

流体力学, 資料

林 祥介

2014 年 09 月 18 日

目次

1	基礎方程式とその形	1
2	角運動量保存則	2
3	渦度方程式と渦位保存則	3
4	エネルギー保存則	8
5	境界条件	10
A	物質の熱力学的特性	12

地球流体の中心的な話題である回転成層流体の力学に入る前に流体力学の基礎方程式を再掲し、そこから単純に導かれる基本法則を列挙しておく。

1 基礎方程式とその形

流体粒子にのった系でみた時間微分は

$$\frac{d\bullet}{dt} = \frac{\partial\bullet}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\bullet \quad (1)$$

と表現され、ラグランジュ微分と呼ばれるのであった。物理量の時間変化をラグランジュ微分によって表現することをラグランジュ形式 (Lagrange form) による表現という。ラグランジュ形式で、連続の式、運動方程式、熱力学の式 (エントロピー生成の式) を書き下すと次のようになる。

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\nabla p - \rho \nabla \Phi + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}', \quad (3)$$

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{Q}{T} \quad (4)$$

ここで、 \mathbf{v} は速度ベクトル、 ρ は密度、 p は圧力、 Φ は遠心力のポテンシャルエネルギー ($\frac{1}{2}|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}|^2$) を含む保存力のポテンシャルエネルギー、 $\boldsymbol{\Omega}$ は系の回転角速度ベクトル (定ベクトルである)、 $\boldsymbol{\sigma}$ は粘性ストレステンソル、 $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ はその発散であり、適当な適当な直線直交系で成分表示すれば $(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})_i = \sum_j \partial_j \sigma_{ij}$ 、 \mathbf{F}' はその他の非保存力、 s は質量当たりのエントロピー、 T は温度、 Q は体積当たりの非断熱加熱 (摩擦加熱や放射加熱など) である。方程式が閉じるためには s 、 ρ 、 T 、 p は熱力学関係式 (通常比熱と状態方程式) でしかるべく関係づけられていなければならない (一成分一層系なら独立な熱力学変数は二つ)。

ある物理量 A があって

$$\frac{dA}{dt} = 0 \quad (5)$$

とあらわせる時、 A は流体運動に沿って保存する量、あるいは、ラグランジュ的な保存量 (ラグランジュ保存量)、あるいは、単に保存量といい、上式はラグランジュ的な保存則、あるいは、単に保存則という。非断熱加熱がなければエントロピー s はラグランジュ的な保存量である。密度や速度はラグランジュ的な保存量ではない。

ラグランジュ形式による表現に対して、ある物理量の体積当たり量を a としてその時間変化が

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_a = Q_a \quad (6)$$

と表せる時、これをフラックス形式 (flux form) による表現という。物理量の時間変化を微小体積への流入流出として記述している式である。 \mathbf{F}_a は a の流量をあらわすベクトルで、 a のフラックスベクトル (流束ベクトル)、あるいは、単に a のフラックスという。 $\nabla \cdot \mathbf{F}_a$ は流入流出の差引による a の体積あたりの収束発散量をあらわす。 Q_a を a の生成消滅項と言い、フラックスのたまりという形では書けない項を集めたものである。流体力学において保存則あるいは保存量というときに

は, 流体粒子に沿ってのラグランジュ的な意味のものと, 体積あたり量としてのフラックス形式での二種類があるので注意する必要がある.

ある物理量の質量あたり量を A とする. 連続の式 (2) に注意すれば, ラグランジュ形式の表現とフラックス形式の表現とは次の同値関係があることがわかる.

$$\rho \frac{dA}{dt} = \frac{\partial \rho A}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} A) \quad (7)$$

したがって, 質量あたり量がラグランジュ的な保存量であれば, 体積あたり量 $a = \rho A$ もフラックス形式での保存量である. しかし, 逆は正しくはない. 体積あたり量 a のフラックスが $\mathbf{F}_a = \mathbf{v} a$ である, すなわち a は流れに流されているだけであるならば対応する質量あたり量はラグランジュ保存量である.

ラグランジュ形式の基礎方程式をフラックス形式の基礎方程式にすると次のようになる.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \sigma_{ij}) + 2\rho \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \Omega_j v_k = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + F'_i. \quad (9)$$

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} s) = \frac{Q}{T} \quad (10)$$

上から順に質量保存則, 運動量保存則, エントロピー保存則と呼ばれることもある. なお, 運動量はベクトル量であり, 運動量フラックスはテンソルであるので, 混乱を避けるため運動量保存則については, 適当な直線直交座標系の成分で表現した.

一般に流体中の混合物 c の密度 ρ_c の時間変化はフラックス形式では

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_c \mathbf{v}) = \rho_c Q_c \quad (11)$$

と表現される. ラグランジュ形式で書けば

$$\frac{d\chi_c}{dt} = Q_c \quad (12)$$

である. $\chi_c \equiv \rho_c / \rho$ は混合比と呼ばれる. 物質の生成消滅拡散がない, つまり $Q_c = 0$, であるならば, 混合比 χ_c がラグランジュ的保存量である.

2 角運動量保存則

地球や惑星の (流体) 運動を考える際の重要なチェックポイントは角運動量の収支である. 世界の生成流転のシナリオは角運動量の保存性を満たすように構成しなければならない.

流体での角運動量保存則は運動量保存則に位置ベクトル \mathbf{x} を外積して直ちに得られる. が, 回転系上で考える場合には回転軸を円筒座標の z 方向や球座標の頂点方向に選んで, 運動方程式の軸周り

方向成分を書き下してみるのがよい. たとえば球座標形では運動方程式の λ 成分 (付録参照) に軸からの距離 $r \cos \phi$ をかけて変形すれば

$$\rho \frac{d}{dt} (r \cos \phi v_\lambda + r^2 \cos^2 \phi \Omega_z) = -\frac{\partial p}{\partial \lambda} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + r \cos \phi F'_\lambda \quad (13)$$

である. $r \cos \phi v_\lambda + r^2 \cos^2 \phi \Omega_z$ は静止系から見た自転軸の周りの角運動量であり, これを絶対角運動量という¹.

ラグランジュ形の表現に対応して, 絶対角運動量のフラックス形での表現は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \{ \rho (r \cos \phi v_\lambda + r^2 \cos^2 \phi \Omega_z) \} \\ & + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \{ \rho v_\lambda (r \cos \phi v_\lambda + r^2 \cos^2 \phi \Omega_z) \} \\ & + \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \{ \rho \cos \phi v_\phi (r \cos \phi v_\lambda + r^2 \cos^2 \phi \Omega_z) \} \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \{ \rho r^2 v_r (r \cos \phi v_\lambda + r^2 \cos^2 \phi \Omega_z) \} \\ & = -\frac{\partial p}{\partial \lambda} - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + r \cos \phi F'_\lambda \end{aligned} \quad (14)$$

である.

系が λ 対称性を持っている, すなわち, 外力ポテンシャル Φ が λ に依存せず, かつ, その他の力の λ 成分が存在しない $F'_\lambda = 0$ 場合でも, 圧力傾度力があるので絶対角運動量はラグランジュ的な保存量ではない. 質点力学でいえば粒子間に相互作用がある場合である. 各質点のもつ角運動量は保存しない. しかし, フラックス形式としては保存量である. 全系で積分した角運動量は保存していなければならない, という質点力学で良く知られる事実に対応している.

3 渦度方程式と渦位保存則

地球流体では, 渦, が運動を記述する基本概念の一つとなっている. 渦を具体的に記述するための単語は, 渦度 (vorticity), 循環 (circulation), そしてポテンシャル渦度 (渦位, potential vorticity) である. ポテンシャル渦度は循環を局所的な量として表現しなおしたものである.

渦度 (または渦度ベクトルとも呼ぶ) は

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \boldsymbol{v} \quad (15)$$

¹運動方程式の軸回り成分はもともと角運動量保存則であったのである. 解析力学的には, 角運動量に関する表現を得てから通常の運動方程式に至る方が筋にかなっている. ここではわざわざ逆向きに変形を進めたことになる. 質量当たりの運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2} (r^2 (\dot{\lambda} + \Omega_z)^2 \cos^2 \phi + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{r}^2)$$

であるから, ただちに表現

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{\lambda}} - \frac{\partial K}{\partial \lambda} = \frac{d}{dt} (r \cos \phi v_\lambda + r^2 \cos^2 \phi \Omega_z)$$

が得られる. ただし, $v_\lambda = r \cos \phi \dot{\lambda}$. メトリック加速項も微分を展開することによりたやすく得られる.

で定義される. 回転系ではこれを相対渦度 (relative vorticity) と呼ぶことがある. ちなみに, 慣性系から見た速度 $\mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$ に対する渦度は

$$\boldsymbol{\omega}_a \equiv \nabla \times \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \quad (16)$$

となるが, これを絶対渦度 (absolute vorticity) と呼ぶ.

渦度の時間発展を与える式, 渦度方程式を導こう. (3) 式の回転 $\nabla \times$ をとる. (3) 式の移流項は $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}$ と書けることに注意すれば, 渦度方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_a}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}_a + \boldsymbol{\omega}_a \nabla \cdot \mathbf{v} - (\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p + \nabla \times \mathbf{F}. \quad (17)$$

が得られる².

渦度は流体運動によって移流される $(\mathbf{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}_a)$ のみならず, 流れの場によって

$$\boldsymbol{\omega}_a \nabla \cdot \mathbf{v} - (\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (18)$$

で表される変形をうける. 渦度は単純な保存法則の形には書けない量なのである.

流れの場による渦度の変形の様子をより詳細に見るために, 空間上のある点で, その点での渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_a$ の方向に z 軸をもつ直線直交座標系 x, y, z をとり, 上記変形項を成分で表示すると

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\omega}_a \nabla \cdot \mathbf{v} - (\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla) \mathbf{v}]_x &= -\zeta_a \frac{\partial u}{\partial z}, \\ [\boldsymbol{\omega}_a \nabla \cdot \mathbf{v} - (\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla) \mathbf{v}]_y &= -\zeta_a \frac{\partial v}{\partial z}, \\ [\boldsymbol{\omega}_a \nabla \cdot \mathbf{v} - (\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla) \mathbf{v}]_z &= \zeta_a \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

よって, この直線直交座標系での渦度方程式 (17) の左辺は

$$\frac{d\xi_a}{dt} - \zeta_a \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{d\eta_a}{dt} - \zeta_a \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{d\zeta_a}{dt} + \zeta_a \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

となる. ここで渦度と速度を $\boldsymbol{\omega}_a = (\xi_a, \eta_a, \zeta_a) \mathbf{v} = (u, v, w)$ と成分表示した. 渦度の x, y 成分の値は $\xi_a = \eta_a = 0$ であるが $\zeta_a \frac{\partial u}{\partial z}$, $\zeta_a \frac{\partial v}{\partial z}$ によって生成される. これらの項は起き上がり項 (tilting term) と呼ばれ, 渦度ベクトルと直交する (x, y) 方向の流れが渦度ベクトル方向 z に依存して変わる時, 渦度が傾いて ξ_a, η_a が生成することを示している. 渦度の z 成分は $\zeta_a \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ によ

²

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= -(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{B} \\ \nabla \times \nabla \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 &= 0 \\ \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}$$

に注意して

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) &= -\nabla \times (\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \nabla \times \mathbf{v} + \nabla \times \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} - (\nabla \times \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \end{aligned}$$

て変化する. この項は渦度の (水平) 収束項と呼ばれる. 渦度ベクトルと直交する平面上で流れの場に収束があれば $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) < 0$ 渦度はかき集められて強められる. 非発散流体, あるいは, 圧縮性があまり強くない時には $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \sim -\frac{\partial w}{\partial z}$ なので

$$\frac{d\zeta_a}{dt} - \zeta_a \frac{\partial w}{\partial z}$$

$\frac{\partial w}{\partial z}$ を渦の伸び縮み項 (stretching - shrinking term) と呼ぶ. 渦が引き伸ばされる (stretching), すなわち, $\frac{\partial w}{\partial z} > 0$ ならば渦の大きさが増大する.

なお, 渦度方程式 (17) の右辺

$$\frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla p$$

は傾圧項 (baroclinic term) と呼ばれる. 圧力傾度力 (∇p) と密度勾配 ($\nabla \rho$) とが平行でないときに渦を生成するトルクが発生することをいっている. たとえば圧力傾度力が一定でも密度が場所によって異なると一般には渦が生成される (水平対流が発生する).

渦度は単純な保存量ではないので物理的な記述道具としては使い勝手が悪い. 物理学では保存量 (たとえば運動量やエネルギーなど) をうまくつかまえて現象の記述・予言を行うのが定石である. 渦の挙動を記述するのに渦度よりも保存性のよい量として登場するのが循環またはポテンシャル渦度である. 渦度は単純な保存量でないといったけれども, 実は渦度方程式 (17) は独特な形をしていて, 流体とともに運動する適当な量を容易に定義できるのである.

循環 Γ は流体中の閉曲線 c 上の速度の線積分として定義される:

$$\Gamma \equiv \oint_c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_A \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} \quad (19)$$

後半はストークスの定理によって c で囲まれた面 A 上の面積分には書き換えたものである. 循環は渦度の面積分として与えられる. 回転系ではさらに系のもつ渦度 $2\boldsymbol{\Omega}$ をたしあわせて全循環を定義する:

$$\Gamma_a \equiv \int_A (\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}) \cdot d\mathbf{S} \quad (20)$$

循環の時間発展を与える式を求めよう. 多少の計算を行うと

$$\frac{d}{dt} \int_A \boldsymbol{\omega}_a \cdot d\mathbf{S} = \int_A \left[\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_a}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}_a + \boldsymbol{\omega}_a \nabla \cdot \mathbf{v} - (\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] \cdot d\mathbf{S}$$

であることがわかる³. よって Γ_a の時間変化は (17) から直ちに得られて

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = \int_A \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \cdot d\mathbf{S} + \oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (21)$$

³この関係式は恒等式であり, $\boldsymbol{\omega}_a$ が循環であることはつかっていない. 導出がわかりにくければ無限小変化をちゃんと考察する. $t = t$ での面領域 A が $t = t + \delta t$ で面領域 A' に移動した. そのとき A と A' にはさまれた筒型の体積領域を D , 筒の側面を \bar{A} とする.

$$\frac{d}{dt} \int_A \boldsymbol{\omega}_a \cdot d\mathbf{S} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{A'} \boldsymbol{\omega}_a(t + \delta t) \cdot d\mathbf{S} - \int_A \boldsymbol{\omega}_a(t) \cdot d\mathbf{S} \right]$$

となる.

(21) は, 次の仮定

- 右辺第一項が 0, たとえば, ρ が p のみの関数で与えられる (順圧, barotropic, すなわち $\nabla\rho$ と ∇p は平行), あるいは, 面 A の法線ベクトルが $\nabla\rho \times \nabla p$ と直交する.
- 右辺第二項が 0, すなわち, 非保存力 ($\nabla\Phi$ とは書けない力) と粘性とが働いていない.

が成り立つときに, 全循環 Γ_a は流れに沿って保存する量であるといっている. これを Kelvin の循環定理という. 散逸の無い理想流体では順圧という条件がなくても上記仮定第一項を満たすような面が存在することは熱力学を用いれば容易に理解される. 例えば等エントロピー面を持ってくれば, それは, ρ, p の関数で書けるので, その法線ベクトルは $\nabla\rho \times \nabla p$ と直交する.

積分形の保存量である循環 Γ_a を微分形になおしたものがポテンシャル渦度である. 流れに沿って保存する物理量 λ を考える. すなわち, $\frac{d\lambda}{dt} = 0$ である. 例えば, 散逸を無視できる時にはこのような保存量としてエントロピー s を用いることができる. $\nabla\lambda \neq 0$ としよう. $\lambda = \text{一定}$ という条件は流体中に一つの面を定義する. 流体の運動に伴ってこの面の上にある流体粒子はこの面の上から離れない (λ は同じ値をとらなくちゃいけないので). $\lambda = \text{一定}$ で定義される面は流体粒子とともに運動する. この面上に微小領域をとると, その微小領域も流体の運動とともに運動する. 領域上にあった流体粒子は領域から離れない.

循環を定義する面としてこの微小領域を考える. 面の法線ベクトルが $\nabla\lambda$ と平行であることを考慮すれば

$$\int \int_A \boldsymbol{\omega}_a \cdot d\mathbf{S} \sim \boldsymbol{\omega}_a \cdot \frac{\nabla\lambda}{|\nabla\lambda|} \delta S = \boldsymbol{\omega}_a \cdot \frac{\nabla\lambda}{|\nabla\lambda|} \frac{\delta m}{\rho \delta l} = \frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla\lambda}{\rho} \frac{\delta m}{\delta \lambda}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{A'} (\boldsymbol{\omega}_a(t + \delta t) - \boldsymbol{\omega}_a(t)) \cdot d\mathbf{S} + \left(\int_{A'} - \int_A + \int_{\tilde{A}} \right) \boldsymbol{\omega}_a(t) \cdot d\mathbf{S} - \int_{\tilde{A}} \boldsymbol{\omega}_a(t) \cdot d\mathbf{S} \right] \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_A \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_a}{\partial t} \delta t \cdot d\mathbf{S} + \int_D \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}_a dV - \int_c \boldsymbol{\omega}_a \cdot d(\mathbf{l} \times \mathbf{v} \delta t) \right] \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_A \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_a}{\partial t} \delta t \cdot d\mathbf{S} + \int_A \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}_a d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} \delta t + \int_c \boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{v} \delta t \cdot d\mathbf{l} \right] \\ &= \int_A \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_a}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_A \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}_a \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} + \int_A \nabla \times (\boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_A \left[\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_a}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}_a + \boldsymbol{\omega}_a \nabla \cdot \mathbf{v} - (\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

一般にベクトル場 \mathbf{B} に対して

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0$$

であるときベクトル場 \mathbf{B} は流体に凍結 (freeze) されているという.

$$\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

であるからである. $\int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ をベクトル管の強さという.

と変形される. ただし, δS は微小領域の面積, δl は面 λ と面 $\lambda + \delta\lambda$ との距離, δm は底面を当該微小領域とする, 面 λ と面 $\lambda + \delta\lambda$ で切り取られた, 高さ δl の, 流体粒子とともに運動する微小柱体の質量である. δm および $\delta\lambda$ は流れの保存量で $\frac{d\delta m}{dt} = 0, \frac{d\delta\lambda}{dt} = 0$ であることに注意.

さて, 循環の時間発展を与える式 (21) をこの微小領域で評価すると

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla \lambda \delta m}{\rho \delta \lambda} \right) = \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \cdot \frac{\nabla \lambda \delta m}{\rho \delta \lambda} + \nabla \times \mathbf{F} \cdot \frac{\nabla \lambda \delta m}{\rho \delta \lambda}$$

$\delta m / \delta \lambda$ は流れに沿って保存する量であったから, 両辺を $\delta m / \delta \lambda$ で割って結局,

$$\frac{d}{dt} \frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla \lambda}{\rho} = \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^3} \cdot \nabla \lambda + \nabla \times \mathbf{F} \cdot \frac{\nabla \lambda}{\rho}. \quad (22)$$

ここで

$$\frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla \lambda}{\rho} \quad (23)$$

をポテンシャル渦度という. (22) はポテンシャル渦度の時間変化を示す式であり, ポテンシャル渦度方程式 (渦位方程式, potential vorticity equation) と呼ばれる. 循環の時と同様の条件のもとで

- 右辺第一項が 0, たとえば, ρ が p のみの関数で与えられる (順圧, barotropic, $\nabla \rho$ と ∇p は平行), または, λ が p, ρ の関数, つまり, λ が熱力学関数である,
- 右辺第二項が 0, すなわち, 非保存力 ($\nabla \Phi$ とは書けない力) と粘性とが働いていない,

の時には, (22) 右辺は 0 となり, ポテンシャル渦度は流れに沿っての保存量となる⁴.

ポテンシャル渦度は気象学・海洋学では q という文字を用いてあらわされることが多い. 初期の数値天気予報でやっていたことはこの q の移流を計算することであった. いわゆる低気圧高気圧は渦に他ならず, その移流を計算できれば天気がわかる, というわけである. あとで述べるように, ポテンシャル渦度保存則はロスビー波と呼ばれる構造のもとになっている. 高気圧低気圧は 2 つのロスビー波の相互作用によって生じる不安定波動, 傾圧不安定, として理解されている. q は, 方程式の表現では流れに沿って保存する受動的に流されていくだけの量なのであるが, 渦度から生成される速度場をとおして q 自身を移流させていく能動的な働きを持った量でもある. 2 種類の渦が流れの場を通して相互作用し, お互いを強めることができるのである.

⁴ポテンシャル渦度方程式は連続の式, 渦度方程式, スカラー量 λ の式から直接導き出せる. より一般的に λ は厳密には保存せず, 生成消滅項 Ψ をもつものとして $\frac{d\lambda}{dt} = \Psi$ とすると渦度方程式の (17) の両辺を ρ で割って, 連続の式 (2) を考慮すれば,

$$\frac{d}{dt} \frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^3} + \frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{F}.$$

これと $\nabla \lambda$ との内積をとり, $\frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla \Psi$ を両辺に加えると,

$$\frac{d}{dt} \frac{\boldsymbol{\omega}_a \cdot \nabla \lambda}{\rho} = \frac{\boldsymbol{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla \Psi + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^3} \cdot \nabla \lambda + \nabla \times \mathbf{F} \cdot \frac{\nabla \lambda}{\rho}. \quad (24)$$

がポテンシャル渦度保存則である. $\Psi = 0$ の時には先に求めた表現 (22) に一致する.

流体運動を記述する手段の一つとして, ポテンシャル渦度分布を図示することもよくおこなわれている. 上に述べたように非散逸系, つまり, 理想流体では q は保存量⁵であり, 流体運動をトレースする指標として役立つことが期待されるからである.

4 エネルギー保存則

通常, 加熱を表現するのにエントロピーの時間変化として書くことが多いので, は基礎方程式を構成する熱力学の式としては全エネルギー保存則ではなく, エントロピー生成の式を用いる. また, 圧力の時間変化を他の量に比べて無視できる場合にはエンタルピーが有用な量となる. 以下ではこれら相互の関係を述べる.

流体粒子の質量当たりのエネルギーは運動エネルギーと内部エネルギーである. 微小領域での熱力学の第一法則は

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \varepsilon \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} (-p \delta_{ij} v_i + \sigma_{ij} v_i) - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} v_i + F'_i v_i + Q' \quad (25)$$

と表現される. ε は質量あたりの内部エネルギー, Q' は外界からの加熱である. ここで, 同じ添字が 2 度現れる項はその添字での積和を取るものとして \sum を省略して表記している. 以下, 繁雑なので非保存力の外力 \mathbf{F}' によるエネルギー生成 (仕事または発熱) は考えない事にする. ポテンシャルエネルギーを左辺に移して表現すれば

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \varepsilon + \Phi \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} (-p \delta_{ij} v_i + \sigma_{ij} v_i) + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + Q' \quad (26)$$

$\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \varepsilon + \Phi$ は質量当たりの全エネルギーである. 通常ポテンシャルは時間に依存しないので $\partial \Phi / \partial t = 0$ である. 以後ポテンシャルは時間に依存しないものとしてこの項を省略することにする. 全エネルギーの式をフラックス形で書けば

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \varepsilon + \Phi \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \rho v_j \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + h + \Phi \right) - \sigma_{ij} v_i \right\} = Q' \quad (27)$$

となる. ここで $h = \varepsilon + \frac{p}{\rho}$ は質量あたりのエンタルピーである.

⁵ポテンシャル渦度という保存量, ついでに言えば q の任意関数 $f(q)$ も保存量, が存在するゆえんのは流体の記述そのものに根ざしている. N 個の質点系の運動は座標と運動量に関する $6N$ 個の方程式で記述される. N をどんどん増やして連続無限大にしたもの (質点の添字 i を空間の座標 \mathbf{x} に変えたもの) が流体であるとすると, 流体の運動は場の量に関する 6 つの方程式で記述されるのが自然であるような気がする. が, 実際には, 質量保存則, 運動量保存則, エネルギー保存則の $1 + 3 + 1 = 5$ つの式で書いており 1 つ足りない. 1 つ足りなくてすんでいるのは, 流体運動の記述では質点の記述にくらべてサボっている部分があるからである. かわりに熱力学を導入したわけである. 流体運動の記述では通常流れの場 (速度場) のみを気にする. 流体粒子がどこからどこへいくかはあまり気にしない. 逆に, 流体粒子がどこからどこへいくかを知りたくなったら, 速度場を再度積分しなければならない. 流体の運動は流体粒子のラベルのはり方にはよらない (座標の付け方を気にしない), このような対称性をラベル対称性という. 運動量保存則が系の並進対称性に起因している, あるいは, エネルギー保存則が系の時間対称性に起因している, それらとおなじようにラベル対称性に起因している保存則がある. それがポテンシャル渦度保存則である. ポテンシャル渦度はその意味で残りの 1 つの方程式に対応していることになる. ラベルのはり方が無限通りあるのに対応してポテンシャル渦度の無限個の任意関数もまた保存量である. 同じ流体の運動に対して流体粒子のラベルのはり方はいろいろある, というのを思い出す簡単な方法は「墨流し」あるいは色付けである. 墨のおとし方を変えれば, 同じ流れの場でも違った形状の発展が見て取れる. 流体の運動の記述ではこれら墨の形状の違いは区別しないのである. ポテンシャル渦度のように一般に系の構造にくらべて記述自由度の方が減ってしまったことによってうまれる保存量をカシミール (casimir) という.

運動エネルギーの式は運動方程式 (3) と \mathbf{v} との内積をとって

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \Phi \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} v_i \quad (28)$$

となる。フラックス形では

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \Phi \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \rho v_j \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{p}{\rho} + \Phi \right) - \sigma_{ij} v_i \right\} \\ & = p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (29)$$

$p \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ は熱力学的にされた仕事 (運動エネルギーの増分) であり ($\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$ は単位時間当たりの質量当たりの体積増分), $-\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ は後で記すように粘性散逸による運動エネルギーの消滅分である。

内部エネルギーの式は, 全エネルギーの式から運動エネルギーの式を差引すれば, ラグランジュ形式なら

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + Q'. \quad (30)$$

内部エネルギーの変化は体積変化による仕事と質味の加熱量 (非断熱加熱という) $Q = \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + Q'$ による。流体では $\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ は不可逆な仕事であり, 非断熱加熱になる。実際ニュートン流体なら

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \\ &= \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \zeta (\nabla \cdot \mathbf{v})^2. \end{aligned}$$

よって $\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ は正定値であることがわかる。ちなみに弾性体では $\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ に対応する項は弾性エネルギーの時間変化であり, 体積変化による仕事の項に加えられるべきものである。

熱力学の式として (4) に上げた式は熱力学関係式 $\frac{d\varepsilon}{dt} = T \frac{ds}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}$ と連続の式を用いて, 内部エネルギーの式をエントロピー s の式に書きかえたものである:

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{Q}{T}. \quad (31)$$

流体を記述する基礎方程式としての熱力学の式は以上 (全エネルギーの式, 内部エネルギーの式, あるいはそれと等価なもの) のどれを用いてもよい。

最後に, 全エネルギーの式 (27) をエンタルピー $h = \varepsilon + p/\rho$ を使って書く表現を上げておこう。実用上有用なのでよく用いられる表現である。ラグランジュ形式で書けば

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + h + \Phi \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} v_i) + Q'. \quad (32)$$

となる⁶. 大気などのゆっくりと運動する圧縮性流体で力を発揮する式は, 全エネルギーの保存則 (32) において, 内部エネルギーに比べて運動エネルギーを無視し, かつ, 圧力の時間変化を無視したものである:

$$\rho \frac{d}{dt} (h + \Phi) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} v_i) + Q'. \quad (33)$$

音速にくらべて流速 $|\mathbf{v}|$ が遅い場合は熱的なエネルギーの増減の方が運動エネルギーの増減よりもはるかに大きいので全エネルギーの式では運動エネルギーの寄与が無視できる. このような状況のもとで $h + \Phi$ は近似的なラグランジュ的保存量である. $h + \Phi$ のことを気象学では静的エネルギー (static energy) という. 大雑把な言い方をすれば, 流体の運動とともに $c_p T + gz$ が保存される, である. いうまでもなく理想気体では $h = c_p T$, 惑星表層での重力ポテンシャルは gz である. この近似保存量は T と z に関して線形なのでなにかと都合がよいので気象学ではよく用いられる.

5 境界条件

基礎方程式系を実際に積分するためには境界条件が必要である. 境界は領域を区切る壁であったり, 流体と流体を区切る界面であったり, あるいはまた計算上仕方がないので設ける (通常無限空間は計算できない) 便宜上の端であったりする.

境界条件として何を与えなければならないかは方程式系をフラックス形式に書いておくとわかりやすい. 物理量 a の方程式が

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_a = Q_a$$

と与えられているとき, 境界条件として境界で定める方式を与えなければならない量はフラックスの境界面を横切る成分

$$\mathbf{F}_a \cdot \mathbf{n} \quad (34)$$

である. ここで \mathbf{n} は境界面の法線ベクトルである.

流体中に不連続面があるような場合には (たとえば水と油の境界面) フラックスの法線成分が不連続面で連続である, というのが与えるべき境界条件になる. 境界面に平行な面 S と境界を横切る方

⁶特に, 定常 $\partial/\partial t = 0$, 非散逸 $\sigma_{ij} = 0$, $Q' = 0$ であれば

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + h + \Phi \right) = 0.$$

流線に沿って $\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + h + \Phi$ は一定である. これをベルヌーイ (Bernoulli) の定理という. ベルヌーイの定理はバロトロピック流体の定常な流れの記述に力を発揮する. バロトロピック流体では $\rho = \rho(p)$ でありしたがって非散逸系では

$$0 = T \frac{ds}{dt} = \frac{dh}{dt} - \frac{1}{\rho(p)} \frac{dp}{dt} = \frac{dh}{dt} - \frac{d}{dt} P(p)$$

と変形できる. ただし $P(p) \equiv \int \frac{1}{\rho(p)} dp$. よってベルヌーイの定理の熱力学関数 h は圧力だけでかけて

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + P(p) + \Phi = \text{const}$$

となる. 流線の端点での境界条件がわかっておれば流れの場から圧力が直ちに求められる.

向に無限小の厚さをもち, 境界とともに運動する無限小体積 D で (34) を積分する. 体積積分は無
限小なので厚さ $\rightarrow 0$ の極限では

$$\begin{aligned}\int_D \frac{\partial a}{\partial t} dV &= \frac{\partial}{\partial t} \int_D a dV - \int_{\partial D} a \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow - \int_S [a_2 - a_1] \mathbf{v}_S \cdot d\mathbf{S} \\ \int_D \nabla \cdot \mathbf{F}_a dV &\rightarrow \int_S [\mathbf{F}_{a2} - \mathbf{F}_{a1}] \cdot d\mathbf{S} \\ \int_D Q_a dV &\rightarrow 0\end{aligned}$$

なので結局

$$- [a_2 - a_1]_S \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n} + [\mathbf{F}_{a2} - \mathbf{F}_{a1}]_S \cdot \mathbf{n} \quad (35)$$

ここで添字 S は不連続面上での値であることを, \mathbf{v}_S は不連続面の運動速度, また, 添字 1, 2 は不
連続面で隔てられた流体領域をしるす.

流体の基礎方程式系に関して境界面で定め方を指定すべきフラックスは, 質量フラックス, 運動量
フラックス (i 成分, $i = 1, 2, 3$) 全エネルギーフラックスの 5 つである. すなわち

$$\rho v_j n_j \quad (36)$$

$$(\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \sigma_{ij}) n_j \quad (37)$$

$$\left\{ \rho v_j \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + h + \Phi \right) - \sigma_{ij} v_i \right\} n_j \quad (38)$$

ここで n_j は境界面の法線ベクトル \mathbf{n} の成分である.

熱力学の式に関してエントロピーフラックスではなく全エネルギーフラックスを上げておいたのは
実用上の問題である. 境界でエントロピーフラックスがいくつになっているかを定めるのは通常容
易ではない.

境界面が流体内部の不連続面あるいは海面のような自由境界面である場合には境界面の位置それ自
体を流体の基礎方程式を解いて決定しなければならない. 境界面を表す方程式を $f(\mathbf{x}, t) = 0$ とす
る. 境界上の流体粒子は境界とともに動かなければならないので

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla f(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (39)$$

これを運動学的境界条件という. $t = 0$ での境界の形 $f(\mathbf{x}, 0) = 0$ がわかっておれば, 速度場の情報
をあたえることにより, 運動学的境界条件を積分することにより, 任意の時刻での境界の形が得ら
れる.

少し特殊ではあるがよく使われる例題を一つ上げておく. 衝撃波と呼ばれるものである. そのもっ
とも簡単な記述は衝撃波面を流体中の不連続面としてとらえるものであり, さらに簡略なのは, 流
速ベクトルが衝撃波面と直交している定常な 1 次元衝撃波である. 定常なので衝撃波とともに運動
する座標系で記述すれば不連続面は動かない. 衝撃波面と直交する方向に座標軸をとれば, 速度成
分は 1 成分だけで表せる. 質量, 運動量, エネルギーのフラックスに関する連続条件を書き下せば

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (40)$$

$$\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_2^2 + p_2 \quad (41)$$

$$\rho_1 v_1 \left(\frac{1}{2} v_1^2 + h_1 \right) = \rho_2 v_2 \left(\frac{1}{2} v_2^2 + h_2 \right) \quad (42)$$

である。ただし、衝撃波をはさんだ両側の領域での粘性散逸や熱伝導によるフラックスを無視した。 h は p, ρ の関数 (理想気体なら $h = \gamma p \rho / (\gamma - 1)$, γ は比熱比) なので、衝撃波の前後についての条件を 3 つ定めると (たとえば ρ_1, ρ_2, p_1) 残りの状態は決定されてしまう (たとえば v_1, v_2, p_2)。衝撃波では密度の不連続があるので、面の前後で流速やエントロピーも不連続である。

A 物質の熱力学的特性

熱的な過程が重要になる場合、たとえば流体の対流運動など、を扱うためにはエネルギーの表現を他の熱力学量に関係づけておかなければ方程式系は閉じない。このためには、単相の純物質ならば比熱と状態方程式を与えればよい。

理想流体を例にとりて説明すれば次のようになる。系を記述する方程式は、連続の式、運動法則、エネルギーのつりあいの 5 つで

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{F} \\ \rho \frac{d\varepsilon}{dt} &= Q - p \nabla \cdot \mathbf{v}\end{aligned}$$

である。 \mathbf{F} は外力、 Q は加熱をあらわす。この方程式系を積分するためには内部エネルギー ε を ρ, p で表現しなければならない。それが可能であれば 5 つの時間発展方程式に対して、変数が \mathbf{v}, ρ, p の 5 つになり、初期値を与えればめでたく世界の発展が予言できることになる。

実際、熱力学の教えるところによれば、一成分一相系 (単相の純物質) では熱力学的に独立な変数は 2 つしかなく、あとの熱力学量はその 2 つの量の関数として定まる。関数の具体的な形は実用的には比熱と状態方程式で与えられる。実際、たとえばある圧力 $p = p_0$ での定圧比熱 $c_p = c_p(p_0, T)$ と状態方程式 $\rho = \rho(p, T)$ が与えられれば、

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \frac{c_p}{T} \quad (43)$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial \rho^{-1}}{\partial T} \right)_p \quad (44)$$

であるから、エントロピーの関数形 ((p, T) 依存性) は

$$s(p, T) = s(p_0, T_0) + \int_{T_0}^T \frac{c_p(p_0, T')}{T'} dT' - \int_{p_0}^p \left(\frac{\partial \rho^{-1}(p', T)}{\partial T} \right)_p dp' \quad (45)$$

で与えられ、それによってギブスの自由エネルギーの関数形 ((p, T) 依存性) は

$$g(p, T) = g(p_0, T_0) - \int_{T_0}^T s(p_0, T') dT' + \int_{p_0}^p \rho^{-1}(p', T) dp' \quad (46)$$

で与えられる。内部エネルギーが必要なら $\varepsilon = g + sT - p\rho^{-1}$ で得られる。

比熱や状態方程式を与えられている実際の応用の場合には、このように熱力学関係式を積分して熱力学関数を求めていくのではなく、熱力学関係式そのものを使ってエネルギーの式を変形していく

のが通常である。熱力学関係式を用いるのはむしろ比熱や状態方程式が統計力学などを使って別途求められる場合、あるいは複数の成分や相があって、その複号系の比熱と状態方程式を求めるような場合、ということになる。

先の例の場合はエネルギーの式を次のように変形してしまう。熱力学関係式を用いれば内部エネルギーはエントロピーと密度で次のように書ける。

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon}{dt} &= T \frac{ds}{dt} - p \frac{d\rho^{-1}}{dt} \\ &= T \frac{ds}{dt} - p \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v}\end{aligned}\quad (47)$$

よってエネルギーの式は単に

$$T \frac{ds}{dt} = Q \quad (48)$$

これは加熱の分だけエントロピーが増える、という式に他ならない。さらに熱力学関係式を用いてエントロピーの時間変化を温度と圧力の時間変化であらわせば

$$T \frac{ds}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - \left(\frac{\partial \rho^{-1}(p, T)}{\partial T} \right)_p \frac{dp}{dt} \quad (49)$$

となるのでエネルギーの式は比熱と状態方程式を介して (p, T) で表現されたことになる。状態方程式を再度つかえば変数は (p, ρ) に変換されはじめに述べた独立な熱力学変数の組に至る。

より複雑な系、たとえば多成分多相系でない、あるいは理想流体でない、などなどの場合には具体的な系の設定によって扱いが変わるのでここでは詳述しないことにする。複雑な系では熱力学関数(ギブスの自由エネルギー)をきちんと書き下すことが必要になるであろう。