

カルマン渦列の数値シミュレーション

地球および惑星大気科学研究室 石崎 溪

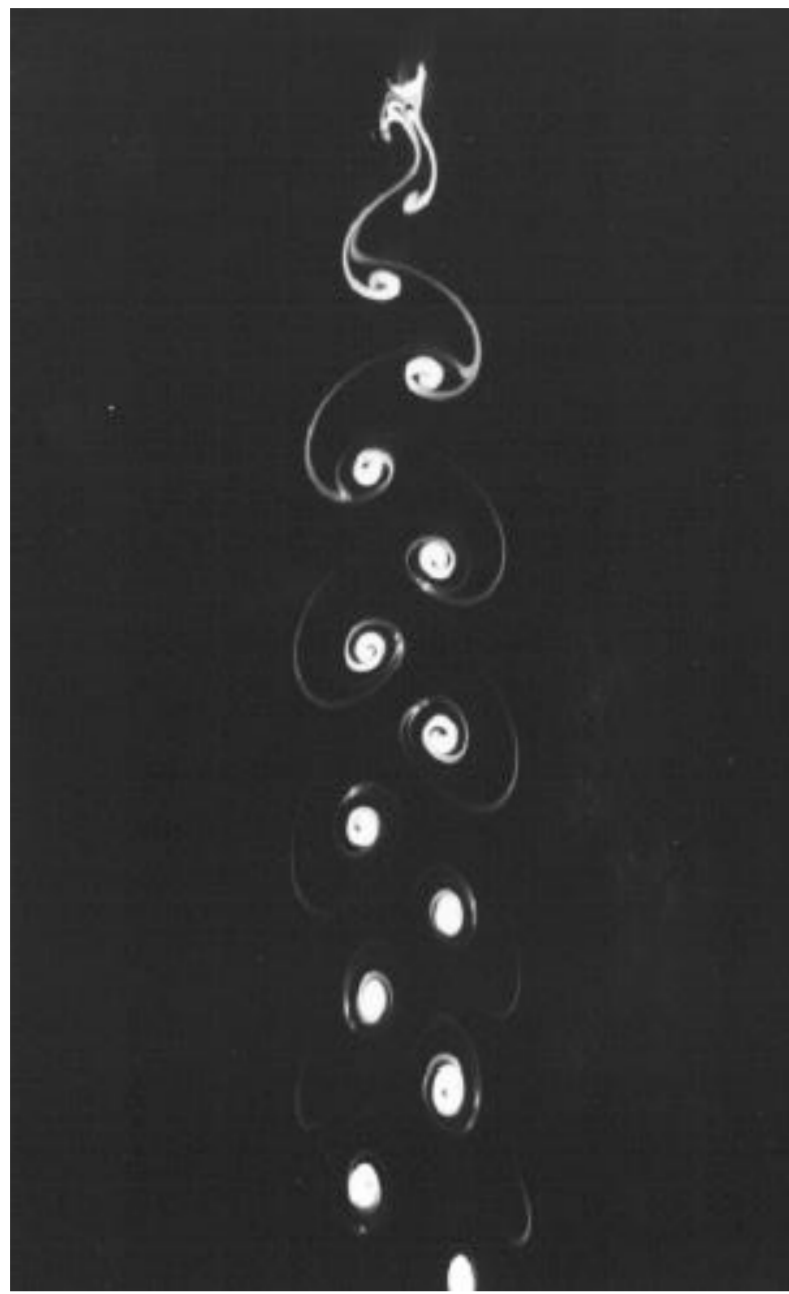


図 1: 実験室で観察される円柱後方のカルマン渦列, $Re=105$ の場合 (種子田, 1988)

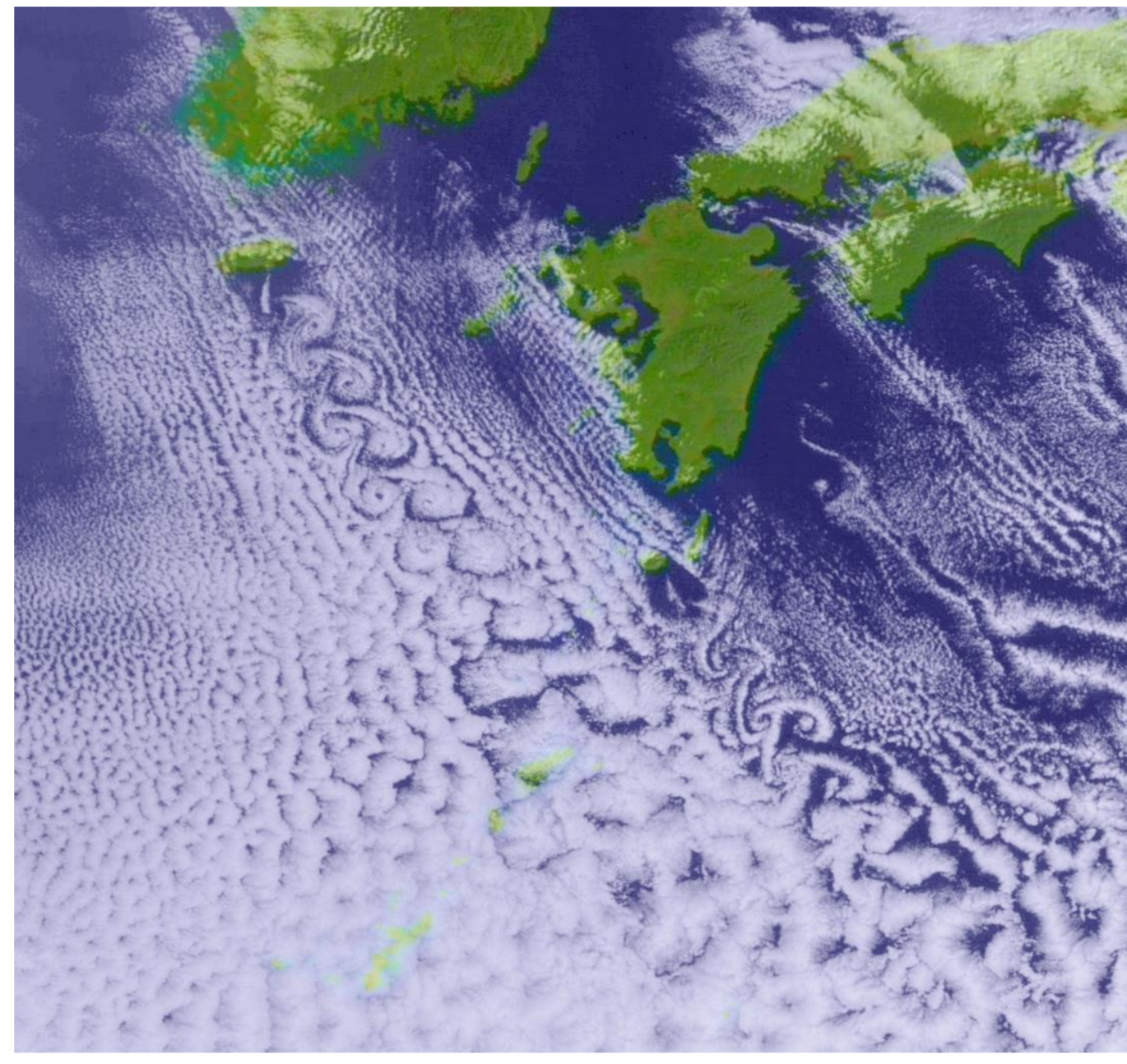


図 2: 2015 年 1 月 9 日 10 時 (日本時間) の ひまわり 7 号の可視画像 (高知大学気象情報員)

- 研究内容: 流体力学と数値計算法を学んで, 図 1 のような 2 次元流体中のカルマン渦列のシミュレーションを行った.
渦列幅と渦間隔の比, および, 流れが不安定になり始める臨界レイノルズ数について, 理論とシミュレーションの結果を比較した.
- カルマン渦列とは: 一様な流れの中に物体 (角柱など) を置いたときに下流側に交互にできる渦列のこと.
航空工学者, von. Kármán が 1911 年に初めて理論的に考察したのでこの名が付いた.
現実の大気では, 図 2 のような雲の渦列として観測される.

● 支配方程式 (無次元化された形)

● 渦度方程式: $\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \zeta$

● 渦度と流れ関数との関係式: $\zeta = \nabla^2 \varphi$

ζ : 渦度
 φ : 流れ関数
 Re : レイノルズ数

流れ関数 φ の定義: $u = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ 渦度 ζ の定義: $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$

● 数値計算法: 計算機で微分方程式は解けない. 差分により近似を行う.

- 空間差分: 中央差分法

例: $\frac{\partial \zeta}{\partial x} \cong \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_{i-1}}{2\Delta x}$

- 時間差分: Adams-Bashforth 法

例: $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = F(t)$ に対して
 $\zeta^{t+1} = \zeta^t + \left\{ \frac{3}{2} F(t) - \frac{1}{2} F(t - \Delta t) \right\} \Delta t$

- 渦度と流れ関数との関係式 (Poisson 方程式) の解法: Gauss-Seidel 法

● 問題設定: 流入口から一様流を流し, 障害物である正方角柱の下流側の流れ場に注目する.

- 流体: 2 次元非圧縮順圧流体
- 物理量: 流速 U と角柱一辺の長さ S を元に無次元化
- 一様流の流速: $U = 1$ ($u = 1, v = 0$)
- 正方角柱の一辺の長さ: $S = 1$
- 計算領域: 長さ $x = 40$, 幅 $y = 20$ の水路
- 正方角柱の中心の位置: $(x, y) = (10, 10)$
- 時間差分間隔: $\Delta t = 0.001$
- 格子点: x 方向に 401 個, y 方向に 201 個の格子点を等間隔 ($\Delta x = \Delta y = 0.1$) に水路に配置
- 流れ関数についての Poisson 方程式:
 - 計算の反復回数: 100 回
 - 打ち切り誤差: $|\Delta \varphi| \leq 10^{-5}$

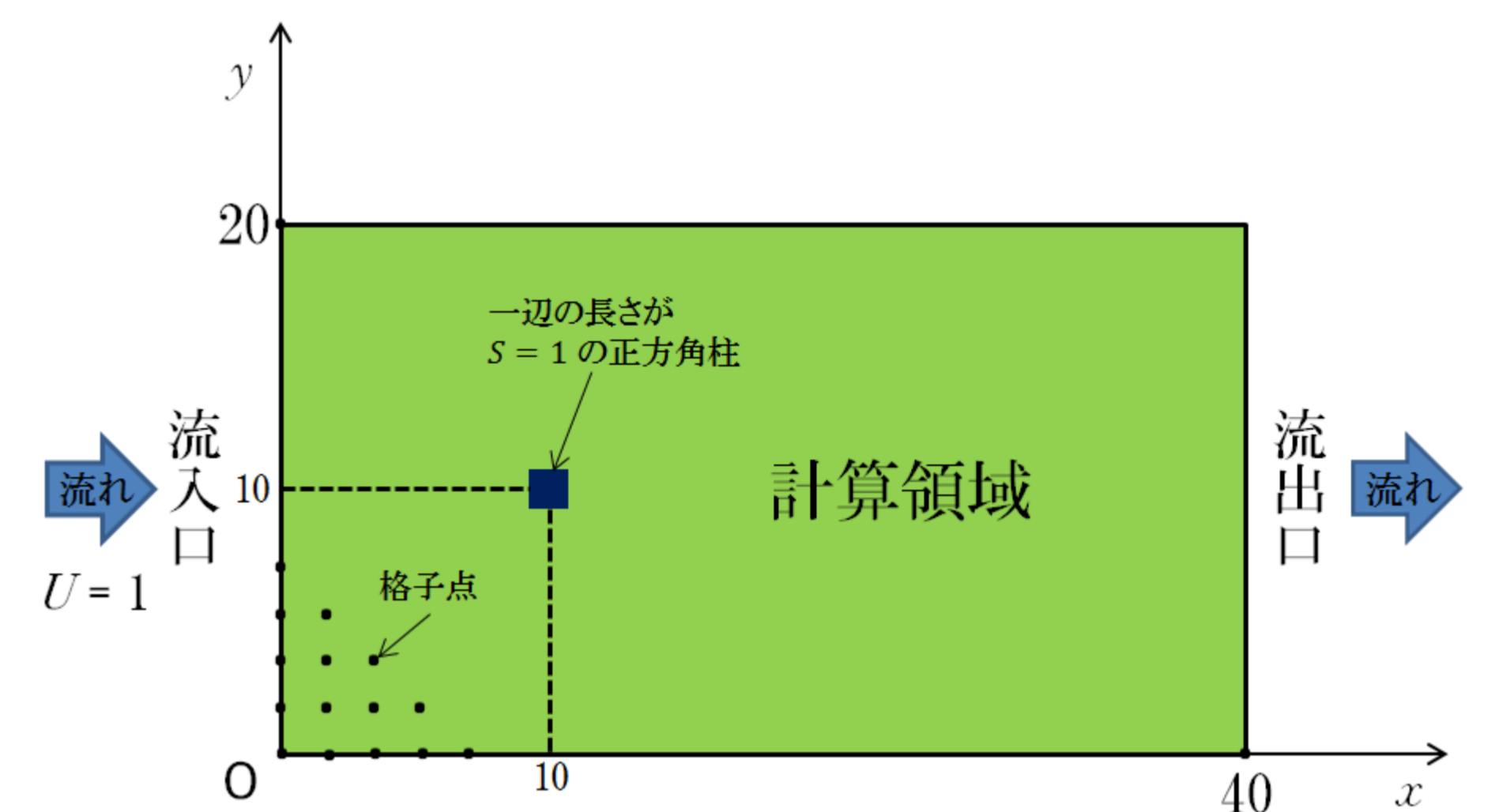
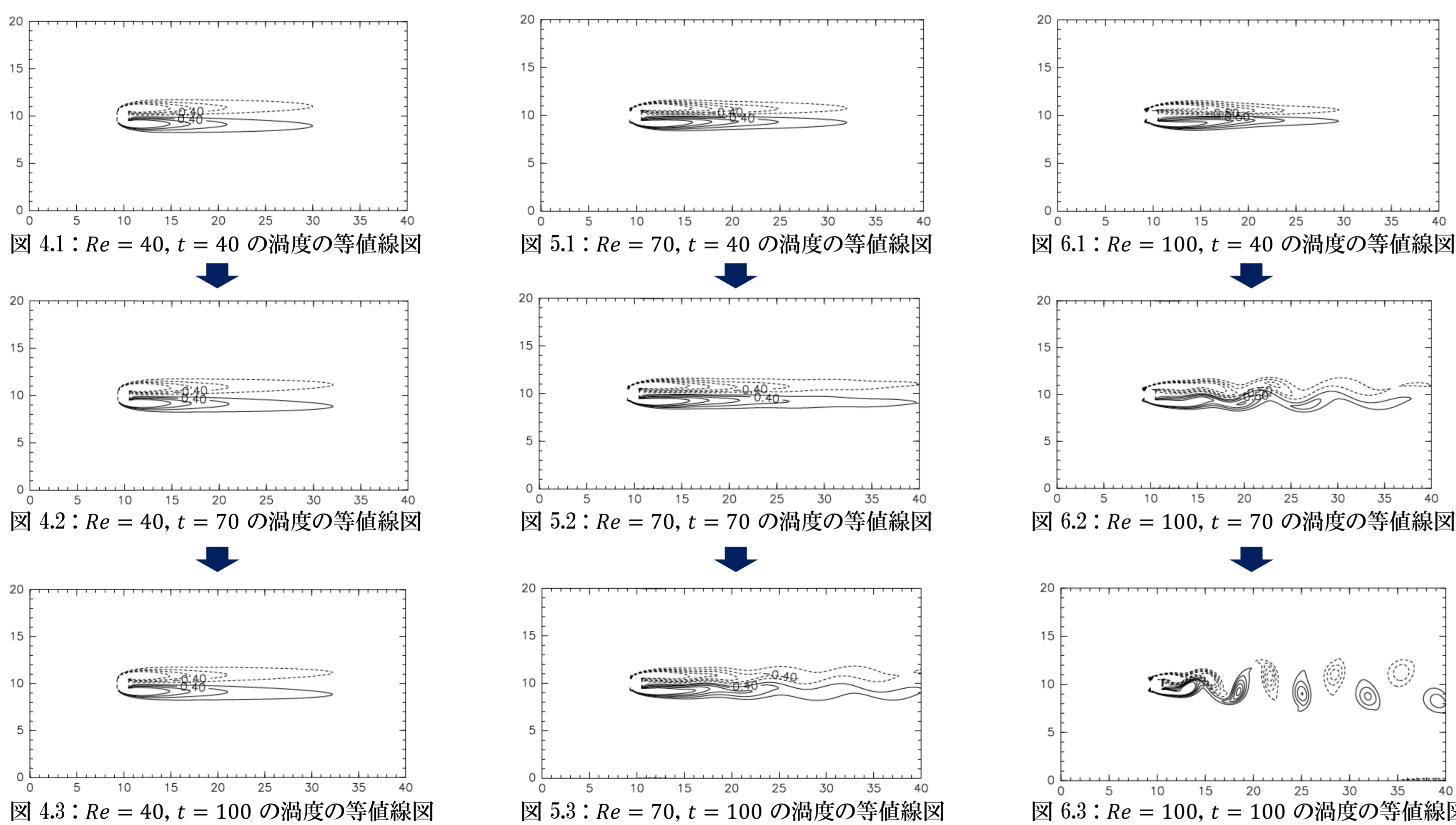


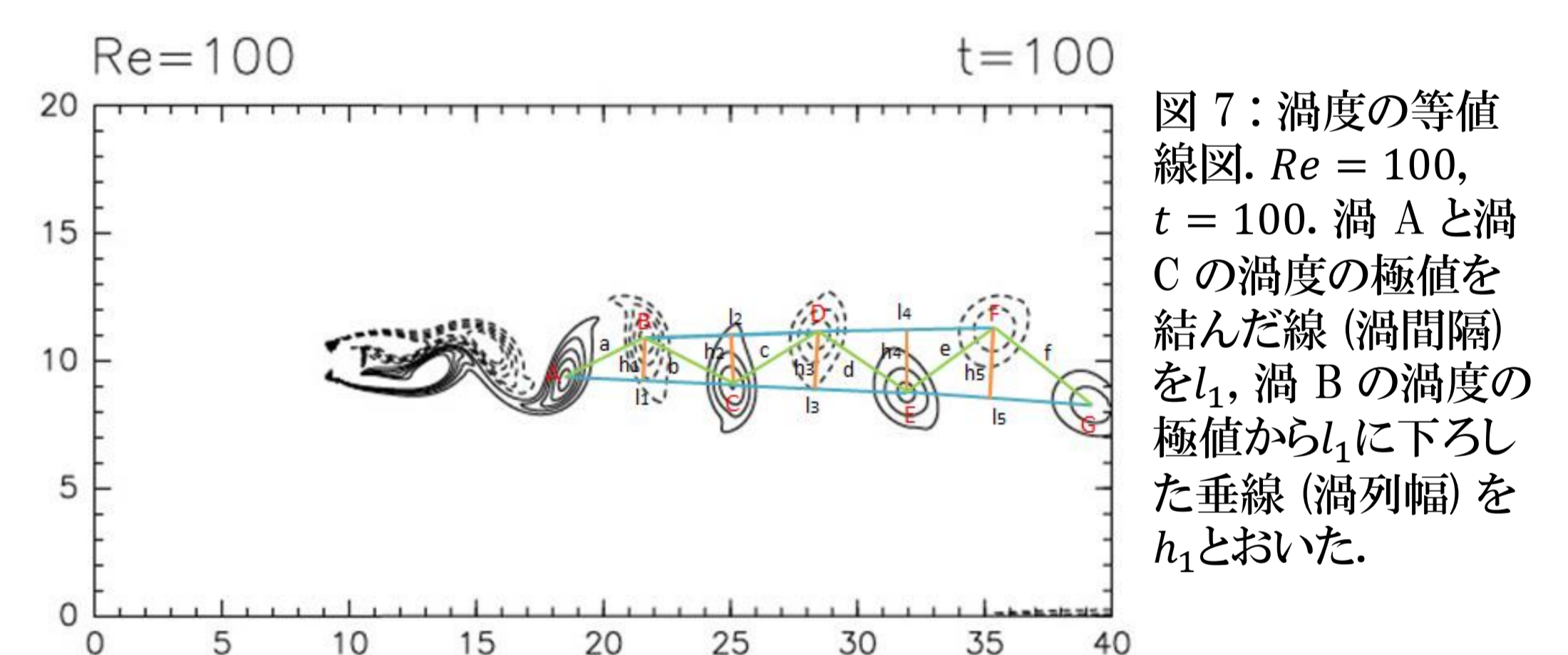
図 3: 流れ場の概要

● $Re = 40, 70, 100$ のシミュレーションの結果: 図 4 ~ 図 6



安定な流れで渦列は発生しない 不安定な流れだが, 渦列は発生しない カルマン渦列が発生

● 渦列幅と渦間隔の比について



解析結果 $\frac{h_1}{l_1} = 0.26$ $\frac{h_2}{l_2} = 0.29$ $\frac{h_3}{l_3} = 0.31$ $\frac{h_4}{l_4} = 0.35$ $\frac{h_5}{l_5} = 0.50$

Kármán (1911) によると点渦の渦列幅 h と渦間隔 l の比が

$\frac{h}{l} = 0.28$ のとき点渦列は規則的に並び, 安定である.

本実験での h と l の比は理論値とほぼ一致している.

また, 一般的に知られている障害物から離れるにつれ, 渦が広がるカルマン渦列の特徴 (種子田, 1988) と一致している.

よって, シミュレーションの結果は信頼できるものである.

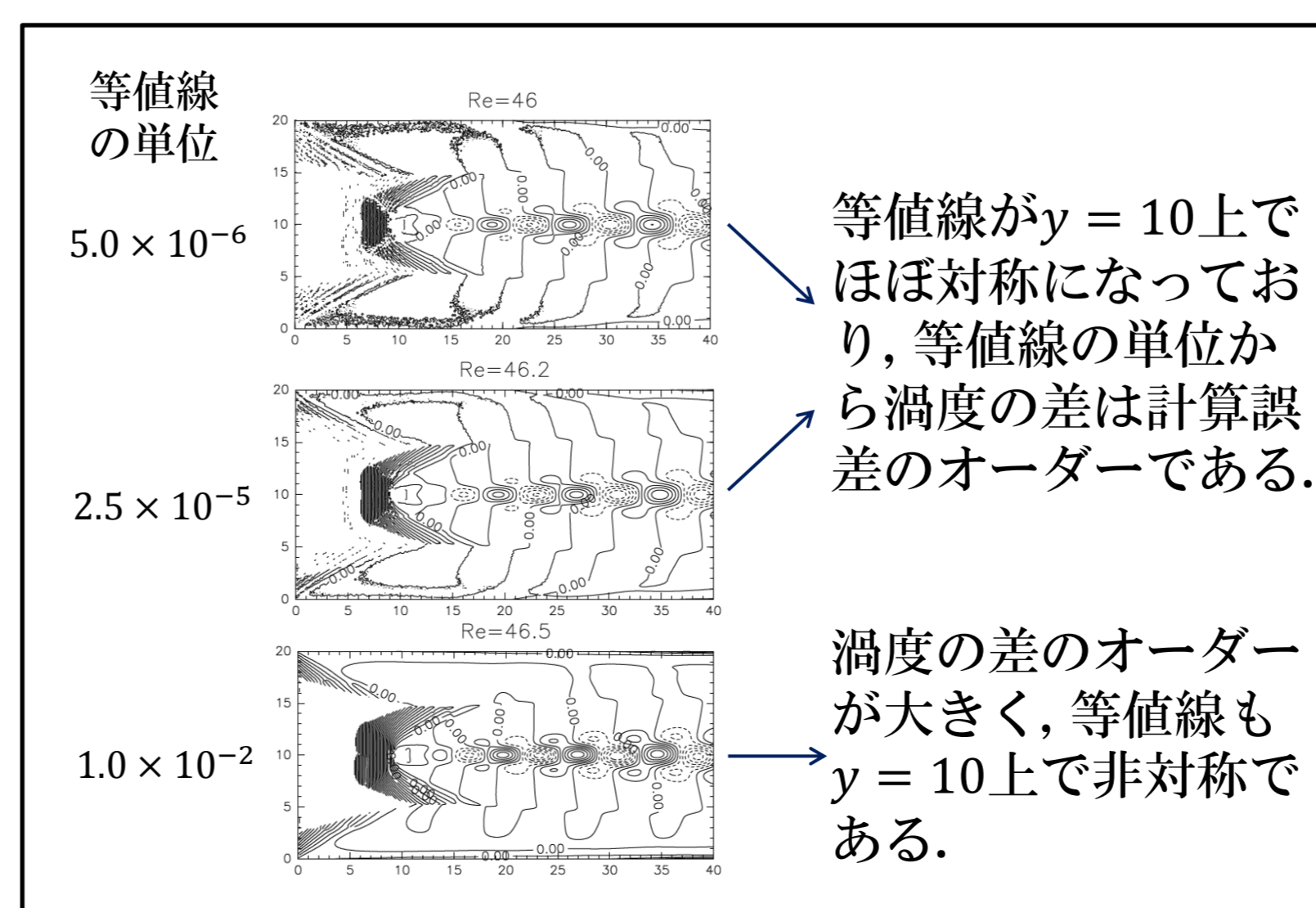
● 臨界レイノルズ数についての実験: 正方角柱の下流側の流れが不安定 (乱れる) になり始める臨界レイノルズ数を調べる.

水島, 武本 (2010) によると臨界レイノルズ数は $Re = 46.2$ である. そこで, 本実験で $Re = 46, 46.2, 46.5$ のときの流れの状態を調べる.

計算時間の十分長い $t = 2000$ における渦度場から $t = 100$ のそれとの偏差をとった. 偏差が大きければ, 流れは非定常で不安定であり, 偏差が非常に小さいならば, 流れは定常で安定である.

図 8 によると, $Re = 46$ と $Re = 46.2$ のときは偏差は非常に小さく, 流れは安定である. $Re = 46.5$ のときは偏差が大きく, 流れは不安定であると言える. よって, 臨界レイノルズ数は $46.2 < Re \leq 46.5$ の範囲に存在する.

この結果は水島, 武本 (2010) の臨界レイノルズ数の値にかなり近く, 本研究のシミュレーションが非常に精度の良いものであることも示している.



← 図 8: 計算時間 $t = 2000$ と $t = 100$ の渦度の等値線図

等値線が $y = 10$ 上でほぼ対称になっており, 等値線の単位から渦度の差は計算誤差のオーダーである.

渦度の差のオーダーが大きく, 等値線も $y = 10$ 上で非対称である.

→ 図 9: 渦度の等値線図. 上段, 中段, 下段はそれぞれ, $Re = 46, 46.2, 46.5$. 左と右はそれぞれ, $t = 100, 2000$.

