

灰色大気の放射平衡温度分布に関する考察

坂東 あいこ

神戸大学 理学部 地球惑星科学科
地球および惑星大気科学研究室

2016/03/23

要旨

灰色大気の放射平衡温度分布の考察を行なった。放射の物理法則と伝播過程を概説したのち、吸収気体の吸収係数と気層の温度の関係について調べた。吸収係数が大きいほど温度は高くなることが分かった。これは、温室効果である。また、数値計算によって、平衡状態に達するまでの過程を調べた。吸収係数が小さいほど、平衡状態にいたるまでに時間がかかることが分かった。これは吸収係数が小さいほど、放射加熱・冷却率が小さく、平衡温度に変化するまでに時間を要するためである。

目次

第1章	はじめに	4
第2章	放射の基本法則	6
2.1	放射に関する物理量の定義	6
2.1.1	立体角	6
2.1.2	放射輝度	6
2.1.3	放射フラックス	7
2.2	黒体放射の法則	7
2.2.1	プランクの法則	8
2.2.2	ウィーンの変位則	8
2.2.3	ステファン・ボルツマンの法則	8
2.2.4	キルヒホッフの法則	8
2.3	放射伝達過程の定式化	9
2.3.1	放射伝達方程式	9
2.3.2	散乱位相関数	10
2.3.3	放射源関数	12

2.3.4	ビーア・ブーゲー・ランバートの法則	12
2.3.5	光学的厚さ	13
2.4	放射平衡	13
2.4.1	有効放射温度	13
2.4.2	温室効果	14
2.4.3	放射平衡にある大気の温度の高度分布	15
第3章	数値計算の準備	17
3.1	放射伝達	17
3.1.1	平行平面大気の放射伝達方程式	17
3.1.2	上向き・下向き放射輝度の導出	18
3.1.3	上向き・下向き放射フラックスの導出	18
3.2	解析解の導出	21
3.2.1	放射による気層の加熱・冷却	21
3.2.2	解析解の導出	22
第4章	数値計算	24
4.1	設定	24
4.2	解析解	27
4.2.1	結果	27
4.2.2	考察	28
4.3	数値解	29

4.3.1	結果	29
4.3.2	考察	42
第 5 章 結論		43
謝辞		44
付録 A : ステファン・ボルツマンの法則の導出		45
付録 B : p による z の重みづけ		46
付録 C : 放射フラックスの式の離散化		48
参考文献		50

第1章 はじめに

地球大気の鉛直構造はおおよそ図 1.1 のようになっている。対流圏では、気温がほぼ一定の割合で高度とともに減少している。その高さは、全球平均で約 11 km である。対流圏界面の上には、気温がほぼ一定の状態から高度とともに増大する力学的に安定な層があり、その層は成層圏と呼ばれる。そして、成層圏界面から高度 80 km 付近までを中間圏、高度 80 km 付近から数百 km までを熱圏という。

太陽放射による加熱と、大気放射による冷却が、ちょうど均衡するように一定の温度分布が保たれる状態を放射平衡という。対流圏および成層圏の温度の高度分布は、放射平衡のみによって決まっているわけではないが、放射平衡はこの温度の高度分布を第一義的に支配し、大気の構造を理解する上で、非常に重要な機構である。本研究では、対流の起こらない灰色大気が放射平衡状態にあるときの温度分布がどのような分布であるか、そしてその分布はどのように決まるかを検証する。

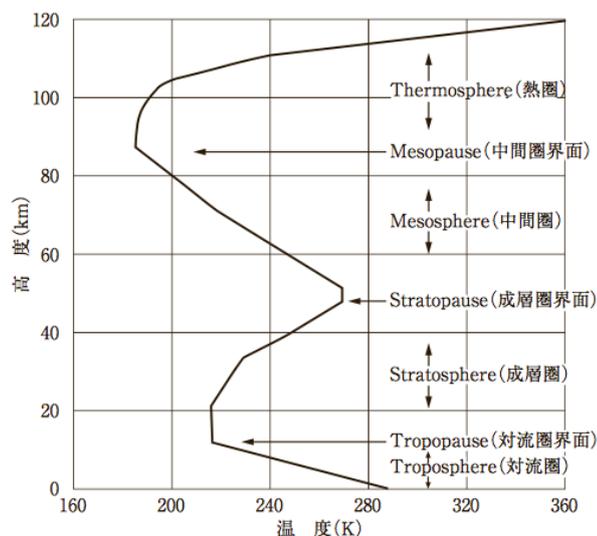


図 1.1: 気温の高度分布.(U. S. Standard Atmosphere 1976 (理科年表))

本論文の構成を説明する。2 章では放射に関する物理量の定義や放射の物理法則を示す。3 章では放射伝達の過程について説明し、灰色大気の温度分布を求める方

法について説明する. 4章は灰色大気の放射平衡温度分布を求める計算の概要および結果を示し, それについての考察を行う. 5章は結論を示している.

第2章 放射の基本法則

第2章では, 以後の章で必要となる, 放射に関する物理量の定義および放射の物理法則を示す.

2.1 放射に関する物理量の定義

2.1.1 立体角

立体角 ω は, 半径 r の球面上に円錐体で張られる面積 σ を半径の2乗で割った値, $\omega = \sigma/r^2$ として定義される. 単位は sr (ステラジアン) を用いる. 図 2.1 のように, 極座標系で表される半径 r の球面上の天頂角 ϑ と方位角 ϕ で規定される方向において, 微小な角度差 $d\vartheta$ および $d\phi$ で張られる錐体の微小面積 $d\sigma$ をみる場合の微小立体角 $d\omega$ は次式で与えられる.

$$d\omega = \frac{d\sigma}{r^2} = \sin \vartheta d\vartheta d\phi \quad (2.1)$$

2.1.2 放射輝度

ある面 dA を通して, その法線方向と角 ϑ を成す方向の立体角 $d\omega$ の錐体内を進む放射を考える (図 2.2 を参照). 波長が λ と $\lambda + d\lambda$ との間にある放射が時間 dt の間に面 dA を通過するとき, 放射が運ぶエネルギー dE_λ は,

$$dE_\lambda = I_\lambda (\cos \vartheta dA) d\omega d\lambda dt \quad (2.2)$$

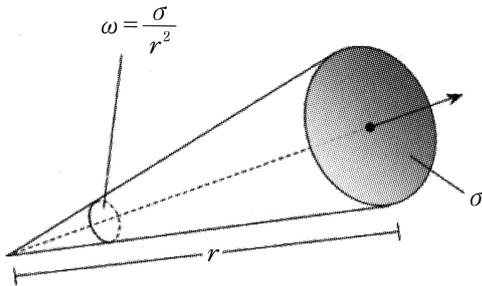


図 2.1: 立体角 ω の定義.
(浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎)

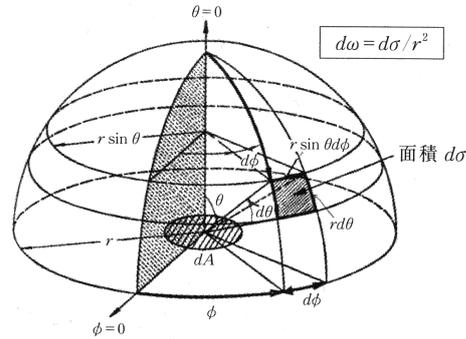


図 2.2: 極座標系における微小立体角 $d\omega$ の定義.
(浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎)

で与えられる. ここで, I_λ は, 波長 λ の放射の強さを表す比例定数であり, 放射輝度と呼ばれる. ある単一波長 λ の放射 (これを単色光と呼ぶ) の放射輝度は

$$I_\lambda = \frac{dE_\lambda}{\cos \vartheta dA d\omega d\lambda dt} \tag{2.3}$$

として定義される.

2.1.3 放射フラックス

面 dA を通して半球側へ流れる放射エネルギーの大きさを放射フラックスと呼ぶ. 波長 λ の放射フラックス F_λ は, 面 dA を通過する放射輝度 I_λ のうち面に垂直な成分を半球の全立体角 Ω について積分したものと定義される;

$$F_\lambda \equiv \int_{\Omega} I_\lambda \cos \vartheta d\omega. \tag{2.4}$$

2.2 黒体放射の法則

全ての物体はその温度で決まるスペクトルの光 (電磁波) を出している. この光を定量的に扱うため, 黒体という理想的な物体が考え出された. 黒体とは, 入射する全ての波長の放射を完全に吸収する理想的な物体をいう. また, 黒体は同じ温度では他のどんな物体よりも多くの放射を出すことができる. 黒体から射出される放射を黒体放射と呼ぶ. 現実の物体は黒体ではないが, 特定の波長では黒体に近似でき, これから説明するキルヒホッフの法則を使うことで黒体の考え方を利用できる.

2.2.1 プランクの法則

黒体の放射輝度は温度 T のみにより, プランク関数 $B_\lambda(T)$ で与えられる. 波長 λ を使うと,

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5 \{\exp(hc/\kappa_B\lambda T) - 1\}}. \quad (2.5)$$

ここで, c は真空中の光の速度, h はプランク定数, κ_B はボルツマン定数である.

2.2.2 ウィーンの変位則

黒体放射の輝度が最大となる波長 λ_{\max} は, その絶対温度に反比例する;

$$\lambda_{\max} = \frac{C}{T}, \quad \text{ただし } C = 2897 [\mu\text{m K}]. \quad (2.6)$$

これをウィーンの変位則という.

2.2.3 ステファン・ボルツマンの法則

黒体面から射出される放射フラックスの全波長にわたる積分値 F は, 絶対温度の 4 乗に比例する;

$$F = \sigma T^4. \quad (2.7)$$

これは, ステファン・ボルツマンの法則と呼ばれる. 比例定数 σ は, ステファン・ボルツマン定数といい, $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ である *1.

2.2.4 キルヒホッフの法則

キルヒホッフの法則は, 熱平衡の状態において, 物質の吸収係数 k_λ^a と射出係数 j_λ の比は, 物質の種類や性質に関係なく, その温度と放射の波長のみ依存すると主張する. つまり, 熱平衡状態にあるとき

$$\frac{j_\lambda}{k_\lambda^a} = B_\lambda(T) \quad (2.8)$$

*1付録 A 参照.

の関係が成り立つ。すなわち、吸収係数 k_λ^a と射出係数 j_λ の比はプランク関数 $B_\lambda(T)$ で与えられ、温度と波長のみに依存する。

吸収率 a_λ をプランク関数 $B_\lambda(T)$ に対する吸収された放射輝度の比、また射出率 ϵ_λ を $B_\lambda(T)$ に対する射出された放射輝度 j_λ の比として定義すると、(2.8) より、

$$a_\lambda = \epsilon_\lambda \quad (2.9)$$

である。全ての波長で $a_\lambda = \epsilon_\lambda = 1$ であるような理想的物体を黒体といい、 $0 < a_\lambda = \epsilon_\lambda = \text{一定値} < 1$ であるような物体を灰色体という。

地球大気は、鉛直方向の温度勾配をもつので、厳密には熱平衡の状態にないが、多くの吸収帯では約 70 km より低い高度で、それぞれの場でほぼ熱平衡状態であるとみなせる。これを局所熱平衡 (LTE : local thermodynamic equilibrium) の近似という。この場合、赤外放射の局所的な授受に対して、キルヒホッフの法則を適用することができる。

2.3 放射伝達過程の定式化

2.3.1 放射伝達方程式

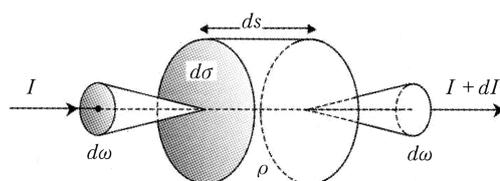


図 2.3: 放射伝達過程の概念図。(浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎)

大気中での放射の伝達過程を定式化する。大気中に断面積 $d\sigma$ 、長さ ds の微小な気柱を考え、これに波長が λ と $\lambda + d\lambda$ の間にある放射輝度 I_λ の放射が dt 時間に立体角 $d\omega$ で入射するとする (図 2.3 参照)。入射方向に進む放射は、この気柱を通過する間に散乱や吸収を受けて、その放射輝度が $I_\lambda + dI_\lambda$ に変わるとする。気柱の密度を ρ 、単位質量あたりの消散係数を k_λ^e と表すと、入射した放射が気柱を通過する間に消散されるエネルギーは、 $k_\lambda^e I_\lambda \rho ds d\sigma d\omega d\lambda dt$ で与えられる。これは放射エネルギーの変化量 $|dI_\lambda d\sigma d\omega d\lambda dt|$ に等しいので、この微小気柱による放射輝度の減衰は、

$$dI_\lambda(\text{減衰}) = -k_\lambda^e I_\lambda \rho ds \quad (2.10)$$

と書き表せる. ここで, k_λ^e は質量消散係数または質量消散断面積と呼ばれる.

他方, 射出と散乱による放射の増強分 dI_λ (増強) を表す係数 j_λ を導入し, これを質量射出係数または放射源係数と名付ける. 放射の増強分は, 微小気柱の質量に比例するので,

$$dI_\lambda(\text{増強}) = +j_\lambda \rho ds \quad (2.11)$$

と表せる. (2.10) と (2.11) による2つの過程が同時に進行していると考えれば, 正味としての放射輝度の変化量は,

$$dI_\lambda = -k_\lambda^e I_\lambda \rho ds + j_\lambda \rho ds \quad (2.12)$$

と書ける. ここで, 放射源関数 J_λ を,

$$J_\lambda \equiv \frac{j_\lambda}{k_\lambda^e} \quad (2.13)$$

と定義して導入すると, (2.12) 式は,

$$\frac{dI_\lambda}{k_\lambda^e \rho ds} = -I_\lambda + J_\lambda \quad (2.14)$$

と書き表せる. これを放射伝達方程式と呼ぶ. この方程式は, 大気中を伝播する間に吸収, 射出, 散乱を受けて変化する放射エネルギーの保存則を表し, 放射伝達過程を計算する際の基本となる重要な式である.

2.3.2 散乱位相関数

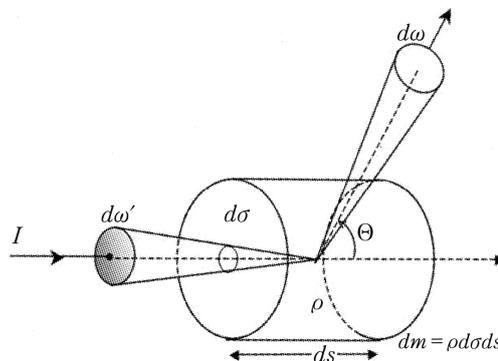


図 2.4: 散乱過程の概念図.(浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎)

次に、散乱がある場合の放射輝度の変化を定式化する (図 2.4 参照) . 立体角 $d\omega'$ 内の強度 I_λ の入射光が、微小体積 $d\sigma ds$ により散乱されるとしたとき、1 回の散乱で消散される放射エネルギーは、

$$k_\lambda^e I_\lambda \rho d\sigma ds d\omega' d\lambda dt = k_\lambda^e I_\lambda dmd\omega' d\lambda dt \quad (2.15)$$

と書ける. これ以降、入射光側の方角や立体角をプライム (') の付いた記号で表す. 入射光から失われた、すなわち消散された放射エネルギーのうち、入射光の進行方向と角 Θ を成す方向の立体角 $d\omega$ 内に散乱される割合は、散乱の強さの角度分布を表す関数 $P(\cos \Theta)$ を導入することにより、

$$P(\cos \Theta) \left(\frac{d\omega}{4\pi} \right) k_\lambda^e I_\lambda dmd\omega' d\lambda dt \quad (2.16)$$

と書き表せる. $P(\cos \Theta)$ を散乱位相関数、角 Θ を散乱角という.

全ての方向へ散乱されるエネルギーの割合は、(2.16) 式を散乱方向の全立体角 Ω について積分したものであるので、

$$k_\lambda^e I_\lambda dmd\omega' d\lambda dt \int_{\Omega} P(\cos \Theta) \left(\frac{d\omega}{4\pi} \right) \quad (2.17)$$

と書ける. このとき、

$$\int_{\Omega} P(\cos \Theta) \left(\frac{d\omega}{4\pi} \right) = 1 \quad (2.18)$$

ならば、(2.15) と (2.17) は一致する. この場合、散乱位相関数は、1 に規格化されているといい、散乱過程での放射エネルギーの消散は、純粋な散乱によってのみ生じ、エネルギーの実質的な損失 (吸収) はないことを意味する. 吸収を伴う一般的な散乱過程に対しては、

$$\int_{\Omega} P(\cos \Theta) \left(\frac{d\omega}{4\pi} \right) = \tilde{\omega}_0 \leq 1 \quad (2.19)$$

となる. これで定義される $\tilde{\omega}_0$ を単散乱アルベドと呼ぶ. この量は、また次式の形でも定義できる.

$$\tilde{\omega}_0 = \frac{k_\lambda^s}{k_\lambda^e} = \frac{k_\lambda^s}{k_\lambda^s + k_\lambda^a} \quad (2.20)$$

ここで、 k_λ^s は質量散乱係数と呼ばれ、純粋な散乱効果の大きさを表す係数である.

$$k_\lambda^s \equiv \int_{\Omega} k_\lambda^e P(\cos \Theta) \left(\frac{d\omega}{4\pi} \right) \quad (2.21)$$

k_λ^a は、質量吸収係数と呼ばれ、質量消散係数 k_λ^e と質量散乱係数 k_λ^s の差である.

$$k_\lambda^a = k_\lambda^e - k_\lambda^s \quad (2.22)$$

2.3.3 放射源関数

散乱のない吸収大気 ($\tilde{\omega}_0 = 0; k_\lambda^e = k_\lambda^a$) で局所熱平衡の近似が成り立つ場合には、キルヒホッフの法則 (2.8) より、 $j_\lambda = k_\lambda^a B_\lambda(T)$ であるので、

$$J_\lambda \equiv \frac{j_\lambda}{k_\lambda^e} \quad (2.23)$$

で定義される放射源関数 J_λ は、

$$J_\lambda = J_\lambda^{(a)} \equiv \frac{j_\lambda}{k_\lambda^a} = B_\lambda(T) \quad (2.24)$$

となる。ここで、 $J_\lambda^{(a)}$ は、吸収大気の放射源関数であり、局所熱平衡の近似が成り立つ大気ではプランク関数で与えられる。

他方、吸収のない散乱大気 ($\tilde{\omega}_0 = 1; k_\lambda^e = k_\lambda^s$) の場合、あらゆる方向から入射した放射エネルギーのうち考慮している方向に散乱される割合は、微小気柱からその方向に射出されるエネルギーに等しくなるので、(2.21) を参照すると射出係数 j_λ は、

$$j_\lambda = k_\lambda^s \int_{\Omega} I_\lambda P(\cos \Theta) \left(\frac{d\omega'}{4\pi} \right) \quad (2.25)$$

と書ける。したがって、この場合の放射源関数は、

$$J_\lambda = J_\lambda^{(s)} \equiv \frac{j_\lambda}{k_\lambda^s} = \int_{\Omega} I_\lambda P(\cos \Theta) \left(\frac{d\omega'}{4\pi} \right) \quad (2.26)$$

となる。ここで、 $J_\lambda^{(s)}$ は、散乱大気の放射源関数であることを表す。

吸収と散乱の過程が共存する大気 ($0 < \tilde{\omega}_0 < 1$) の場合には、微小気柱における散乱と吸収は、それぞれ独立の過程である (つまり、散乱された放射が微小気柱内で吸収されることはない) ので、放射源関数はそれぞれの効果の和として、

$$J_\lambda = (1 - \tilde{\omega}_0) J_\lambda^{(a)} + \tilde{\omega}_0 J_\lambda^{(s)} = (1 - \tilde{\omega}_0) B_\lambda(T) + \tilde{\omega}_0 J_\lambda^{(s)} \quad (2.27)$$

で与えられる。すなわち、単散乱アルベド $\tilde{\omega}_0$ の値により、吸収の放射源関数 $J^{(a)}$ と散乱の放射源関数 $J^{(s)}$ の寄与の割合が決まる。

2.3.4 ビーア・ブーゲー・ランバートの法則

放射の射出がない場合 ($J_\lambda = 0$) には、放射伝達方程式 (2.14) は、

$$\frac{dI_\lambda}{k_\lambda^e \rho ds} = -I_\lambda \quad (2.28)$$

と書ける. いま, 気柱の $s = 0$ 点に入射する放射輝度を $I_\lambda(0)$ としたとき, 気柱内を $s = s^*$ の距離を通過した放射の強度 $I_\lambda(s^*)$ は, (2.28) を積分して,

$$I_\lambda(s^*) = I_\lambda(0) \exp \left[- \int_0^{s^*} k_\lambda^e \rho ds \right] \quad (2.29)$$

となる.

2.3.5 光学的厚さ

消散係数 k_λ^e と密度 ρ が場所によって変わるような一般の気層における (2.28) の放射伝達を考える. ここで, k_λ^e と ρ の積を光路上の点 s_a と点 s_b の間で積分した量として定義される光学的厚さを $\tau_\lambda(s_a, s_b)$ と表記して導入する. すなわち,

$$\tau_\lambda(s_a, s_b) \equiv \int_{s_a}^{s_b} k_\lambda^e \rho ds \quad (2.30)$$

と定義する. これを導入すると, 解 (2.29) は,

$$I_\lambda(s^*) = I_\lambda(0) \exp[-\tau_\lambda(0, s^*)] \quad (2.31)$$

と書き直せる.

また, 大気が光学的に厚い場合, 大気を N 個の気層に分け, 各気層の光学的厚さを, $\tau_\lambda(0, s_1), \tau_\lambda(s_1, s_2), \dots, \tau_\lambda(s_{N-1}, s_N)$ としたとき, 大気全体の光学的厚さ $\tau_\lambda(s_0, s_N)$ は, 各気層の光学的厚さの和, すなわち,

$$\tau_\lambda(0, s_N) = \tau_\lambda(0, s_1) + \tau_\lambda(s_1, s_2) + \dots + \tau_\lambda(s_{N-1}, s_N) \quad (2.32)$$

で与えられる.

2.4 放射平衡

2.4.1 有効放射温度

大気の内容を考えずに, 地球を一つの固体球体と仮定したとき, 図 2.5 より, 放射のつりあいを表す式は,

$$\pi r_e^2 (1 - A) S = 4\pi r_e^2 \epsilon \sigma T^4 \quad (2.33)$$

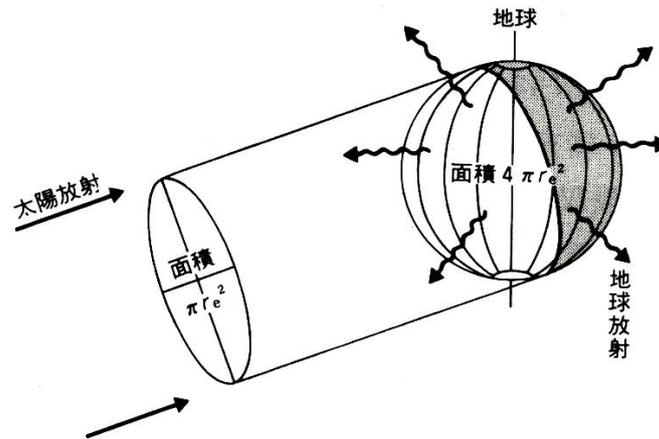


図 2.5: 地球の放射平衡.(小倉義光, 1999: 一般気象学 [第2版])

である。ここで, S は太陽定数, A はアルベドである。左辺は地球が吸収した太陽放射量, 右辺は地球が射出する地球放射量である。この式には地球が空間的に均質で, 熱の伝導が充分速やかというもう一つの仮定がある。 $S = 1370 \text{ W m}^{-2}$, $A = 0.30$, 黒体放射を仮定して $\epsilon = 1.0$, $\sigma = 5.6697 \times 10^{-8} \text{ J m}^{-2} \text{ K}^{-4} \text{ s}^{-1}$ とすると, $T = 255 \text{ K}$ となる。この放射平衡温度を有効放射温度という。地球気温の全球平均値は約 288 K と見積もられているので, 有効放射温度とは約 33 K の温度差がある^{*2}。これは, 実際の地球は $\epsilon = 1.0$ の黒体の固体球体ではなく, 大気が存在しており, $\epsilon < 1.0$ であることに主に起因する。

2.4.2 温室効果

大気成分による赤外放射の吸収と再放出により, 有効放射温度よりも高い地表面温度がもたらされる現象が温室効果である。

地表面が有効放射温度の場合, 地表面が放出した長波放射が遮られ, そのままでは太陽放射の吸収した分の熱をすべて宇宙空間に放出できないので, 宇宙空間に釣り合うだけの長波放射を宇宙空間に放出するには, 地表面温度がより高い必要がある。また, 地表が太陽放射だけでなく, 大気が下方に放出する熱放射も受けるようになるので, これらの総和と釣り合うだけの長波放射を放出するため, 地表面温度が高くなる必要があるとも説明できる。

以上のような理由で, 地表面温度は有効放射温度より高くなる。

^{*2}小倉義光, 1999: 一般気象学 より引用。

2.4.3 放射平衡にある大気の温度の高度分布

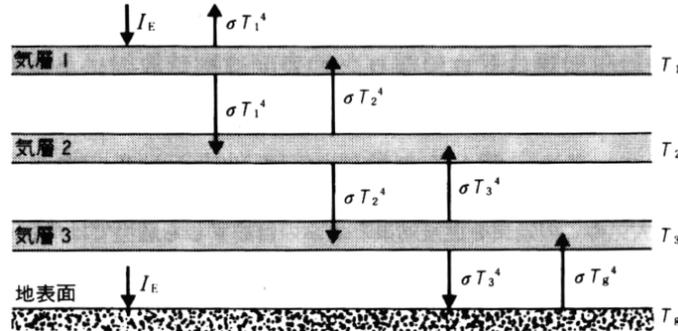


図 2.6: 放射平衡にある大気の温度の高度分布を求める説明図. (小倉義光, 1999: 一般気象学 [第 2 版])

放射平衡にある温度の高度分布を知るために、放射平衡にある大気の温度と地表面温度 T_g を計算する。図 2.6 のように、大気が 3 つの層からなるとする。計算を簡単にするために、以下 3 つの仮定をする。(a) 各気層は太陽放射 I_E に対して透明である。(b) 各気層の地球放射に対する吸収率は波長によらない。(c) 各気層は十分に厚いので、各気層からの赤外放射は、その気層のすぐ上または下にある気層によって完全に吸収される。これらの仮定において、各気層が放射平衡にあるとすれば以下の式が成り立つ。

$$\text{宇宙空間に対して } \sigma T_1^4 = I_E \quad (2.34)$$

$$\text{気層 1 に対して } 2\sigma T_1^4 = \sigma T_2^4 \quad (2.35)$$

$$\text{気層 2 に対して } 2\sigma T_2^4 = \sigma T_1^4 + \sigma T_3^4 \quad (2.36)$$

$$\text{気層 3 に対して } 2\sigma T_3^4 = \sigma T_2^4 + \sigma T_g^4 \quad (2.37)$$

式 (2.35) から $T_2 = \sqrt[4]{2}T_1$ となる。これを式 (2.36) に代入すると $T_3 = \sqrt[4]{3}T_1$ となり、これを式 (2.37) に代入すれば $T_g = \sqrt[4]{4}T_1$ となる。したがって、

$$T_1 < T_2 < T_3 < T_g \quad (2.38)$$

であることがわかる。つまり、地表面のすぐ近くの気層の温度は地表面温度より低く、大気中では気層の温度は高度とともに減少していることがわかる。

ただし、このような計算をより一般化して、大気を n 層に分けると、 $T_g = \sqrt[n+1]{n+1}T_1$ となるが、これはおかしい。というのは、式 (2.34) より、 $T_1 = (I_E/\sigma)^{1/4}$ であるから、 $T_g = \sqrt[n+1]{n+1}(I_E/\sigma)^{1/4}$ となり、 n を増やせば、 T_g は無限に大きくなるからである。このような不合理な結果は仮定 (b) と (c) によるものである。仮定 (c) についていえ

ば, 実際の大気を多数の層に分けると, 各層の厚さが薄くなり, ある気層からの放射をその上下の気層が完全に吸収してしまふことができなくなる.

より厳密に放射平衡にある大気の温度の高度分布を計算するためには, 大気中に存在する吸収気体の高度分布と, 気体の放射特性を考慮しなければならない.

第3章 数値計算の準備

第3章では、第4章で用いる上向き・下向き放射フラックスの導出および解析解の導出を行なう。

3.1 放射伝達

3.1.1 平行平面大気の放射伝達方程式

鉛直方向に比べて水平方向には温度や大気物質は比較的一様に分布しているので、大気層を水平方向には均質な薄い平板状の気層の重なりとして扱うことは便利で精度の良い近似である。これを平行平面大気近似という。そうすると、極座標系において ϑ 方向の微小距離は $ds = dz / \cos \vartheta$ と表示でき、放射伝達方程式 (2.14) は、

$$\cos \vartheta \frac{dI_\lambda(z, \vartheta, \phi)}{k_\lambda^e \rho dz} = -I_\lambda(z, \vartheta, \phi) + J_\lambda(z, \vartheta, \phi) \quad (3.1)$$

と書き表せる。ここで

$$\mu \equiv \cos \vartheta, \quad (3.2)$$

$$d\tau_\lambda \equiv -k_\lambda^e \rho dz \quad (3.3)$$

なる関係式で定義される方向余弦 μ および微小光学的厚さ $d\tau_\lambda$ を導入すると、(3.1) は以下のように書ける；

$$\mu \frac{dI_\lambda(\tau, \mu, \phi)}{d\tau_\lambda} = I_\lambda(\tau, \mu, \phi) - J_\lambda(\tau, \mu, \phi), \quad (3.4)$$

$$-\mu \frac{dI_\lambda(\tau, -\mu, \phi)}{d\tau_\lambda} = I_\lambda(\tau, -\mu, \phi) - J_\lambda(\tau, \mu, \phi). \quad (3.5)$$

3.1.2 上向き・下向き放射輝度の導出

散乱のない大気では, 放射伝達方程式 (3.4) は (2.24) より,

$$\mu \frac{dI_\lambda^\uparrow}{d\tau_\lambda} = I_\lambda^\uparrow - B_\lambda(T) \quad (3.6)$$

である. 放射伝達方程式 (3.6) を積分する. $-e^{-\tau/\mu}$ を (3.6) の両辺にかけると,

$$\mu e^{-\tau/\mu} \frac{dI_\lambda^\uparrow}{d\tau_\lambda} = e^{-\tau/\mu} I_\lambda^\uparrow - e^{-\tau/\mu} B_\lambda(T) \quad (3.7)$$

となり, 整理すると,

$$\frac{d}{d\tau} \left(I_\lambda^\uparrow e^{-\tau/\mu} \right) = -\frac{1}{\mu} B_\lambda(T) e^{-\tau/\mu}. \quad (3.8)$$

この式を τ から τ_1 まで積分すると光学的厚さが τ のところにある大気層へ入る上向きの放射輝度は

$$I_\lambda(\tau, \mu, \phi) = I_\lambda(\tau_1, \mu, \phi) e^{-(\tau_1-\tau)/\mu} + \int_\tau^{\tau_1} B_\lambda e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu}. \quad (3.9)$$

同様に計算すると, 光学的厚さが τ のところにある大気層へ入る下向きの放射輝度は

$$I_\lambda(\tau, -\mu, \phi) = I_\lambda(0, -\mu, \phi) e^{-\tau/\mu} + \int_0^\tau B_\lambda e^{-(\tau-t)/\mu} \frac{dt}{\mu}. \quad (3.10)$$

3.1.3 上向き・下向き放射フラックスの導出

上向きの放射輝度において, 下端を地面とすると地球からの放射は黒体放射とみなせるので $I_\lambda(\tau_1, \mu, \phi) = B_\lambda(T_s)$ であり, また, 下向きの放射輝度において, 大気上端から赤外放射がないので $I_0 = 0$ であることより, (3.9), (3.10) は

$$I_\lambda(\tau, \mu, \phi) = B_\lambda(T_s) e^{-(\tau_1-\tau)/\mu} + \int_\tau^{\tau_1} B_\lambda e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu}, \quad (3.11)$$

$$I_\lambda(\tau, -\mu, \phi) = \int_0^\tau B_\lambda e^{-(\tau-t)/\mu} \frac{dt}{\mu} \quad (3.12)$$

となる.

大気の上向き放射フラックス, 下向きフラックスをそれぞれ求める. (2.4) より

$$\begin{aligned}
 F_{\lambda}^{\uparrow} &= \int_{\Omega} I_{\lambda}^{\uparrow} \cos \vartheta d\omega \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{2\pi} I_{\lambda}^{\uparrow} \cos \vartheta \sin \vartheta d\phi \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi I_{\lambda}^{\uparrow} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \\
 &= 2\pi \int_0^1 \mu I_{\lambda}^{\uparrow} d\mu, \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{\lambda}^{\downarrow} &= \int_{\Omega} I_{\lambda}^{\downarrow} \cos \vartheta d\omega \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} I_{\lambda}^{\downarrow} \cos \vartheta \sin \vartheta d\phi \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\pi I_{\lambda}^{\downarrow} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \\
 &= 2\pi \int_0^1 \mu I_{\lambda}^{\downarrow} d\mu. \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

吸収係数 k_{λ}^a が波長に依らない灰色大気を考え, また短波に関して透明とし, さらに上向き, 下向きそれぞれで等方的に長波を放射しているとする. (3.4) に放射の出入りする断面積 $\cos \vartheta$ をかけて上下各半球の立体角で積分する;

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= 2\pi \int_0^1 \mu^2 \frac{dI^{\uparrow}}{d\tau} d\mu \\
 &= \frac{d}{d\tau} \int_0^1 I^{\uparrow} 2\pi \mu^2 d\mu \\
 &= \frac{2}{3} \frac{d\pi I^{\uparrow}}{d\tau} \\
 &= \frac{2}{3} \frac{dF^{\uparrow}}{d\tau}, \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{右辺}) &= 2\pi \int_0^1 (\mu I^{\uparrow} - \mu B) d\mu \\
 &= \pi I^{\uparrow} - \pi B \\
 &= F^{\uparrow} - \pi B. \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

したがって,

$$\frac{2}{3} \frac{dF^{\uparrow}}{d\tau} = F^{\uparrow} - \pi B. \tag{3.17}$$

(3.5) を用いて, 下向きについても同様に計算する;

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= -2\pi \int_0^1 \mu^2 \frac{dI^\downarrow}{d\tau} d\mu \\ &= -\frac{2}{3} \frac{dF^\downarrow}{d\tau}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= 2\pi \int_0^1 (\mu I^\downarrow - \mu B) d\mu \\ &= \pi I^\downarrow - \pi B \\ &= F^\downarrow - \pi B. \end{aligned} \quad (3.19)$$

したがって,

$$-\frac{2}{3} \frac{dF^\downarrow}{d\tau} = F^\downarrow - \pi B. \quad (3.20)$$

$\tau^* = \frac{3}{2}\tau$ とおくと, (3.17), (3.20) はそれぞれ

$$\frac{dF^\uparrow}{d\tau^*} = F^\uparrow - \pi B, \quad (3.21)$$

$$-\frac{dF^\downarrow}{d\tau^*} = F^\downarrow - \pi B \quad (3.22)$$

と表せ, (3.21) $\times e^{-\tau^*}$, (3.22) $\times e^{\tau^*}$ すると,

$$e^{-\tau^*} \frac{dF^\uparrow}{d\tau^*} - e^{-\tau^*} F^\uparrow = -\pi B e^{-\tau^*}, \quad (3.23)$$

$$-e^{\tau^*} \frac{dF^\downarrow}{d\tau^*} - e^{\tau^*} F^\downarrow = -\pi B e^{\tau^*}. \quad (3.24)$$

ここで, $-e^{-\tau^*} F^\uparrow = F^\uparrow \frac{d}{d\tau^*} e^{-\tau^*}$ であり, (3.23) にこれを代入すると,

$$e^{-\tau^*} \frac{dF^\uparrow}{d\tau^*} + F^\uparrow \frac{d}{d\tau^*} e^{-\tau^*} = -\pi B e^{-\tau^*} \quad (3.25)$$

となり,

$$\frac{d}{d\tau^*} (F^\uparrow e^{-\tau^*}) = -\pi B e^{-\tau^*} \quad (3.26)$$

と変形できる. これを τ^* から τ_s^* まで積分すると

$$F^\uparrow(\tau_s^*) e^{-\tau_s^*} - F^\uparrow(\tau^*) e^{-\tau^*} = - \int_{\tau^*}^{\tau_s^*} \pi B(t) e^{-t} dt \quad (3.27)$$

となる. したがって, これを変形して

$$F^\uparrow(\tau^*) = F^\uparrow(\tau_s^*) e^{-(\tau_s^* - \tau^*)} + \int_{\tau^*}^{\tau_s^*} \pi B(t) e^{-(t - \tau^*)} dt. \quad (3.28)$$

(3.24) も同様にして変形する. $e^{\tau^*} F^\downarrow = F^\downarrow \frac{d}{d\tau^*} e^{\tau^*}$ より (3.24) を変形すると,

$$\frac{d}{d\tau^*} (F^\downarrow e^{\tau^*}) = \pi B e^{\tau^*}. \quad (3.29)$$

これを 0 から τ^* まで積分すると,

$$F^\downarrow(\tau^*) e^{\tau^*} - F^\downarrow(0) e^0 = \int_0^{\tau^*} \pi B(t) e^t dt \quad (3.30)$$

となり, ここで $F^\downarrow(0) = 0$ より

$$F^\downarrow(\tau^*) e^{\tau^*} = \int_0^{\tau^*} \pi B(t) e^t dt \quad (3.31)$$

である. したがって, 両辺を $e^{-\tau^*}$ 倍して,

$$F^\downarrow(\tau^*) = \int_0^{\tau^*} \pi B(t) e^{-(\tau^*-t)} dt. \quad (3.32)$$

3.2 解析解の導出

3.2.1 放射による気層の加熱・冷却

$F_\lambda^{\text{net}} = F_\lambda^\uparrow - F_\lambda^\downarrow$ と定義すると, $F_\lambda^{\text{net}}(z) > 0$ の場合は高度 z の面を通した正味の
上向き放射エネルギーの流量があることを意味する. 高度 z と $z + \Delta z$ の間の厚さ
 Δz の気層をとり, この気層における放射エネルギーの出入りを考える. 気層の上
面および下面を通した放射エネルギーの出入りの収支 $\Delta F_\lambda^{\text{net}}(z)$ は,

$$\Delta F_\lambda^{\text{net}}(z) = [F_\lambda^\uparrow(z + \Delta z) - F_\lambda^\downarrow(z + \Delta z)] - [F_\lambda^\uparrow(z) - F_\lambda^\downarrow(z)] \quad (3.33)$$

$$= F_\lambda^{\text{net}}(z + \Delta z) - F_\lambda^{\text{net}}(z) \quad (3.34)$$

で与えられる. $\Delta F_\lambda^{\text{net}}(z)$ の値が正の場合は, この気層内において正味として上向き
放射エネルギーの流出があることに対応する. 放射エネルギーの流出は, 気層から
熱エネルギーの一部が放射となって失われたことに相当し, これにより気層は冷却
する. 他方, 流入すなわち収束した放射エネルギーは, 熱エネルギーに変換されて
気層を加熱する. 気層の温度の時間変化率 $\partial T / \partial t$ は, 放射加熱 (冷却) 率と呼ばれ,
次式で与えられる.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{c_p \rho} \frac{\Delta F_\lambda^{\text{net}}(z)}{\Delta z} \quad (3.35)$$

これを用いて, n 番目の時間ステップにおける温度 $T^{(n)}$ から, Δt 時間後の温度 $T^{(n+1)}$
を推定することができる;

$$T^{(n+1)} = T^{(n)} + \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t. \quad (3.36)$$

3.2.2 解析解の導出

灰色大気の放射平衡温度の解析解を求める。平衡であると仮定すると、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (3.37)$$

より

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{c_p \rho} \frac{\Delta F^{\text{net}}(z)}{\Delta z} = 0 \quad (3.38)$$

であるから、 Δz を十分小さくすると、

$$\frac{dF}{dz} = 0 \quad (3.39)$$

であることが分かる。また $d\tau = -k\rho dz$ より、

$$\frac{dF}{d\tau} = 0 \quad (3.40)$$

とも書ける。したがって、

$$\frac{d}{d\tau^*} (F^\uparrow - F^\downarrow) = 0 \quad (3.41)$$

である。(3.21) + (3.22) をすると、

$$\frac{d}{d\tau^*} (F^\uparrow - F^\downarrow) = F^\uparrow + F^\downarrow - 2\pi B. \quad (3.42)$$

(3.21) - (3.22) をすると、

$$\frac{d}{d\tau^*} (F^\uparrow + F^\downarrow) = F^\uparrow - F^\downarrow. \quad (3.43)$$

(3.44) より (3.42) は

$$\frac{d}{d\tau^*} (F^\uparrow - F^\downarrow) = F^\uparrow + F^\downarrow - 2\pi B = 0. \quad (3.44)$$

これより、 $F^\uparrow - F^\downarrow = \text{const.}$ であるから、

$$F^\uparrow(0) - F^\downarrow(0) = F^\uparrow(1) - F^\downarrow(1) = \dots = (1 - A)F_0. \quad (3.45)$$

ここで F_0 は太陽放射による下向き放射フラックス、 A は地表面のアルベド。したがって、

$$\frac{d}{d\tau^*} (F^\uparrow + F^\downarrow) = F^\uparrow - F^\downarrow = (1 - A)F_0. \quad (3.46)$$

これより、

$$F^\uparrow + F^\downarrow = (1 - A)F_0\tau^* + C \quad (C : \text{積分定数}) \quad (3.47)$$

であるが, ここで, $\tau^* = 0$ のとき

$$F^\uparrow(0) + F^\downarrow(0) = (1 - A)F_0 = C \quad (3.48)$$

より

$$F^\uparrow + F^\downarrow = (1 - A)F_0(\tau^* + 1) \quad (3.49)$$

となる. (3.44) より, $F^\uparrow + F^\downarrow = 2\pi B$ であるから,

$$\pi B = \frac{1}{2}(1 - A)F_0(\tau^* + 1). \quad (3.50)$$

ここで, $\sigma T^4 = \pi B$ より, 解析解は

$$T = \left(\frac{1}{2\sigma}(1 - A)F_0(\tau^* + 1) \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.51)$$

である. (3.46), (3.49) より,

$$F^\uparrow = \frac{1}{2}(1 - A)F_0(\tau^* + 2), \quad (3.52)$$

$$F^\downarrow = \frac{1}{2}(1 - A)F_0\tau^*. \quad (3.53)$$

地表面の温度 T_s を求めたい. 地表面での放射フラックスの収支を考えると

$$\begin{aligned} \sigma T_s^4 &= F^\downarrow(\tau_s^*) + (1 - A)F_0 \\ &= \frac{1}{2}(1 - A)F_0\tau_s^* + (1 - A)F_0 \\ &= \frac{1}{2}(1 - A)F_0(\tau_s^* + 2). \end{aligned} \quad (3.54)$$

したがって, 地表面温度の解析解 T_s は

$$T_s = \left(\frac{1}{2\sigma}(1 - A)F_0(\tau_s^* + 2) \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (3.55)$$

これは, (3.50) での大気層温度の解析解 T より大きい.

第4章 数値計算

まず, 第3章で導出した解析解をグラフに出力する. 次に, 数値計算によって灰色大気の放射平衡による温度分布を求める. 各層における大気密度および光学的厚さを求め, p による z の重み付けを行なう. 各層境界で, 上向き放射フラックスと下向き放射フラックスから正味放射フラックスを求める. 各層の上下端での正味放射フラックスの差から気層の加熱率 $\partial T/\partial t$ を導き, 次の時間での各層の温度を求める計算を繰り返し, 平衡状態における温度分布を求める.

解析解と数値解を比較し, 数値解が正しく計算されていることを確認したのち, 数値計算において平衡状態に達するまでの過程を調べる.

4.1 設定

今回の計算は, 以下のような仮定・境界条件のもとで行う. 物理定数および変数は表 4.1.1 の値を用いる^{*1}.

用いた近似は平行平面大気近似, 局所熱平衡近似, 吸収係数 k が波長に依らない灰色大気の近似であり, 散乱のない吸収大気とする. 大気の密度は, スケールハイト 8.0 km で指数関数的に鉛直分布しているとし, 大気上端での光学的厚さは 0.0 で, 赤外放射は大気上端から入射しないとする. また, 太陽放射に対して大気は透明とする. 大気層全体の高さは, 50000 m である.

^{*1}理科年表 平成 28 年版 および 小倉義光, 1999: 一般気象学 より引用. ただし, 大気のスケールハイトおよび吸収気体の地表面における密度については適当な値を設定した.

吸収気体のスケールハイトを $H_{ab} = 8.0\text{km}$ としたとき, 地表面での光学的厚さと吸収係数の対応は以下の通りである.

- $\tau = 3.0$ のとき $k = 3.64 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$
- $\tau = 1.0$ のとき $k = 1.21 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$
- $\tau = 0.1$ のとき $k = 1.21 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$

数値計算を行なう際には, 大気層を 500 層に分割して計算する^{*2}. 時間ステップの間隔 dt は 8 時間とする. また, 平衡条件は大気上下端での正味放射フラックスの差 $|F^{\text{net}}(z = 50000) - F^{\text{net}}(z = 0)|$ が 0.01 以下であることとする.

^{*2}分割の方法については, 付録 B 参照.

表 4.1.1: 本研究で用いた物理定数と変数表.

重力加速度	g	9.8 m/s^2
太陽定数	S	1370 W/m^2
地球のアルベド	A	0.3
大気のスケールハイト	H	8.0 km
ステファン・ボルツマン定数	σ	$5.67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$
プランク定数	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}$
ボルツマン定数	κ_B	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
大気の定圧比熱	c_p	$1.0 \times 10^3 \text{ J/kgK}$
大気の花表面における密度	ρ_s	1.3 kg/m^3
吸収気体の花表面における密度	ρ_s^{ab}	$1.0 \times 10^{-2} \text{ kg/m}^3$

4.2 解析解

光学的厚さ τ^* における大気温度 T , 地表面温度 T_s の解析解は,

$$T = \left(\frac{1}{2\sigma} (1 - A) F_0 (\tau^* + 1) \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.51)$$

$$T_s = \left(\frac{1}{2\sigma} (1 - A) F_0 (\tau_s^* + 2) \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.55)$$

である.

4.2.1 結果

吸収気体のスケールハイト H_{ab} を 8 km とする. 吸収係数が k_1, k_2, k_3 のとき, 温度の高度分布の解析解は図 4.1 のようになる.

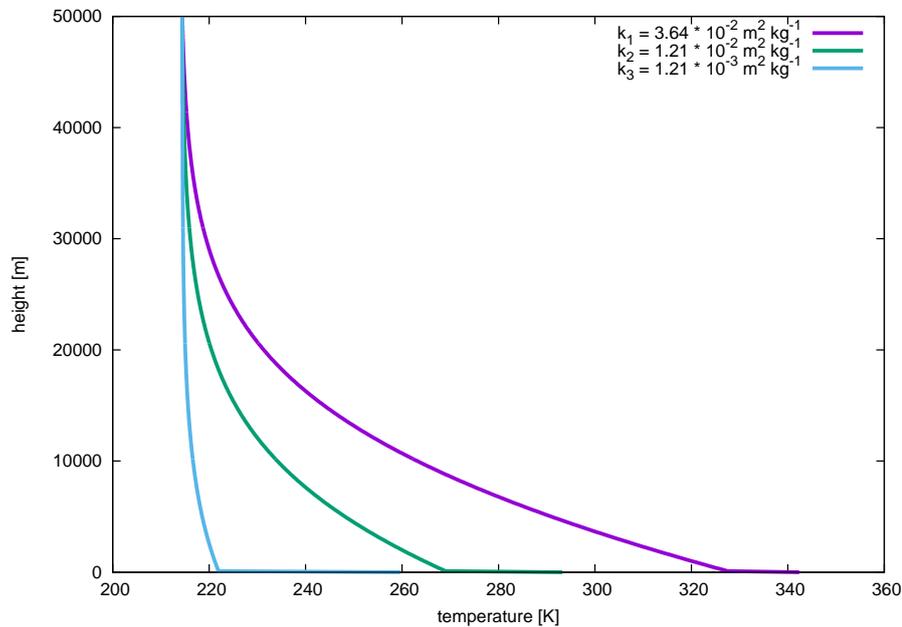


図 4.1: 解析解 (3.51), (3.55). 吸収気体のスケールハイト $H_{ab} = 8$ km. 紫色, 緑色, 水色の線はそれぞれ吸収係数 k_1, k_2, k_3 の解析解を表す.

下層ほど温度勾配が大きく、上層ではほぼ等温層となる。また、吸収係数が大きいほど温度が高い。

つぎに、吸収気体の地表面における密度は変化させずに、スケールハイト H_{ab} を 2 km にして同様に解析解を求める。吸収係数が k_1, k_2, k_3 のとき、温度の高度分布の解析解は図 4.2 のようになる。

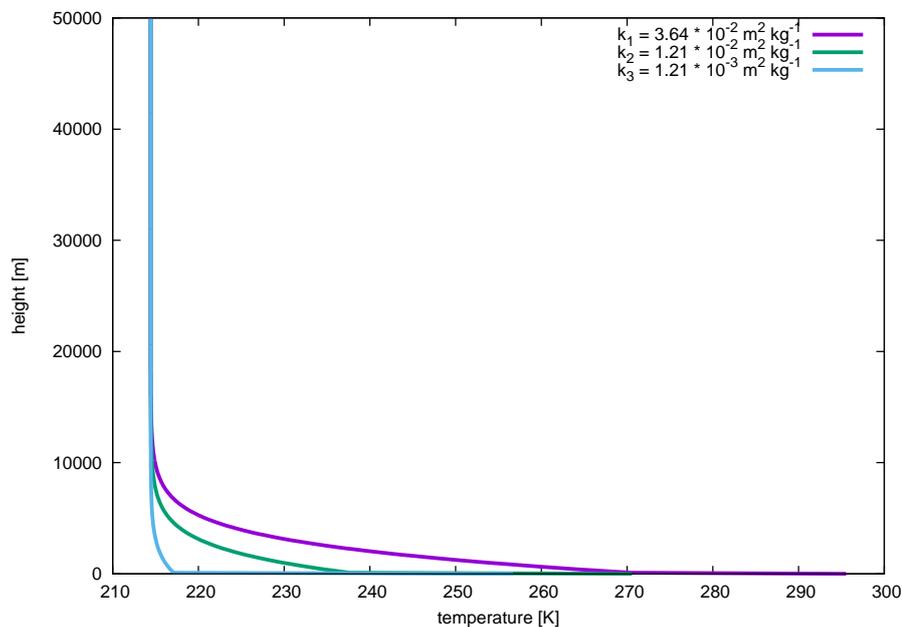


図 4.2: 解析解 (3.51), (3.55). 吸収気体のスケールハイト $H_{ab} = 2$ km. 紫色, 緑色, 水色の線はそれぞれ吸収係数 k_1, k_2, k_3 の解析解を表す。

吸収気体のスケールハイト H_{ab} を小さくすると、等温層下端の高度が低くなる。また、地表面温度および下層の気温は低くなる。

4.2.2 考察

図 4.1 より、下層ほど温度勾配が大きく、上層ではほぼ等温層となっていることが読み取れる。上層の等温層は、成層圏の存在を示唆している。また、吸収係数が大きいほど温度が高い。これは、2.4.2 で説明した温室効果である。

そして図 4.2 より、吸収気体の地表面における密度は変化させずに、スケールハ

イト H_{ab} を小さくすると, 大気層全体における吸収気体の全量は少なくなり, 同高度での光学的厚さが小さくなるので, 気層の温度および地表面温度は低下する.

4.3 数値解

次に, 数値解を求める.

鉛直座標 z は p による重み付けをしておく^{*3}.

$$z_{k-\frac{1}{2}} = -H \ln \left(1 - \frac{(k - \frac{1}{2}) - 1}{n} \right) \quad (4.1)$$

上向き・下向き放射フラックスは以下の式を用いて求める^{*4}.

$$\begin{cases} F_{k+\frac{1}{2}}^{\uparrow} = F_{k-\frac{1}{2}}^{\uparrow} \exp\{-\Delta\tau_k\} + \sigma T_k^4 \exp\{-\Delta\tau_k\} \Delta\tau_k \\ \Delta\tau_k = \tau_{k-\frac{1}{2}} - \tau_{k+\frac{1}{2}} \\ F_{\frac{1}{2}}^{\uparrow} = \sigma T_s^4 \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} F_{k-\frac{1}{2}}^{\downarrow} = F_{k+\frac{1}{2}}^{\downarrow} \exp\{-\Delta\tau_k\} + \sigma T_k^4 \exp\{-\Delta\tau_k\} \Delta\tau_k \\ \Delta\tau_k = \tau_{k-\frac{1}{2}} - \tau_{k+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (4.3)$$

放射加熱率は

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{c_p \rho} \frac{\Delta F^{\text{net}}(z)}{\Delta z} \quad (3.35)$$

であり, それぞれの時間ステップでの気層の温度変化は

$$T^{(n+1)} = T^{(n)} + \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t \quad (3.36)$$

を用いて求める. n は任意の時間ステップである. 以上の過程を繰り返すことにより, 放射平衡状態の温度分布を求める. 吸収気体のスケールハイト H_{ab} は 8 km とする.

4.3.1 結果

吸収係数が k_1, k_2, k_3 のとき, 温度の高度分布の数値解は図 4.3 のようになる.

^{*3}付録 B 参照.

^{*4}付録 C 参照.

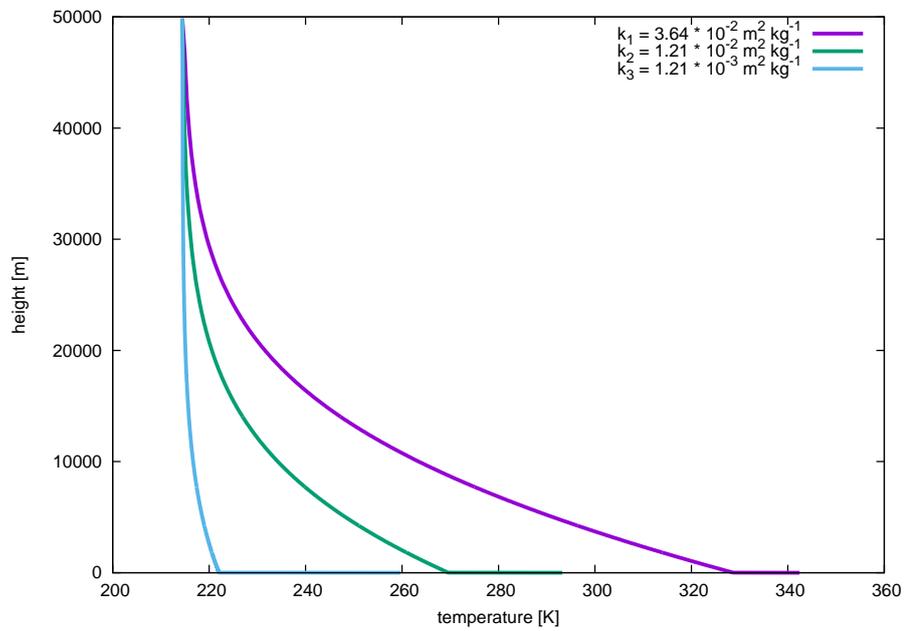


図 4.3: 数値解. 紫色, 緑色, 水色の線はそれぞれ吸収係数が k_1, k_2, k_3 の数値解を表す.

p による z の重み付けにより, 最上層の下端が約 49717 m になり, 最上層の中心が約 49858 m であるため, グラフの上端が 50000 m ではなく約 49858 m で途切れている.

初期温度を 300 K としたとき, 平衡状態 (大気上端と下端の放射フラックスの差 $\delta = 0.01$ 以下) に達するまでにかかった時間は k_1 のとき 250 日, k_2 のとき 368 日, k_3 のとき 1585 日である.

次に数値解と解析解を比較する. 地表面温度の値, 最上層温度の値を表 4.3.2, 表 4.3.3 に示す.

表 4.3.2: 地表面温度 [K] の比較.

	k_1	k_2	k_3
解析解	342.4	293.2	259.6
数値解	342.4	293.2	259.6

表 4.3.3: 最上層温度 [K] の比較. 最上層の高度は 49858 m.

	k_1	k_2	k_3
解析解	214.4	214.4	214.4
数値解	214.4	214.4	214.5

横軸を温度, 縦軸を高度として, 吸収係数が k_1, k_2, k_3 の数値解と解析解を比較したグラフを図 4.4 に示す. 横軸を黒体放射フラックス πB で表示した温度, 縦軸を光学的厚さとして, 同様に数値解と解析解を比較したグラフを図 4.5 に示す.

表 4.3.2, 表 4.3.3, 図 4.4, 図 4.5 より, 高度によらず数値解のほうが解析解よりも温度がわずかに高く, 吸収係数が大きいほどそのずれは大きいが, その差は, おおむね 1 K 以下であることが読み取れる.

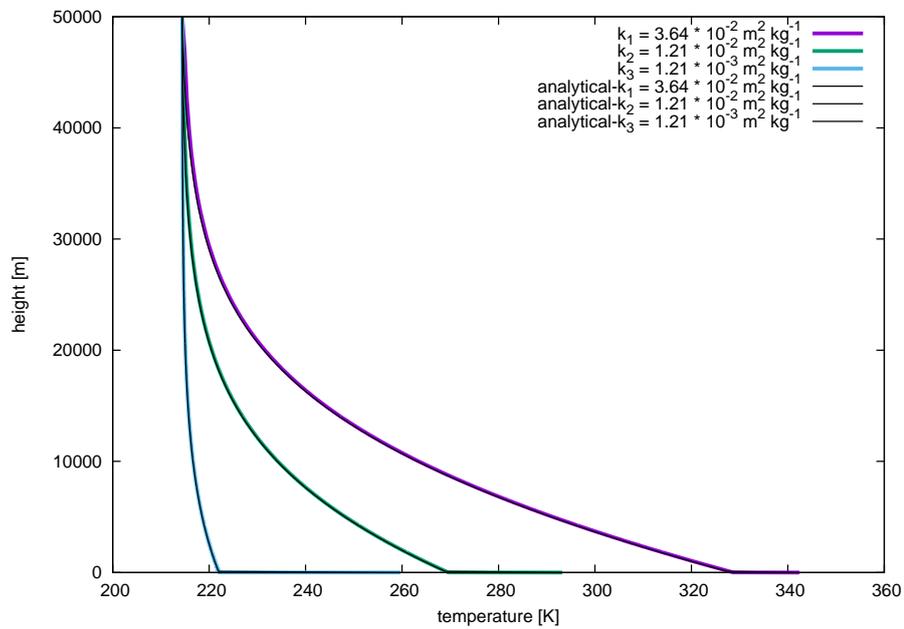


図 4.4: 数値解と解析解の比較. 紫色, 緑色, 水色の線はそれぞれ吸収係数が k_1, k_2, k_3 の数値解を表す. 黒色の線は解析解を表す.

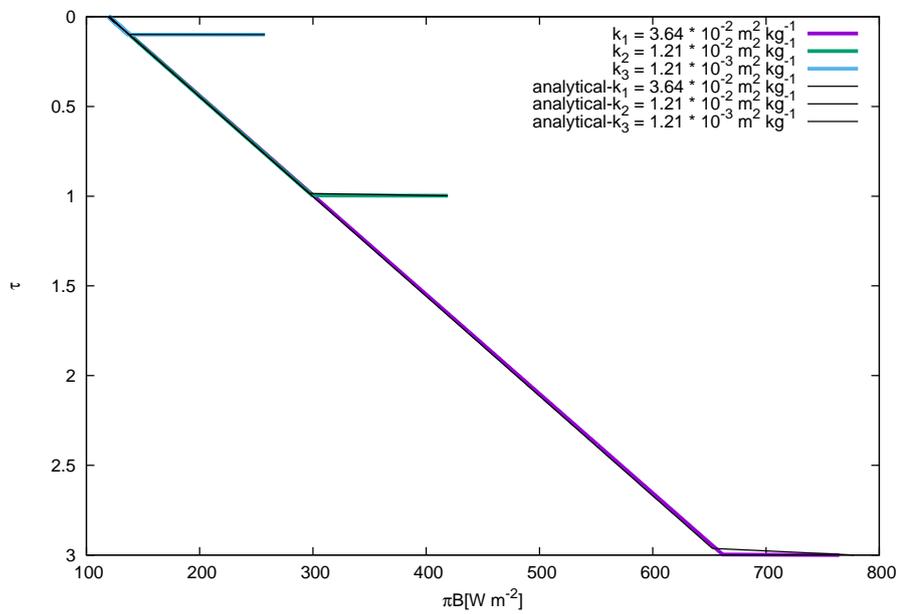


図 4.5: 数値解と解析解の比較. 縦軸は光学の厚さ τ , 横軸は黒体放射フラックス πB で表示した温度. 紫色, 緑色, 水色の線はそれぞれ吸収係数が k_1, k_2, k_3 の数値解を表す. 黒色の線は解析解を表す.

次に、初期温度を 170 K, 360 K とし解析解と数値計算開始後 0 日, 10 日, 20 日, 40 日, 80 日, 160 日, 320 日, 640 日, 1280 日における数値解をそれぞれ出力する。

これらの図から、吸収係数の大きさによって温度変化の速さが異なることが読み取れる。吸収係数が大きいほど、速く温度変化する。

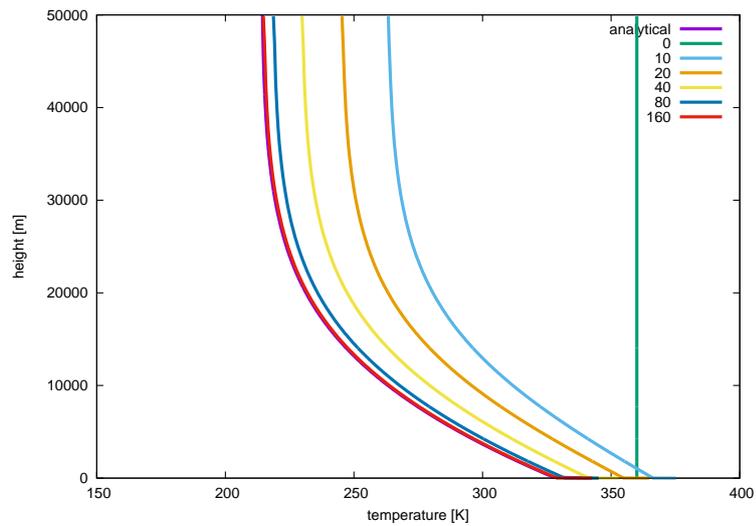


図 4.6: 解析解と数値計算開始後 0 日, 10 日, 20 日, 40 日, 80 日, 160 日における数値解. 初期温度 360 K. 吸収係数 $k_1 = 3.64 \times 10^{-2} \text{m}^2 \text{kg}^{-1}$.

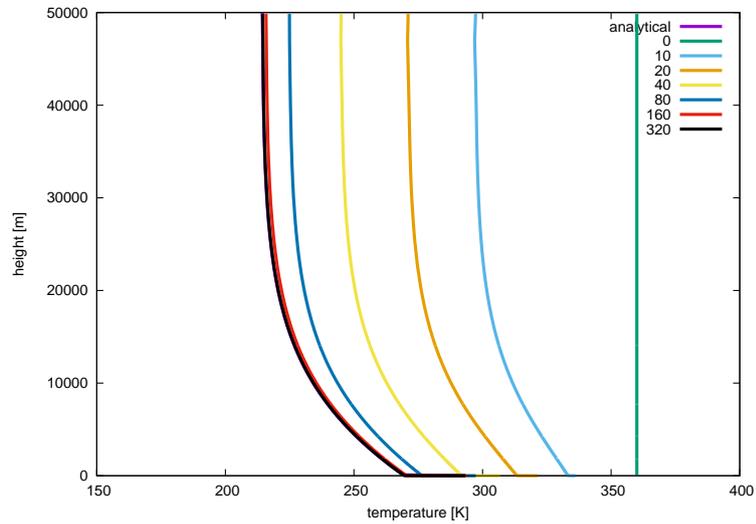


図 4.7: 解析解と数値計算開始後 0 日, 10 日, 20 日, 40 日, 80 日, 160 日, 320 日における数値解. 初期温度 360 K. 吸収係数 $k_2 = 1.21 \times 10^{-2} \text{m}^2 \text{kg}^{-1}$.

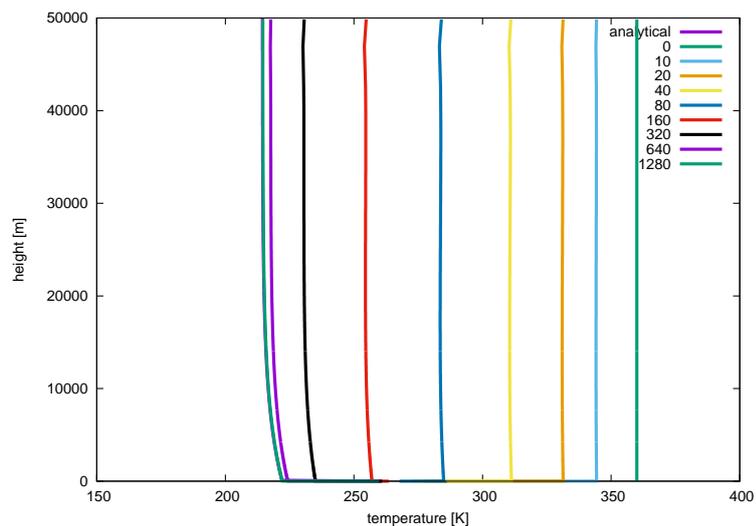


図 4.8: 解析解と数値計算開始後 0 日, 10 日, 20 日, 40 日, 80 日, 160 日, 320 日, 640 日, 1280 日における数値解. 初期温度 360 K. 吸収係数 $k_3 = 1.21 \times 10^{-3} \text{m}^2 \text{kg}^{-1}$.

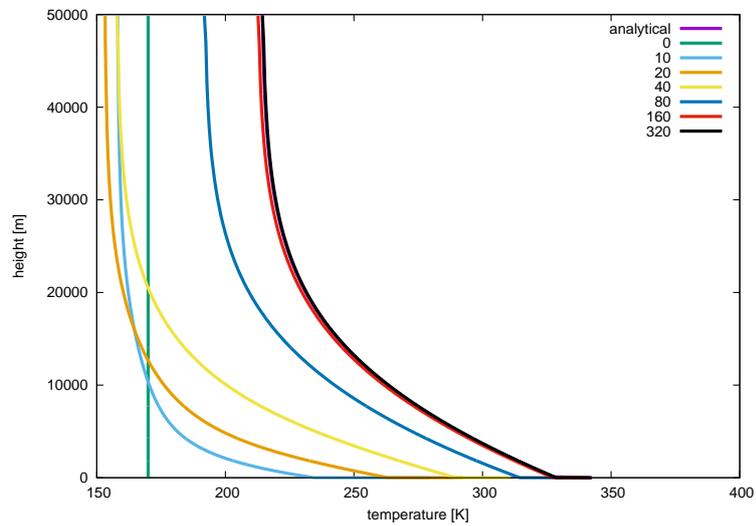


図 4.9: 解析解と数値計算開始後 0 日, 10 日, 20 日, 40 日, 80 日, 160 日, 320 日における数値解. 初期温度 170 K. 吸収係数 $k_1 = 3.64 \times 10^{-2} \text{m}^2 \text{kg}^{-1}$.

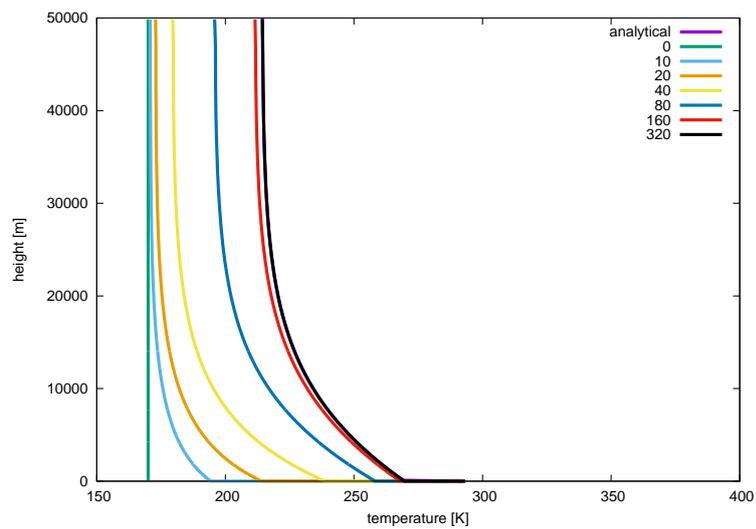


図 4.10: 解析解と数値計算開始後 0 日, 10 日, 20 日, 40 日, 80 日, 160 日, 320 日における数値解. 初期温度 170 K. 吸収係数 $k_2 = 1.21 \times 10^{-2} \text{m}^2 \text{kg}^{-1}$.

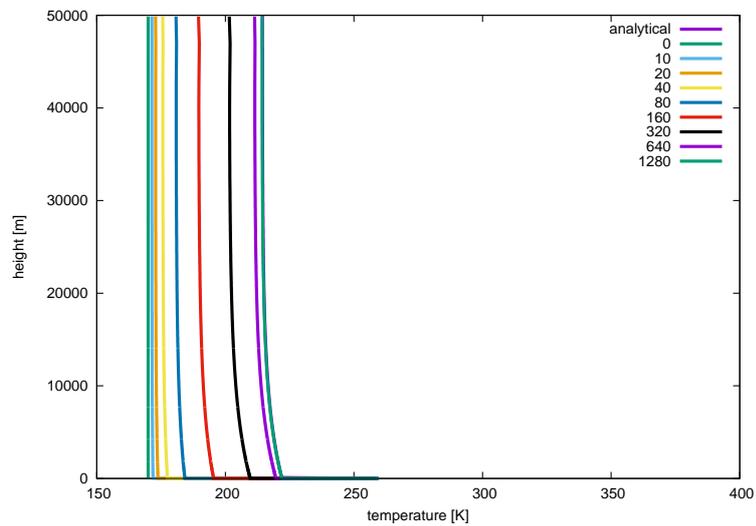


図 4.11: 解析解と数値計算開始後 0 日, 10 日, 20 日, 40 日, 80 日, 160 日, 320 日, 640 日, 1280 日における数値解 初期温度 170 K. 吸収係数 $k_3 = 1.21 \times 10^{-3} \text{m}^2 \text{kg}^{-1}$.

最上層温度の時間変化および地表面温度の時間変化のグラフを出力する。

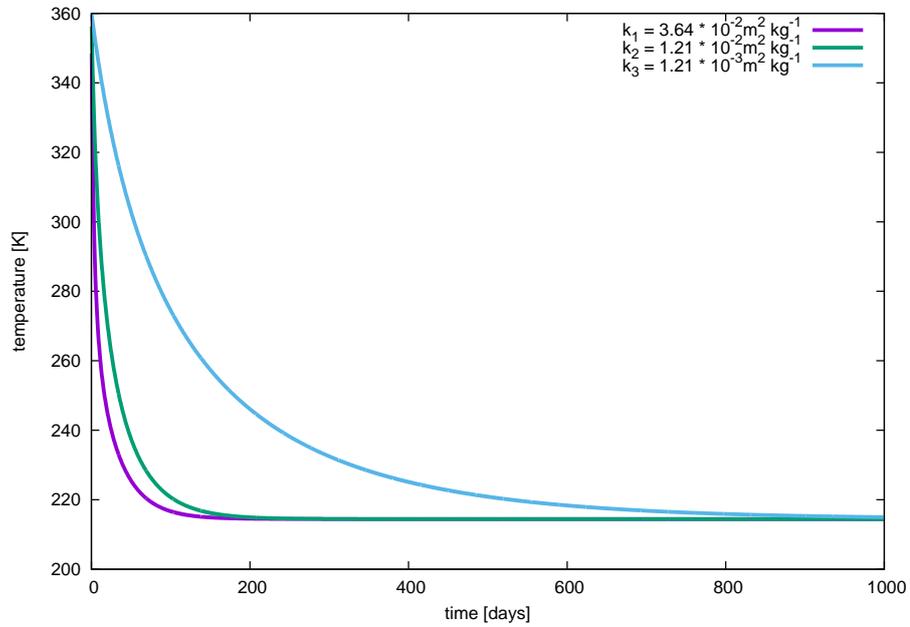


図 4.12: 最上層温度の時間経過. 初期温度 360 K.

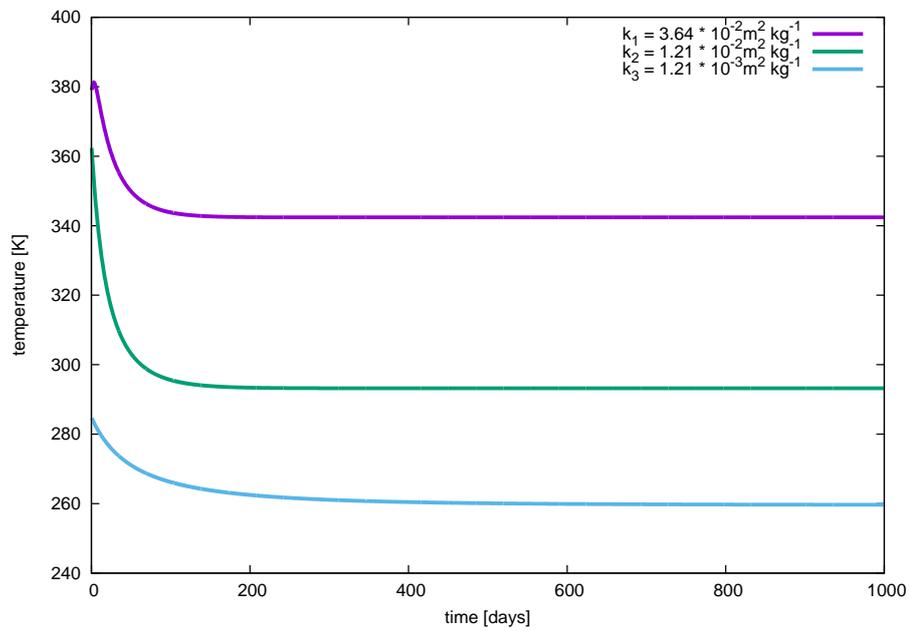


図 4.13: 地表面温度の時間経過. 初期温度 360 K.

最上層における温度変化 $\partial T / \partial t$ の収束過程を, 吸収係数を変化させて比較する. 初期温度は 360 K である.

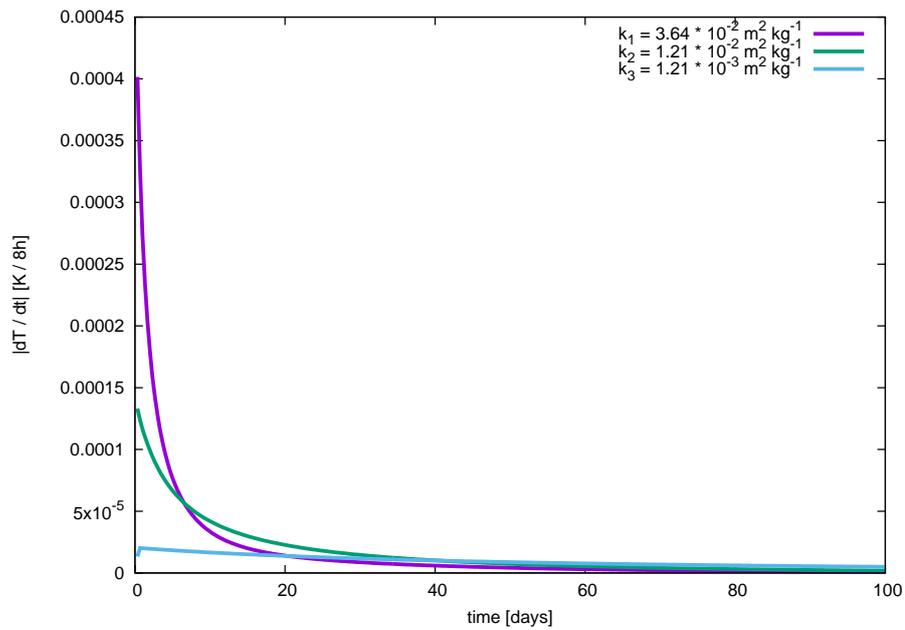


図 4.14: 最上層における $|\partial T / \partial t|$ の時間経過. 初期温度 360 K.

やはり, 吸収係数は大きいほど, 速く温度変化する. また, 時間が経つにつれ, 温度の変化は小さくなる.

4.3.2 考察

図 4.4, 図 4.5 より, 高度によらず, 数値解のほうが解析解よりも温度がわずかに高く, 吸収係数が大きいほどその温度差は大きい. しかし, そのずれはおおむね 1 K 以下と十分に小さく, これらの数値解は十分に正確である.

図 4.6~図 4.11 では, 初期温度 360 K, 170 K とともに数値計算結果が解析解に収束していくこと, そして時間が経つほど温度が変化しにくくなることが読み取れる. また, 吸収係数が大きいほど速く解析解と一致する.

図 4.12~図 4.14 より, 時間の経過にともなって, 温度変化が小さくなること, また, 吸収係数が大きいほど, 初期に大きく温度変化し, 短時間で平衡状態に達することが読み取れる. これは吸収係数が大きいほど, $|\partial T/\partial t|$ が大きくなるため, 平衡温度に速く達するからである.

第5章 結論

本研究では, 灰色大気の放射平衡温度分布はどのような形になっているのか, またその分布はどのように決まるのかを検証した.

まず平行平面大気の放射伝達方程式を導出し, 灰色大気の放射平衡温度分布の解析解を求めた. 放射平衡温度分布は, 下層ほど温度勾配が大きく, 上層ではほぼ等温層となる. 上層の等温層は, 成層圏の存在を示唆している. また, 吸収係数が大きいほど温度が高い. これは, 温室効果である.

その後, 放射フラックスの式を離散化し, わずかな誤差はあるものの, 解析解とほぼ同様の結果が, 数値計算によって得られることを確認した.

また, 数値計算によって, 吸収係数と平衡状態に達するまでの過程の関係を調べた. 吸収係数が大きいほど, 平衡状態に達するまでに時間がかからないことが分かった. これは吸収係数が大きいほど, 放射加熱率の大きさ $|\partial T/\partial t|$ が大きくなるため, 平衡温度に速く達するからである.

謝辞

本論文の作成に際して, 多くの方々にご指導とご協力を頂きました. 林 祥介教授には研究内容の指針を示して頂き, 高橋 芳幸准教授には, 研究全体にわたってご指導頂きました. 河合 佑太氏には研究の進め方などに関して様々な助言を頂きました. 岡崎 正悟氏, 村上 美雪氏には論文全体にわたって助言をいただきました. そして, 地球および惑星大気科学研究所の皆さまには多くのお力添えと励ましを頂きました. ここに深く感謝し, 心よりお礼申し上げます.

付録 A : ステファン・ボルツマンの法則の導出

ステファン・ボルツマンの法則の導出を行なう。黒体面から射出される放射輝度を全波長にわたって積分した値 $\mathbf{B}(T)$ は、プランク関数を波長範囲 $0 \sim \infty$ にわたって積分して、

$$\mathbf{B}(T) = \int_0^\infty B_\lambda(T) d\lambda = \int_0^\infty \frac{2hc^2 d\lambda}{\lambda^5 \{\exp(hc/\kappa_B \lambda T) - 1\}} \quad (\text{A.1})$$

となる。ここで、 $x = hc/\kappa_B \lambda T$ とおけば、

$$\mathbf{B}(T) = \frac{2\kappa_B^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{(e^x - 1)} \quad (\text{A.2})$$

となる。右辺の積分は

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{(e^x - 1)} &= \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x (1 - e^{-x})} \\ &= \int_0^\infty x^3 [e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-nx} + \dots] dx \\ &= 6 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} \\ &= \frac{\pi^4}{15} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

であるので、 $b = 2\pi^4 \kappa_B^4 / 15c^2 h^3$ とおくと、

$$\mathbf{B}(T) = bT^4 \quad (\text{A.4})$$

となる。また黒体放射は等方的であるから、全波長で積分した放射フラックス \mathbf{F} は

$$\mathbf{F} = \pi \mathbf{B} = \sigma T^4 \quad (\text{A.5})$$

となる。ここで、

$$\sigma = \frac{2\pi^5 \kappa_B^4}{15c^2 h^3} \simeq 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \quad (\text{A.6})$$

がステファン・ボルツマン定数である。

付録 B : p による z の重みづけ

数値計算を行なうとき, 図 5.1 のように, 大気層を鉛直方向に等しく分割すると, 分割数を 8000 程度まで上げないと, 精度の良い結果が得られないが, 圧力 p で重みをつけて大気層の分割を考えることによって, 分割数が 500 でも精度の良い結果が得られる. したがって, p による z の重みづけを考える.

はじめに,

$$p_{k-\frac{1}{2}} = p_s e^{-z_{k-\frac{1}{2}}/H} \quad (\text{B.1})$$

である. ここで $k = 1, \dots, n$ で, n は大気層の分割数, p_s は地表面気圧. よって

$$z_{k-\frac{1}{2}} = -H \ln \frac{p_{k-\frac{1}{2}}}{p_s} \quad (\text{B.2})$$

となる. また

$$p_{k-\frac{1}{2}} = p_s - \Delta p (k - 1) \quad (\text{B.3})$$

であり, ここで,

$$\Delta p (k - 1) = \frac{p_s}{n} (k - 1). \quad (\text{B.4})$$

したがって,

$$z_{k-\frac{1}{2}} = -H \ln \left(1 - \frac{k-1}{n} \right) \quad (\text{B.5})$$

として数値計算を行なう.

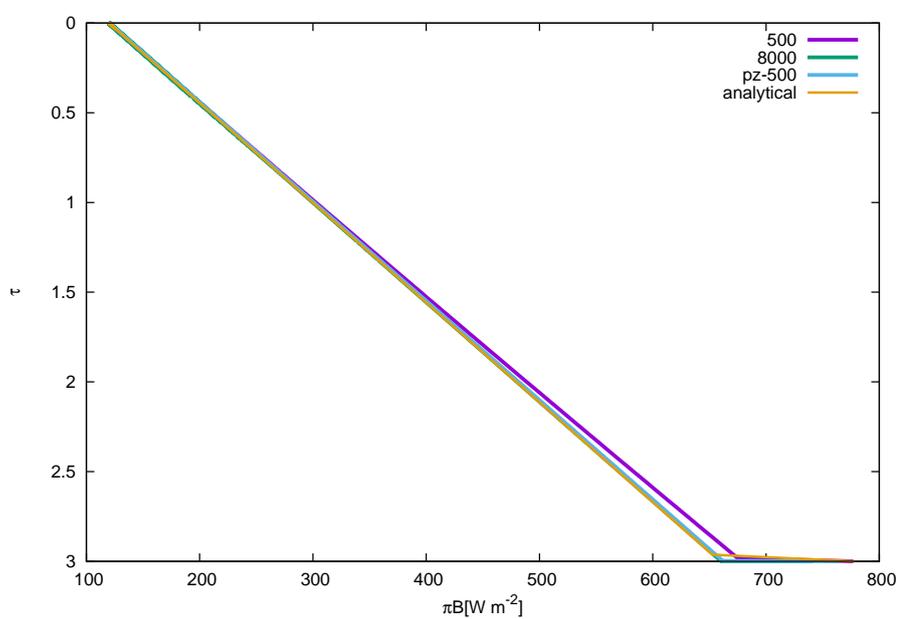


図 5.1: 縦軸は光学的厚さ τ , 横軸は黒体放射フラックス πB で表示した温度. 紫色, 緑色, 水色, 黄色の線はそれぞれ分割数 500 層の計算結果, 分割数 8000 層の計算結果, 重み付けをした分割数 500 層の計算結果, 解析値を示す. ただし, 吸収係数は $k_1 = 3.64 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$.

付録C：放射フラックスの式の離散化

数値実験に向けて、光学的厚さ τ^* での上向き・下向き放射フラックスの式

$$F^\uparrow(\tau^*) = F^\uparrow(\tau_s^*)e^{-(\tau_s^*-\tau^*)} + \int_{\tau^*}^{\tau_s^*} \pi B(t)e^{-(t-\tau^*)} dt, \quad (3.28)$$

$$F^\downarrow(\tau^*) = \int_0^{\tau^*} \pi B(t)e^{-(\tau^*-t)} dt \quad (3.32)$$

を離散化しておく。

$$\begin{aligned} F^\uparrow(\tau^*) &= F^\uparrow(\tau_s^*)e^{-(\tau_s^*-\tau^*)} + \int_{\tau^*}^{\tau_s^*} \pi B(t)e^{-(t-\tau^*)} dt \\ &= F^\uparrow(\tau_s^*)e^{-(\tau_s^*-\tau^*)} + \int_{\tau^*}^{\tau_s^*} \sigma\{T(t)\}^4 e^{-(t-\tau^*)} dt \\ &= F^\uparrow(\tau_s^*)e^{-(\tau_s^*-\tau_1^*)} e^{-(\tau_1^*-\tau^*)} + \int_{\tau_1^*}^{\tau_s^*} \sigma\{T(t)\}^4 e^{-(t-\tau^*)} e^{+(\tau_1^*-\tau^*)} e^{-(\tau_1^*-\tau^*)} dt \\ &\quad + \int_{\tau^*}^{\tau_1^*} \sigma\{T(t)\}^4 e^{-(t-\tau^*)} dt \\ &= \left\{ F^\uparrow(\tau_s^*)e^{-(\tau_s^*-\tau_1^*)} + \int_{\tau_1^*}^{\tau_s^*} \sigma\{T(t)\}^4 e^{-(t-\tau_1^*)} dt \right\} e^{-(\tau_1^*-\tau^*)} \\ &\quad + \int_{\tau^*}^{\tau_1^*} \sigma\{T(t)\}^4 e^{-(t-\tau^*)} dt \\ &= F^\uparrow(\tau_1^*)e^{-(\tau_1^*-\tau^*)} + \int_{\tau^*}^{\tau_1^*} \sigma\{T(t)\}^4 e^{-(t-\tau^*)} dt \end{aligned} \quad (C.1)$$

したがって、

$$\begin{cases} F_{k+\frac{1}{2}}^\uparrow = F_{k-\frac{1}{2}}^\uparrow \exp\{-\Delta\tau_k\} + \sigma T_k^4 \exp\{-\Delta\tau_k\} \Delta\tau_k \\ \Delta\tau_k = \tau_{k-\frac{1}{2}} - \tau_{k+\frac{1}{2}} \\ F_{\frac{1}{2}}^\uparrow = \sigma T_s^4 \end{cases} \quad (C.2)$$

$$\begin{aligned}
F^\downarrow(\tau^*) &= \int_0^{\tau^*} \pi B(t) e^{-(\tau^*-t)} dt \\
&= \int_0^{\tau^*} \sigma \{T(t)\}^4 e^{-(\tau^*-t)} dt \\
&= \int_{\tau_1^*}^{\tau^*} \sigma \{T(t)\}^4 e^{-(\tau^*-\tau_1^*)} e^{-(\tau_1^*-t)} dt + \int_0^{\tau_1^*} \sigma \{T(t)\}^4 e^{-(\tau^*-\tau_1^*)} e^{-(\tau_1^*-t)} dt \\
&= e^{-(\tau^*-\tau_1^*)} \int_{\tau_1^*}^{\tau^*} \sigma \{T(t)\}^4 e^{-(\tau_1^*-t)} dt + e^{-(\tau^*-\tau_1^*)} \int_0^{\tau_1^*} \sigma \{T(t)\}^4 e^{-(\tau_1^*-t)} dt \\
&= e^{-(\tau^*-\tau_1^*)} \int_{\tau_1^*}^{\tau^*} \sigma \{T(t)\}^4 e^{-(\tau_1^*-t)} dt + e^{-(\tau^*-\tau_1^*)} F^\downarrow(\tau_1^*)
\end{aligned} \tag{C.3}$$

したがって,

$$\begin{cases} F_{k-\frac{1}{2}}^\downarrow = F_{k+\frac{1}{2}}^\downarrow \exp\{-\Delta\tau_k\} + \sigma T_k^4 \exp\{-\Delta\tau_k\} \Delta\tau_k \\ \Delta\tau_k = \tau_{k-\frac{1}{2}} - \tau_{k+\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{C.4}$$

参考文献

- 会田勝, 1982: 気象学のプロムナード 8 大気と放射過程-大気の熱源と放射収支を探る-, 東京堂出版, 280pp.
- 浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎, 朝倉書店, 267pp.
- 小倉義光, 1999: 一般気象学 [第2版], 東京大学出版会, 308pp.
- 里村雄彦, 2010: 物理気候学講義ノート, 京都大学, 115pp.
- 柴田清孝, 1999: 応用気象学シリーズ (1) 光の気象学, 朝倉書店, 182pp.
- 倉本圭, 2015: 地球惑星科学 II 第2回 講義ノート, 北海道大学, 5pp.
- 国立天文台 編, 2015: 理科年表, 丸善出版, 1098pp.
- NASA, 1976: U. S. Standard Atmosphere, 1976. U.S. Government Printing Office, Washington,D.C., 277pp.
- 小林 英貴, 2012: 1次元放射平衡モデルによる大気の鉛直温度構造の考察, 神戸大学卒業論文, 1-44.