

鉛直 1 次元放射対流平衡モデルによる  
灰色大気の温度構造に関する考察

松田 幸樹

神戸大学理学部地球惑星科学科  
地球および惑星大気科学研究室

2016/03/25



## 要旨

地球大気の鉛直温度構造を決定する主な要因として、放射と対流を考えた。1次元放射平衡モデルを用いて数値計算を行い、放射平衡状態の灰色大気の温度構造を再現した。そして、1次元放射対流平衡モデルを用いて数値計算を行い、放射対流平衡状態の灰色大気の温度構造を再現し、考察を行った。その結果、大気の温度構造が放射と対流の影響を大きく受けていることが分かった。また、対流が起こる高度には、吸収係数が影響を与えていることが分かった。

# 目次

第1章	はじめに	4
第2章	放射の基本法則	6
2.1	放射の基本量	6
2.1.1	波長, 振動数, 波数の関係	6
2.1.2	立体角	7
2.1.3	放射輝度	7
2.1.4	放射フラックス	8
2.2	黒体放射の法則	8
2.2.1	プランクの法則	8
2.2.2	ウィーンの変位則	9
2.2.3	ステファン・ボルツマンの法則	9
2.2.4	キルヒホッフの法則	9
2.2.5	レイリー・ジーンズ近似	10
2.2.6	ウィーンの法則	11
2.2.7	輝度温度	11

---

第 3 章	放射伝達過程の定式化	12
3.1	放射伝達方程式	12
3.1.1	散乱位相関数	13
3.1.2	放射源関数	15
3.1.3	ビーア・ブーゲー・ランバートの法則	16
3.2	光学的厚さ	17
3.3	平行平面大気の近似	18
3.3.1	形式解	19
3.4	放射による気層の加熱冷却	21
3.5	灰色大気の放射平衡温度分布	21
3.6	放射対流平衡	24
第 4 章	鉛直 1 次元放射対流平衡モデル	26
4.1	支配方程式系	26
4.2	支配方程式の離散化	27
4.3	その他	30
第 5 章	放射平衡の数値計算	32
5.1	概要	32
5.2	計算設定	32
5.3	計算結果	33
5.4	考察	39

---

第 6 章 放射対流平衡の数値計算	40
6.1 概要 . . . . .	40
6.2 計算 1 . . . . .	40
6.2.1 計算結果 . . . . .	41
6.2.2 考察 . . . . .	45
6.3 計算 2 . . . . .	45
6.3.1 計算結果 . . . . .	45
6.3.2 考察 . . . . .	48
第 7 章 結論	49
付 録 A 地球の放射平衡温度の導出	51
付 録 B プランクの法則の各々の特性の導出	52
付 録 C ステファン・ボルツマンの法則の導出	54
付 録 D (4.7) の離散化	56
謝辞	58
参考文献	59

## 第1章 はじめに

地球の大気の鉛直温度構造は図 1.1 のようになっている。0 ~ 11 km の高度は対流圏と呼ばれ、大気の運動によって圏内の空気が上下によくかき混ぜられている。ここでは、気温減率は約  $6.5 \text{ K km}^{-1}$  である。11 ~ 50 km の高度は成層圏と呼ばれる。ここでは、高度とともに温度が増加しており、大気は安定している。50 ~ 80 km は中間圏と呼ばれ、中間圏より上空を熱圏という。地球大気の鉛直温度構造を理解できて初めて、あらゆる大気現象を理解できる。本論文では、様々な大気現象を理解する第一歩として対流圏の鉛直温度構造について考察する。しかし、現実の大気の運動は非常に複雑であるため、解析することは難しい。そこで、いくつかの近似を行いながら、大気の鉛直 1 次元温度構造を理解していくことを考える。本研究では、単純化した鉛直 1 次元放射対流モデルを作成し、そのモデルを用いて、太陽放射に対して透明で、地球放射の吸収気体として水蒸気のみを考えた大気について考察する。

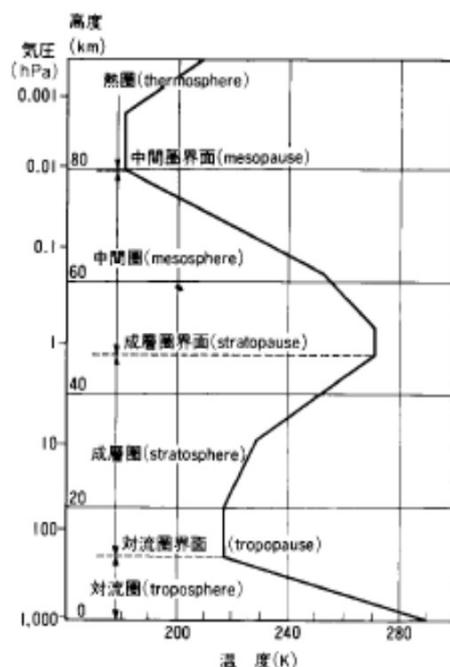


図 1.1: 温度の高度分布と大気層の区分 (小倉義光, 1984: 一般気象学)[3]

まず初めに, 解析的に解ける灰色大気の放射平衡温度構造を求め, 解析値と計算値の比較により, モデルを検証する. その後, 対流による影響を考慮した実験を行い, 放射と対流がどのように大気の温度決定に影響を与えるかを理解することを目的とする.

本論文の構成は以下の通りである. 2 章では放射に関する基本的な物理量や法則を示す. 3 章では放射伝達方程式を中心に, 様々な近似について説明する. 4 章では大気の温度構造を決定する数値計算の概要や計算結果を示し考察する. 5 章では結論を示す.

## 第2章 放射の基本法則

放射とは電磁波の総称である。また、電磁波はその波長によって領域別に、紫外線、可視光線、赤外線、マイクロ波等に分けられる。地球大気を考える上で特に重要な放射は、太陽により射出されるものと地表面や地球大気により射出されるものがあり、それぞれ太陽放射(短波放射)、地球放射(長波放射)と呼ばれている。

### 2.1 放射の基本量

放射に関する学習をする前に、最低限必要な基本的な量について考える。

#### 2.1.1 波長, 振動数, 波数の関係

波長  $\lambda$ , 振動数  $\tilde{\nu}$ , 波数  $\nu$ の間には、光速  $c$  を用いて、以下のような関係が成り立つ;

$$\lambda = \frac{c}{\tilde{\nu}}, \quad (2.1)$$

$$\nu = \frac{\tilde{\nu}}{c} = \frac{1}{\lambda}. \quad (2.2)$$

## 2.1.2 立体角

立体角  $\omega^{*1}$  は、半径  $r$  の球面上に円錐体で張られる面積  $\sigma$  を半径の 2 乗で割った値であり、

$$\omega = \frac{\sigma}{r^2} \quad (2.3)$$

で定義される。また、立体角の単位はステラジアン [sr] 用いる。極座標系で表される半径  $r$  の球面上の天頂角  $\theta$  と方位角  $\phi$  で規定される方向を考えると、微小な角度差  $d\theta$  および  $d\phi$  で張られる微小面積  $d\sigma$  をみる場合の微小立体角  $d\omega$  は次式で与えられる；

$$d\omega = \frac{d\sigma}{r^2} = \sin\theta d\theta d\phi. \quad (2.4)$$



図 2.1: 立体角  $\omega$  の定義 (浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎 [1])

図 2.2: 極座標系における微小立体角  $d\omega$  の定義 (浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎 [1])

## 2.1.3 放射輝度

ある面  $dA$  を通して、その法線方向と角  $\theta$  を成す方向の立体角  $d\omega$  の錐体内を進む放射を考える。波長が  $\lambda$  と  $\lambda + \delta\lambda$  との間にある放射が  $dt$  時間あたりに面  $dA$  を通過する場合の放射が運ぶエネルギー  $dE_\lambda$  は、

$$dE_\lambda = I_\lambda (\cos\theta dA) d\omega d\lambda dt \quad (2.5)$$

で与えられる。この時、 $I_\lambda$  は放射の強さを表す比例定数であり、放射輝度、または放射強度という。ある単一波長  $\lambda$  の放射輝度は、

$$I_\lambda = \frac{dE_\lambda}{\cos\theta dA d\omega d\lambda dt} \quad (2.6)$$

として定義される。放射輝度は、場所のみに依存するのではなく、進行方向にも依存する。特に、放射輝度が方向によらず一定の場合には、放射場は等方的であるという。

\*1平面上における角度とは、角の頂点から出る 2 本の半直線によって区切られた部分のことを言い、この 2 半直線の開き具合のことである。一方、空間上における立体角とは、空間上の角の頂点から出る半直線が動いて作る錐面によって区切られた部分のことを言い、この錐面の開き具合のことである。

## 2.1.4 放射フラックス

面  $dA$  を通して半球側へ流れる放射エネルギーの大きさを放射フラックスという。波長  $\lambda$  の放射フラックス  $F_\lambda$  は、面  $dA$  を通過する放射輝度  $I_\lambda$  のその面に垂直な成分を半球側の全立体角  $\Omega$  について積分したものと定義される。すなわち、

$$F_\lambda = \int_{\Omega} I_\lambda \cos\theta d\omega \quad [\text{W m}^{-2}\mu\text{m}^{-1}] \quad (2.7)$$

である。極座標表示では、

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\lambda \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \quad (2.8)$$

となる。特に等方的な放射場の場合には、 $I_\lambda$  が  $\theta$ ,  $\phi$  に依存せず、 $F_\lambda = \pi I_\lambda$  となる。

## 2.2 黒体放射の法則

### 2.2.1 プランクの法則

入射する全ての波長の放射を完全に吸収する理想的な物体のことを黒体といい、その黒体から射出される放射を黒体放射という<sup>\*2</sup>。プランクの法則とは、全ての温度領域での黒体放射スペクトルを統一的に表したものであり、この法則によると、絶対温度  $T$  の黒体放射輝度  $B_\lambda(T)$  のスペクトル分布は、

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5 \exp(hc/\kappa_B \lambda T) - 1} \quad (2.9)$$

<sup>\*2</sup>不透明で熱平衡状態にある壁面からなる空洞内の放射場を考える。

黒体空洞: 外からの入射光  $I_\lambda$  は吸収率  $0 < a_\lambda < 1$  の壁面で多重回の反射と吸収を受けて減衰し、最終的には完全に吸収される。つまり、空洞内へ入射した放射は完全に吸収され、空洞内は真っ暗になる。

$$\text{空洞内の放射強度} = I_\lambda - a_\lambda I_\lambda - a_\lambda (1 - a_\lambda) I_\lambda - a_\lambda (1 - a_\lambda)^2 I_\lambda \dots = 0$$

空洞放射: 射出率  $0 < \epsilon_\lambda < 1$  の壁面で囲まれた熱平衡状態にある空洞内部の放射場は、絶対温度  $T$  の壁面からの射出光にそれが壁面で多重回の反射を受けた成分が合わさって、最終的に黒体放射  $B_{\lambda(\nu)}$  と等しくなる。

$$\text{空洞内の放射強度} = \epsilon_\lambda B_\lambda + (1 - \epsilon_\lambda) \epsilon_\lambda B_\lambda + (1 - \epsilon_\lambda)^2 \epsilon_\lambda B_\lambda + \dots = B_\lambda$$

と表される. ここで,  $h (= 6.62607 \times 10^{-34} \text{ J s})$  はプランク定数,  $\kappa_B (= 1.38065 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1})$  はボルツマン定数である. また, 波数  $\nu$  を用いて,

$$B_\nu(T) = \frac{2hc^2\nu^3}{\exp(hc\nu/\kappa_B T) - 1} \quad (2.10)$$

と書き換えることができる.

### 2.2.2 ウィーンの変位則

ある温度  $T$  でのプランク関数はある特定の波長で極大値をとる. その波長  $\lambda_{\max}$  では  $dB_\lambda(T)/d\lambda = 0$  となることを考慮すると,

$$\lambda_{\max} = \frac{C}{T} \mu\text{m} \quad (C = 2987 \mu\text{K}) \quad (2.11)$$

となる<sup>\*3</sup>. つまり, 黒体放射輝度が最大となる波長  $\lambda_{\max}$  はその絶対温度  $T$  に反比例する.

### 2.2.3 ステファン・ボルツマンの法則

黒体面から射出される放射輝度を全波長にわたって積算した値  $B(T)$  は, プランク関数を波長範囲  $0 \sim \infty$  にわたって積分することにより,

$$B(T) = \int_0^\infty B_\lambda(T) d\lambda \propto T^4 \quad (2.12)$$

と書ける. また, 黒体放射は等方的であるから, 全波長で積分した放射フラックス  $F_B$  は

$$F_B = \pi B(T) = \sigma T^4 \quad (\sigma = 5.66961 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-4}) \quad (2.13)$$

である. つまり, 黒体面から射出される放射フラックスの全波長にわたる積分値は絶対温度の 4 乗に比例する<sup>\*4</sup>.

### 2.2.4 キルヒホッフの法則

キルヒホッフの法則とは, 熱平衡の状態にある物質が放射を授受する際の基本的な関係を表す法則であり, 物質の吸収係数  $k_\lambda^a$  と射出係数  $j_\lambda$  の比は, 物質の種類や性質に関係なく, その温度と放射の波長のみ依存する, というものである.

<sup>\*3</sup>導出については付録 1 を参照されたい.

<sup>\*4</sup>導出については付録 C を参照されたい.

いま, 放射場は不透明な壁面に囲まれており, 外界とは熱の出入りがなく, それ自身の均一な温度と等方放射場で特徴づけられる熱力学平衡状態に達しているとする. この場合, たとえ壁面が黒体ではないとしても, 壁面における射出と多重反射の結果, 空洞内の放射場は黒体放射となる. 熱力学的平衡の状態であるので, 壁面は吸収する放射量 ( $k_\lambda^a B_\lambda(T)$ ) と等しい量の放射 ( $j_\lambda$ ) をする. よって,

$$\begin{aligned} k_\lambda^a B_\lambda(T) &= j_\lambda, \\ \frac{j_\lambda}{k_\lambda^a} &= B_\lambda(T) \end{aligned} \quad (2.14)$$

の関係が成立する. すなわち, 壁面の吸収係数  $k_\lambda^a$  と射出係数  $j_\lambda$  の比は黒体放射輝度のプランク関数で与えられ, 温度と波長のみ依存する.

今, 熱力学的平衡状態にある物質の波長  $\lambda$  の放射に対する吸収率  $a_\lambda$  をプランク関数  $B_\lambda(T)$  に対する吸収された放射強度の比, 射出率  $\epsilon_\lambda$  を  $B_\lambda(T)$  に対する射出された放射強度の比として定義すると, 上式より,

$$a_\lambda = \epsilon_\lambda \quad (2.15)$$

を得る. 全ての波長で  $a_\lambda = \epsilon_\lambda = 1$  であれば黒体という. 一方, 全ての波長で  $0 < a_\lambda = \epsilon_\lambda = \text{const} < 1$  であるような物体を灰色体という.

以上より, 熱力学的平衡状態にある物質は, 放射を吸収する ( $a_\lambda > 0$ ) 性質をもつならば, 吸収率と同じ値の射出率で同じ波長の放射を射出することがわかる. 地球大気は, 鉛直方向の温度勾配をもつので厳密には熱力学的平衡状態にないが, 多くの吸収帯において, 約 70 km より低い高度では, 系を非常に小さくとると, 局所的には温度や圧力の分布が一様で熱力学的平衡の状態にあるとみなすことができる (局所的熱力学的平衡の近似).

## 2.2.5 レイリー・ジーンズ近似

$h\nu \ll k_B T$  の放射に対しては, プランク関数は次式で近似できる;

$$B_\nu(T) = \frac{2k_B\nu^2}{c^2} T. \quad (2.16)$$

すなわち, マイクロ波域の黒体放射輝度は絶対温度  $T$  に比例する. ただし,  $\nu \rightarrow \infty$  で無限大へ発散し, ウィーンの変位則やステファン・ボルツマンの法則と矛盾し, ウィーンの法則に従う<sup>\*5</sup>.

<sup>\*5</sup>導出については付録 B を参照されたい.

## 2.2.6 ウィーンの方法

$h\nu \gg k_B T$  の放射に対しては, プランク関数は次式で近似できる;

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp(h\nu/k_B T). \quad (2.17)$$

\*6

## 2.2.7 輝度温度

輝度温度は, ある波長 (振動数) に対する放射強度を特徴づける考え方の一つである. それは, その波長 (振動数) に対して同じ放射強度を持つ黒体の温度を与えることであり, 任意の放射輝度  $I_\lambda$  に対して,

$$I_\lambda = B_\lambda(T_b) \quad (2.18)$$

によって定義される. このときの温度  $T_b$  を輝度温度と言う.

---

\*6導出については付録 B を参照されたい.

## 第3章 放射伝達過程の定式化

### 3.1 放射伝達方程式

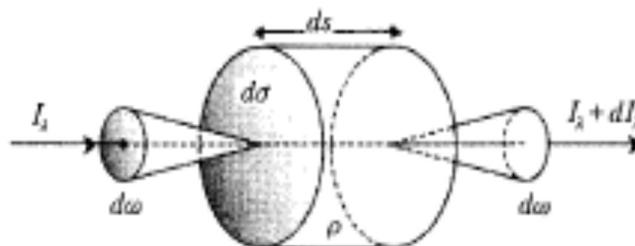


図 3.1: 放射伝達過程の概念図

(浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎 [1])

大気中に断面積  $d\sigma$ , 長さ  $ds$  の微小な気柱を考える. 波長が  $\lambda$  と  $\lambda + d\lambda$  の間にあり, 強度  $I_\lambda$  の放射が, 微小時間  $dt$  の間に立体角  $d\omega$  でこの気柱に入射するとする. 入射方向に進む放射は, この気柱を通過する間に散乱や吸収を受けて, その放射強度が  $I_\lambda + dI_\lambda$  に変わるとする. 気柱の密度を  $\rho$ , 単位質量当たりの消散係数を  $k_\lambda^e$  とするならば, 入射した放射が気柱を通過する間に消散 (吸収 + 散乱) されるエネルギーは,  $k_\lambda^e I_\lambda \rho ds d\sigma d\omega d\lambda dt$  で与えられる. これは放射エネルギーの変化量

$$dE_\lambda = I_\lambda d\sigma d\omega d\lambda dt - (I_\lambda + dI_\lambda) d\sigma d\omega d\lambda dt \quad (3.1)$$

に等しいので, この微小気柱による放射強度の減衰は,

$$dI_\lambda = -k_\lambda^e I_\lambda \rho ds \quad (3.2)$$

と書き表せる. ここで,  $k_\lambda^e$  は質量消散係数, または質量消散断面積と呼ばれ, 次元は [面積/質量] である. これに密度を掛けた  $k_\lambda^e \rho$  は, 単位面積当たりの消散係数, すなわち体積消散係数であり, その次元は [面積/体積] すなわち [1/長さ] である.

他方, この微小気柱を通過している間に, 気柱内で生じる射出によって進行方向への放射が強まる. また, 他のあらゆる方向から考えられている方向への散乱光が加わり, 放射は強められる. この射出と散乱による放射の増強分  $dI_\lambda$  (増強) を表す係数  $j_\lambda$  を導入する. これを質量射出係数, または放射源係数と呼ぶ. 放射の増強分は微小気柱の質量に比例するので,

$$dI_\lambda = +j_\lambda \rho ds \quad (3.3)$$

と表せる. 2つの過程が同時に進行しているとするば, 正味としての放射強度の変化量は,

$$dI_\lambda = -k_\lambda^e I_\lambda \rho ds + j_\lambda \rho ds \quad (3.4)$$

と書ける. ここで, 放射源関数  $J_\lambda$  を

$$J_\lambda \equiv \frac{j_\lambda}{k_\lambda^e} \quad (3.5)$$

と定義して導入すると,

$$\frac{dI_\lambda}{k_\lambda^e \rho ds} = -I_\lambda + J_\lambda \quad (3.6)$$

と書き表せる. これを放射伝達方程式という. この方程式は大気中を伝播する間に吸収, 射出, 散乱を受けて変化する放射エネルギーの保存則を表す.

### 3.1.1 散乱位相関数

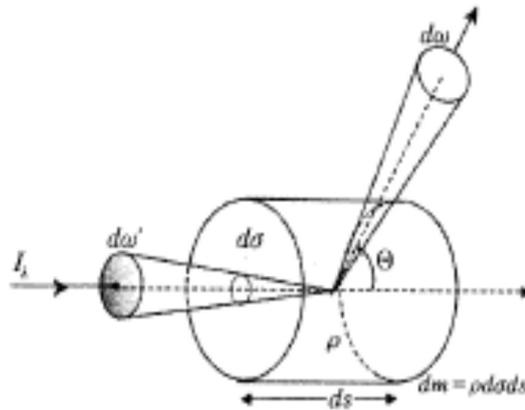


図 3.2: 散乱過程の概念図 (浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎 [1])

立体角  $d\omega'$  内の強度  $I_\lambda$  の入射光が, 微小体積  $d\sigma ds$  により散乱されるとしたとき, 1回の散乱で消散される放射エネルギーは,

$$k_\lambda^e I_\lambda \rho d\sigma ds d\omega' d\lambda dt = k_\lambda^e I_\lambda dm d\omega' d\lambda dt \quad (3.7)$$

と書ける。ただし、右辺の  $dm = \rho d\sigma ds$  は微小気柱の質量である。これ以降、入射光側の方角や立体角をプライム (') の付いた記号で表す。入射光から失われた、すなわち消散された放射エネルギーのうち、入射光の進行方向と角  $\Theta$  を成す方向の立体角  $d\omega$  内に散乱される割合は、散乱の強さの角度分布を表す関数  $P(\cos\Theta)$  を導入することにより、

$$P(\cos\Theta) \left( \frac{d\omega}{4\pi} \right) k_\lambda^e I_\lambda dmd\omega' d\lambda dt \quad (3.8)$$

と書き表せる。 $P(\cos\Theta)$  は散乱位相関数、 $\Theta$  は散乱角である。全ての方向に同じ強さ(確率)で散乱する等方性散乱の場合には、散乱位相関数  $P(\cos\Theta)$  は一定となる。

全ての方向へ散乱されるエネルギーの割合は、(3.8) を散乱方向の全立体角  $\Omega$  について積分したものであるので、

$$k_\lambda^e I_\lambda dmd\omega' d\lambda dt \int_\Omega P(\cos\Theta) \left( \frac{d\omega}{4\pi} \right) \quad (3.9)$$

と書ける。このとき、

$$\int_\Omega P(\cos\Theta) \left( \frac{d\omega}{4\pi} \right) = 1 \quad (3.10)$$

ならば、

$$k_\lambda^e I_\lambda dmd\omega' d\lambda dt \quad (3.11)$$

と一致する。この場合、散乱過程での放射エネルギーの消散は、純粋な散乱によるのみ生じ、エネルギーの実質的な損失(吸収)はない。吸収を伴う一般的な散乱過程に対しては、

$$\int_\Omega P(\cos\Theta) \left( \frac{d\omega}{4\pi} \right) = \varpi \leq 1 \quad (3.12)$$

となる。これで定義される  $\varpi$  を単散乱アルベドという。この量はまた、次のようにも定義できる；

$$\varpi = \frac{k_\lambda^s}{k_\lambda^e} = \frac{k_\lambda^s}{k_\lambda^s + k_\lambda^a} \quad (3.13)$$

ここで、 $k_\lambda^s$  は質量散乱係数といい、純粋な散乱効果の大きさを表す係数である。以上より、 $k_\lambda^s$  は、

$$\begin{aligned} \varpi &= \frac{k_\lambda^s}{k_\lambda^e} = \int_\Omega P(\cos\Theta) \left( \frac{d\omega}{4\pi} \right) \\ \longrightarrow k_\lambda^s &= \int_\Omega k_\lambda^e P(\cos\Theta) \left( \frac{d\omega}{4\pi} \right) \end{aligned} \quad (3.14a)$$

の関係式で定義される。また、(3.13) 中の  $k_\lambda^a$  は質量吸収係数と呼ばれ、質量消散係数 ( $k_\lambda^e$ ) と質量散乱係数 ( $k_\lambda^s$ ) の差 ( $k_\lambda^e - k_\lambda^s$ ) である。従って、吸収のない ( $k_\lambda^a = 0$ ) 純粋な散乱の場合、単散乱アルベドは  $\varpi = 1$  となる。この場合は、保存性散乱といい、

散乱光はあらゆる方向に拡散するが、散乱の前後で放射エネルギーは保存される。逆に散乱のない ( $k_\lambda^s = 0$ ) 純粋な吸収の場合には、 $\varpi = 0$  となる。一方、 $0 < \varpi < 1$  の場合には、微小気柱内で散乱と同時に吸収もあり、 $(1 - \varpi)$  の割合で吸収された放射は熱エネルギーに変換される。

### 3.1.2 放射源関数

微小気柱を通過する放射強度を増強する効果には、射出と散乱の寄与がある。両方の効果を含めた広義の射出係数  $j_\lambda$  を用いると、微小気柱から微小時間  $dt$  に立体角  $d\omega$  内に射出される放射エネルギーは、

$$j_\lambda dmd\omega d\lambda dt \quad (3.15)$$

で与えられる。ところで、散乱のない吸収大気 ( $k_\lambda^s = 0; \varpi = 0; k_\lambda^e = k_\lambda^a$ ) で局所熱力学平衡の近似が成立する場合には、キルヒホッフの法則により、

$$j_\lambda = k_\lambda^a B_\lambda(T) \quad (3.16)$$

であるので、放射源関数は

$$J_\lambda \equiv \frac{j_\lambda}{k_\lambda^e} \quad (3.17a)$$

$$= J_\lambda^{(a)} \equiv \frac{j_\lambda}{k_\lambda^a} \quad (3.17b)$$

$$= B_\lambda(T) \quad (3.17c)$$

となる。ここで、 $J_\lambda^{(a)}$  は吸収大気の放射源関数であることを表し、局所熱力学平衡の近似が成り立つ大気ではプランク関数で与えられる。

一方、吸収のない大気 ( $k_\lambda^a = 0; \varpi = 1; k_\lambda^e = k_\lambda^s$ ) の場合、あらゆる方向から入射した放射エネルギーのうち考慮している方向に散乱している割合は、微小気柱からその方向に射出されるエネルギーに等しくなるので、射出係数  $j_\lambda$  は、

$$j_\lambda = k_\lambda^s \int_\Omega I_\lambda P(\cos\Theta) \left( \frac{d\omega'}{4\pi} \right) \quad (3.18)$$

と書ける。従って、この場合の放射源関数は、

$$J_\lambda = J_\lambda^{(s)} \equiv \frac{j_\lambda}{k_\lambda^s} = \int_\Omega I_\lambda P(\cos\Theta) \left( \frac{d\omega'}{4\pi} \right) \quad (3.19)$$

となる。ここで、 $J_\lambda^{(s)}$  は散乱大気の放射源関数を表す。

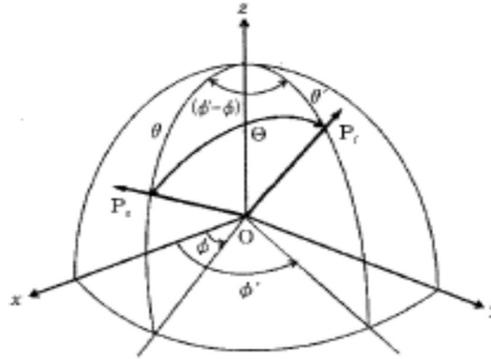


図 3.3: 極座標系における入射方向 ( $OP_i$ ) および散乱方向 ( $OP_s$ ) と散乱角  $\Theta$  の関係図 (浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎 [1])

実際の大気中での散乱を考える場合に、極座標系を用いて放射の進行方向を天頂角と方位角で表示すると便利である。入射光の進行方向を  $(\theta', \phi')$ 、散乱光の方向を  $(\theta, \phi)$  と表せば、それらの間の散乱角  $\Theta$  の余弦  $\cos\Theta$  は、球面三角の余弦定理より、

$$\cos\Theta = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi') \quad (3.20)$$

が与えられる。散乱位相関数および放射輝度の角度変数も天頂角と方位角に直すと、散乱大気放射源関数  $J_\lambda^{(s)}$  は、

$$J_\lambda^{(s)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P(\theta, \phi, \theta', \phi') I_\lambda(\theta', \phi') \sin\theta' d\theta' d\phi' \quad (3.21)$$

と書き表せる。吸収と散乱の過程が共存する大気 ( $0 < \varpi < 1$ ) の場合には、微小気柱における散乱と吸収は、それぞれ独立の過程なので、放射源関数はそれぞれの効果の和、

$$J_\lambda = (1 - \varpi) J_\lambda^{(a)} + \varpi J_\lambda^{(s)} = (1 - \varpi) B_\lambda(T) + \varpi J_\lambda^{(s)} \quad (3.22)$$

で与えられる。すなわち、単散乱アルベド  $\varpi$  の値により、吸収の放射源関数と散乱の放射源関数の寄与の割合が決まる。

### 3.1.3 ビーア・ブーゲー・ランバートの法則

放射の射出がない場合 ( $J_\lambda = 0$ ) には、放射伝達方程式は

$$\frac{dI_\lambda}{k_\lambda^e \rho ds} = -I_\lambda \quad (3.23)$$

と書ける. いま, 気柱の  $s = 0$  の点に入射する放射輝度を  $I_\lambda(0)$  としたとき, 気柱内を  $s = s^*$  の距離を通過した放射の強度  $I_\lambda(s^*)$  は, これを積分して,

$$\int_{I_\lambda(0)}^{I_\lambda(s^*)} \frac{1}{I_\lambda} dI_\lambda = - \int_0^{s^*} k_\lambda^e \rho ds,$$

$$I_\lambda(s^*) = I_\lambda(0) \exp \left[ - \int_0^{s^*} k_\lambda^e \rho ds \right] \quad (3.24)$$

となる. 気層は均質 ( $k_\lambda^e$  が場所によらず一定) であるとし,

$$u^* = \int_0^{s^*} \rho ds \quad (3.25)$$

で定義される路程長を導入すると,

$$I_\lambda(s^*) = I_\lambda(0) \exp[-k_\lambda^e u^*] \quad (3.26)$$

を得る. この式は射出のない均質な吸収層を透過する放射輝度は指数関数的に減衰することを表す (ビーア・ブーゲー・ランバートの法則). 波長  $\lambda$  の単色光戦  $I_\lambda$  が距離  $0 \sim s^*$  間の気柱を通過する場合の透過率  $t_\lambda$  は次式で定義される;

$$t_\lambda(0, s^*) \equiv \frac{I_\lambda(s^*)}{I_\lambda(0)}. \quad (3.27)$$

これはビーア・ブーゲー・ランバートの法則より,

$$t_\lambda(0, s^*) = \exp[-k_\lambda^e u^*] \quad (3.28)$$

となる.

## 3.2 光学的厚さ

消散係数  $k_\lambda^e$  と密度  $\rho$  が場所ごとに变化するような一般の気層における放射伝達を考える. このとき, 放射伝達方程式は,

$$\frac{dI_\lambda}{k_\lambda^e \rho ds} = -I_\lambda \quad (3.29)$$

となる. ここで,  $k_\lambda^e$  と  $\rho$  の積を光路上の点  $s_a$  と  $s_b$  の間で積分した量として光学的厚さ  $\tau_\lambda(s_a, s_b)$  と表記して導入する. すなわち,

$$\tau_\lambda(s_a, s_b) \equiv \int_{s_a}^{s_b} k_\lambda^e \rho ds \quad (3.30)$$

と定義する. これを導入すれば, 先ほどの式の解は,

$$I_\lambda(s^*) = I_\lambda(0) \exp[-\tau_\lambda(0, s^*)] \quad (3.31)$$

と書き直せる. この光路に沿った単色光の透過率  $t_\lambda(0, s^*)$  は次式のように書ける;

$$t_\lambda(0, s^*) = \exp[-\tau_\lambda(0, s^*)]. \quad (3.32)$$

大気が光学的に浅い場合, 大気を  $N$  個の気層に分け, 各気層の光学的厚さを  $\tau_\lambda(0, s_1)$ ,  $\tau_\lambda(s_1, s_2)$ ,  $\dots$ ,  $\tau_\lambda(s_{N-1}, s_N)$  としたとき, 大気全体の光学的厚さ  $\tau_\lambda(0, s_N)$  は各気層の光学的厚さの和, すなわち,

$$\tau_\lambda(0, s_N) = \tau_\lambda(0, s_1) + \tau_\lambda(s_1, s_2) + \dots + \tau_\lambda(s_{N-1}, s_N) \quad (3.33)$$

で与えられる. 従って, 大気全層の透過率  $t_\lambda(0, s_N)$  は,

$$\begin{aligned} t_\lambda(0, s_N) &= \exp[-\tau_\lambda(0, s_N)] \\ &= t_\lambda(0, s_1) \cdot t_\lambda(s_1, s_2) \cdot \dots \cdot t_\lambda(s_{N-1}, s_N) \end{aligned} \quad (3.34)$$

となり, 各気層の透過率の積として与えられる.

### 3.3 平行平面大気の近似

地球大気は, 局所的にみた場合には水平方向の広がりに対して鉛直方向の厚さは薄いので, 平板上の気相とみなすことができる. これを平行平面大気の近似という.

水平方向に均質な平行平面大気での放射伝達を考える場合には, 大気層に垂直な天頂方向  $z$  を基準にして, 極座標  $(\theta, \phi)$  を用いて, 放射の進行方向を表すと便利である. 極座標系において  $\theta$  方向の微小距離は  $ds = dz/\cos\theta$  で表示できることを考慮すると, 放射伝達方程式は,

$$\begin{aligned} \frac{dI_\lambda(z, \theta, \phi)}{k_\lambda^e \rho ds} &= \frac{\cos\theta dI_\lambda(z, \theta, \phi)}{k_\lambda^e \rho dz} \\ &= -I_\lambda(z, \theta, \phi) + J_\lambda(z, \theta, \phi) \end{aligned} \quad (3.35)$$

と書き表せる. ここで,

$$\mu \equiv \cos\theta, \quad (3.36a)$$

$$d\tau_\lambda \equiv -k_\lambda^e \rho dz \quad (3.36b)$$

なる関係式で定義される方向余弦  $\mu$  および微小光学的厚さ  $d\tau_\lambda$  を導入すると, (4.1) は次のように書き直せる;

$$\mu \frac{dI_\lambda(\tau_\lambda, \theta, \phi)}{d\tau_\lambda} = I_\lambda(\tau_\lambda, \theta, \phi) - J_\lambda(\tau_\lambda, \theta, \phi). \quad (3.37)$$

これが平行平面大気放射伝達方程式の基本形である. なお, 光学的厚さの定義式

$$d\tau_\lambda = -k_\lambda^e \rho dz \quad (3.38)$$

で負の符号がついているのは, 光学的厚さ  $\tau_\lambda$  の増加方向を鉛直座標  $z$  とは逆方向, つまり, 考慮している大気層の上端から下向きにとるからである. 同様に慣用として, 下向き方向 ( $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ) に対しても,  $\mu$  の値を  $0 < \mu < 1$  の正の値に限定し, 負の符号をつけて  $-\mu$  と表す. そして, 上向きおよび下向きの放射輝度をそれぞれ  $I_\lambda(\tau, +\mu, \phi)$  および  $I_\lambda(\tau, -\mu, \phi)$  と表記する.

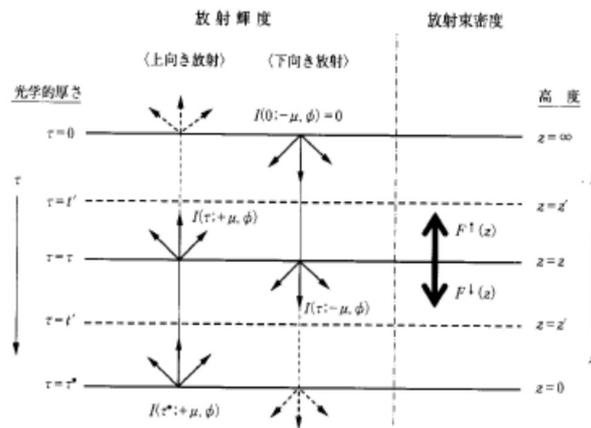


図 3.4: 平行平面大気における放射伝達概念図 (浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎 [1])

### 3.3.1 形式解

平行平面大気放射伝達方程式

$$\mu \frac{dI_\lambda(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = I_\lambda(\tau, \mu, \phi) - J_\lambda(\tau, \mu, \phi) \quad (3.39)$$

の一般解を求める. まず, 大気内の任意の光学的厚さ  $\tau$  の高度  $z$  における上向き放射輝度を求める. 上式の両辺に  $e^{-\tau/\mu}$  をかけて, 大気層の下端 ( $\tau' = \tau^*$ ) から考慮し

ている高度 ( $\tau' = \tau$ ) まで光学的厚さについて積分すると,

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{\tau'}{\mu}} \frac{dI_\lambda}{d\tau'} - \frac{1}{\mu} I_\lambda e^{-\frac{\tau'}{\mu}} &= -J_\lambda e^{-\frac{\tau'}{\mu}} \frac{1}{\mu}, \\
d\tau' \left( I_\lambda e^{-\frac{\tau'}{\mu}} \right) &= -J_\lambda e^{-\frac{\tau'}{\mu}} \frac{1}{\mu}, \\
\int_{\tau^*}^{\tau} \frac{d}{d\tau'} \left( I_\lambda e^{-\frac{\tau'}{\mu}} \right) d\tau' &= - \int_{\tau^*}^{\tau} J_\lambda e^{-\frac{\tau'}{\mu}} \frac{1}{\mu} d\tau', \\
I_\lambda(\tau, +\mu, \phi) &= I_\lambda(\tau^*, +\mu, \phi) \exp \left[ -\frac{(\tau^* - \tau)}{\mu} \right] \\
&\quad + \int_{\tau^*}^{\tau} J_\lambda(\tau', +\mu, \phi) \exp \left[ -\frac{(\tau' - \tau)}{\mu} \right] \frac{d\tau'}{\mu} \quad (0 < \mu < 1)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

を得る. ここに  $I_\lambda(\tau^*; +\mu, \phi)$  は大気層下端に上向き ( $\mu, \phi$ ) 方向に入射する放射輝度であり, 境界条件により与えられる. 右辺第 1 項は, 入射光  $I_\lambda(\tau^*; +\mu, \phi)$  が減衰しながら考慮している高度まで達した分を表し, 第 2 項は, 途中の各高度で ( $\mu, \phi$ ) 方向に射出された放射が距離に応じた減衰を受けながら  $\tau = \tau$  まで達した分の総和を表す. 特に大気上端 ( $\tau = 0$ ) での上向き放射輝度  $I_\lambda(0; +\mu, \phi)$  は人工衛星から観測される放射輝度に相当する.

下向き放射輝度の場合は, 先ほどと同様に平行平面大気の下向き放射の放射伝達方程式

$$-\mu \frac{dI_\lambda(\tau, -\mu, \phi)}{d\tau_\lambda} = I_\lambda(\tau, -\mu, \phi) - J_\lambda(\tau, -\mu, \phi) \tag{3.41}$$

を考え,  $\tau$  について  $0 \sim \tau$  まで積分すると,

$$\begin{aligned}
I_\lambda(\tau; -\mu, \phi) &= I_\lambda(0; -\mu, \phi) \exp \left[ -\frac{\tau}{\mu} \right] \\
&\quad + \int_{\tau}^0 J_\lambda(t, -\mu, \phi) \exp \left[ -\frac{(\tau - t)}{\mu} \right] \frac{dt}{\mu} \quad (0 < \mu < 1)
\end{aligned} \tag{3.42}$$

を得る. ここで,  $I_\lambda(0, -\mu, \phi)$  は考慮している大気層上端に入射する下向き ( $-\mu, \phi$ ) の放射の強度を表し, 境界条件によって与えられる.  $\tau = 0$  の高度として実際の大気の上端をとる場合には, そこへ入射する拡散放射はないので,  $I_\lambda(0; -\mu, \phi) = 0$  としてもよい. 右辺の意味は上向き放射の場合において積分する気層を  $\tau = \tau$  の高度より上層とし, 方向を下向きに変えたものと同じである.

### 3.4 放射による気層の加熱冷却

前項において平行平面大気内の任意の高度 ( $z = z(\tau)$ ) における上向きおよび下向きの放射輝度を求めた。その高度における上向き放射フラックス  $F_\lambda^\uparrow(z)$  および下向き放射フラックス  $F_\lambda^\downarrow(z)$  は、これらの放射輝度の鉛直成分を積分してそれぞれ次式で与えられる。

$$F_\lambda^\uparrow(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 I_\lambda(\tau(z), +\mu, \phi) \mu d\mu d\phi \quad (3.43a)$$

$$F_\lambda^\downarrow(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 I_\lambda(\tau(z), -\mu, \phi) \mu d\mu d\phi \quad (3.43b)$$

今、上向き放射フラックス  $F_\lambda^\uparrow(z)$  と下向き放射フラックス  $F_\lambda^\downarrow(z)$  の差として正味放射フラックス  $F_\lambda^{\text{net}}$  を定義すると、 $F_\lambda^{\text{net}} > 0$  の場合は高度  $z$  の面を通過した正味の上向き放射エネルギーの流量があることを意味する。高度  $z$  (光学的厚さ  $\tau_\lambda$ ) と  $z + \Delta z$  (光学的厚さ  $\tau_\lambda - \Delta\tau_\lambda$ ) との間の厚さ  $\Delta z$  の気層をとり、この層における放射エネルギーの出入りを考える。気層の上面および下面を通過した放射エネルギーの出入りの収支  $\delta F_\lambda^{\text{net}}$  は、

$$\begin{aligned} \delta F_\lambda^{\text{net}} &= \left[ F_\lambda^\uparrow(z + \Delta z) - F_\lambda^\downarrow(z + \Delta z) \right] - \left[ F_\lambda^\uparrow(z) - F_\lambda^\downarrow(z) \right] \\ &= F_\lambda^{\text{net}}(z + \Delta z) - F_\lambda^{\text{net}}(z) \end{aligned} \quad (3.44a)$$

で与えられる。 $\delta F_\lambda^{\text{net}}(z)$  の値が正 [負] の場合には、この気層内において正味として上向き放射エネルギーの流出 [流入] があることに対応する。放射エネルギーの流出 (発散) は、気層から熱エネルギーの一部が放射となって失われたことに相当し、これにより気層は冷却する。他方、流入、すなわち収束した放射エネルギーは、熱エネルギーに変換されて気層を加熱する。波長範囲  $\lambda \sim \lambda + \delta\lambda$  の放射の収束 [発散] に伴う気層の温度の時間変化率  $\partial T / \partial t$  は、放射加熱 [冷却] 率と呼ばれ、

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{\Delta\lambda} = -\frac{1}{C_p \rho_a} \left( \frac{\partial F_\lambda^{\text{net}}(z)}{\partial z} \right) \Delta\lambda \quad (3.45)$$

で与えられる。ここで、 $C_p$  は気層の定圧比熱、 $\rho_a$  は空気の密度である。上式の右辺が正值の場合は加熱、負値の場合が冷却を意味する。

### 3.5 灰色大気の放射平衡温度分布

今、大気は散乱がなく、灰色大気であり、平行平面大気の近似、静水圧近似、局所熱力学平衡が成り立っているとす。また、放射は等方的に射出されると考える。

大気上端では、下向きの長波放射がなく、大気下端では、太陽放射と地表面における下向きの長波放射が、地表面における上向きの長波放射と釣り合っているとす。

このような大気において、放射伝達方程式は、(3.37) に (3.37), (3.17c) を用いて、

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = I(\tau, \mu, \phi) - B(T) \quad (3.46)$$

と書ける。

まず、上向きに放射している場合を考える。その場合、上式の両辺に  $\mu$  を掛けて、半球にわたって立体角で積分すると、上向き放射伝達方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} I^{\uparrow} \mu^2 d\omega &= \int_{\Omega} I^{\uparrow} \mu d\omega - \int_{\Omega} B(T) \mu d\omega, \\ \int_0^1 \int_0^{2\pi} I^{\uparrow} \mu^2 d\phi d\mu &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} I^{\uparrow} \mu d\phi d\mu - \int_0^1 \int_0^{2\pi} B(T) \mu d\phi d\mu, \\ 2\pi \frac{d}{d\tau} \int_0^1 I^{\uparrow} \mu^2 d\mu &= 2\pi \int_0^1 I^{\uparrow} \mu d\mu - 2\pi \int_0^1 B(T) \mu d\mu, \\ \frac{2}{3} \pi \frac{dI^{\uparrow}}{d\tau} &= \pi I^{\uparrow} - \pi B(T), \\ \frac{2}{3} \frac{dF^{\uparrow}}{d\tau} &= F^{\uparrow} - \pi B(T) \end{aligned} \quad (3.47)$$

となる。同様にして、下向きに放射している場合を考えると、下向き放射伝達方程式は

$$-\frac{2}{3} \frac{dF^{\downarrow}}{d\tau} = F^{\downarrow} - \pi B(T) \quad (3.48)$$

となる。このような大気の放射平衡温度分布を考える。上 2 式の和と差から

$$\frac{2}{3} \frac{d}{d\tau} (F^{\uparrow} + F^{\downarrow}) = F^{\uparrow} - F^{\downarrow}, \quad (3.49a)$$

$$\frac{2}{3} \frac{d}{d\tau} (F^{\uparrow} - F^{\downarrow}) = F^{\uparrow} + F^{\downarrow} - 2\pi B(T) \quad (3.49b)$$

を得る。大気には放射エネルギーのたまりがないので、

$$\begin{aligned} \frac{dF_{\text{net}}}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau} (F^{\uparrow} - F^{\downarrow}) = 0, \\ F^{\text{net}} &= F^{\uparrow} - F^{\downarrow} = \text{const} \end{aligned} \quad (3.50)$$

である。太陽放射を  $J_0$  とすると、大気上端における熱収支は、

$$F^{\uparrow}(0) + 0 = F_{\text{net}} = J_0 \quad (3.51)$$

となる. そのことに注意して, (3.49a) を光学的厚さ  $\tau$  について大気上端から下端まで積分すると,

$$\begin{aligned} F^\uparrow + F^\downarrow &= \frac{2}{3} F_{\text{net}} \tau + F^\uparrow(0) \\ &= J_0 \left( \frac{3}{2} \tau + 1 \right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

を得る. さらに, 平衡条件 (3.50) を用いると (3.49b) は,

$$\begin{aligned} F^\uparrow + F^\downarrow - 2\pi B(T) &= \frac{2}{3} \frac{d}{d\tau} (F^\uparrow - F^\downarrow) \\ &= 0, \\ F^\uparrow + F^\downarrow &= 2\pi B(T) \end{aligned} \quad (3.53)$$

となり, (3.52) は,

$$\pi B(T) = \frac{J_0}{2} \left( \frac{3}{2} \tau + 1 \right) \quad (3.54)$$

となる. また, (3.52) と (3.50) から上向き, 下向きそれぞれの放射フラックスは,

$$F^\uparrow = \frac{J_0}{2} \left( \frac{3}{2} \tau + 2 \right), \quad (3.55)$$

$$F^\downarrow = \frac{3J_0}{4} \tau \quad (3.56)$$

である.

光学的厚さは,

$$\begin{aligned} \tau &= - \int_{\infty}^z kq\rho(z) dz \\ &= - \int_{\infty}^z kq\rho(z) \frac{dz}{dp} dp \\ &= \int_0^p \frac{kq}{g} dp \\ &= kq \frac{p}{g} \end{aligned} \quad (3.57)$$

となる. ここで,  $q$  は吸収気体の混合比であり, 高度によらず一定とする. また, 静水圧の式,  $dp = -\rho(z)gdz$  を用いた. 従って, (3.54) は, (2.13) を用いて,

$$\begin{aligned} \pi B(T) &= \frac{J_0}{2} \left( \frac{3}{2} kq \frac{p}{g} + 1 \right), \\ T &= \left( \frac{J_0}{2\sigma} \left( \frac{3}{2} kq \frac{p}{g} + 1 \right) \right)^{-4} \end{aligned} \quad (3.58)$$

となる. ここで,  $Z = -H \ln(p/p_0)$  となる対数圧力座標系を用いると, (3.58) は,

$$\begin{aligned} T &= \left( \frac{J_0}{2\sigma} \left( \frac{3}{2} kq \frac{p_0}{g} e^{-Z/H} + 1 \right) \right)^{-4} \\ &= \left( \frac{J_0}{2\sigma} \left( \frac{3}{2} \tau_G e^{-Z/H} + 1 \right) \right)^{-4} \end{aligned} \quad (3.59)$$

となる. ここで,  $H$  はスケールハイトであり, 定数である. また,  $p_0$  は地表面における圧力,  $\tau_G$  は地表面における光学的厚さである.

(3.59) をグラフとして表すと, 図 3.5 のようになる. 図 3.5) を見てみると, 光学的厚さが大きくなるほど地表面温度は高くなっているが, 大気上端の温度は光学的厚さによらず, 214 K であることがわかる.

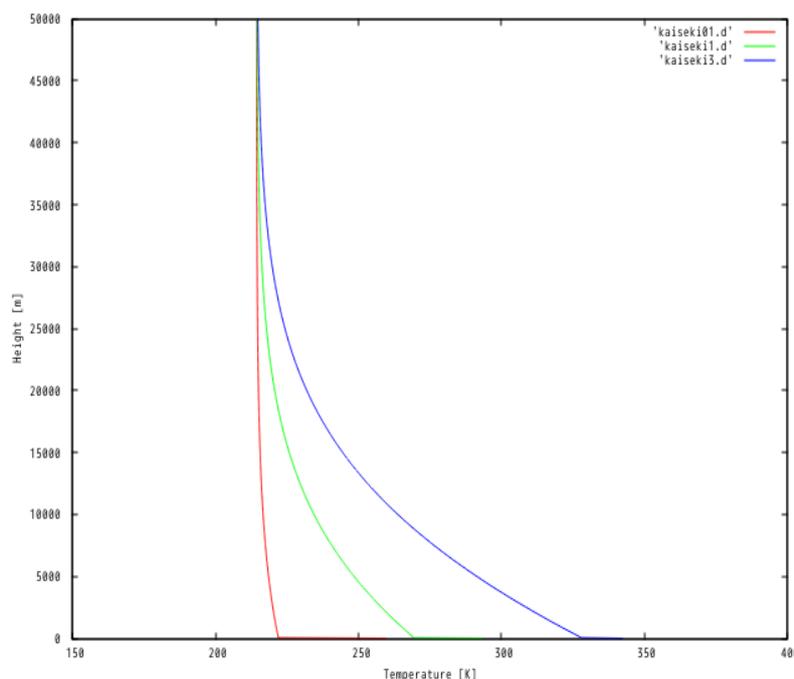


図 3.5: (3.59) による鉛直温度構造 (赤色の線:  $\tau_G = 0.5$  の解, 緑色の線:  $\tau_G = 1.0$  の解, 青色の線:  $\tau_G = 3.0$  の解)

### 3.6 放射対流平衡

放射による熱輸送だけを考えた場合, 図 3.5 を見ると, 灰色大気の最下層の温度と地表面の温度との間には差が生じる. しかし, 現実には熱伝導があるので, 地表面と接している気体は地表面からの熱伝導によって加熱され, 地表面温度と同じ温

度になろうとする。地表面からの熱伝導によって暖められた地表面付近の気体は周囲の気体よりも軽くなり、大気中を上昇し対流を生じる。その結果、大気の最下層に対流層が発達する。対流が発達した状態で、平均的な温度勾配はいわゆる断熱勾配になると考えられる。熱の出入りなしに静かに気体を上昇・下降させると、気圧変化のために気体は断熱膨張・圧縮され、温度変化する。これによる鉛直温度勾配が断熱温度勾配である。対流圏では、対流が発達しており、断熱温度勾配をもつ温度構造が得られる。その温度構造は放射対流平衡温度と呼ばれる。

## 第4章 鉛直 1 次元放射対流平衡モデル

大気の鉛直温度構造を求めるための鉛直 1 次元放射対流平衡モデルを作成する。本章では、作成したモデルについて説明する。

本研究で作成したモデルでは、平行平面大気の近似、静水圧近似、局所熱力学平衡の仮定の下で、非散乱の灰色大気を扱う。また、太陽放射に対して透明であり、大気上端からの長波放射の入射はないと仮定し、地球表面では、熱容量はゼロであると仮定する。このとき、地球表面では、太陽放射と下向きの長波放射が上向きの長波放射と釣り合う。

### 4.1 支配方程式系

モデルの支配方程式は、大気温度の時間発展の式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\text{rad}} + \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\text{conv}}, \quad (4.1)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\text{rad}} = -\frac{1}{c_p \rho(z)} \frac{\partial F^{\text{net}}}{\partial z}, \quad (4.2)$$

$$F^{\text{net}} = F^\uparrow + F^\downarrow \quad (4.3)$$

と放射伝達方程式

$$\frac{2}{3} \frac{dF^\uparrow}{d\tau} = F^\uparrow - \pi B(T), \quad (4.4)$$

$$-\frac{2}{3} \frac{dF^\downarrow}{d\tau} = F^\downarrow - \pi B(T), \quad (4.5)$$

地表面における熱収支の式

$$F_s + F^\downarrow = \sigma T_G^4 + F_{\text{conv}}, \quad (4.6)$$

および、下に述べる対流時の内部エネルギー保存式である。ここで、 $T_G$  は地表面温度、 $F_{\text{conv}}$  は対流フラックス、 $(\partial T/\partial t)_{\text{conv}}$  は対流による加熱率である。また、 $(\partial T/\partial t)_{\text{conv}}$  は以下のように求める。  $dT/dz < \Gamma$  のとき、対流が生じて温度が変化する。対流層が地表面と接しているとき、温度変化率  $(\partial T/\partial t)_{\text{conv}}$  は以下の 2 式を満たすように求める；

$$\int_{p_2}^{p_1} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\text{conv}} \frac{c_p}{g} dp = F_{\text{conv}}, \quad (4.7)$$

$$\frac{dT}{dz} = \Gamma. \quad (4.8)$$

ただし、対流層が地表面と接していないときは、(4.7) から  $F_{\text{conv}}$  を除いた式

$$\int_{p_2}^{p_1} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\text{conv}} \frac{c_p}{g} dp = 0, \quad (4.9)$$

を用いる。ここで、(4.7)、(4.9) は対流層内の内部エネルギー保存の式である。また、 $p_1$  は対流圏下端における圧力、 $p_2$  は対流圏上端における圧力、 $\Gamma$  は気温減率である。大気が安定のとき、対流は起こらず、

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\text{conv}} = 0 \quad \left( \frac{dT}{dz} > \Gamma \right) \quad (4.10)$$

である。

## 4.2 支配方程式の離散化

ここでは、4.1 節に示した支配方程式を離散化する。ただし、放射伝達方程式については、 $F^\uparrow$ 、 $F^\downarrow$  を解析的に求めた上で離散化する。離散化するにあたって、図 4.1 に示すように、大気を気層に分割する。

(4.1) を離散化すると、

$$\frac{T_k^{l+1} - T_k^l}{\Delta T} = \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\text{rad},k}^l + \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\text{conv},k}^l \quad (4.11)$$

となる。さらに、本モデルではこれを分割し、以下のように表す；

$$\frac{T_k^* - T_k^l}{\Delta t} = \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\text{rad}}^l, \quad (4.12)$$

$$\frac{T_k^{l+1} - T_k^*}{\Delta t} = \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\text{conv}}^l. \quad (4.13)$$

このように、まず、放射による加熱のみを考慮して  $T_k^*$  を求め、後から対流の効果を考慮することで、 $T_{k+1}^{l+1}$  を求める。

(4.12) を離散化すると、

$$\begin{aligned}\frac{T_k^* - T_k^l}{\Delta t} &= -\frac{1}{c_p \rho} \frac{F_k^{\text{net}} - F_{k-1}^{\text{net}}}{z_k - z_{k-1}}, \\ T_k^* &= T_k^l - \frac{1}{c_p \rho} \frac{F_k^{\text{net}} - F_{k-1}^{\text{net}}}{z_k - z_{k-1}} \Delta t\end{aligned}\quad (4.14)$$

を得る。ここで、 $k$  は鉛直層の添字、 $l$  は時間の添字を表す。(3.47), (3.48) を数値計算によって解き、ある時刻での各層の正味放射フラックスを求めることができる。これを繰り返し行うことで、大気放射平衡状態の鉛直温度構造を求める。

(4.4) の解を求める。両辺に  $e^{-3\tau/2}$  を掛けて、 $\tau$  について積分すると、

$$\begin{aligned}\frac{dF^\uparrow}{d\tau} e^{-\frac{3}{2}\tau} &= \frac{3}{2} F^\uparrow e^{-\frac{3}{2}\tau} - \frac{3}{2} \pi B(T) e^{-\frac{3}{2}\tau}, \\ \frac{d}{d\tau} \left( F^\uparrow e^{-\frac{3}{2}\tau} \right) &= -\frac{3}{2} \pi B(T) e^{-\frac{3}{2}\tau}, \\ \int_{\tau_s}^{\tau} d \left( F^\uparrow e^{-\frac{3}{2}t} \right) &= -\frac{3}{2} \int_{\tau_s}^{\tau} \pi B(T_k) e^{-\frac{3}{2}t} dt, \\ F^\uparrow(\tau) e^{-\frac{3}{2}\tau} &= F^\uparrow(\tau_s) e^{-\frac{3}{2}\tau_s} - \frac{3}{2} \int_{\tau_s}^{\tau} \pi B(T_k) e^{-\frac{3}{2}t} dt, \\ F^\uparrow(\tau) &= F^\uparrow(\tau_s) e^{-\frac{3}{2}(\tau_s - \tau)} - \frac{3}{2} \int_{\tau_s}^{\tau} \pi B(T_k) e^{-\frac{3}{2}(t - \tau)} dt\end{aligned}\quad (4.15)$$

を得る。これを離散化すると、

$$F^\uparrow(\tau) = F^\uparrow(\tau_s) e^{-\frac{3}{2}(\tau_s - \tau)} - \frac{3}{2} \sum_{k=i}^n \pi B(T_k) e^{-\frac{3}{2}(\tau_k - \tau_i)} \Delta t \quad (4.16)$$

となる。(4.5) においても同様に考えると、

$$F^\downarrow(\tau) = \frac{3}{2} \pi \sum_{k=0}^i B(T_k) e^{-\frac{3}{2}(\tau_i - \tau_k)} \Delta t \quad (4.17)$$

を得る。ここで、 $F^\downarrow(0) = 0$  を用いた。

(4.8) を離散化すると、

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dz} &= \Gamma, \\ T_k &= T_{k-1} + \Gamma(z_k - z_{k-1})\end{aligned}\quad (4.18)$$

を得る.

(4.7) を差分化することを考える. (4.7) は, 任意の厚さの対流層に対する内部エネルギーの保存式である. しかし, 本モデルでは, 扱いを簡単にするために, (4.7) を大気最下層のみ, あるいは, 連続する二つの大気層にそれぞれ適用することにする. そして, それを最下層から最上層まで順番に適用し, さらに温度分布が収束するまで繰り返すことで, 任意の厚さの対流層を表現する. 大気下端の層と地表面の間の温度変化が  $\Gamma\Delta z/2$  より大きく不安定ならば, 大気下端の温度と地表面温度が変化する. 大気下端の層と地表面の間には, 熱エネルギー保存の式より,

$$c_p T_n^{(m+1)} \frac{\Delta p(n)}{g} = c_p T_n^{(m)} \frac{\Delta p(n)}{g} - \Delta F_n^{(m+1)} \Delta t \quad (4.19)$$

$$T_G^{(m+1)} = T_n^{(m+1)} + \frac{1}{2} \Gamma \Delta z \quad (4.20)$$

の関係がある. ここで,  $n$  は大気下端の層,  $m$  は対流調節が行われた回数を示し,  $\Delta p(n)$  は大気下端の層の下端と上端の圧力差,  $\Delta F_n^{(m+1)}$  は地表面温度が変化したことによるフラックスの変化を表す. (4.19) を整理すると,

$$\begin{aligned} c_p T_n^{(m+1)} \frac{\Delta p(n)}{g} &= c_p T_n^{(m)} \frac{\Delta p(n)}{g} - \Delta F_n^{(m+1)} \Delta t \\ &= c_p T_n^{(m)} \frac{\Delta p(n)}{g} - \frac{dF_n^{(m)}}{dT_G} \Delta T_G \Delta t \\ &\sim c_p T_n^{(m)} \frac{\Delta p(n)}{g} - \pi \frac{dB_n^{(m)}}{dT_G} \exp(-(\tau_G - \tau_n)) \left( T_G^{(m+1)} - T_G^{(m)} \right) \Delta t \end{aligned} \quad (4.21)$$

を得る. そして, (4.20) と (4.21) の 2 式より,  $T_G^{(m+1)}$ ,  $T_n^{(m+1)}$  を求めることができる. 対流調節で地表面温度が変化すると, 大気を分割した各層から射出される上向きフラックスも変化するため, この変化を補正しなければならない. 第  $k$  層について熱エネルギー保存の式を考え, 整理すると,

$$\begin{aligned} c_p T_k^{(m+\frac{1}{2})} \frac{\Delta p(k)}{g} &= c_p T_k^{(m)} \frac{\Delta p(k)}{g} - \Delta F_{k-1}^{(m+1)} \Delta t + \Delta F_k^{(m+1)} \Delta t, \\ T_k^{(m+\frac{1}{2})} &= \frac{g}{c_p \Delta p(k)} \left( c_p T_k^{(m)} \frac{\Delta p(k)}{g} - \Delta F_{k-1}^{(m+1)} \Delta t + \Delta F_k^{(m+1)} \Delta t \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

となり, 補正後の温度  $T_k^{(m+\frac{1}{2})}$  が求まる. 次に, 大気を分割した各層間の温度変化が  $\Gamma\Delta z$  より大きく不安定ならば, その不安定を解消する. 不安定が解消された各層の間には,

$$c_p T_k^{(m+2)} \frac{\Delta p(k)}{g} + c_p T_{k-1}^{(m+1)} \frac{\Delta p(k-1)}{g} = c_p T_k^{(m+1)} \frac{\Delta p(k)}{g} + c_p T_{k-1}^{(m+\frac{1}{2})} \frac{\Delta p(k-1)}{g}, \quad (4.23)$$

$$T_k^{(m+2)} = T_{k-1}^{(m+1)} + \Gamma \Delta z \quad (4.24)$$

がある. この 2 式より,  $T_k^{(m+2)}$ ,  $T_{k-1}^{(m+1)}$  を求めることができる. 以上の操作をどの層においても不安定が解消されるまで行った結果を, 次の時間ステップでの各層の温度とする.

### 4.3 その他

数値計算を行うに当たって, 計算領域を地球表面から高度 50 km までとし, 1 層の厚さを 100 m とする 500 層に分割した. また, 時間ステップを 8 時間とした. 有効放射温度は 255 K とする. その他に数値計算で用いた物理定数は表 4.3.1 に示す.

表 4.3.1: 数値計算で用いた物理定数表

物理定数	記号	数値
重力加速度	$g$	$9.8 \text{ m s}^{-2}$
対数圧力座標系のスケールハイト	$H$	8.0 km
ステファン・ボルツマン定数	$\sigma$	$5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
ボルツマン定数	$k_B$	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
大気の定圧比熱	$c_p$	$1.0 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
地表面における大気の密度	$\rho_s$	$1.23 \text{ kg m}^{-3}$
地表面における水蒸気の密度	$\rho_s^{ab}$	$1.0 \times 10^{-2} \text{ kg m}^{-3}$

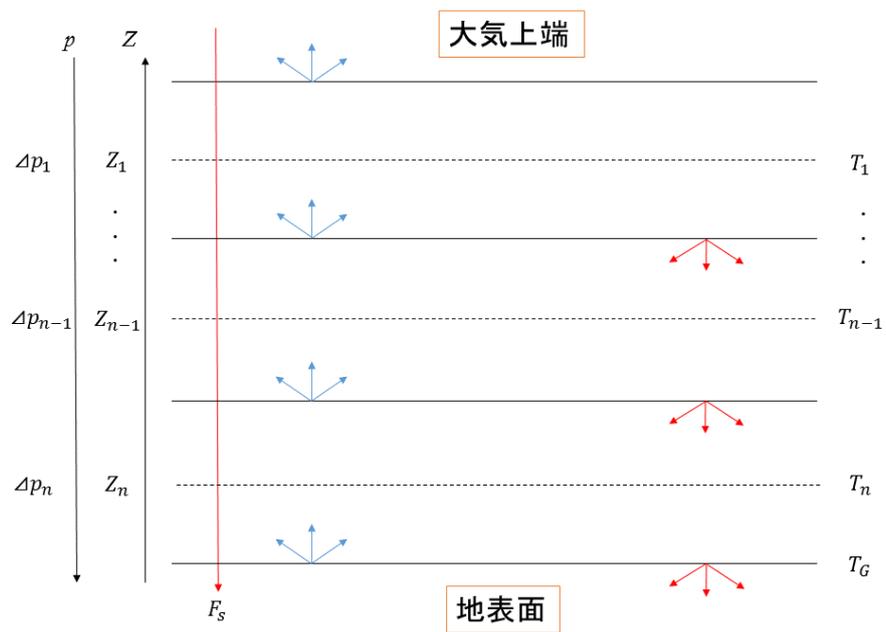


図 4.1: モデル大気の様式図

## 第5章 放射平衡の数値計算

### 5.1 概要

灰色大気では、吸収係数が波長によらず一定であるため、解析的に平衡状態における気層の温度構造を求めることができる。従って、モデルの計算が正しくできているか否かを判断するのに役立つ。ここでは、いくつかの初期条件を与えて、平衡温度が一意に求まることを示し、モデルを検証する。

解析的に求めた灰色大気の平衡状態における温度構造は

$$T = \left\{ \frac{J_0}{2\sigma} \left( \frac{3}{2} \tau_G e^{-Z/H} + 1 \right) \right\}^{-4} \quad (5.1)$$

で与えられる。この式において、 $\tau_G$  の値を与えれば、温度は  $Z$  の関数として求められる。ここで、 $\tau_G$  は、

$$\tau_G = - \int_{\infty}^0 k\rho(z) dz \quad (5.2)$$

で与えられる。

### 5.2 計算設定

本章で用いる吸収係数は、 $k1 \equiv 1.25 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$ 、 $k2 \equiv 1.25 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$ 、 $k3 \equiv 3.75 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$  の三種類である。それぞれの吸収係数を (3.57) に用いると、大気全体の光学的厚さはそれぞれ  $\tau_G = 0.1$ 、 $\tau_G = 1.0$ 、 $\tau_G = 3.0$  となる。ここで、 $q = 8.1 \times 10^{-3}$  を用いた。このうち、 $k2 \equiv 1.25 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$  は、実際の地球大気の窓領域における水蒸気の吸収係数におおよそ相当する。初期条件は、170 K と 300 K の二種類の等温大気を与える。時間発展の過程で、1 日当たりの温度変化が  $10^{-4} \text{ K}$  となったとき、大気は平衡状態になったと判断し、計算を終了する。

### 5.3 計算結果

地表面温度の時間変化を図 5.1 に表す. 灰色大気における地表面温度, 大気下端の温度および大気上端の温度の解析解を表 5.3.1 に, 解析解による鉛直温度構造を図 5.2 に示す. 初期条件として 170 K と 300 K の等温大気を与えて得られた, 地表面温度, 大気下端の温度, および大気上端の温度をそれぞれ表 5.3.2, 表 5.3.3 に示す. また, 初期条件として 170 K と 300 K の等温大気を与えたときの, 平衡状態になるまでの時間発展の様子を  $\tau_G$  の値ごとにそれぞれ図 5.3, 図 5.4, 図 5.5 に示す. 解析解および数値計算によって得られた鉛直 1 次元温度構造を  $\tau_G$  の値ごとに比較したものをそれぞれ図 5.6, 図 5.7, 図 5.8 に示す.

図 5.3 から図 5.5 を見ると, 計算による大気的时间発展の様子からは, 初期温度に関わらず, 大気温度は平衡状態に収束していることがわかる. また, 解析解による結果と同様に, 地表面温度と大気下端の温度との間にはギャップがみられることがわかる.

ここで, 鉛直 1 次元温度構造の解析解と数値解を比較する. 図 5.6, 図 5.7, 図 5.8 を見ると, 170 K と 300 K の数値解は一致しているが, 解析解と数値解は光学的厚さが大きくなるにつれてずれが大きくなっている. 特に大気最下層に注目すると,  $\tau_G = 0.1$  のときは 0.1 K,  $\tau_G = 1.0$  のときは 0.6 K,  $\tau_G = 3.0$  のときは 2.2 K の差がそれぞれみられる.

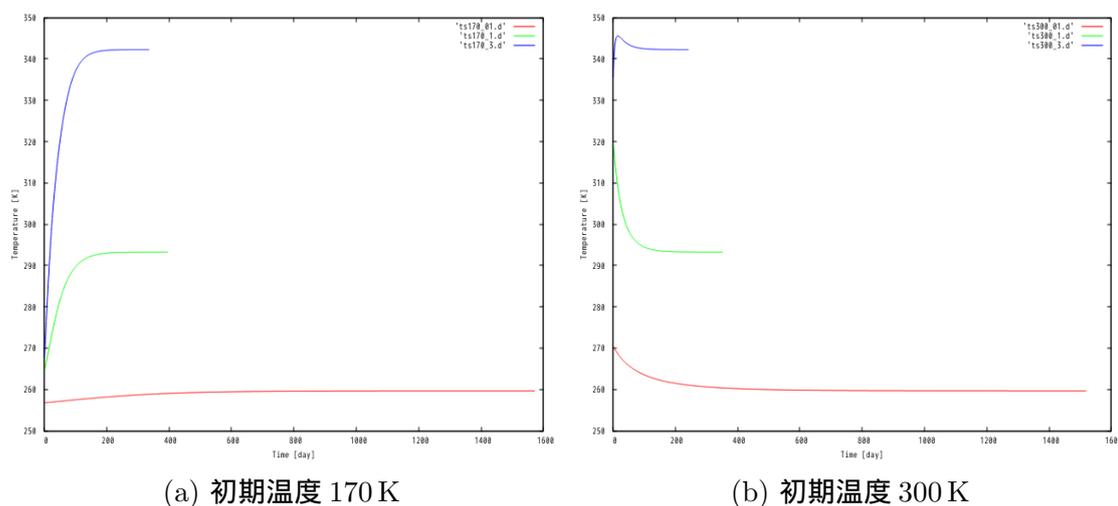


図 5.1: 地表面温度の時間変化 (赤: $\tau_G = 0.1$ , 緑: $\tau_G = 1.0$ , 青: $\tau_G = 3.0$ )

表 5.3.1: 灰色大気における地表面温度, 大気下端の温度および大気上端の温度の解析解

地表面での光学的厚さ	$\tau_G = 0.1$	$\tau_G = 1.0$	$\tau_G = 3.0$
地表面温度 [K]	259.6	293.2	342.3
大気下端の温度 [K]	222.0	269.3	327.8
大気上端の温度 [K]	214.4	214.6	214.9

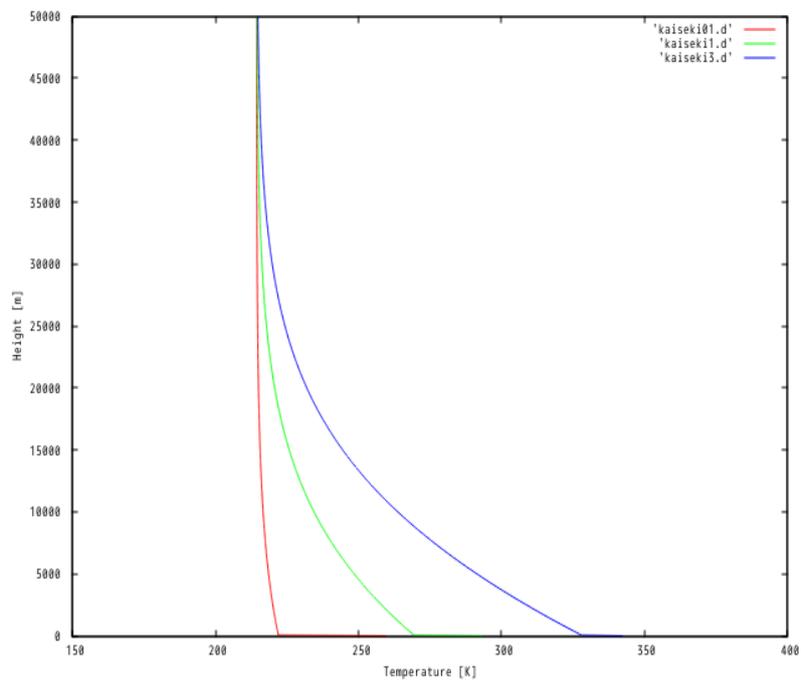


図 5.2: (3.45) による解析解の鉛直温度構造 (赤: $\tau_G = 0.5$  の解, 緑: $\tau_G = 1.0$  の解, 青: $\tau_G = 3.0$  の解)

表 5.3.2: 初期条件として 170 K の等温大気を与えて得られた, 地表面温度, 大気下端の温度, および大気上端の温度の数値解

地表面での光学的厚さ	$\tau_G = 0.1$	$\tau_G = 1.0$	$\tau_G = 3.0$
地表面温度 [K]	259.6	293.2	342.3
大気下端の温度 [K]	221.9	268.7	325.6
大気上端の温度 [K]	214.4	214.4	214.4
平衡到達時間 [days]	1648.0	415.0	352.0

表 5.3.3: 初期条件として 300 K の等温大気を与えて得られた, 地表面温度, 大気下端の温度, および大気上端の温度の数値解

地表面での光学的厚さ	$\tau_G = 0.1$	$\tau_G = 1.0$	$\tau_G = 3.0$
地表面温度 [K]	259.6	293.2	342.3
大気下端の温度 [K]	222.0	268.7	325.6
大気上端の温度 [K]	214.4	214.5	214.5
平衡到達時間 [days]	1592.0	369.0	253.0

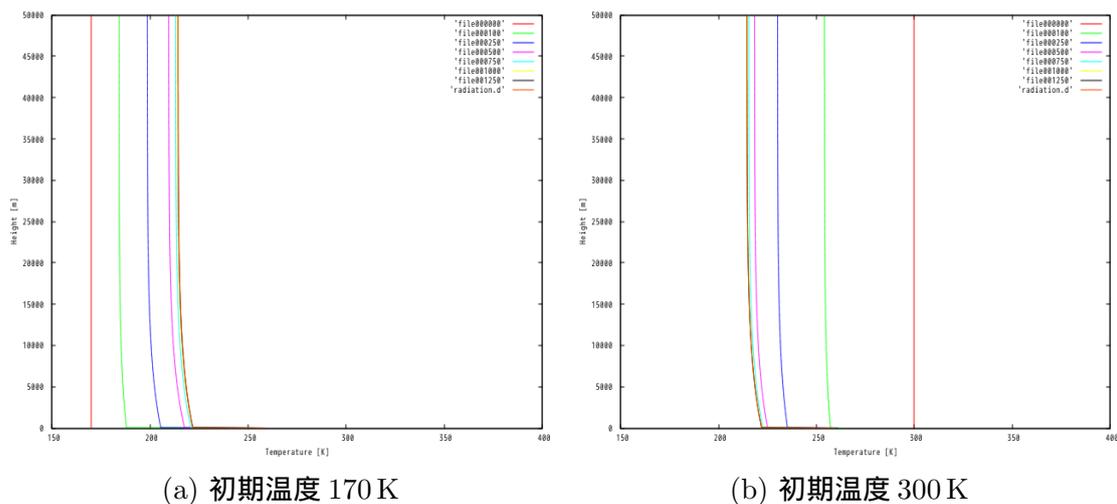


図 5.3: 数値計算による時間発展の様子:  $\tau_G = 0.1$

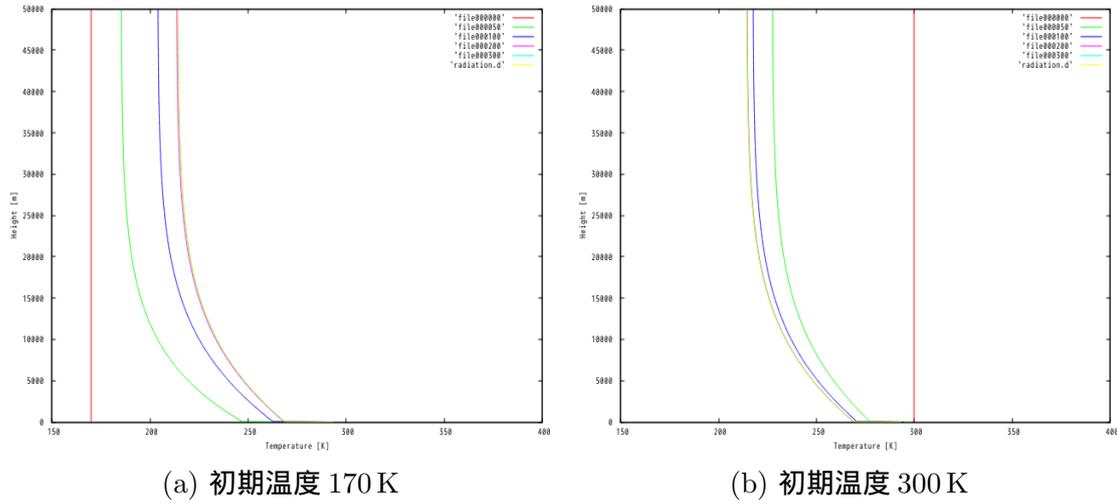


図 5.4: 数値計算による時間発展の様子:  $\tau_G = 1.0$

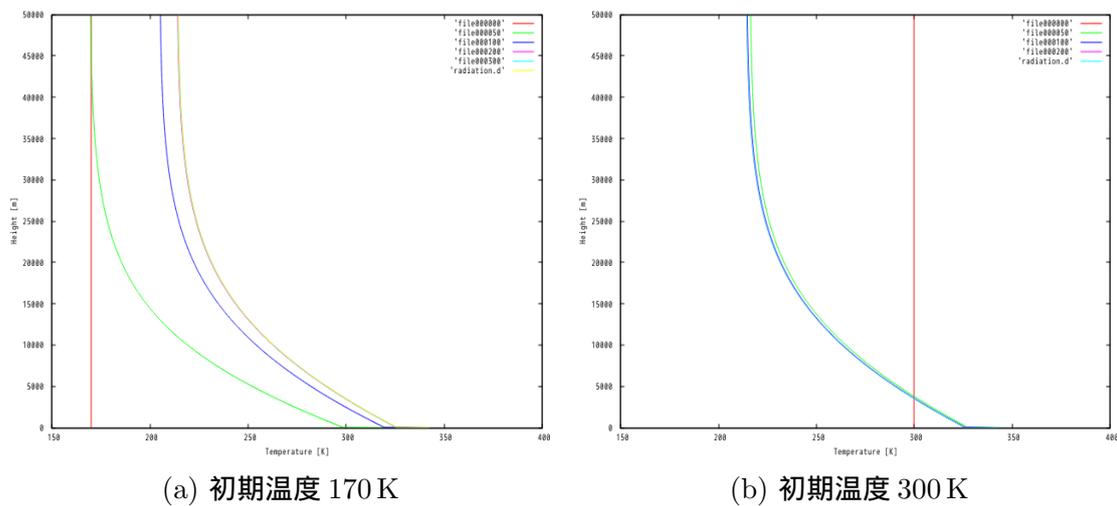


図 5.5: 数値計算による時間発展の様子:  $\tau_G = 3.0$

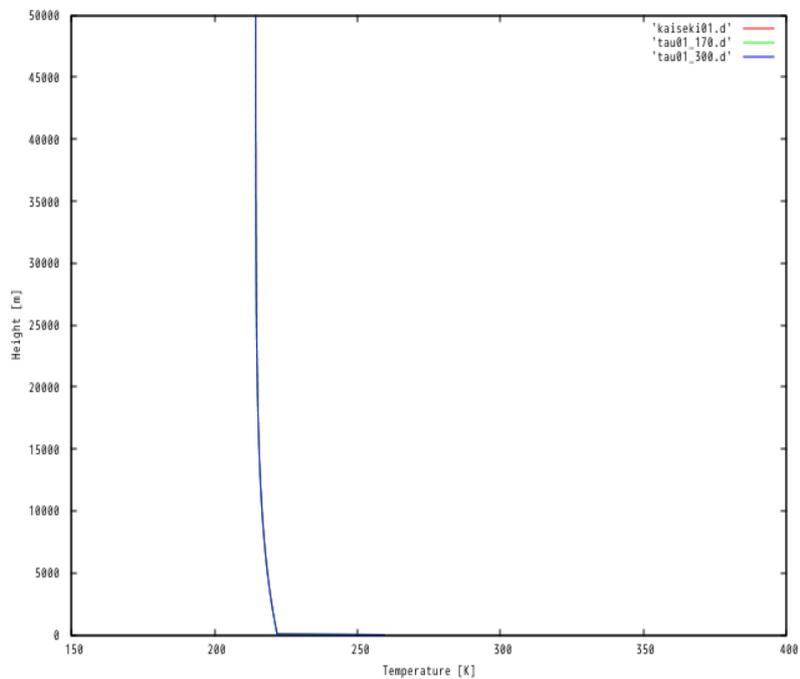


図 5.6: 数値解 (緑:初期温度 170 K, 青:初期温度 300 K) と (3.45) による解析解 (赤) の比較:  $\tau_G = 0.1$

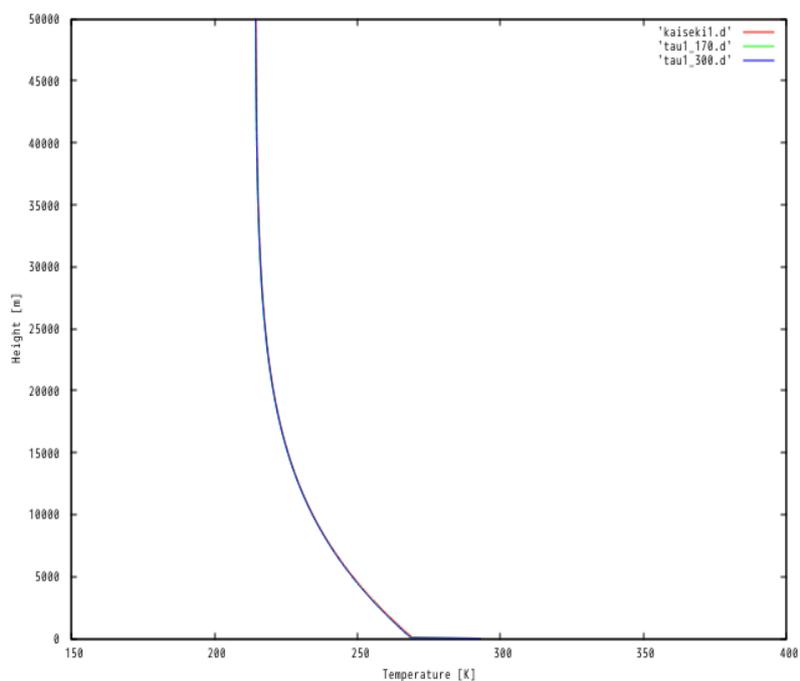


図 5.7: 数値解 (緑:初期温度 170 K, 青:初期温度 300 K) と (3.45) による解析解 (赤) の比較:  $\tau_G = 1.0$

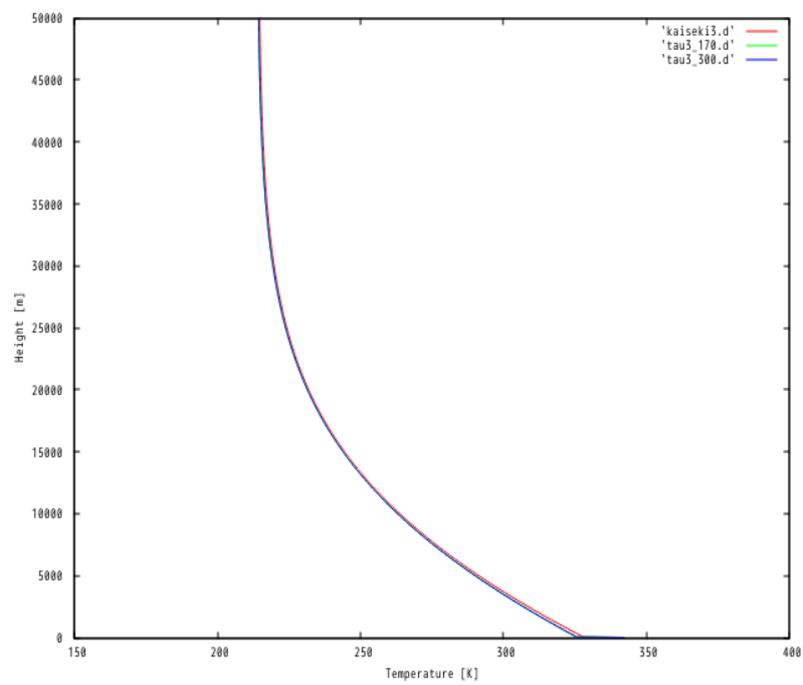


図 5.8: 数値解 (緑:初期温度 170 K, 青:初期温度 300 K) と (3.45) による解析解 (赤) の比較:  $\tau_G = 3.0$

## 5.4 考察

地表面温度の時間変化を見ると (図 5.1), 地表面温度は平衡条件を満たした時点では収束している. よって, 平衡条件は妥当であると考えられる.

大気上端での温度が一致しており, 際の地球大気の窓領域における水蒸気の吸収係数におおよそ相当する  $\tau_G = 1.0$  の温度構造を見ると, ほぼ一致しているとみなせる点で, モデルは解析解をよく表現していると言える.

解析解と数値解を比べると, 地表面での光学的厚さが大きくなるほど大気下端の温度に差がみられる. これはいま, 数値積分を行う手法として, 長方形近似を行っているための誤差であると考えられる. 大気を分割する数をより多くすることにより, より解析値に近づけることができる.

地表面での光学的厚さがある値 ( $\tau_G = 12.5$  程度) を超えると, 下層において, 温度がオーバーシュートやアンダーシュートを繰り返す. これは, 1 層当たりの光学的厚さが大きくなるために, 温度変化率が大きくなったことが原因と考えられる. この問題は, タイムステップを短くすることによって解決することができる. しかし, タイムステップを短くすると, 多くの計算時間を要する. 従って, 以後は, 光学的厚さに注意しながら, 現在のタイムステップで計算を行うことにする.

## 第6章 放射対流平衡の数値計算

### 6.1 概要

現実大気の鉛直温度構造を決定する重要な現象には、放射だけでなく対流や熱伝導があり、対流が起こることによって対流圏が生成される。そこで、次に、放射の影響のみを考えた鉛直 1 次元温度構造で見られた大気下端の温度と地表面温度の間の差を対流を考慮することで解消し、対流圏高度を推定することを目的とする。前章で、本研究で作成したモデルが正しいことが示されたので、本章ではこれに対流の影響を加えて、対流圏の温度構造を推定する。

まず、作成したモデルで求めた放射対流平衡温度構造と「ICAO 標準大気」を比較する。ICAO 標準大気とは、国際民間航空機関 (International Civil Aviation Organization, ICAO) が採用した代表的な国際標準大気である。今回作成したモデルでは吸収係数を高度によらず一定と置いたため、吸収係数にどの値を用いれば、現実大気に近づけることができるかを調べる。

### 6.2 計算 1

本章で用いる吸収係数は、 $k \equiv 1.44 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$  である。また、対流圏での温度勾配は  $6.5 \times 10^{-3} \text{ K m}^{-1}$  とする。初期条件は、170 K と 300 K の二つの等温大気を用いる。時間発展をさせる過程で、1 日当たりの温度変化が  $10^{-4} \text{ K}$  となったとき、平衡状態になったと判断し、計算を終了する。

### 6.2.1 計算結果

地表面温度の時間変化を図 6.1 に示す. 地表面での光学的厚さを  $\tau_G = 1.15$ , 170 K と 300 K の等温大気を初期条件として, 平衡状態になるまで計算した結果を表 6.2.1, 図 6.3 に示す. 地表面での光学的厚さを  $\tau_G = 1.15$  としたときの放射対流平衡温度構造を図 6.2 に示す. また, 図 6.2 には, 比較のために ICAO 標準大気の鉛直温度構造も示している. 放射の影響のみを考えた場合の鉛直温度構造と対流と放射の影響を考えた鉛直温度構造を図 6.4 に示す.

図 6.2 より, 初期条件が 170 K や 300 K を等温大気としたどちらの場合においても ICAO 標準大気に近い温度分布を表している. しかし, 対流圏高度には差がみられる.

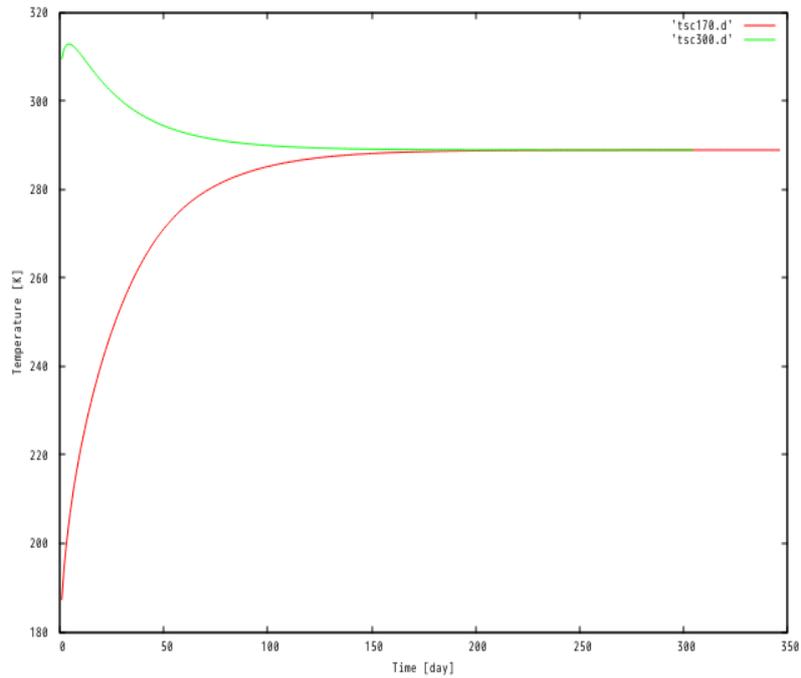


図 6.1: 地表面温度の時間変化 (赤:初期温度 170 K, 緑:初期温度 300 K)

表 6.2.1: 初期条件として 170 K と 300 K の等温大気を与えて得られた, 地表面温度, 大気下端の温度, 大気上端の温度, および平衡到達時間の数値解

初期温度 [K]	170 K	300 K
地表面温度 [K]	288.9	288.9
大気下端の温度 [K]	288.5	288.5
大気上端の温度 [K]	214.4	214.4
平衡到達時間 [days]	346.0	304.0

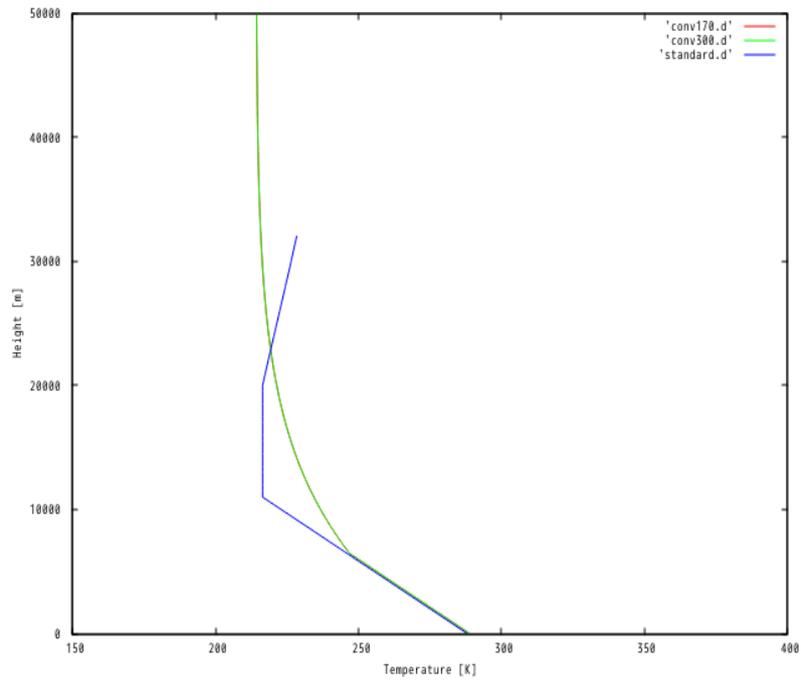
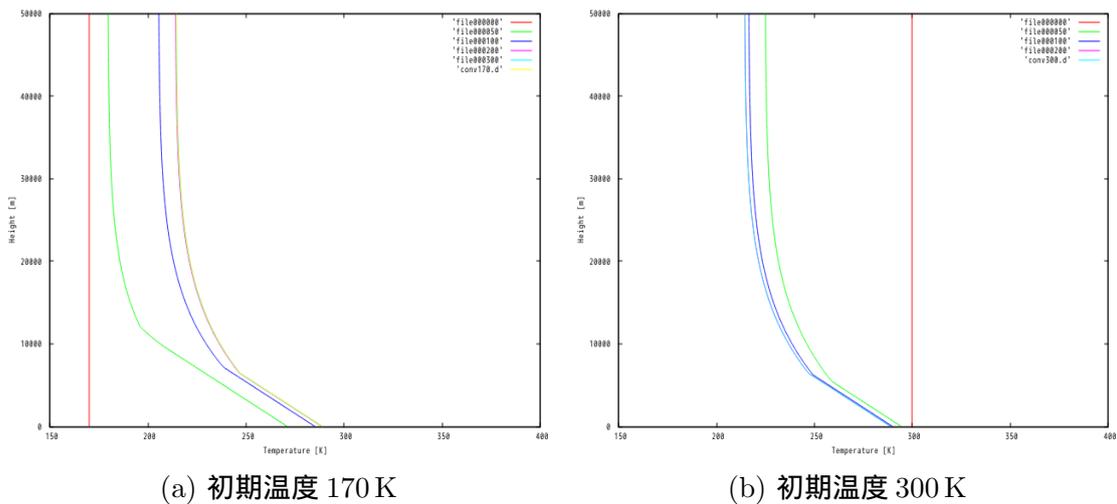


図 6.2: ICAO 標準大気鉛直温度構造 (青) と数値解による鉛直温度構造 (赤:初期温度 170 K, 緑:初期温度 300 K)



(a) 初期温度 170 K

(b) 初期温度 300 K

図 6.3: 数値計算による時間発展の様子:  $\tau_G = 1.15$

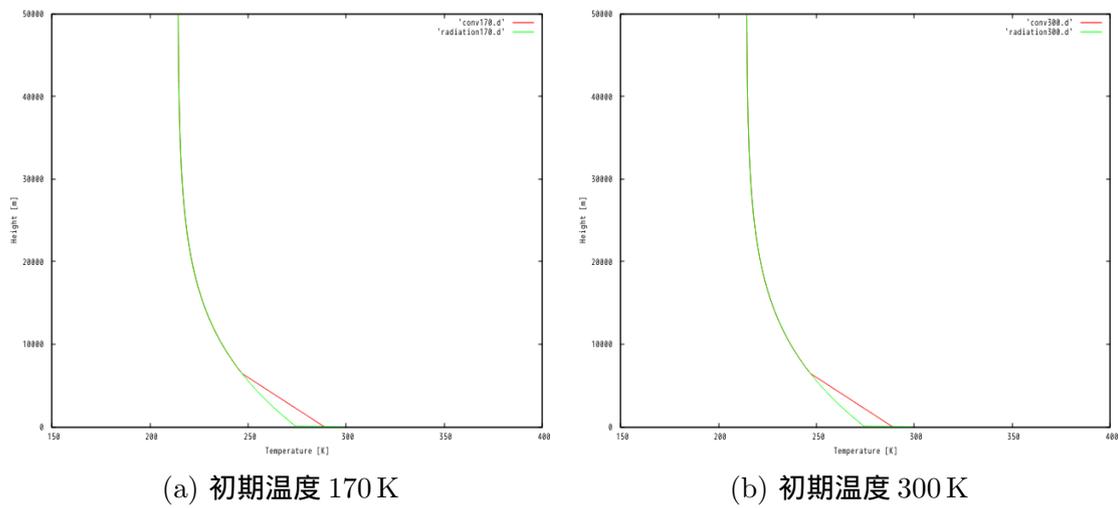


図 6.4: 放射平衡温度 (緑) と放射対流平衡温度 (赤)

## 6.2.2 考察

地表面温度の時間変化を見ると (図 6.1), 地表面温度は平衡条件を満たした時点では収束していると考えられる. よって, 平衡条件は妥当であるとする.

計算による鉛直温度構造と ICAO 標準大気を比較すると (図 6.2), 対流圏高度に差がみられる. これは, 今回のモデルでは, 灰色大気を仮定しており, また吸収係数と混合比が高度によらず一定であると仮定した. さらに大規模循環による影響を考えていない. これらの仮定が対流圏高度の差を引き起こしたと考える.

放射の影響のみを考えた鉛直温度構造と放射に加えて対流の影響も考えた鉛直温度構造を比較すると (図 6.4), 確かに地表面温度と大気下端の層の温度の間の不安定が解消されていることがわかる. 地表面での熱収支を変化させることでこの不安定が解消されている. 放射の影響のみを考えた鉛直温度構造と放射に加えて対流の影響も考えた鉛直温度構造の差が表れている高度までが対流圏である. それより高い高度では温度変化が小さく, 成層圏の存在を示唆していると考えられる.

## 6.3 計算 2

前節では, 吸収気体の混合比を高度によらず一定であると考えた. この節では, 吸収気体の混合比が,

$$q = q_0 \left( \frac{p}{p_0} \right) \quad (6.1)$$

のように高度 (圧力) に依存すると仮定して数値計算を行う. ここで,  $q$  は吸収気体の混合比,  $q_0$  は地表面における吸収気体の混合比,  $p_0$  は地表面における圧力とする. 地表面の混合比は  $q_0 = 1.6 \times 10^{-2}$ , 地表面における光学的厚さは  $\tau_G = 1.15$  とした. 対流圏での温度勾配は  $6.5 \times 10^{-3} \text{ K m}^{-1}$  とした. 時間発展をさせる過程で, 1 日当たりの温度変化が  $10^{-4} \text{ K}$  となったとき, 大気は平衡状態になったと判断し, 計算を終了する. 本節での計算では, 吸収係数は  $k = 1.38 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-2}$  とする. この吸収係数を用いることで, 地表面での光学的厚さを 1.15 に統一する.

### 6.3.1 計算結果

ただし, 大気上端に向かうにつれて混合比が小さくなるため, 大気上端で平衡に到達するまでに長い時間がかかる. 本研究では, 10 万日経過させたが, 平衡には至

らなかった. 10 万日経過したとき, 地表面温度は収束している. 従って, 10 万日経過したときの温度分布を用いて考察する.

図 6.5 は吸収気体の混合比の鉛直分布を示す. 図 6.6 は, 吸収気体の混合比として (6.1) を与え, 10 万日経過させた場合の鉛直温度構造と混合比を高度によらず一定であると考えた場合の鉛直温度構造, ICAO 標準大気 of 鉛直温度構造を示す.

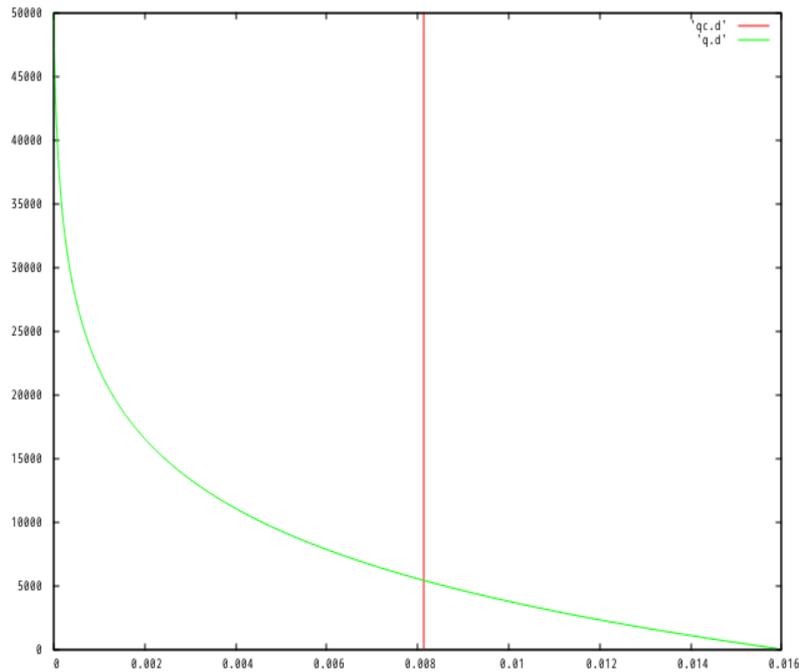


図 6.5: 吸収気体の混合比の鉛直分布 (緑:式 (6.1) に従う場合, 赤:高度によらず一定の場合)

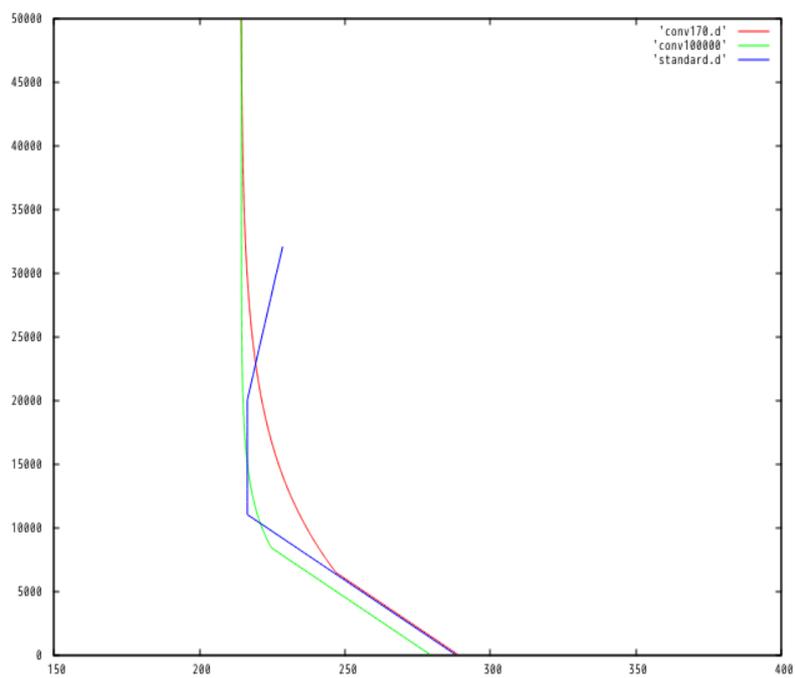


図 6.6: 吸収気体の混合比として (6.1) を与えた場合 (緑) と混合比を高度によらず一定であると考えた場合 (赤) の鉛直温度構造と ICAO 標準大気 of 鉛直温度構造 (青)

### 6.3.2 考察

吸収係数を (6.1) のように分布させると, 混合比が高度によらず一定とした場合に比べて, 対流圏界面高度が大きくなり, 熱を多く上方へ運んだために, 地表面温度は低くなる. 以上の結果より, 混合比は対流圏界面高度の決定に影響を与えていることがわかる.

## 第7章 結論

本研究では、大気の温度構造に影響を与えている物理過程について理解し、モデルを作成する。そして、そのモデルを用いて、大気の温度構造を再現することを目的とする。

第2章、第3章では、放射に関する基本的な内容について学習したものをまとめた。

第4章では、モデルを作成するにあたり用いた、設定や支配方程式系について記述した。

第5章では、作成した鉛直1次元放射平衡モデルを用いて、灰色大気の放射平衡温度を求めることを考えた。鉛直温度構造の解析値と計算値の比較を行い、使用したモデルがある程度正しい鉛直温度構造を再現できているかを確認した。また、地表面温度と大気下端の温度との間が不安定であることを確認した。

第6章では、鉛直1次元放射平衡モデルに対流の影響を考慮した鉛直1次元放射対流平衡モデルを作成し、そのモデルを用いて、灰色大気の放射対流平衡温度を求めることを考えた。対流調整を行い、地表面温度と大気下端の温度との間の不安定を解消した。これにより、鉛直1次元放射平衡モデルを用いて計算された地表面温度より低い地表面温度が計算されたが、逆に、ある高度までの大気温度は鉛直1次元放射平衡モデルを用いて計算された温度より高くなっていることが確認された。

さらに、ICAO標準大気と鉛直1次元放射対流平衡モデルを用いて灰色大気の放射対流平衡温度を比較した。灰色大気において、吸収係数の値を1.14にするとICAO標準大気に近い値となることを求めた。この際、対流が0～7kmの高度まで起こっており、それより上空は温度変化が小さいことを確認した。

そして、混合比として式(6.1)を鉛直1次元放射対流平衡モデルに適用し、混合比が与える影響を考察した。混合比を高度に依存させると、対流圏界面高度は大き

くなることが確認された。ただし、平衡には到達させることができず、計算方法を工夫する必要がある。

以上より、大気の大気圏の温度構造は放射と対流によって決定される。また、対流圏界面高度は、吸収気体の混合比の高度分布によって変化することがわかった。

今回は灰色大気を考えたため、吸収係数の波長依存性を考慮せずに計算を行ったため、対流が起こる上端の高度が ICAO 標準大気とは異なる値を示した。また、他にも、対流が起こる上端の高度には吸収気体の混合比が関係するため、複数の吸収物質を考え、それぞれの混合比を計算することで、より現実大気の鉛直温度構造に近づくと考える。また、 $O_3$  の存在などを考慮することで、成層圏の構造も再現できると考える。

## 付録 A 地球の放射平衡温度の導出

地球を黒体と考え放射平衡温度を求める。太陽から地球が受け取る単位面積当たりのエネルギーは、

$$(1 - A) S_0 \quad (1.1)$$

である。ここで、 $A$  は地球のアルベド、 $S_0$  は太陽定数である。いま、地球は黒体であると仮定すると、地球の放射エネルギーは、ステファンボルツマンの法則より、

$$\sigma T_s^4 \quad (1.2)$$

となる。ここで、 $T_s$  は地表面温度である。以上より、地球における熱収支の釣り合いを考えれば、

$$\begin{aligned} 4\pi R_E^2 \sigma T_s^4 &= \pi R_E^2 (1 - A) S_0, \\ T_s &= \left( \frac{(1 - A) S_0}{4\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

となり、放射平衡温度が求まる。ここで、 $R_E$  は地球の半径である。具体的に、アルベド  $A$  を 0.3、太陽定数  $S_0$  を  $1370 \text{ W m}^{-2}$ 、ステファンボルツマン定数  $\sigma$  を  $5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  とすると、 $T_s$  は約 255 K となる<sup>\*1</sup>。実際の地球では、大気の温室効果のため、255 K より大きくなる。

---

<sup>\*1</sup>値は、一般気象学 [3] を参照した

## 付録B プランクの法則の各々の特性の導出

プランクの法則を再掲する:

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3/c^2}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}. \quad (2.1)$$

いま, この法則の重要な性質である, レイリー・ジーンズの法則, ウィーンの法則, ウィーンの変位則について導出を行う.

レイリー・ジーンズの法則の導出:  $h\nu \ll k_B T$  において, 指数関数は

$$\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1 = \frac{h\nu}{k_B T} + \dots \quad (2.2)$$

に展開される. その結果,  $h\nu \ll k_B T$  に対して, レイリー・ジーンズの法則を得る:

$$\begin{aligned} B_\nu(T) &= \frac{2h\nu^3/c^2}{h\nu/k_B T}, \\ &= \frac{2k_B\nu^2}{c^2} T. \end{aligned} \quad (2.3)$$

(2.3) を見ると, 確かに  $h\nu \ll k_B T$  の条件下では, 黒体放射輝度が絶対温度  $T$  に比例することがわかる.

ウィーン法則の導出:  $h\nu \gg k_B T$  において,  $\exp(h\nu/k_B T) \gg 1$  であるので, ウィーン法則を得る:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp(-h\nu/k_B T). \quad (2.4)$$

(2.3), (2.4) は, 図 2.1 において, それぞれ直線部分と曲線が急な部分に関係している.

ウィーンの変位則の導出:  $B_\nu(T)$  が最大となる振動数  $\nu_{\max}$  は

$$\left. \frac{\partial B_\nu}{\partial \nu} \right|_{\nu=\nu_{\max}} = 0 \quad (2.5)$$

を解くことによって求めることができる. 仮に  $x \equiv h\nu_{\max}/k_B T$  とすると, これは  $x = 3(1 - e^{-x})$  を解くことに等しく, 近似根  $x = 2.82$  をもつ. よって,

$$\frac{h\nu_{\max}}{k_B T} = 2.82, \quad (2.6a)$$

$$\frac{\nu_{\max}}{T} = 5.88 \times 10^{10} \text{ Hz deg}^{-1} \quad (2.6b)$$

となる. 従って, 黒体の最大振動数は温度に対して直線的に変化することが示された.

同様に,  $B_\lambda(T)$  が最大となる波長  $\lambda_{\max}$  は

$$\left. \frac{\partial B_\lambda}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_{\max}} = 0 \quad (2.7)$$

を解くこと求めることができる. 仮に  $y \equiv hc/(\lambda_{\max} k_B T)$  とすると, これは  $y = 5(1 - e^{-y})$  を解くことに等しく, 近似根  $y = 4.97$  をもつ. よって,

$$\frac{hc}{\lambda_{\max} k_B T} = 4.97 \lambda_{\max} T = 0.290 \text{ cm deg} \quad (2.8a)$$

となる. 従って, 黒体の最大波長は温度に対して反比例することが示された.

ここで, プランク定数  $h = 6.63 \times 10^{-38} \text{ cm}^2 \text{ kg s}^{-1}$ , ボルツマン定数  $k_B = 1.38 \times 10^{-27} \text{ cm}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ K}^{-1}$ , 光速  $c = 3.0 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$  を用いた.

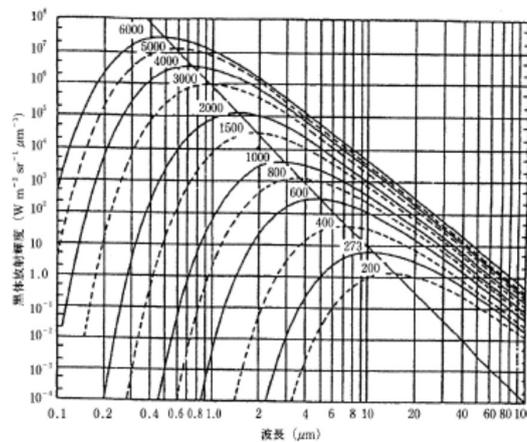


図 2.1: 様々な温度のプランク関数の波長分布 (浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎)

## 付録C ステファン・ボルツマンの法則の導出

ピストンを用いた黒体容器を考える。今、熱力学第 1 法則より、

$$dQ = dU + pdV \quad (3.1)$$

である。ここで、 $Q$  は熱量、 $U$  は総エネルギーである。熱力学第 2 法則より、

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (3.2)$$

である。ここで、 $S$  はエントロピーである。

断面積  $dA$ 、長さ  $cdt$  の円筒を通過する光線に対して、単位立体角、単位振動数当たりのエネルギー  $dE$  を考える。放射エネルギー密度  $u(\Omega)$  を用いると、

$$dE = u_\nu(\Omega) dA(cdt)d\Omega d\nu \quad (3.3)$$

となる。一方、放射は速度  $c$  で移動するので、時間  $dt$  内に円筒内の全ての放射は外へ通過する：

$$dE = I_\nu dA d\Omega dt d\nu. \quad (3.4)$$

上 2 式より、

$$u_\nu(\Omega) = \frac{I_\nu}{c}$$

を得る。これを全立体角について積分すると、

$$u_\nu = \int u_\nu(\Omega) d\Omega = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega \quad (3.5)$$

が導かれる。

$U = uV$ 、 $p = u/3$  であり、今、 $I_\nu = B_\nu$  であるので、(3.2) は

$$\begin{aligned} dS &= \frac{V}{T} \frac{du}{dT} dT + \frac{u}{T} dV + \frac{1}{3} \frac{u}{T} dV \\ &= \frac{V}{T} \frac{du}{dT} dT + \frac{4}{3} \frac{u}{T} dV \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる. さらに,  $dS$  は全微分であるので,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{V}{T} \frac{du}{dT}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{4}{3} \frac{u}{T} \quad (3.7)$$

である. ゆえに,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{1}{T} \frac{du}{dT} = -\frac{4}{3} \frac{u}{T^2} + \frac{4}{3} \frac{1}{T} \frac{du}{dT} \quad (3.8)$$

となり, これを整理すると,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dT} &= \frac{4u}{T}, \\ u(T) &= aT^4 \end{aligned} \quad (3.9)$$

となる. ここで,  $a$  は定数である. また,  $B_\nu$  は等方的であることに注意して, (3.5) を用いると, (3.9) は

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \int B_\nu(T) d\nu &= aT^4, \\ \pi B(T) &= \frac{ac}{4} T^4 \end{aligned} \quad (3.10)$$

が得られる. さらに,  $\sigma = ac/4$  と置けば, ステファン・ボルツマンの法則は導かれた.

## 付録D (4.7)の離散化

(4.7)

$$\int_{p_2}^{p_1} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\text{conv}} \frac{c_p}{g} dp = F_{\text{conv}} \quad (4.1)$$

を離散化することを考える。(4.7)を大気最下層に適用すると,

$$\frac{c_p}{g} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\text{conv},n} \Delta p_n = F_{\text{conv}}, \quad (4.2)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\text{conv},n} = \frac{T_n^{l+1} - T_n^*}{\Delta t} \quad (4.3)$$

より,

$$c_p T_n^{l+1} \frac{\Delta p_n}{g} = c_p T_n^* \frac{\Delta p_n}{g} + F_{\text{conv}} \quad (4.4)$$

を得る。また、最下層を除く、隣り合う2つの大気層に適用すると,

$$\frac{c_p}{g} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\text{conv},k} \Delta p_k + \frac{c_p}{g} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\text{conv},k+1} \Delta p_{k+1} = 0, \quad (4.5)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\text{conv},k} = \frac{T_k^{l+1} - T_k^*}{\Delta t} \quad (4.6)$$

より,

$$c_p T_k^{l+1} \frac{\Delta p_k}{g} + c_p T_{k+1}^{l+1} \frac{\Delta p_{k+1}}{g} = c_p T_k^* \frac{\Delta p_k}{g} + c_p T_k^* \frac{\Delta p_k}{g} \quad (4.7)$$

を得る。(4.4)を繰り返し適用するので、繰り返し回数を  $m$  で表すと,

$$c_p T_n^{(1)} \frac{\Delta p_n}{g} = c_p T_n^* \frac{\Delta p_n}{g} + F_{\text{conv}}^{(1)} \Delta t, \quad (4.8)$$

$$c_p T_n^{(2)} \frac{\Delta p_n}{g} = c_p T_n^* \frac{\Delta p_n}{g} + F_{\text{conv}}^{(2)} \Delta t, \quad (4.9)$$

$$c_p T_n^{(3)} \frac{\Delta p_n}{g} = c_p T_n^* \frac{\Delta p_n}{g} + F_{\text{conv}}^{(3)} \Delta t, \quad (4.10)$$

$$\vdots \quad (4.11)$$

より,

$$c_p T_n^{(m+1)} \frac{\Delta p_n}{g} = c_p T_n^{(m)} \frac{\Delta p_n}{g} + \Delta F_{\text{conv}}^{(m)} \Delta t \quad (4.12)$$

となる. ただし,

$$\Delta F_{\text{conv}}^{(m)} = F_{\text{conv}}^{(m)} - F_{\text{conv}}^{(m-1)}, \quad (4.13)$$

$$F_{\text{conv}}^{(0)} = 0 \quad (4.14)$$

である. 以上より, (4.7) は離散化された.

## 謝辞

本研究に関して、指導教官である林祥介教授、岩山隆寛准教授、高橋芳幸准教授には研究内容の指針を示して頂きました。

また、論文内容に関する相談をはじめ、様々なご指導や助言をして頂いた地球および惑星大気科学研究室の皆様へ深く感謝し、心からお礼を申し上げます。

## 参考文献

- [1] 浅野正二, 2010: 大気放射学の基礎, 朝倉書店
- [2] 国立天文台 編, 2015: 理科年表, 丸善出版株式会社
- [3] 小倉義光, 1984: 一般気象学, 東京大学出版
- [4] 本田秀次, 1983: 気象学のプロムナード 16 高層の大気, 東京堂出版
- [5] 清水幹夫, 1993: 惑星の科学, 朝倉書店
- [6] George B. Rybicki, Alan P. Lightman, 2004: Radiative Processes in Astrophysics, WILEY-VCH
- [7] John Houghton, 2002: The Physics of Atmospheres Third Edition, CAMBRIDGE
- [8] Syukuro Manabe, Robert F. Strickler, 1964: Thermal Equilibrium of the Atmosphere with a Convective Adjustment