渦線方向の成分を持たない. つまり流線および渦線方向に沿って  $\text{grad}B = 0$  でなければならない. (2.2.51) の流線に平行な成分をとると

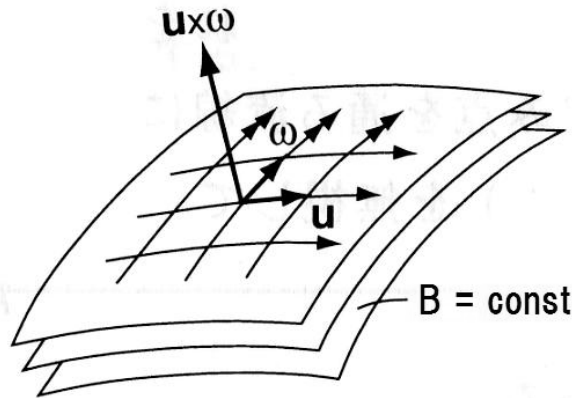


図 2.2.3 Bernoulli 面

$$\frac{\partial B}{\partial s} = 0. \quad (2.2.52)$$

ここで  $s$  は流線に沿ってはかった距離である. 上式を積分すれば,

$$B = \text{const}. \quad (2.2.53)$$

ただし, 右辺の  $\text{const}$  は一般に流線ごとに異なり,  $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$  は  $\boldsymbol{\omega}$  にも垂直であるから (2.2.53) は渦線についても成り立つ. したがって, 任意の流線とそれを通る全ての渦線とによって形成される曲面について (2.2.53) が成り立つ. (2.2.53) を **Bernoulli の定理** といい, この曲面を **Bernoulli 面** という.

### 2.2.4 密度が一様な流れ

Bernoulli 関数  $B$  の構成を見ると

$$\left( P + \frac{1}{2}q^2 + \Omega \right) = B \quad (2.2.50)$$

の第1項  $\frac{1}{2}q^2$  は単位質量の持つ運動エネルギー, 第3項  $\Omega$  は外力による位置のエネルギーなので, 流線上で  $B$  が一定値を保つということはエネルギーの保存の法則を意味すると考えられる. そこで, 第2項は圧力によって貯えられるポテンシャルエネルギーと解釈することができる. Bernoulli の定理が成立する前提条件には完全流体, 定常流, 保存力, 順圧流体であることが必要となることは忘れてはならない.

密度が一様なとき, (2.2.40) より

$$P = \frac{p}{\rho}, \quad (2.2.54)$$

保存外力が重力である場合

$$\Omega = gz \quad (2.2.55)$$

と書ける. ただし  $g$  は重力加速度,  $z$  は鉛直上向きの座標を表す. このとき (2.2.53) は

$$p + \frac{1}{2}\rho q^2 + \rho gz = \text{const.} \quad (2.2.56)$$

となる. これがふつうに **Bernoulli の定理** と呼ばれるものであり, Bernoulli の定理 (2.2.53) および一般化された Bernoulli の定理 (2.2.48) はその拡張に相当する.

## 第3章 渦

### 3.1 渦度と循環

流体の速度ベクトルを  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  とすると, **渦度** $\boldsymbol{\omega}$  は速度場の回転 ( $\text{rot} = \nabla \times$ ),

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \nabla \times \mathbf{u} \\ &= \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),\end{aligned}\quad (3.1.1)$$

により定義される. 流れの中に 1 本の空間曲線を取り曲線上の各点において渦度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  が曲線の接線になるようにしたとき, この曲線を **渦線** という. 渦線の線要素を  $d\mathbf{x}$  で表すと,

$$d\mathbf{x} \parallel \boldsymbol{\omega}(x, t). \quad (3.1.2)$$

すなわち, 渦度ベクトルを  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  と成分で書くと,

$$\frac{dx}{\omega_1(x, t)} = \frac{dy}{\omega_2(x, t)} = \frac{dz}{\omega_3(x, t)}. \quad (3.1.3)$$

1 つの閉曲線  $C$  上の各点を通る渦線によって形成される曲面を考え, これを **渦管** という. 渦管面上の任意点における法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とすると

$$\mathbf{n} \perp \boldsymbol{\omega}(x, t). \quad (3.1.4)$$

流体の中に任意の閉曲線  $C$  をとり,  $C$  の接線方向の速度成分を  $u_l$  で表すとき,  $C$  を 1 周する線積分

$$\Gamma = \int_C u_l ds = \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.1.5)$$

を閉曲線  $C$  に沿う **循環** という.  $d\mathbf{s} = \mathbf{l}ds$  ( $\mathbf{l}$  は曲線  $C$  の接線ベクトル) は  $C$  の線要素を表す. 閉曲線  $C$  を外縁とする任意の曲面  $S$  を考え,  $S$  上の 1 点における曲面

の微小面積  $dS$  と、その点での法線ベクトル  $\mathbf{n}$  とから作られるベクトル  $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$  を面要素と呼ぶ。このとき Stokes の定理から

$$\begin{aligned}\Gamma(C) &= \int_C (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}) = \int_S \text{rot}\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \omega_n dS\end{aligned}\tag{3.1.6}$$

となる。  $\omega_n$  は  $\boldsymbol{\omega}$  の法線  $\mathbf{n}$  方向の成分を表す。(3.1.6) より、閉曲線  $C$  に沿う循環は、  $C$  で囲まれる任意の曲面上での渦度の法線成分  $\omega_n$  の面積分である。

### 3.2 渦管の強さ

ある決まった時刻の1本の渦管において、その側面に沿って渦管を1周する閉曲線  $C$  についての循環は  $C$  によらず、渦管に固有の不変量であることが以下で証明できる。

渦管を1周する任意の閉曲線を2つとり、これらを  $C, C'$  とする。図3.2のような閉曲線  $AA'C'A'ACA$  について、(3.1.6) の  $\Gamma = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S}$  において、  $S$  として管壁をとることにすると右辺はゼロになる。したがって、( ) 内に経路を示した線積分を  $I(X)$  とおくと、

$$\begin{aligned}I(AA'C'A'ACA) &= I(AA') + I(A'C'A') + I(A'A) + I(ACA) \\ &= -\Gamma(C') + \Gamma(C) \\ &= 0.\end{aligned}\tag{3.2.7}$$

それゆえ  $\Gamma(C) = \Gamma(C')$ 。(ここで線分  $AA', A'A$  に沿う積分は互いに打ち消しあうため  $I(AA') + I(A'A) = 0$  としている。) つまり循環は閉曲線のとりかたによらず、

$$\begin{aligned}\Gamma &= \int_C (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}) = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \text{一定 (渦糸を通して)}\end{aligned}\tag{3.2.8}$$

となり、  $\Gamma$  は渦管に固有の不変量である。この循環  $\Gamma$  を **渦管の強さ** という。

無限小の断面積を持つ極めて細い渦管を考え、これを渦糸と呼ぶ。渦糸の垂直断面積を  $\sigma$  とすると断面内では  $\boldsymbol{\omega}$  は一定とみなせるので、(3.1.6) において積分表面として渦糸の垂直断面をとると

$$\begin{aligned}\Gamma(C) &= \int_S \omega_n dS = \omega \int_S dS \\ &= \omega\sigma, \quad (\omega = |\boldsymbol{\omega}|)\end{aligned}\tag{3.2.9}$$

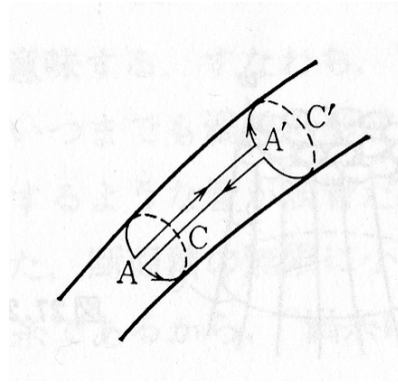


図 3.2 渦管を 1 周する任意の閉曲線  $AA'C'A'ACA$

と表すことができる. すなわち, 渦糸の強さは渦糸内の渦度の大きさ  $\omega$  と渦糸の垂直断面積  $\sigma$  との積  $\omega\sigma$  で与えられる. 1 本の渦糸を通じて積  $\omega\sigma$  が一定であることから, 渦度は渦糸の細い部分では大きく, 太い部分では小さいことがわかる.

なお, 流れの中で  $\omega$  は  $\infty$  にはなり得ないから, 渦糸の断面積  $\sigma$  はゼロにはならない. それゆえ, 渦管は流れの中で中断することはなく, 無限遠または境界から境界まで伸びているか, あるいは自分自身で閉じて渦輪を作るかのいずれかである.

### 3.3 渦に関する諸定理

本節では次章で不可欠となる渦に関する諸定理について述べる.

#### 3.3.1 Kelvin の循環定理

順圧の完全流体の保存力場での運動を考える. 流体とともに動く任意の閉曲線  $C$  をとり,  $C$  にともなう循環

$$\Gamma = \int_C u_l ds = \int_C (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}) \tag{3.3.10}$$

の時間変化を調べる.  $C$  の上の点の座標を  $\mathbf{x}$  で表すと,  $C$  の線要素  $d\mathbf{s} = d\mathbf{x}$  が流体とともに運ばれることを考慮して,

$$\begin{aligned} \frac{D\Gamma}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \int_C (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}) = \int_C \frac{D}{Dt} (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}) \\ &= \int_C \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{x} \right) + \int_C \left( \mathbf{u} \cdot \frac{D}{Dt} d\mathbf{x} \right). \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

(3.3.11) の右辺第1項は, 運動方程式 (2.1.12), (2.2.41), (2.2.43) を用いると

$$\begin{aligned} \int_C \left( \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{x} \right) &= \int_C \left( \frac{1}{\rho} \text{grad}p + K \right) \cdot d\mathbf{x} \\ &= \int_C \left( -\text{grad}P - \text{grad}\Omega \right) \cdot d\mathbf{x} \\ &= -[P + \Omega]_C \end{aligned}$$

となる. ここに  $[ ]_C$  は閉曲線  $C$  を一周したときの  $[ ]$  内の値の差を表す. また, 右辺第2項は,

$$\begin{aligned} \int_C \left( \mathbf{u} \cdot \frac{D}{Dt} d\mathbf{x} \right) &= \int_C \left( \mathbf{u} \cdot d \frac{D\mathbf{x}}{Dt} \right) = \int_C (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}) \\ &= \frac{1}{2} \int_C dq^2 = \left[ \frac{1}{2} q^2 \right]_C \end{aligned}$$

となる. 以上より,

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \left[ \frac{1}{2} q^2 - P - \Omega \right]_C. \quad (3.3.12)$$

上式の右辺はゼロとなり

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0. \quad (3.3.13)$$

したがって,

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \text{一定 (流体の運動に沿って)} \quad (3.3.14)$$

と言える. すなわち, 保存力場のもとでの完全流体の運動においては, 流体とともに動く任意の閉曲線に伴う循環は時間的に不変である. このことを **Kelvin の循環定理** という.

### 3.3.2 Helmholtz の渦定理

完全流体において,

1. 渦線を構成する流体粒子は時間が経過しても同一の渦線上にある.
2. 1つの渦管は常に1つの渦管として保たれ, その強さ  $\Gamma$  は不変に保たれる. が成り立つ.

これら2つをまとめて **Helmholtz の渦定理** という. 以下この定理を証明する.



### Helmholtz の渦定理 1

流れの中の曲線上の各点を通る渦線によって形成される曲面を考え、これを **渦面**、**渦層** という。渦面の法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とすると

$$\mathbf{n} \perp \boldsymbol{\omega}(x, t). \tag{3.3.15}$$

渦面  $S$  上に任意の閉曲線  $C$  をとれば  $C$  にともなう循環は (3.3.15) を考慮すると

$$\Gamma(C) = \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S(C)} \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} \tag{3.3.16}$$

である。ここに、 $S(C)$  は渦面  $S$  の  $C$  で囲まれた部分を表す。ある時刻  $t$  における渦面  $S$  が流体とともに運ばれて時刻  $t'$  に曲面  $S'$  を形成したとし、曲面  $C$  が面  $S$  上の  $C'$  になったとする。  $C'$  にともなう循環  $\Gamma(C')$  は、Kelvin の循環定理 (3.3.14) により  $\Gamma$  は流体の運動に従い一定なので、

$$\Gamma(C') = \int_{S'(C')} \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = \Gamma(C) = 0 \tag{3.3.17}$$

となる。閉曲線  $C'$  はもとの閉曲線  $C$  を適当に選ぶことにより面  $S'$  上で任意にとることができるから、結局面  $S'$  上のいたるところで  $\boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 。すなわち、面  $S'$  は渦面でなければならない。したがって、流体運動を通じて1つの渦面は1つの渦面として保たれるのがわかる。2つの渦面の交線は渦線である。渦面が渦面として行動するなら、その交線である渦線も当然渦線として行動する。すなわち、流体が流れるとき渦線は渦線として保たれ、はじめ渦線を形成していた流体粒子はいつまでも渦線を形成する、言い換えれば **渦線を構成する流体粒子は時間が経過しても同一の渦線上にある**。渦線によって形成される曲面が渦管なので、これは渦管についても同様である。また、断面積の無限に小さい渦管を満たしている流体部分が渦糸なので渦糸はいつまでも渦糸であると言える。

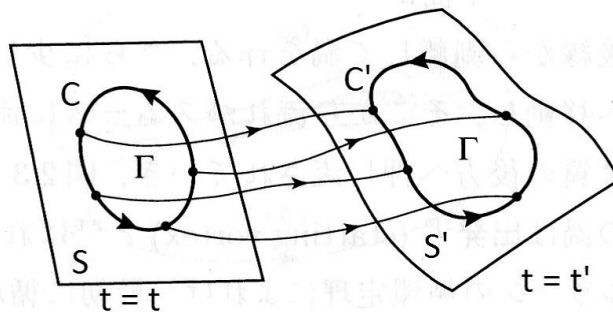


図 3.3.2  $t = t$  と  $t = t'$  の渦線, 渦管

## Helmholtz の渦定理 2

渦管は一種の渦面であり, 渦管の強さは1本の渦管において場所によらず一定であることから, 保存力のもとでの完全流体の連続的な運動においては1本の渦管は常に1本の渦管として保たれ, その強さ  $\Gamma$  は

$$\Gamma = \text{一定 (時間的に)} \quad (3.3.18)$$

である. 渦糸については, 上の定理から1本の渦糸は流体運動を通じて常に1本の渦糸として保たれ, 渦糸の垂直断面積を  $\sigma$  とすると渦糸の強さ  $\Gamma$  は, (3.2.9) を参照して

$$\Gamma = \omega\sigma = \text{一定 (時間的に)}, \quad \omega = |\boldsymbol{\omega}| \quad (3.3.19)$$

と言える. 渦糸の微小部分を取り, その長さを  $\delta s$  とすれば質量保存の法則から

$$\rho\sigma\delta s = \text{一定}, \quad (3.3.20)$$

したがって (3.3.19), (3.3.20) を用いて

$$\frac{\rho\delta s}{\omega} = \text{一定}. \quad (3.3.21)$$

一様な密度一定の流体においては (3.3.21) より  $\omega \propto \delta s$ . したがって流体運動によって渦糸の長さ  $\delta s$  が伸びるときには渦度  $\omega$  はそれに比例して増加し, 逆に縮むときは渦度は減少する.

### 3.3.3 Lagrange の渦定理

第2章で運動方程式の第1積分として圧力方程式と Bernoulli の定理を導いたが, すでに述べたようにこれはエネルギー保存則に相当するものであった. 質点系の力学で角運動量保存則が成り立つように, 流体力学でもそれに相当するものがある. これが **Lagrange の渦定理** であり, 完全流体では渦は不生不滅であるというこの定理の内容を以下で述べる.

保存場における順圧の完全流体を考える. 運動方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\text{grad} \left( P + \frac{1}{2}q^2 + \Omega \right) + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \quad (2.2.44)$$

の両辺の rot をとると,  $\text{rot grad} = 0$  を用いて

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \quad (3.3.22)$$

が得られる. ベクトル解析の公式

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} \\ &\quad + (\mathbf{A} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{A} \end{aligned}$$

を用いると (3.3.22) は

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = -\boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}) \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u} \quad (3.3.23)$$

となる. ここで  $\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$  を用いた. (3.3.23) を Lagrange 微分を用いて表すと

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (3.3.24)$$

が得られる. さらに連続の式

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \\ \iff \operatorname{div} \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

を用いると (3.3.24) は

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u} + \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (3.3.25)$$

となる. ここで,

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} - \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}$$

に (3.3.25) を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) &= \frac{1}{\rho} \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{u} \right) \\ &= \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \operatorname{grad} \right) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

となる. (3.3.25), あるいは (3.3.26) を **渦度方程式** という. この式によれば, 渦度の時間変化は外力も圧力も無関係である. なぜなら, 完全流体の微小な球状の流体部分をとると, その運動は外力と周囲の流体の圧力の作用で運動するが, 外力は球の中心(重心)に作用し, 圧力は球の表面に直角に働く(したがって作用線は球の中心を通る)ので球の中心の周りに回転モーメントが発生しないからである. つまり微小球の中止まわりの角運動量は運動中不変に保たれることになる. もしある時間に微小球が回転していなければいつまでも回転しないし, 逆に最初に回転していれば

ばいつまでも回転し続ける。流体の微小部分の回転とは流体が渦度を持つことに他ならないので、上の事実は完全流体では渦は不生不滅であることを意味する。式で表すと、 $t=0$  で渦なし  $\boldsymbol{\omega} = 0$  であったとすると (3.3.26) より

$$\left[ \frac{D}{Dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) \right]_{t=0} = \left( \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right)_{t=0} \cdot \text{grad} \right) \mathbf{u} = 0. \quad (3.3.27)$$

微小時間  $\Delta t$  の後では

$$\left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right)_{t=\Delta t} = \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right)_{t=0} + \left[ \frac{D}{Dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) \right]_{t=0} \cdot \Delta t = 0 \quad (3.3.28)$$

によって依然として  $\boldsymbol{\omega} = 0$ 。このときを改めて最初の瞬間として微小時間  $\Delta t$  の後を考えて、やはり  $\boldsymbol{\omega} = 0$ 。このように任意の時間を追って考えると、任意の時刻において流体粒子の渦度がゼロであることがわかる。逆に  $t=0$  で  $\boldsymbol{\omega} \neq 0$  であれば仮にある時刻で  $\boldsymbol{\omega} = 0$  になったとするとそれより以前、突き詰めれば  $t=0$  で  $\boldsymbol{\omega} = 0$  でなければならないということになり矛盾が生じる。結局、順圧の完全流体が保存力のもとに運動する場合、渦は発生することも消滅することもない。

Lagrange の渦定理を Kelvin の循環定理からも示してみる。微小な閉曲線の循環は渦度  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot} \mathbf{u}$  に比例する。Kelvin の循環定理 (3.3.14) から循環は不変なので、ある時刻で渦なし  $\boldsymbol{\omega} = 0$  であった部分はその後も渦なしであるし、逆に渦あり  $\boldsymbol{\omega} \neq 0$  であった部分はその後も渦ありであることが結論づけられる。つまり、保存力のもとでの完全流体の連続的な運動においては渦度は発生も消滅もしないことが言える。

## 第4章 Kelvin-Helmholtz 不安定

渦層の不安定性は本質的に局所的な現象であるから、渦層を一様な密度を持つ平面と考える。非圧縮で密度が空間的にも時間的にも一定な完全流体が、 $x$  軸 ( $y = 0$ ) を境に二層の水平で平行な流れをなしているとする。 $x$  軸と一致する速度不連続面の二次元安定性を考える。 $y < 0$  の側、 $y > 0$  の側の物理量をそれぞれ下付き添字 1, 2 で表し、基本流を

$$\begin{cases} \mathbf{U}_1 = (U_1, 0) & (y > 0), \\ \mathbf{U}_2 = (U_2, 0) & (y < 0) \end{cases} \quad (4.0.1)$$

とし、流体の密度を  $\rho$  とする。

$$\begin{cases} U = U_1 = U_0(\text{定数}) & (y > a), \\ U = U_2 = \frac{U_0}{a}y & (-a < y < a), \\ U = U_3 = U_0(\text{定数}) & (y < -a), \end{cases} \quad (4.0.2)$$

はじめ一様な渦層に微小変動  $\eta$  を与えた時この擾乱が成長するかを調べる。流れが Kelvin の循環定理を満たすように作られていることを仮定すると、乱された状態でも渦度が存在するのは乱れにより変形した渦層の上だけである。これで、流れの場が、形が平面から少し変わった渦層の両側での 2 つの渦なし流からできているために乱された流れの場の解析は簡単なものになる。

境界条件は運動学的境界条件と力学的境界条件があり、前者のうち 1 つは流体粒子の速度の法線成分が界面速度の法線成分と一致することである。なぜなら流体が界面に押し入ることはあり得ないため、界面上で流体粒子と界面との相対速度は界面に直角な成分を持たないためである。両側の流体に対してこれを適用すると、界面で流速の法線成分が連続的につながる。渦度は速度不連続面に集中しており、それ以外の領域では渦なしであるとする。これは渦が流体と共に動くという Helmholtz の渦定理と符合する。もう 1 つは後に述べる。

後者の境界条件は界面で圧力が連続なことである。

まず, 運動学的境界条件を考える. 界面を, 曲線のパラメタ  $\xi$  を用いて,

$$\mathbf{X}(\xi, t) = (X(\xi, t), \eta(\xi, t), t) \quad (4.0.3)$$

と書く. 界面の運動速度は, Lagrange 微分で考えると

$$\left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right|_{\xi} = \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}, \eta_x \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \eta_t \right) \quad (4.0.4)$$

である. 添字付きの  $\eta_x, \eta_t$  は  $\eta$  の, それぞれ  $x, t$  の偏微分を表す. 界面の変形に伴う速度場の擾乱は渦なしで, その速度ポテンシャルを, 各領域で  $\phi_j$  ( $j = 1, 2$ ) とおく.

界面の形は  $F(x, y; t) = y - \eta(x, t) = 0$  と表され, その法線ベクトルは  $\nabla F$  の方向を向く.

$$\nabla F = \left( -\frac{\partial \eta}{\partial x}, 1 \right) = (-\eta_x, 1)$$

領域1の外向き単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は

$$\mathbf{n} = \frac{1}{(1 + \eta_x^2)^{1/2}} (-\eta_x, 1) \quad (4.0.5)$$

で与えられる. “運動学的境界条件:流速の法線成分が界面速度の法線成分と一致すること” を式で表すと以下のようなになる.

$$\mathbf{n} \cdot \left( \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right|_{\xi} - (\mathbf{U}_j + \nabla \phi_j) \right) = 0 \quad (4.0.6)$$

$$\begin{aligned} &\iff \frac{1}{(1 + \eta_x^2)^{1/2}} (-\eta_x, 1) \cdot \left\{ \left( \mathbf{i} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \mathbf{j} \left( \eta_x \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \eta_t \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{i} U_j + \left( \mathbf{i} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \right\} = 0 \\ &\iff -\eta_x \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} - U_j - \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) + \eta_x \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \eta_t - \frac{\partial \phi_j}{\partial y} = 0 \\ &\iff \eta_t + U_j \eta_x = -\eta_x \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} = (1 + \eta_x^2)^{1/2} (\mathbf{n} \cdot \nabla) \phi_j \quad \text{at } y = \eta \end{aligned} \quad (4.0.7)$$

線形安定性解析では, 界面変位の振幅は波長に比べてずっと小さいことを仮定するので

$$|\eta_x| \ll 1 \quad (4.0.8)$$

と書ける. このとき (4.0.7) は

$$\eta_t + U_j \eta_x = \frac{\partial \phi_j}{\partial y} = v \quad \text{at } y \approx 0 \quad (4.0.9)$$

に帰着する.

$p_j$  ここで, Lagrange 的に考えるとある点での界面は時間がたっても変化しないので界面の形  $F$  を Lagrange 微分すると,

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{D}{Dt}(y - \eta(x, t)) = 0. \quad (4.0.10)$$

$F(x, y; t) = y - \eta(x, t) = 0$  より,

$$\begin{aligned} \frac{DF}{Dt} &= \frac{Dy}{Dt} - \frac{D}{Dt}(\eta(x, t)) = 0. \\ \iff 0 &= v - \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + (U + u') \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \simeq v - \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ \iff v &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned}$$

上式 2 行目において  $u'$  を基本流からのずれとし, 線形安定のためずれの二次の項は無視した. 以上より, 運動学的境界条件 (4.0.9) が通常境界条件の表現 (4.0.10) と同じであることが確かめられた.

2 つ目の運動学的境界条件は, 初期の擾乱は有限領域のみあるとされるため, 全ての時間で

$$\nabla(U_1 x + \phi_1) \rightarrow 0 \quad \text{as } y \rightarrow -\infty, \quad (4.0.11a)$$

$$\nabla(U_2 x + \phi_2) \rightarrow 0 \quad \text{as } y \rightarrow \infty, \quad (4.0.11b)$$

と書ける. これを線形化すると

$$\nabla \phi_1 \rightarrow 0 \quad \text{as } y \rightarrow -\infty, \quad (4.0.12a)$$

$$\nabla \phi_2 \rightarrow 0 \quad \text{as } y \rightarrow \infty, \quad (4.0.12b)$$

となる.

次に, 力学的境界条件を考える. 2 つの流れが同じ流体からできているときは, 界面で表面張力が働かないので, 圧力はその面を通して連続でなければならない. すなわち,

$$(p_1 - p_2)_{y=\eta} = 0. \quad (4.0.13)$$

つまり

$$p_1 = p_2 \quad \text{at} \quad y = \eta. \quad (4.0.14)$$

渦なしのときの Bernoulli の定理は

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + P + \frac{1}{2}q^2 + \Omega = f(t) \quad (2.2.48)$$

であるが, いま密度一定であるので

$$P = \frac{p}{\rho}, \quad (2.2.54)$$

とおけるので (2.2.48) は

$$P = \frac{p}{\rho} = - \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 + \Omega \right] + f(t) \quad (4.0.15)$$

と書ける. よって, 空間的にはいたるところで一定の値をとる時間の任意関数  $f(t)$  を新たに  $C_j = C_j(t)$  とおくと, 領域  $j (j = 1, 2)$  での圧力  $p_j$  は速度ポテンシャル  $\phi_j$  と以下の式で結ばれる.

$$\frac{p_j}{\rho} = - \left[ \frac{\partial \phi_j}{\partial t} + \frac{1}{2}(\mathbf{U}_j + \nabla \phi_j)^2 + \Omega \right] + C_j. \quad (4.0.16)$$

$C_1, C_2$  は擾乱が無い時に圧力が連続になるようにとる. 擾乱が無い場合, 界面の変位は無いので  $\phi_j = 0$ . このとき (4.0.16) は領域 1 で

$$\frac{p_1}{\rho} = -\frac{1}{2}|\mathbf{U}_1|^2 - \Omega + C_1, \quad (4.0.17)$$

領域 2 で

$$\frac{p_2}{\rho} = -\frac{1}{2}|\mathbf{U}_2|^2 - \Omega + C_2. \quad (4.0.18)$$

$p_1 = p_2$  とすると

$$-\frac{1}{2}|\mathbf{U}_1|^2 + C_1 = -\frac{1}{2}|\mathbf{U}_2|^2 + C_2 \quad (4.0.19)$$

が得られる. 擾乱があるとき (4.0.16) は領域 1 で

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\rho} &= -\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \frac{1}{2}(\mathbf{U}_1 + \nabla \phi_1)^2 - \Omega + C_1 \\ &= -\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \frac{1}{2}(\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_1 + 2\mathbf{U}_1 \cdot \nabla \phi_1 + \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_1) - \Omega + C_1 \\ &= -\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \frac{1}{2}|\mathbf{U}_1|^2 - U_1 \mathbf{i} \cdot \left( \mathbf{i} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) - \Omega + C_1 \\ &= -\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \frac{1}{2}|\mathbf{U}_1|^2 - U_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - \Omega + C_1. \end{aligned} \quad (4.0.20)$$



上式第 2 行目で  $\nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_1$  は微小量なので無視した. 同様に, (4.0.16) は領域 2 で

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{\rho} &= -\frac{\partial\phi_2}{\partial t} - \frac{1}{2}(\mathbf{U}_2 + \nabla\phi_2)^2 - \Omega + C_2 \\ &= -\frac{\partial\phi_2}{\partial t} - \frac{1}{2}|\mathbf{U}_2|^2 - U_2\frac{\partial\phi_2}{\partial x} - \Omega + C_2, \end{aligned} \quad (4.0.21)$$

となる. いま, 密度一定としているので  $\frac{p_1}{\rho} = \frac{p_2}{\rho}$  とおける. よって (4.0.20), (4.0.21), (4.0.19) より

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial t} + U_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x} = \frac{\partial\phi_2}{\partial t} + U_2\frac{\partial\phi_2}{\partial x} \quad \text{at } y \approx 0. \quad (4.0.22)$$

が得られる.

これらの線形方程式は, 界面変位  $\eta$  を  $x, y$  のフーリエ積分で表すと解ける. (4.0.9) から明らかのように,  $\eta$  が  $x$  に正弦的に依存するとすると  $\phi_j$  もやはりそうでなければならない. したがって擾乱は

$$\eta, \phi_j \propto e^{ikx} \quad (4.0.23)$$

のように, 各々が独立にふるまうような Fourier 成分の重ね合わせになるだろう. ここで  $k$  は波数ベクトルである. 界面の形を

$$\eta(x, t) = \text{Re} \left[ e^{ikx} a(t) \right] \quad (4.0.24)$$

とおく. 流体は非圧縮であるので, 連続の式 (2.1.4) より

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

よって速度ポテンシャル  $\phi_j$  は Laplace 方程式に従い,

$$\nabla^2\phi_j = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_j = 0. \quad (4.0.25)$$

$\phi_j = \Phi_j(y, t)e^{ikx}$  と仮定する.  $\Phi_j = e^{\lambda y}$  と推定すると, (4.0.25) より

$$\begin{aligned} \lambda^2\Phi_j &= k^2\Phi_j \\ \iff (\lambda + k)(\lambda - k) &= 0 \\ \iff \lambda &= \pm k. \end{aligned}$$

よって

$$\Phi_j = e^{\pm ky}$$

となり, 重ね合わせの原理により

$$\Phi_j = B_1(t)e^{|k|y} + B_2(t)e^{-|k|y} \quad (4.0.26)$$

とおける.  $\phi_j$  は  $y$  に  $e^{\pm ky}$  の形で依存することがわかった. 2 つ目の運動学的境界条件 (4.0.12a) より, 領域 1 において,  $e^{-|k|y}$  を含む項は  $y \rightarrow -\infty$  の極限で発散するので除外し,

$$\Phi_1 = B_1(t)e^{|k|y} \quad (y < 0).$$

同様に, 領域 2 において, (4.0.12b) より  $e^{|k|y}$  を含む項は  $y \rightarrow \infty$  の極限で発散するので除外し,

$$\Phi_2 = B_2(t)e^{-|k|y} \quad (y > 0).$$

よって, 界面の形 (4.0.24) に適合する (4.0.25) の解は, 領域 1 ( $y < \eta$ ) では

$$\phi_1(x, y, t) = \text{Re}[e^{ikx} e^{|k|y} B_1(t)], \quad (4.0.27)$$

領域 2 ( $y > \eta$ ) では

$$\phi_2(x, y, t) = \text{Re}[e^{ikx} e^{-|k|y} B_2(t)] \quad (4.0.28)$$

となる. 運動学的境界条件 (4.0.9) は領域 1 で

$$\eta_t + U_1 \eta_x = \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \quad \text{at } y \approx 0 \quad (4.0.29)$$

なので, (4.0.24), (4.0.27) より (4.0.29) は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= |k|e^{ikx} e^{|k|\eta} B_1(t), \\ (\text{左辺}) &= \dot{a}(t)e^{ikx} + ikU_1 e^{ikx} a(t), \end{aligned}$$

となる.  $y = 0$  として, ここで上付きドットで時間微分を表した.

$$e^{ikx}(\dot{a}(t) + ikU_1 a(t)) = e^{ikx} |k| B_1(t).$$

よって

$$\dot{a}(t) + ikU_1 a(t) = |k| B_1(t). \quad (4.0.30)$$

$j = 2$  も同様にして,

$$\dot{a}(t) + ikU_2 a(t) = -|k| B_2(t) \quad (4.0.31)$$

が得られる. よって, 運動学的境界条件 (4.0.9) は領域  $j = 1, 2$  側の界面上でそれぞれ (4.0.30), (4.0.31) に帰着することがわかった.

振幅関数は  $e^{\sigma t}$  型,  $a(t) = a(0)e^{\sigma t}$ ,  $B_j(t) = B_j(0)e^{\sigma t}$  ととることができ, (4.0.30), (4.0.31) はそれぞれ

$$\sigma a + ikU_1 a = |k|B_1, \quad (4.0.32)$$

$$\sigma a + ikU_2 a = -|k|B_2, \quad (4.0.33)$$

となる. ここで, 力学的境界条件 (4.0.22) は Laplace 方程式 (4.0.25) の解 (4.0.27), (4.0.28) により

$$\begin{aligned} e^{ikx} e^{|k|y} \dot{B}_1 + U_1 \cdot ike^{ikx} e^{|k|y} B_1 &= e^{ikx} e^{-|k|y} \dot{B}_2 + U_2 \cdot ike^{ikx} e^{-|k|y} B_2 \quad (y \approx 0) \\ \iff (\dot{B}_1 + ikU_1 B_1) - (\dot{B}_2 + ikU_2 B_2) &= 0 \\ \iff (\sigma + ikU_1)B_1 - (\sigma + ikU_2)B_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.0.34)$$

と書くことができるので, (4.0.32), (4.0.33) の  $B_1, B_2$  を (4.0.34) に代入して

$$\begin{aligned} (\sigma + ikU_1)(\sigma + ikU_1)a + (\sigma + ikU_2)(\sigma + ikU_2)a &= 0 \\ \iff (\sigma + ikU_1)^2 a + (\sigma + ikU_2)^2 a &= 0 \end{aligned}$$

が得られる. よって,  $a \neq 0$  なので  $a$  の係数は

$$\begin{aligned} (\sigma + ikU_1)^2 + (\sigma + ikU_2)^2 &= 0 \quad (4.0.35) \\ \iff 2\sigma^2 + 2ik\sigma(U_1 + U_2) - k^2(U_1^2 + U_2^2) &= 0 \end{aligned}$$

を満たす. これを  $\sigma$  について解くと

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{-ik(U_1 + U_2) \pm \sqrt{-k^2(U_1 + U_2)^2 + 2k^2(U_1^2 + U_2^2)}}{2} \\ &= -\frac{ik}{2}(U_1 + U_2) \pm \frac{1}{2}|k||U| \end{aligned} \quad (4.0.36)$$

となる. ここで,

$$U = U_1 - U_2 \quad (4.0.37)$$

とおいた. この実部が正のとき, 擾乱は指数関数的に成長し,  $\text{Re}[\sigma]$  が増幅率を与える. 2つある (4.0.36) のうち, + 符号の方が  $\text{Re}[\sigma] > 0$  となって, 速度不連続面をもつこの流れは線形不安定であることが結論付けられる. これを Kelvin-Helmholtz 不安定 (KH 不安定) という.

Kelvin-Helmholtz 不安定 が起こるのは, 渦度の濃淡が一方向的に拡大し続けるか

らである. 固有関数は, (4.0.32), (4.0.33) より,

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{|k|}(\sigma a + ikU_1 a) \\ &= \frac{a}{|k|} \left( -\frac{ik}{2}(U_1 + U_2) \pm \frac{1}{2}|k||U| + ikU_1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \pm|U| + i\frac{k}{|k|}U \right) a, \end{aligned} \quad (4.0.38a)$$

$$B_2 = \frac{1}{2} \left( \mp|U| + i\frac{k}{|k|}U \right) a, \quad (4.0.38b)$$

を満たす. (4.0.36) とは複号同順である.

実定数  $\varepsilon$  を用いて界面振幅を  $a = -i\varepsilon \exp(\sigma t)$  とおく. 複素数  $\sigma$  の実部と虚部をそれぞれ  $\sigma_r, \sigma_i$  とおくと界面の形 (4.0.24) は

$$\eta = \varepsilon e^{\sigma_r t} \sin \Theta ; \quad \Theta = kx + \sigma_i t \quad (4.0.39)$$

とかける.

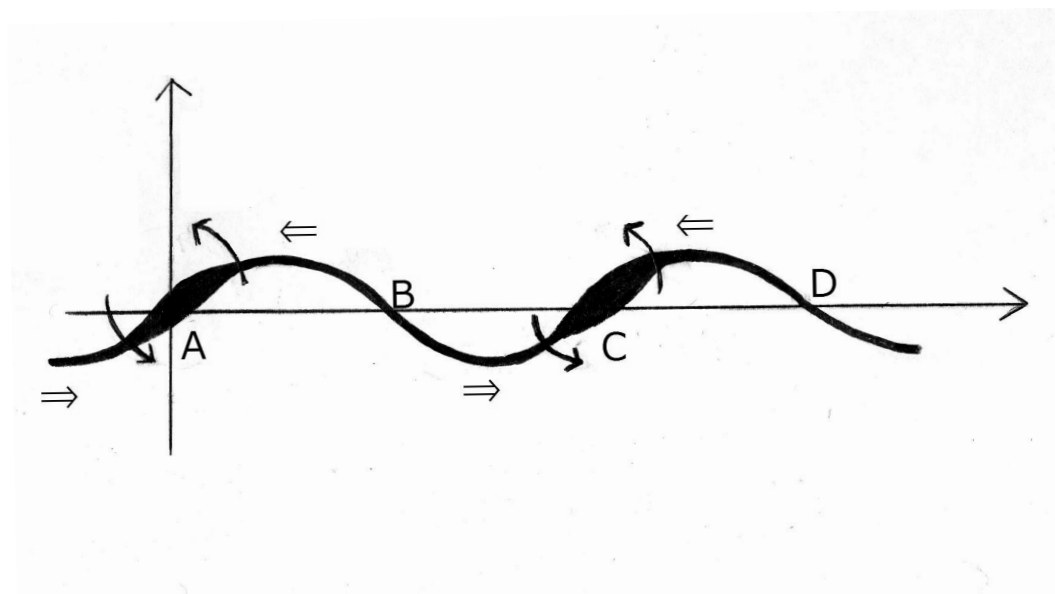


図4 Kelvin-Helmholtz 不安定のメカニズム

変位  $\eta$  と渦の強さの密度の関係が図4に示されている。  $U_1 > U_2$  のとき、(正の)渦度は  $\eta = 0, \frac{\partial \eta}{\partial x} < 0$  である  $B$  のような点から  $\eta = 0, \frac{\partial \eta}{\partial x} > 0$  である  $C$  のような点に向かって掃き出される。(  $B, D$  から  $A (= 0), C$  に向かう方向 (矢印  $\Rightarrow, \Leftarrow$ ) ) この移流は変位した部分の渦度が  $\frac{\partial \eta}{\partial x} > 0$  (または  $\frac{\partial \eta}{\partial x} < 0$ ) の渦層上の任意の点に対して負(または正)の  $x$  方向の速度を引き起こすためである。今、  $C$  のような点に集積された正の渦度によりそのような点の周りに反時計回りの速度が引き起こされ、渦層の正弦変動の振幅を増し不安定を引き起こす。  $C$  のような点での渦度の集積との回転は共に持続し、擾乱は空間的な形を変えずに指数関数的に成長する。これらの線形安定解析と数値計算の結果の対比を第6章で述べる。

図4の  $C$  のような点が適当な正弦的な分布で渦度の集積の中心となるようにしたとき、  $C$  のような点の周りに反時計まわりに回転が生じ、擾乱は指数関数的に減少される。これが擾乱が平滑化される例であり、(4.0.36)の負符号の場合にあたる。

## 第5章 非圧縮粘性流体の方程式

前章までは粘性を考慮しない完全流体について述べた。しかし、数値計算を行うにあたって、粘性項が無いと計算不安定を起し方程式を解くことができないため、弱い粘性を持った流体について考え方程式を導くとする。まず、非圧縮粘性流体の方程式を求める。

$\mu$  を粘性率,  $\lambda$  を第2粘性率とすると, 粘性流体に対しては応力  $p_{ij}$  は

$$p_{ij} = \left\{ -p + \left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \right\} \delta_{ij} + 2\mu \left( e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (5.0.1)$$

と表せるので, 運動方程式 (2.1.9) は

$$\begin{aligned} \frac{Du_i}{Dt} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\} \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right\} + K_i \end{aligned} \quad (5.0.2)$$

となる。粘性率は温度と圧力の変化の範囲が大きくない場合には一定とみなすことができ, (5.0.2) は

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \left( \lambda + \mu \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + K_i \quad (5.0.3)$$

またはベクトル形で

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{1}{\rho} \left( \lambda + \mu \right) \text{grad} \cdot \text{div} \mathbf{u} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{K} \quad (5.0.4)$$

と書ける。(5.0.3), (5.0.4), を **Navier-Stokes 方程式** という。非圧縮流体の場合には運動方程式 (5.0.4) は連続の式 (2.1.2) を考慮して

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{K} \\ \iff \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{K}. \end{aligned} \quad (5.0.5)$$

外力  $\mathbf{K}$  が保存力である場合を考えると  $\mathbf{K}$  はポテンシャル  $\Omega$  を用いて表せられ、また、2.2.1 節での計算を利用すると (5.0.5) は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\text{grad} \left( P + \frac{q^2}{2} + \Omega \right) + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (5.0.6)$$

と書ける。上式の両辺  $\text{rot}$  をとり、 $\text{rot grad} = 0$  を考慮すれば、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}, \quad (5.0.7)$$

非圧縮粘性流体の渦度方程式が得られる。これは、3.3.3 節と同様の方法で以下のように書き下すことができる。

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \nu \Delta \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad})\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \text{div} \mathbf{u}, \quad (5.0.8)$$

いま非圧縮を考えているので  $\text{div} \mathbf{u} = 0$  となり、

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \nu \Delta \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad})\mathbf{u} \quad (5.0.9)$$

となる。

流速  $\mathbf{u}$  は基本流  $\mathbf{U}$  とずれ  $\mathbf{u}'$  で表され、 $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$  と書ける。 $\mathbf{u} = (u, v, 0)$ 、 $\mathbf{U} = (U, 0, 0)$ 、 $\mathbf{u}' = (u', v', w')$  とし、 $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$  とする。渦度方程式 (5.0.9) の  $z$  成分を考えると、

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu \Delta \omega. \quad (5.0.10)$$

基本流  $\mathbf{U}$  とずれ  $\mathbf{u}'$  の渦度をそれぞれ  $\Omega = \mathbf{k}\Omega = -\mathbf{k} \frac{\partial U}{\partial y}$ 、 $\boldsymbol{\omega}' = \mathbf{k}\omega'$  とすると、 $\boldsymbol{\omega} = \Omega(y) + \boldsymbol{\omega}'(x, y, t)$  と書ける。(5.0.10) は Lagrange 微分により以下のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{D\omega}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t}(\Omega + \omega') + \{(\mathbf{U} + \mathbf{u}') \cdot \text{grad}\}(\Omega + \omega') = \nu \Delta(\Omega + \omega') \\ &\iff \frac{\partial}{\partial t}(\Omega + \omega') + (U + u') \frac{\partial}{\partial x}(\Omega + \omega') + v' \frac{\partial}{\partial y}(\Omega + \omega') = \nu \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \Delta + \omega' \right) \\ &\iff \frac{\partial \omega'}{\partial t} + U \frac{\partial \omega'}{\partial x} + u' \frac{\partial \omega'}{\partial x} + v' \frac{\partial \Omega}{\partial y} + v' \frac{\partial \omega'}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \Delta \omega' \right). \end{aligned} \quad (5.0.11)$$

渦度のずれがない場合、上式は

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= 0 \\ (\text{右辺}) &= \nu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \end{aligned}$$

となる. 得られた  $\nu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 0$  を (5.0.11) に代入し, 流れの関数  $\psi'$  を用いて

$$\begin{cases} u' = -\frac{\partial \psi'}{\partial y} \\ v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x} \end{cases}$$

と表すとすると (5.0.11) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega'}{\partial t} + U \frac{\partial \omega'}{\partial x} + u' \frac{\partial \omega'}{\partial x} + v' \frac{\partial \omega'}{\partial y} + v' \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= \nu \Delta \omega' \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \omega'}{\partial t} + U \frac{\partial \omega'}{\partial x} - \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \omega'}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \omega'}{\partial y} + \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= \nu \Delta \omega' \end{aligned} \quad (5.0.12)$$

となり, ヤコビアン

$$J(\psi', \omega') = \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \omega'}{\partial y} - \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \omega'}{\partial x}$$

を用いると

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} + U \frac{\partial \omega'}{\partial x} + J(\psi', \omega') - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \nu \Delta \omega' = 0 \quad (5.0.13)$$

と表せられる. ここで新たに  $\omega' = \zeta$  とおくことにすると,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + U \frac{\partial \zeta}{\partial x} + J(\psi, \omega) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{d^2 U}{dy^2} - \nu \Delta \zeta = 0. \quad (5.0.14)$$



## 無次元化

数値計算を行うに当たって (5.0.14) に現れる量を無次元化すると以下のようになる.

$$\begin{aligned}
 \tilde{x} &\equiv \frac{x}{\mathcal{L}} \\
 \tilde{y} &\equiv \frac{y}{\mathcal{L}} \\
 \tilde{t} &\equiv t \frac{\mathcal{U}}{\mathcal{L}} \\
 \tilde{u} &\equiv \frac{u}{\mathcal{U}} \\
 \tilde{U} &\equiv \frac{U}{\mathcal{U}} \\
 \tilde{\psi} &\equiv \frac{1}{\mathcal{U} \mathcal{L}} \psi \\
 \tilde{\zeta} &\equiv \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{U}} \zeta \\
 \tilde{\Delta} &\equiv \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{U}} \Delta \\
 \tilde{J}(\tilde{\psi}, \tilde{\zeta}) &\equiv \frac{\mathcal{L}^2}{\mathcal{U}^2} J
 \end{aligned}$$

無次元量を  $\tilde{\cdot}$  をつけて表した. これを用いて (5.0.14) を無次元化すると

$$\frac{\mathcal{U}^2}{\mathcal{L}^2} \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\mathcal{U}^2}{\mathcal{L}^2} \tilde{U} \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\mathcal{U}^2}{\mathcal{L}^2} \tilde{J}(\tilde{\psi}, \tilde{\omega}) - \frac{\mathcal{U}^2}{\mathcal{L}^2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \frac{d^2 \tilde{U}}{d\tilde{y}^2} - \frac{\mathcal{U} \nu}{\mathcal{L}^3} \tilde{\Delta} \tilde{\zeta} = 0. \quad (5.0.15)$$

上式は,  $\frac{\mathcal{U} \mathcal{L}}{\nu} = R$  とおくことにより

$$\frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{J}(\tilde{\psi}, \tilde{\omega}) - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \frac{d^2 \tilde{U}}{d\tilde{y}^2} - \frac{1}{R} \tilde{\Delta} \tilde{\zeta} = 0 \quad (5.0.16)$$

と書ける.  $R$  は Reynolds 数と呼ばれる無次元数である. 以後, 簡易化のため  $\tilde{\cdot}$  を省いて表すとする.

## 第6章 数値計算

### 6.1 支配方程式のスペクトル表現

無次元化した非圧縮粘性流体の渦度方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -U \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{d^2 U}{dy^2} - J(\psi, \zeta) + \frac{1}{R} \Delta \zeta \quad (6.1.1)$$

をスペクトル形式を用いて表現する。スペクトル法とは関数展開を離散化に用いた数値解法である。非線形項を扱う場合は各格子点上で非線形項を計算し、その値のスペクトルを求める変換法を用いる。\$x, y\$ 方向の長さ \$X, Y\$ を計算領域とし、\$x, y\$ 方向の波数をそれぞれ \$k, l\$、切断波数を \$K, L\$、格子点数を \$I, J\$ とする。\$\zeta, \psi\$ の切断級数はそれぞれ

$$\zeta(x, y, t) = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L \hat{\zeta}_{k,l}(t) e^{i(2\pi \frac{k}{X}x + 2\pi \frac{l}{Y}y)} \quad (6.1.2)$$

$$\psi(x, y, t) = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L \hat{\psi}_{k,l}(t) e^{i(2\pi \frac{k}{X}x + 2\pi \frac{l}{Y}y)} \quad (6.1.3)$$

と書ける。\$\hat{\zeta}\_{k,l}(t), \hat{\psi}\_{k,l}(t)\$ は Fourier 係数とできるので

$$\hat{\zeta}_{k,l}(t) = \frac{1}{XY} \int_0^X \int_0^Y \zeta(x, y, t) e^{-2i\pi(\frac{k}{X}x + \frac{l}{Y}y)} dx dy \quad (6.1.4)$$

$$\hat{\psi}_{k,l}(t) = \frac{1}{XY} \int_0^X \int_0^Y \psi(x, y, t) e^{-2i\pi(\frac{k}{X}x + \frac{l}{Y}y)} dx dy \quad (6.1.5)$$

と書ける. (6.1.2), (6.1.3) を用いて (6.1.1) をスペクトル法で書き換えると以下のようになる.

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L \frac{\partial \hat{\zeta}_{k,l}(t)}{\partial t} e^{-2i\pi(\frac{k}{X}x + \frac{l}{Y}y)}, \\
 (\text{右辺第 1 項}) &= - \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L 2i\pi \frac{k}{X} U \hat{\zeta}_{k,l}(t) e^{-2i\pi(\frac{k}{X}x + \frac{l}{Y}y)}, \\
 (\text{右辺第 2 項}) &= \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L 2i\pi \frac{k}{X} \hat{\psi}_{k,l}(t) \frac{d^2 U}{dy^2} e^{-2i\pi(\frac{k}{X}x + \frac{l}{Y}y)}, \\
 (\text{右辺第 4 項}) &= - \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L 4\pi^2 \frac{1}{R} \left( \frac{k^2}{X^2} + \frac{l^2}{Y^2} \right) \hat{\zeta}_{k,l}(t) e^{-2i\pi(\frac{k}{X}x + \frac{l}{Y}y)}.
 \end{aligned}$$

右辺第 3 項において

$$\begin{aligned}
 J(\psi, \zeta) &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\
 &= \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L 2i\pi \frac{k}{X} \hat{\psi}_{k,l}(t) e^{-2i\pi(\frac{k}{X}x + \frac{l}{Y}y)} \cdot \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L 2i\pi \frac{l}{Y} \hat{\zeta}_{k,l}(t) e^{-2i\pi(\frac{k}{X}x + \frac{l}{Y}y)} \\
 &\quad - \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L 2i\pi \frac{l}{Y} \hat{\psi}_{k,l}(t) e^{-2i\pi(\frac{k}{X}x + \frac{l}{Y}y)} \cdot \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L 2i\pi \frac{k}{X} \hat{\zeta}_{k,l}(t) e^{-2i\pi(\frac{k}{X}x + \frac{l}{Y}y)} \\
 &= - \sum_{k_1, l_1} \sum_{k_2, l_2} 4\pi^2 \frac{k_1 l_2}{XY} \hat{\psi}_{k_1, l_1}(t) \hat{\zeta}_{k_2, l_2}(t) e^{-2i\pi(\frac{k_1+k_2}{X}x + \frac{l_1+l_2}{Y}y)} \\
 &\quad + \sum_{k_1, l_1} \sum_{k_2, l_2} 4\pi^2 \frac{k_2 l_1}{XY} \hat{\psi}_{k_1, l_1}(t) \hat{\zeta}_{k_2, l_2}(t) e^{-2i\pi(\frac{k_1+k_2}{X}x + \frac{l_1+l_2}{Y}y)} \\
 &= \sum_{k_1, l_1} \sum_{k_2, l_2} \frac{4\pi^2}{XY} (k_2 l_1 - k_1 l_2) \hat{\psi}_{k_1, l_1}(t) \hat{\zeta}_{k_2, l_2}(t) e^{-2i\pi(\frac{k_1+k_2}{X}x + \frac{l_1+l_2}{Y}y)}.
 \end{aligned}$$

上式において  $(k_1, l_1)$  と  $(k_2, l_2)$  がともに切断波数  $K, L$  をとった場合  $k_2 l_1 - k_1 l_2 = 0$  となってしまうため, 非線形項であるヤコビアン  $J$  の  $x, y$  方向の切断波数は  $2K - 1, 2L - 1$  となり, 右辺第 3 項は

$$- \sum_{k_1, k_2 = -2K+1}^{2K-1} \sum_{l_1, l_2 = -2L+1}^{2L-1} \frac{4\pi^2}{XY} (k_2 l_1 - k_1 l_2) \hat{\psi}_{k_1, l_1}(t) \hat{\zeta}_{k_2, l_2}(t) e^{-2i\pi(\frac{k_1+k_2}{X}x + \frac{l_1+l_2}{Y}y)}$$

となる. 以上より, (6.1.1) はスペクトル表現で

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L \frac{\partial \hat{\zeta}_{k,l}(t)}{\partial t} e^{-2i\pi(\frac{k}{X}x + \frac{l}{Y}y)} = & - \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L 2i\pi \frac{k}{X} U \hat{\zeta}_{k,l}(t) e^{-2i\pi(\frac{k}{X}x + \frac{l}{Y}y)} \\
 & + \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L 2i\pi \frac{k}{X} \hat{\psi}_{k,l}(t) \frac{d^2 U}{dy^2} e^{-2i\pi(\frac{k}{X}x + \frac{l}{Y}y)} \\
 & - \sum_{k_1, k_2 = -2K+1}^{2K-1} \sum_{l_1, l_2 = -2L+1}^{2L-1} \frac{4\pi^2}{XY} (k_2 l_1 - k_1 l_2) \hat{\psi}_{k_1, l_1}(t) \hat{\zeta}_{k_2, l_2}(t) e^{-2i\pi(\frac{k_1+k_2}{X}x + \frac{l_1+l_2}{Y}y)} \\
 & - \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L \frac{4\pi^2}{R} \left( \frac{k^2}{X^2} + \frac{l^2}{Y^2} \right) \hat{\zeta}_{k,l}(t) e^{-2i\pi(\frac{k}{X}x + \frac{l}{Y}y)} \quad (6.1.6)
 \end{aligned}$$

と書ける.

## 6.2 計算設定

この節では数値計算を行う. 格子点は  $x$  方向に 256,  $y$  方向に 128 とし, 時間差分の間隔は  $\Delta t = 0.125 \times 10^{-4}$ , 切断波数は  $x$  方向に 170,  $y$  方向に 170 とした. 境界条件は  $y$  方向は  $y = 0, 1$  において  $\psi = \zeta = 0$ ,  $x$  方向には周期境界条件を与える. 支配方程式は渦度方程式 (6.1.1) である. 初期条件は

$$\begin{cases} \psi = \varepsilon \exp[-\{(y - y_c)/A_0\}^2] \cos(2\pi kx) \\ \varepsilon = 10^{-6} \end{cases} \quad (6.2.7)$$

$k = 2, 4, 8$   $\zeta = \Delta\psi$  としている.  $\varepsilon$  は初期擾乱の速度振幅である. 計算設定の詳細は表 6.2.1 に表す.

数値計算において基本流  $U$  を  $U = U_0 \tanh\{(y - y_c)/A_0\}$ ,  $A_0 = 3.3 \times 10^{-2}$ ,  $U_0 = 30$ ,  $y_c$  を領域の中央としている. (4.0.36) で  $U_1 = -U_2$ ,  $|U_1| = |U_2| = |U_0|$  とできるので, 擾乱の成長率  $\sigma$  は

$$\sigma = U_0 k \quad (6.2.8)$$

と書け, ここで  $U_0$  は一定なので成長率は  $k$  のみに依存する. まず, 波数  $k = 2, 4, 8$  の渦度場 ( $\Omega + \zeta$ ) の時間発展を図に示す.

((図))

それぞれ, 与えた波数の波が生じている. 隣り合う渦どうしが巻き込みあうことから, 最終的に渦が 1 つになることを示唆している. 波数 4 では, 擾乱ができるの

表 6.2.1: 計算設定

計算領域	$x = 3, y = 1$		
時間間隔 $\Delta t$	$0.125 \times 10^{-4}$		
初期擾乱の速度振幅 $\varepsilon$	$10^{-6}$		
初期擾乱の波数	2	4	8
切断波数	170		
解像度	$512 \times 256$		
基本流の速度差	60		
散逸項	$(-1)^{n-1} \nu_n \nabla^{2n} \zeta$		
粘性の階数 $n$	2		
粘性係数 $\nu_n$	$6.25 \times 10^{-12}$		
シア一層の幅 $A_0$	$3.3 \times 10^{-2}$		

は 3 つの場合のうち最も早いですが、隣の渦を巻きこむのは最も時間がかかっている。波数 8 では擾乱ができるのは遅いがそこからすぐに渦が成長している。ここから、波数による擾乱の起きやすさ、渦の成長しやすさに違いがあることがわかる。

次に、擾乱の渦度  $\zeta$  のエンストロフィを  $Z$  とおいて

$$Z(t) = \int (\zeta(x, y, t))^2 dx dy \quad (6.2.9)$$

と表す。  $\zeta \sim e^{\sigma t}$  より、  $Z = \int (\zeta(x, y, t))^2 dx dy \sim e^{2\sigma t}$  となるため、エンストロフィの自然対数は  $2\sigma$  に比例し、その傾きは  $2\sigma$  になる。(6.2.8) より、傾き  $2\sigma$  は

$$k = 2 \text{ の場合} : 2\sigma = 2U_0 \cdot k = 2 \cdot 30 \cdot 2 = 120 \quad (6.2.10a)$$

$$k = 4 \text{ の場合} : 2\sigma = 2 \cdot 30 \cdot 4 = 240 \quad (6.2.10b)$$

$$k = 8 \text{ の場合} : 2\sigma = 2 \cdot 30 \cdot 8 = 480 \quad (6.2.10c)$$

となるはずである。線形安定性解析での  $2\sigma$  を赤線、数値計算での  $k = 2, 4, 8$  のエンストロフィの自然対数の時間発展を黒線で図 6.2.1 に示す。

$k = 2, 4$  においては黒線の傾きを見ると線形安定性解析とほぼ同じ結果が得られたと言えるが、 $k = 8$  では大幅に線形安定性解析とのずれがあるように見える。これは、第 4 章の  $U(y)$  と数値計算の  $U(y)$  の形が異なっていたためではないかと予想を立てる。数値計算での  $U(y)$  は  $y \approx y_c$  で近似的に  $U \approx U_0 \frac{y - y_c}{A_0}$  となる。そこ

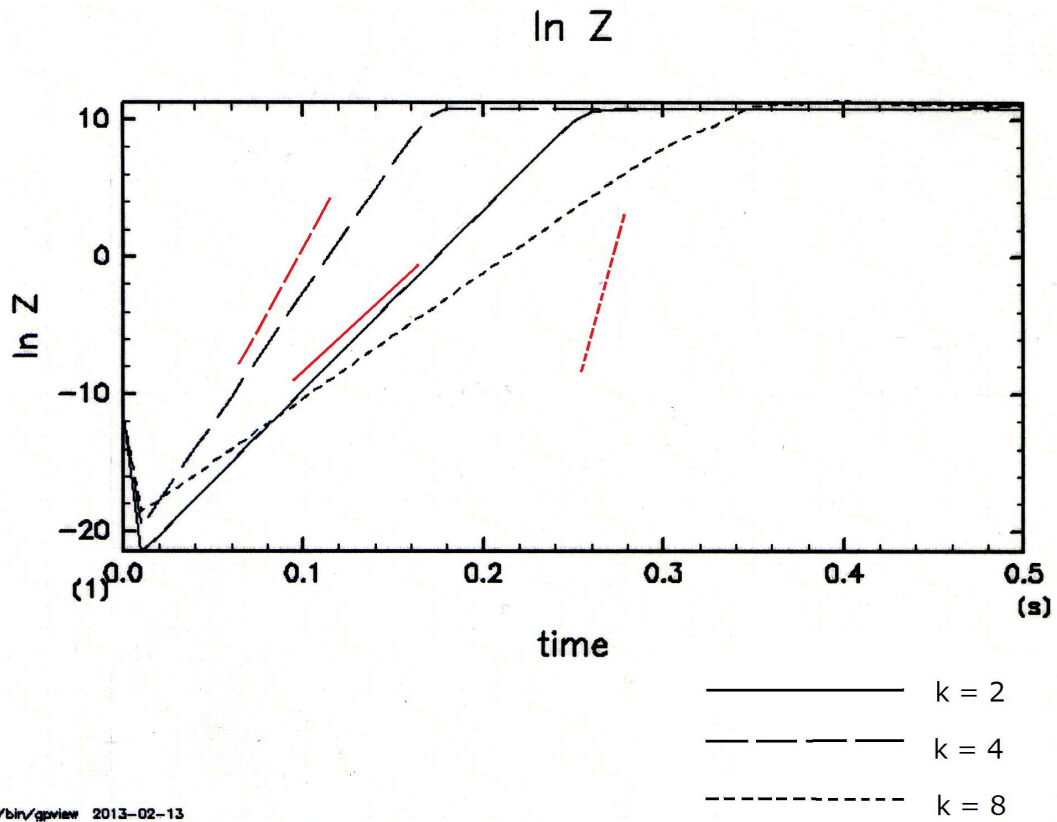


図 6.2.1 エンストロフィの自然対数の時間発展.

で, 以下の速度プロファイルを持つ基本流を新たに考える.

$$\begin{aligned}
 U &= U_1 = U_0(\text{定数}) \quad (y > a), \\
 U &= U_2 = \frac{U_0}{a}y \quad (-a < y < a), \\
 U &= U_3 = -U_0 \quad (y < -a).
 \end{aligned}
 \tag{6.2.11}$$

左図でシアアの領域は一定速度を持つ 2 つの無限領域に挟まれており,  $y = \pm a$  での波は相互に作用し不安定を生む.  $a = 0$  の場合これは第 4 章で Kelvin-Helmholtz 不安定を生じる基本流と等しくなる. 図 6.2.2 の右図は左図で  $y \pm b$  が境界となった場合である.

“Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics” p.261 の (6.42) 式を引用すると

$$c = \left( \frac{U_0}{2ka} \right) [(1 - 2ka)^2 - e^{-4ka}]^{1/2}.$$

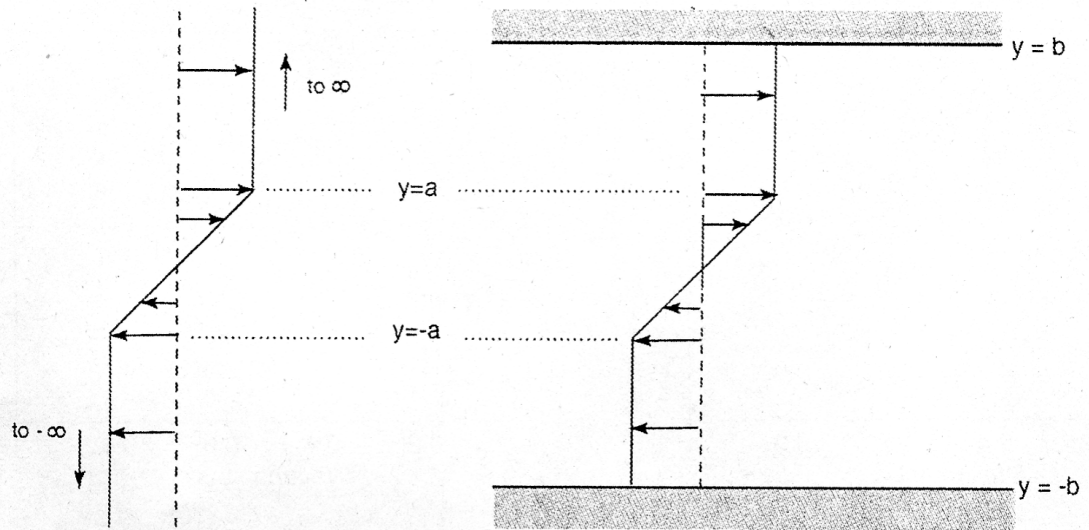


図 6.2.2 順圧不安定 の速度プロファイル

ここで  $c$  は擾乱の位相速度である. 上式右辺の右側は,  $ka \ll 1$  の場合,

$$\begin{aligned}
 [(1 - 2ka)^2 - e^{-4ka}]^{1/2} &\cong [1 - 4ka + 4k^2a^2 - (1 - 4ka + \frac{1}{2}(4ka)^2)]^{1/2} \\
 &= [1 - 4ka + 4k^2a^2 - 1 + 4ka - 8k^2a^2]^{1/2} \\
 &= (-4k^2a^2)^{1/2} \\
 &= i \cdot 2ka
 \end{aligned}$$

となる. よって

$$c = \frac{U_0}{2ka} \cdot i \cdot 2ka = iU_0 \tag{6.2.12}$$

となるので  $c_i = U_0$ . したがって,  $a \ll 1$ , つまり基本流が第 4 章で与えられたシア一流の場合, 擾乱の成長率  $\sigma = kc_i = U_0k$  となり (6.2.8) と一致する.

(6.2.12) において右辺右側の [ ] 内を負の場合流れが不安定となり, その臨界値は  $(1 - 2kA_0)^2 = e^{-4kA_0}$  を解くと得られ, 不安定は  $kA_0 < 0.263293$ , つまり  $k < 19.1796$  のとき起こる. (6.2.11) で与えられる基本流を与えた場合の波長 19 までの  $2\sigma$  を計算し, 波数による変化を示すと図 6.2.3 のようになる.

図 6.2.1 のエンストロフィの自然対数の線形論での  $2\sigma$  は,  $k = 2$  のとき

$$2\sigma = 109.655884198827 \approx 110,$$

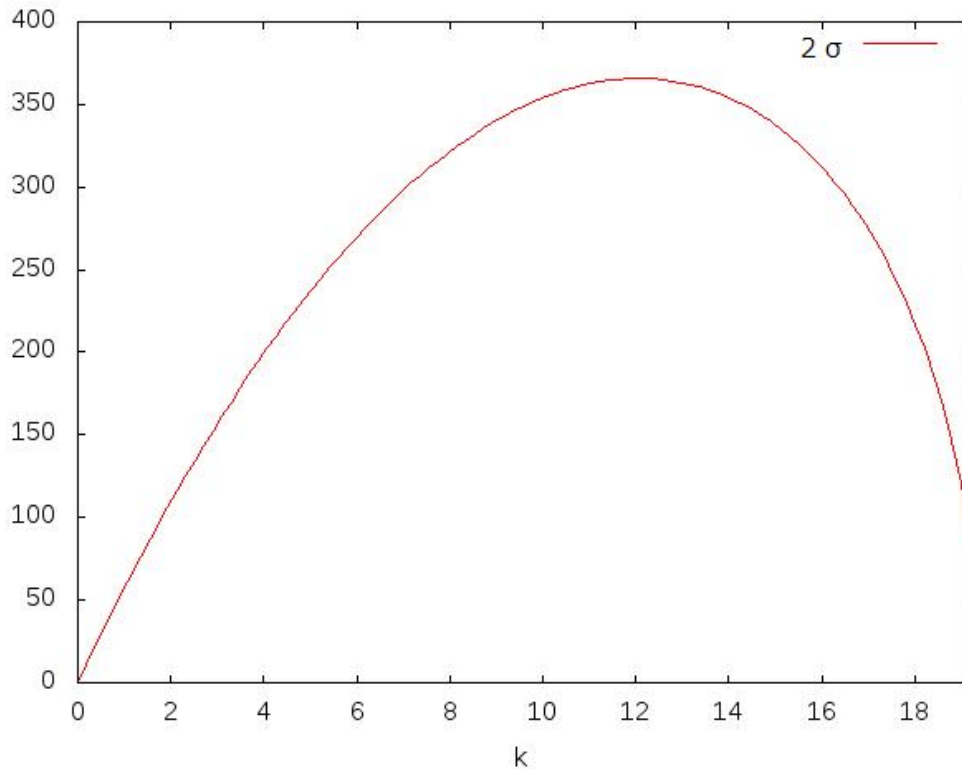


図 6.2.3 (6.2.11) で与えられる基本流での  $2\sigma$  の波数による変化.

$k = 4$  のとき

$$2\sigma = 199.35299812608753 \approx 200,$$

$k = 8$  のとき

$$2\sigma = 321.4898285309079 \approx 321.$$

図 6.2.3 より  $k = 8$  では  $2\sigma$  は増加にあり,  $k = 12$  のとき最大となっている. 一方,  $k = 2, 4, 5, 6, 8, 10$  のエンストロフィの自然対数は図 6.2.4 のようになっている.

図 6.2.4 より, 数値計算では波数 5 のとき傾きは最大となり, それ以上の波数だと順に減少している. 以上から線形安定性解析と数値計算は波数が大きくなるとずれが大きくなることがわかる.

5 以下の波数で線形安定性解析と数値計算の成長率を比較し, 図 6.2.5 に示す. 図 6.2.5 から線形安定性解析と数値計算の結果は波数 1 から 5 まではほぼ同じで, 波数 3, 4 のとき最も近くなることがわかる.



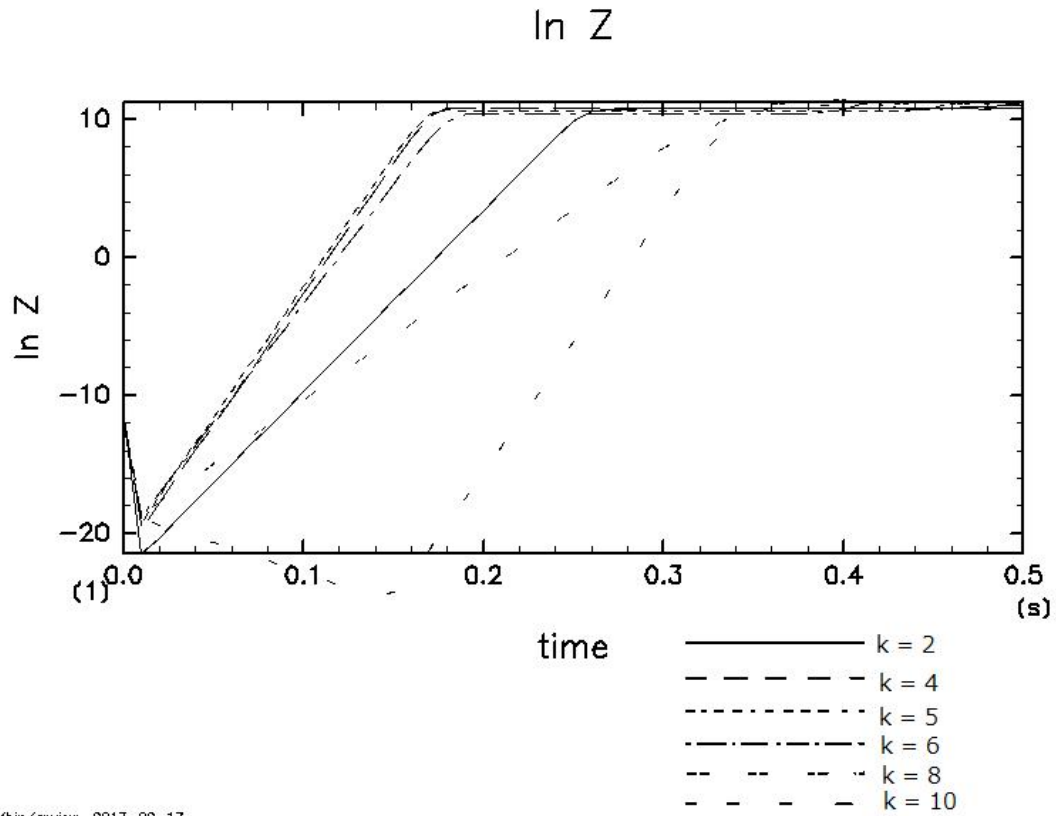


図 6.2.4  $k=2, 4, 5, 6, 8, 10$  でのエンストロフィの自然対数の時間発展.

大きな波数,  $k = 10, 12, 14, 16, 18$  でのエンストロフィの自然対数の時間発展は図 6.2.6 のようになる. 図 6.2.5 のように, 最大を超えた成長率がだんだん減少する現象は数値計算では起きず, どの波数も同じ成長率を持つようになる.

以上をまとめると, 線形安定性解析, 数値計算で成長率のふるまいに違いがあることがわかった. 線形安定性解析では近似的に基本流が数値計算の場合と同じとしたが, 厳密には違うのでこのような差が生じたと思われる. 波数が小さい場合, 5 以下の場合のみ線形安定性解析と数値計算の結果がほぼ同じとなる.

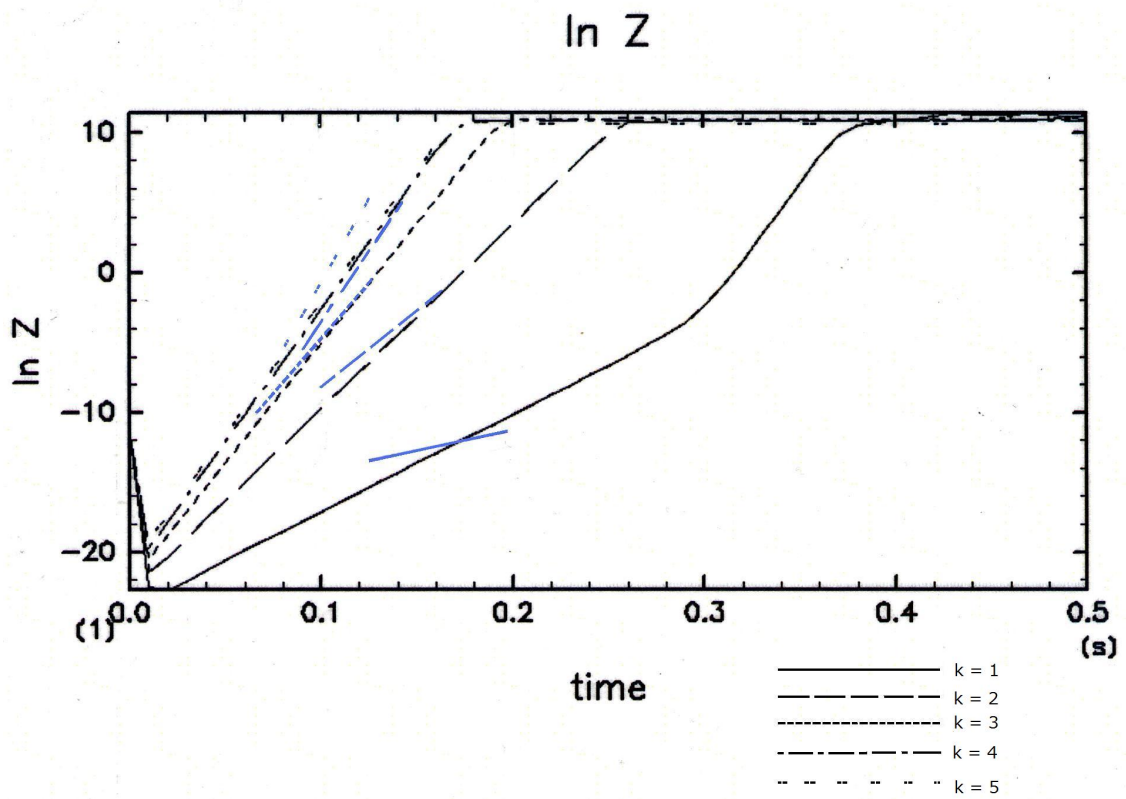


図 6.2.5 k=1, 2, 3, 4, 5 でのエンストロフィの自然対数の時間発展.

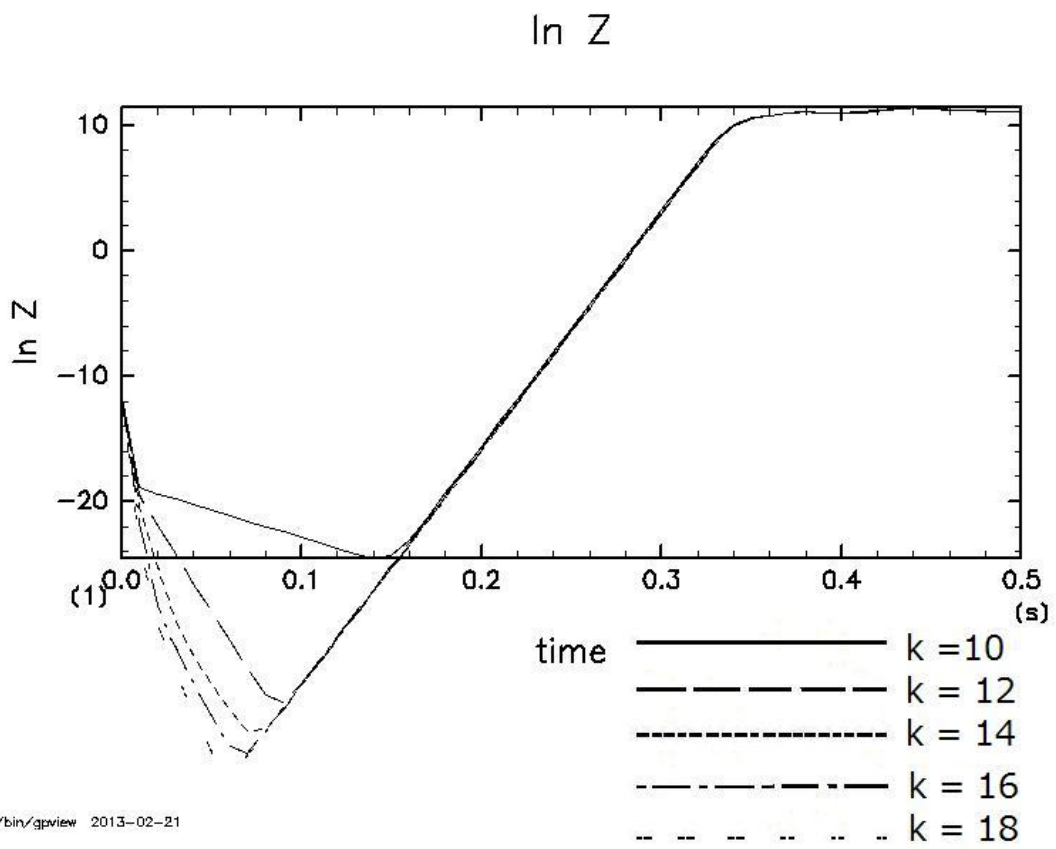


図 6.2.6  $k=10, 12, 14, 16, 18$  でのエンストロフィの自然対数の時間発展.

## 第7章 まとめ

本論文では, まず平行シア一流の定式化と線形安定性解析を行い, Kelvin-Helmholtz不安定が起こる仕組みを理解した. 渦度と流れ関数との運動学的関係式に運動学的境界条件と力学的境界条件を考慮することによって擾乱の振幅関数の指数関数的成長率は

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{-ik(U_1 + U_2) \pm \sqrt{-k^2(U_1 + U_2)^2 + 2k^2(U_1^2 + U_2^2)}}{2} \\ &= -\frac{ik}{2}(U_1 + U_2) \pm \frac{1}{2}|k||U|\end{aligned}$$

となることを導いた. ここで, 上層の流体の速度を  $U_2$ , 下層の流体の速度を  $U_1$ ,  $U = U_1 - U_2$  とおいた. また,  $k$  は擾乱の  $x$  方向の波数である. この実部が正のとき, つまり 2 つある  $\sigma$  のうち,  $+$  符号の方のとき  $\text{Re}[\sigma] > 0$  となって, 擾乱は指数関数的に成長する. つまり 速度不連続面をもつこの流れは線形不安定となる.

さらに, 支配方程式の数値計算と線形安定性解析を比較した.

線形安定性解析と数値計算の結果の考察により, 数値計算と線形安定性解析の成長率は波数が小さい場合 ( $k \leq 5$ ) のみほぼ合致することがわかった. 線形安定性解析では近似的に基本流が数値計算の場合と同じとしたが, 厳密には違うため, この結果が生じたと思われる.

## 謝辞

本論文作成にあたり, 林祥介教授には研究内容の指針を示していただき, 岩山隆寛准教授には理論から数値計算の手法, 本文チェック, タイトル決定にわたりご指導をいただきました. 先輩方は論文, プレゼン資料やポスターの制作の際アドバイスをくださいました. 坂廻邊翼氏には数値計算の際沢山の助言を頂きました. 時間を割いて相談に乗ってくださった研究室の皆様と励ましをくださった方々に心から感謝いたします.

数値計算プログラムの作成には地球流体電脳倶楽部の SPMODEL を使用させていただきました. また描画には地球流体電脳ライブラリ (DCL) を用いました.

## 参考文献

Batchelor, G. K., 橋本英典, 松信八十男 ほか共訳, 1972: 入門 流体力学, 東京電機大学出版, 614pp.

Drazin, P. G., Reid, W. H., 1982: Hydrodynamic stability, Cambridge University Press, 527pp.

石岡圭一, 2004: スペクトル法による数値計算入門, 東京大学出版会, 232pp.

今井 功, 1973: 流体力学 (前編), 裳華房, 422pp.

今井 功, 1993: 流体力学, 岩波書店, 266pp.

神部 勉, Drazin, P. G., 1998: 流体力学 安定性と乱流, 東京大学出版会, 359pp.

九州大学大学院総合理工学府大気海洋環境システム学, 2006: 地球環境を学ぶための流体力学, 成山堂書店, 323pp.

巽 友正, 1982: 流体力学, 陪風館, 464pp.

福本 康秀, 2005: 3. 渦層, ながれ 24, 443-457pp.

## 付録 A: ベクトル恒等式 (A) の導出

まず, 以下のベクトル恒等式を証明する.

$$\mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B} = \text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \text{grad})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \text{grad})\mathbf{A} - \mathbf{B} \times (\text{rot}\mathbf{A}). \quad (\text{A.1})$$

$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ,  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$  とし, 上式左辺の  $x$  成分を考えると,

$$(\mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B})_x = A_y \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) - A_x \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right). \quad (\text{A.2})$$

右辺の  $x$  成分を考えると,

$$\begin{aligned} (\text{右辺の } x \text{ 成分}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \right) \\ &\quad - \left( A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) B_x \\ &\quad - \left( B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z} \right) A_x \\ &\quad - \left( B_y \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - B_z \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right) \\ &= A_y \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) - A_x \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

となる. 以上より (左辺) = (右辺) となり, これは他の成分においても同様である. よって (A.1) が成立することが証明できた.

次に  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$  とすると, (A.1) は

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{A} &= \text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \text{grad})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \text{grad})\mathbf{A} - \mathbf{A} \times (\text{rot}\mathbf{A}) \\ \iff \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{A} &= \frac{1}{2} \text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \text{grad})\mathbf{A} \end{aligned} \quad (\text{A})$$

と表せられ, (A) が示せた.

記号の定義

$\omega$ : 渦度  $\mathbf{u}$ : 流速  $\zeta$ : 擾乱の渦度の  $z$  成分  $\Omega$ : 基本流の渦度の  $z$  成分  $\omega$ :  $\Omega + \zeta$   $U$ : 基本流の速度  $J$ : ヤコビアン  $\nu$ : 粘性係数  $\rho$ : 流体の密度

$\eta$ : 界面の形  $k$ : 波数  $U$ :  $U_1 - U_2$   $\sigma$ : 擾乱の成長率  $\sigma_r, \sigma_i$ : 成長率のそれぞれ実部, 虚部  $\varepsilon$ : 実定数  $\frac{D\zeta}{Dt} = 0$

$\frac{D\zeta}{Dt} = \nu \Delta \zeta$

*zeta*