ロスビー波(2次元非発散β面)

林 祥介・竹広真一

2014 年 7 月 18 日

1 ロスビー波とは

ロスビー波とはポテンシャル渦度保存則に根をもつ波動擾乱の総称名称である. ポテンシャル渦度保存則が形式的に

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad} q \quad = \quad 0 \tag{1}$$

と書き下されているものとしよう. ここで, q はポテンシャル渦度, $\boldsymbol{v}$ は流速場, (t, $\boldsymbol{x}$) は時間空間座標である. ポテンシャル渦度と流速場との間に時間微分を含まない適当な作用素 $\mathcal{L}$ が (近似的に) 存在して

$$\boldsymbol{v} \quad = \quad \mathcal{L}(q) \tag{2}$$

と書き表されるとき, (1) は q の t に関する 1 階の偏微分方程式となる. 得られた方程式はその波動解を議論する際にはロスビー波の式と呼ばれる.

地球流体で議論される線型波動擾乱としてのロスビー波はポテンシャル渦度が $Q(y)$, 流れが $U(y)$ である基本場に対する微小擾乱

$$\left\{ \begin{array}{lll} q = & Q+ & q' \\ u = & U+ & u' \\ v = & & v' \end{array} \right.$$

として現れる. このような状況下でのポテンシャル渦度保存則は

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + U\frac{\partial q'}{\partial x} + \frac{dQ}{dy}v = 0.$$

である (鉛直移流項がなくなっていることに注意).

以下では, 成層・粘性のない β 面 2 次元シアー流中の微小擾乱を考える. このような状況はロスビー波のもっとも簡単な描像を与える.

2 基礎方程式, 線型化

系として β 面上の 2 次元非発散系を考察する. 支配方程式は次のように書きくださせる.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{du}{dy}-fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{dv}{dy}+fu=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{5}$$

ただし $f(y)=f_0+\beta y$, $\rho=\mathrm{const.}$ である[1].

基本場が $u=U(y)$ である流れに対する線型化された擾乱の方程式は,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+U\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{dU}{dy}-fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+U\frac{\partial v}{\partial x}+fu=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{8}$$

(3) より流線関数 $u=-\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$, $v=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ を導入することができる. (6)∼ (8) より渦度方程式を作ると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi\left(\beta-\frac{d^2U}{dy^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}=0. \tag{9}$$

この方程式は (1) において基本場のポテンシャル渦度は $Q(y)=f(y)-\dfrac{dU}{dy}$, 擾乱のポテンシャル渦度は $q'=\nabla^2\psi$, 速度 $v=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ とした場合に相当する.

特に $U(y)\equiv 0$ のとき, 線型化された方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+fu=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{12}$$

また, (9) は次のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=0. \tag{13}$$

[1] この導出についてはシリーズ ‘2 次元非圧縮流体の支配方程式’ を参照せよ

3 分散関係, 群速度

以下, ロスビー波をつかさどるもっとも単純な方程式 (13) を取り上げ, ロスビー波のイメージをつかむことにする.

3.1 分散関係

分散関係式をもとめるために解として平面波の形 $\psi = \psi_0 e^{i(kx+ly-\omega t)}$ を (13) に代入し整理すると

$$\boxed{\omega = -\frac{\beta k}{k^2+l^2}. \qquad (14)}$$

これが 2 次元非発散ロスビー波の分散関係である.

3.2 位相速度

$$c_{px} \equiv \frac{\omega}{k} = -\frac{\beta}{k^2+l^2}, \qquad (15)$$

$$c_{py} \equiv \frac{\omega}{l} = -\frac{\beta k}{l(k^2+l^2)}. \qquad (16)$$

$c_{px} < 0$ より, 位相は常に x 軸負方向 (西向き) に進む.

3.3 群速度

$$c_{gx} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\beta(k^2-l^2)}{(k^2+l^2)^2}, \qquad (17)$$

$$c_{gy} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial l} = \frac{2\beta kl}{(k^2+l^2)^2}. \qquad (18)$$

$k > l$ の波束は x 軸正方向 (東向き), $k < l$ の波束は x 軸負方向 (西向き) にエネルギーを伝播する.

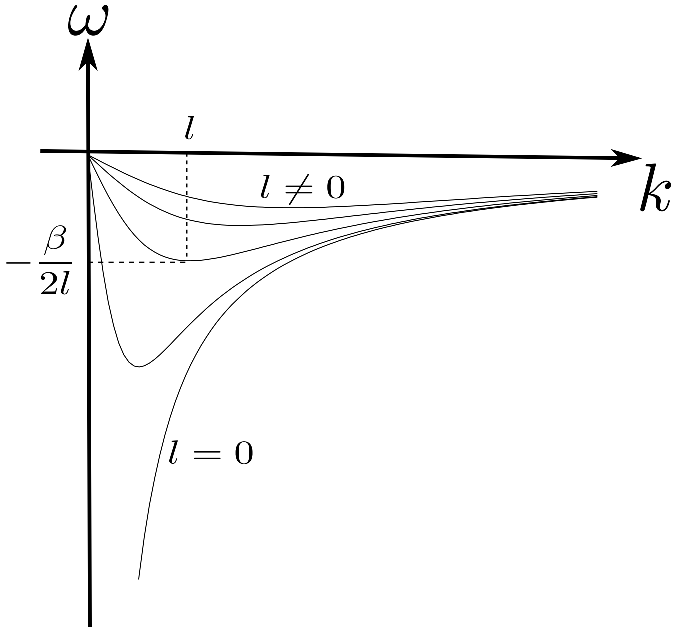


図 1: 2 次元非発散ロスビー波の分散関係 ($k - \omega$ 面)

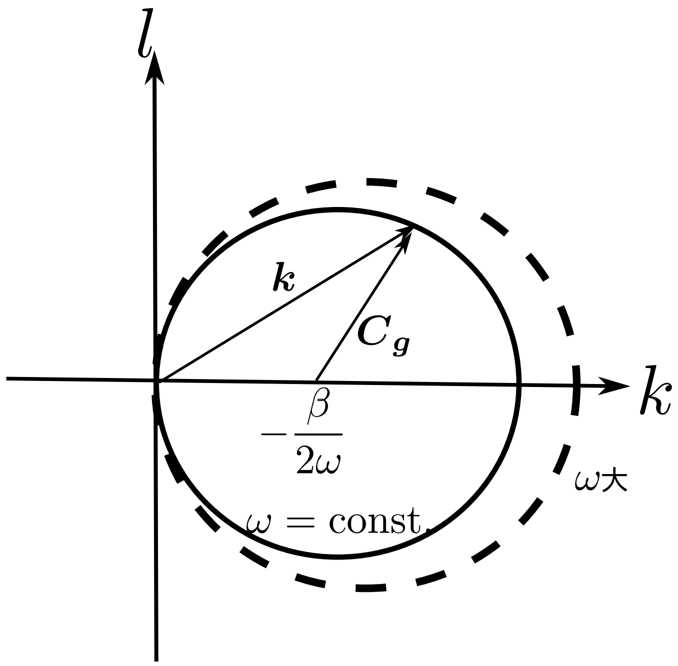


図 2: ロスビー波の分散関係 ($k-l$ 面)

3.4 $k-l$ 面での分散関係の表現

(14) を変型することにより

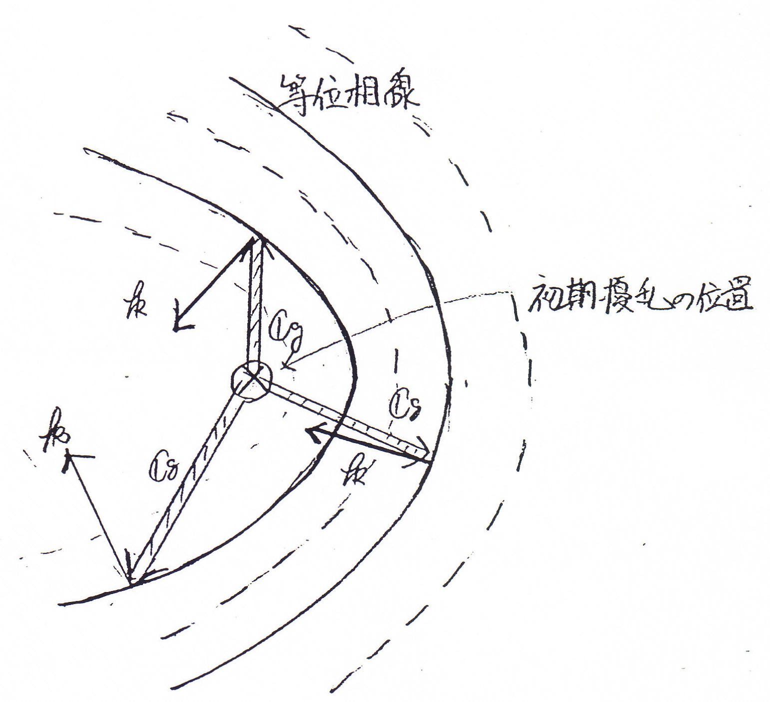
$$\left(k+\frac{\beta}{2\omega}\right)^2+l^2=\frac{\beta}{4\omega^2}. \tag{19}$$

ω =const. である k,l を $k-l$ 面で表すと円になる (図 2). また群速度は $k-l$ 面での ω の gradient ($\boldsymbol{c}_g=\nabla_k\omega$, $\nabla_k=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial k}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial l}$) であるから, その向きは (19) の円の中心から円周上の点に向かう向きとなる.

4　初期値問題 ∼ ロスビー波の分散

2 次元 β 面内に初期擾乱を与えたときの時間変化の計算例を図 3 に示す. 与えられた擾乱がロスビー波として伝播し, 分散していく.

図 3(c), (d) において下図のような位相と群速度の関係が見られる.



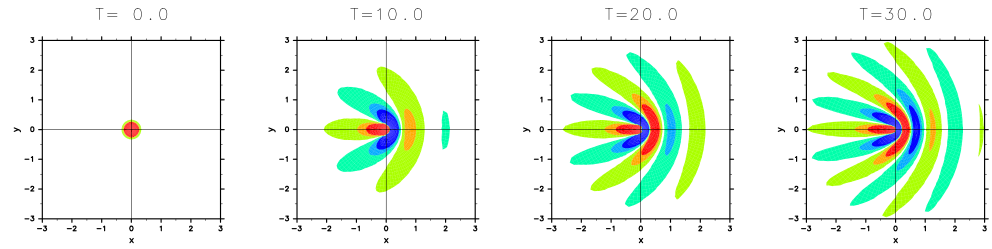


図 3: 初期擾乱 (a) を与えたときの流線の時間変化. トーンの塗り方は全て同じだが, 振幅の大きいところは塗っていない (Ishioka, 2008).

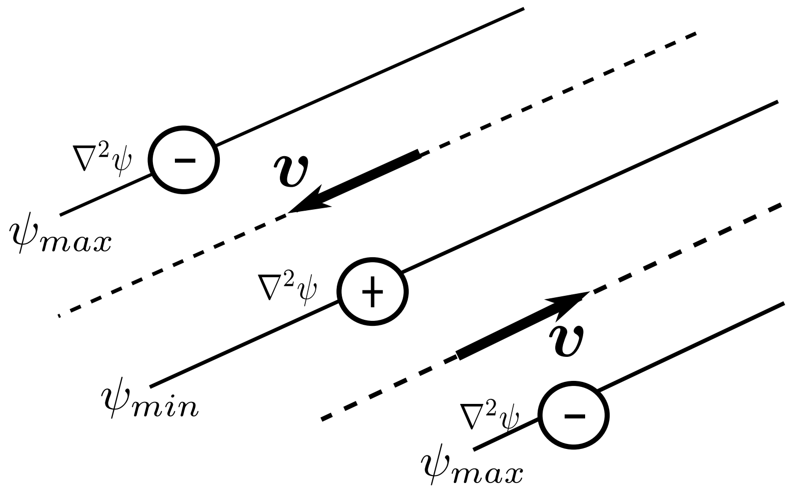


図 4: ロスビー波の構造

5　ロスビー波の構造

相対渦度 ζ, 速度 u,v と流線関数の関係は

$$\begin{cases} u = -\dfrac{\partial \psi}{\partial y} = -ik\psi, \\[2ex] v = \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = il\psi, \\[2ex] \zeta = \nabla^2\psi = -(k^2+l^2)\psi, \end{cases}$$

である. これより u,v,ζ の位相関係は, 図 4 のようになる.

渦度に対し, 波により作られる流れは 1/4 波長ずれている.

6　ロスビー波の伝幡

ロスビー波の伝幡を, ポテンシャル渦度の保存

$$\frac{d}{dt}(f+\zeta)=0, \quad f=f_0+\beta y$$

により説明する.

6.1　Parcel 的考え方

[2]

1. 初期状態で y = 一定 の線上にある流体コラム A,B,C を考える (図 5(a)). 今, B が y 軸正方向に微小変位したとする.
2. y 軸正方向に変位すると, f は増加する. ポテンシャル渦度が保存する には ζ は減少しなければならない. したがって y 軸正方向に変位した B は負の相対渦度を持つことになる. (図 5(b))
3. B の持つ渦度に伴って A では y 軸正方向, C では負方向の流れが引き起こされ, 変位する (図 5(c)).
4. 2. と同様, 変位した A,C はそれぞれ正, 負の相対渦度を持つ (図 5(d)).
5. A,C の持つ渦度に伴って, B では y 軸負方向の流れが引き起こされ, B は元の位置に向かって変位する (図 5(e)).

[2] 上の議論より, 場の (ポテンシャル) 渦度に勾配がなければ ($\beta=0$ or $\dfrac{d^2U}{dy^2}=0$ etc.) 擾乱の渦は伝幡しない. この時の渦度方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi=0,$$

すなわち分散関係は $\omega=0$ となり, 渦は伝幡せず動かない.

6.2　渦度による説明～高薮の渦度定規

1. 図 6(a) のような波が存在していたとする. 相対渦度と波により作られる流れは位相が 1/4 波長ずれている.

2. y 軸方向の流れが存在するところでは, ポテンシャル渦度保存より相対渦度 ($\nabla^2\psi$) が減少する. 逆に負方向の流れが存在するところでは相対渦度が増加する.
   $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi = -\beta v\right)$

3. 作られた相対渦度に伴い, 流れが作られる.
   $\left(u = -\dfrac{\partial\psi}{\partial y},\ v = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)$
   その結果位相は x 軸負方向 (西向き) に伝幡する (図 6(b)).

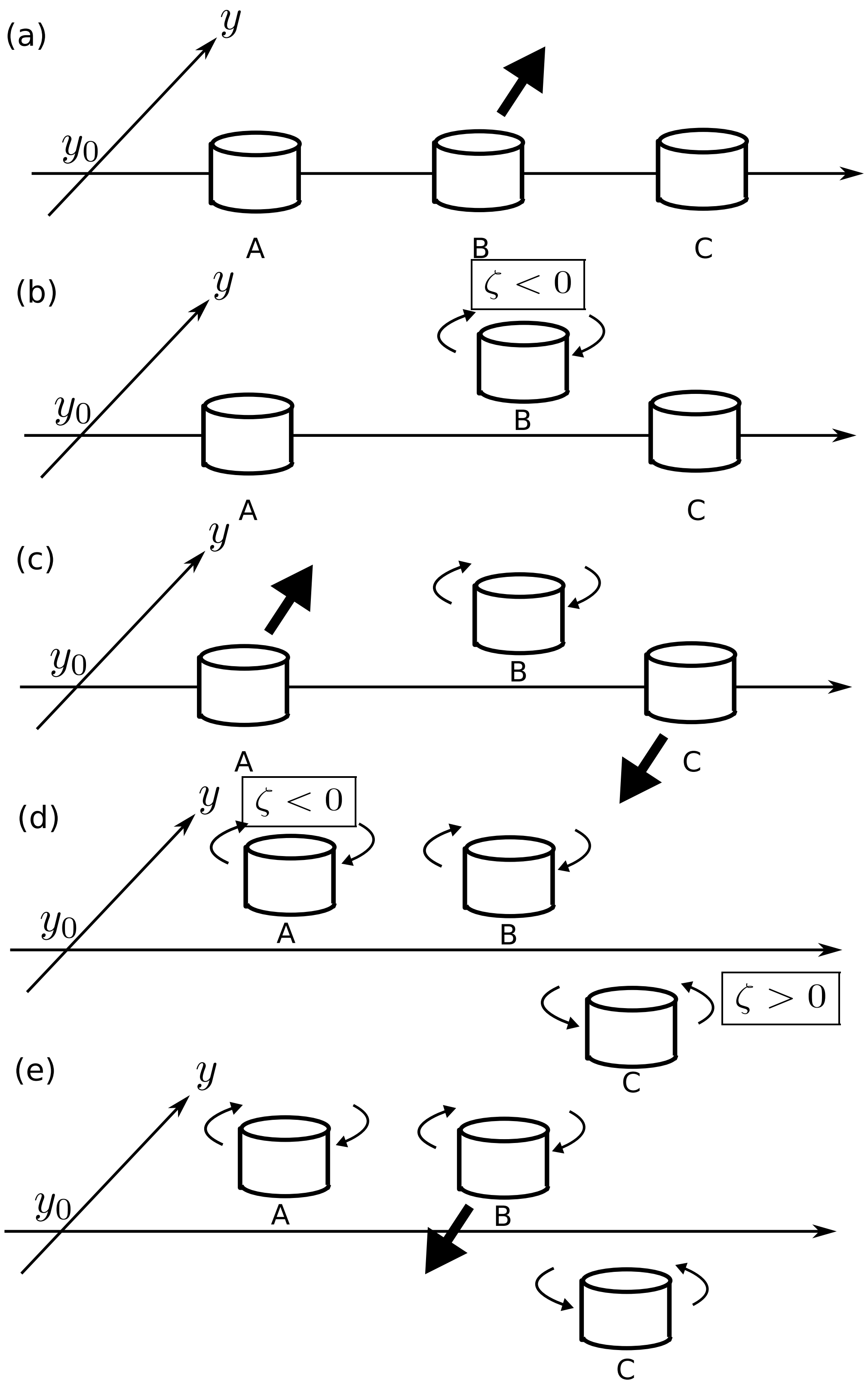

(a)
y
y_0
A
B
C
(b)
y
$\zeta < 0$
y_0
B
A
C
(c)
y
y_0
B
A
C
(d)
y
$\zeta < 0$
y_0
A
B
$\zeta > 0$
C
(e)
y
y_0
A
B
C

図 5: ロスビー波の伝幡

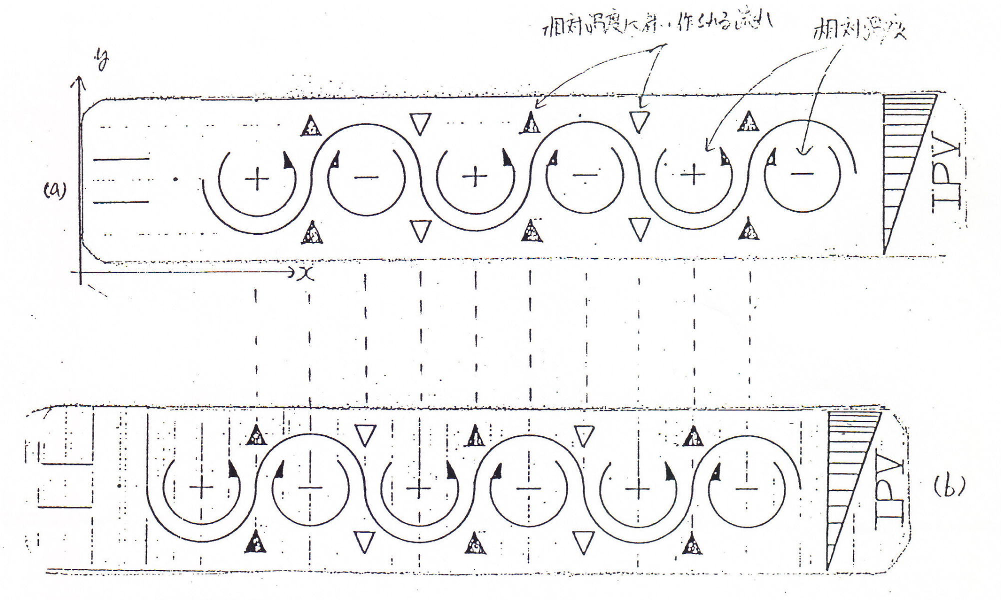


図 6: 高薮の渦度定規. (a) ある瞬間の波. (b) (a) に対し 1/4 周期後の波

7 エネルギーの伝播

7.1 波線理論, WKB 近似を用いた記述

微小パラメータ ε を導入して (13) とその解 ψ を漸近的に展開して考える. ψ が次のように展開されるものとしよう:

$$\psi = \sum_{n=0} \varepsilon^n A_n(\boldsymbol{X}, T) e^{i\Theta(\boldsymbol{x},t)/\varepsilon}. \tag{20}$$

ただし,

$$\boldsymbol{X} = \varepsilon \boldsymbol{x} \tag{21}$$

$$T = \varepsilon t \tag{22}$$

はゆっくり変化する座標である.

(20) を (13) に代入して, $O(\varepsilon^0)$, $O(\varepsilon^1)$ の項を整理すると次のようになる.

- $O(\varepsilon^0)$ の式

$$\left[-i\frac{\partial\Theta}{\partial T}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right)^2 - i\frac{\partial\Theta}{\partial T}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\right)^2 + i\beta\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right] A_0 = 0. \tag{23}$$

- $O(\varepsilon^1)$ の式

$$\left[-i\frac{\partial\Theta}{\partial T}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right)^2 - i\frac{\partial\Theta}{\partial T}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\right)^2 + i\beta\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right] A_1$$

$$
\begin{aligned}
&+\left[-2\frac{\partial^2\Theta}{\partial T\partial X}\frac{\partial\Theta}{\partial X}-\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}\frac{\partial\Theta}{\partial T}-2\frac{\partial^2\Theta}{\partial T\partial Y}\frac{\partial\Theta}{\partial Y}-\frac{\partial^2\Theta}{\partial Y^2}\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right]A_0 \\
&-\left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\right)^2\right]\frac{\partial A_0}{\partial T}-2\frac{\partial\Theta}{\partial X}\frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial A_0}{\partial X}-2\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\frac{\partial\Theta}{\partial T}\frac{\partial A_0}{\partial Y}+\beta\frac{\partial A_0}{\partial X}=0 \qquad (24)
\end{aligned}
$$

局所振動数, 波数

$$
(k,l) \equiv \left(\frac{\partial\Theta}{\partial X},\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\right) \qquad (25)
$$

$$
\omega \equiv -\frac{\partial\Theta}{\partial T} \qquad (26)
$$

を導入して整理すると

- $O(\varepsilon^0)$ の式

$$
\omega(k^2+l^2)+\beta k = 0. \qquad (27)
$$

- $O(\varepsilon^1)$ の式

$$
\begin{aligned}
&+\left[-2\frac{\partial k}{\partial T}k+\frac{\partial k}{\partial X}\omega-2\frac{\partial l}{\partial T}l-\frac{\partial l}{\partial Y}\omega\right]A_0 \\
&-(k^2+l^2)\frac{\partial A_0}{\partial T}+2k\omega\frac{\partial A_0}{\partial X}+2l\omega\frac{\partial A_0}{\partial Y}+\beta\frac{\partial A_0}{\partial X} = 0 \qquad (28)
\end{aligned}
$$

ただし (7.1) を使って簡略化してある.

$O(\varepsilon^0)$ の式 (7.1) はロスビー波の分散関係式にほかならない. $O(\varepsilon^1)$ の式 (28) はロスビー波の振幅の運動をつかさどる式である.

7.2 エネルギーの保存則

(28) を書き換えて保存形に変換する. (28) $\times A_0^*$ + (28)* $\times A_0$ を作ると

$$
\frac{\partial}{\partial T}\left\{(k^2+l^2)|A_0|^2\right\}+\frac{\partial}{\partial X}\left\{(-2\omega k-\beta)|A_0|^2\right\}+\frac{\partial}{\partial Y}\left\{(-2\omega l)|A_0|^2\right\} = 0 \qquad (29)
$$

群速度を用いて書き換えると

$$
\boxed{\frac{\partial}{\partial T}\left\{(k^2+l^2)|A_0|^2\right\}+\frac{\partial}{\partial X}\left\{c_{gx}(k^2+l^2)|A_0|^2\right\}+\frac{\partial}{\partial Y}\left\{c_{gy}(k^2+l^2)|A_0|^2\right\}=0} \qquad (30)
$$

この式は $(k^2+l^2)|A_0|^2$ という量が保存し, そのフラックスが $\boldsymbol{c}_g(k^2+l^2)|A_0|^2$ で表されることを示す.

この量は運動エネルギーにほかならない. ε^0 次のオーダーでは

$$u = -ilA_0 e^{i\Theta/\varepsilon}, \qquad v = ikA_0 e^{i\Theta/\varepsilon} \tag{31}$$

であるから運動エネルギー $E \equiv \rho(u^2+v^2)/2$ の Θ 平均は

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \frac{\rho}{2}(\overline{u^2}+\overline{v^2}) \\ &= \frac{\rho}{4}(k^2+l^2)|A_0|^2.\end{aligned} \tag{32}$$

密度 ρ のファクターを除けば全く同じ量であることが示された.

7.3 エネルギーの保存則, 直接的な導出

線型化された渦度方程式 (13) から直接出発してエネルギーの式を導いてみる. (13) に ψ をかけて変形すると

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[-\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial x}-\frac{1}{2}\beta\psi^2\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[-\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial y}\right]=0. \tag{33}$$

ψ を (20) 型の解とすれば, 位相平均することにより $O(\varepsilon^0)$ では

$$\overline{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]} = \frac{1}{4}(k^2+l^2)|A_0|^2 = \bar{E}, \tag{34}$$

$$\overline{-\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial x}-\frac{1}{2}\beta\psi^2} = -\left(\frac{1}{2}k\omega+\frac{1}{4}\beta\right)|A_0|^2 = c_{gx}\bar{E}, \tag{35}$$

$$\overline{-\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial y}} = -\frac{1}{2}l\omega|A_0|^2 = c_{gy}\bar{E} \tag{36}$$

である.

8　エネルギーの保存則に関する注意

線型化された運動方程式 (10) $\sim$ (12) から直接出発してエネルギーの式を導いてみる. (11) $\times\, u$ + (12) $\times\, v$ を計算した後 (10) を使って整理すれば

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{2}\boldsymbol{v}^2\right) + \mathrm{div} p\boldsymbol{v} \;=\; 0.$$

しかしながら, エネルギーフラックスの位相平均については

$$\overline{p\boldsymbol{v}} \;\neq\; \boldsymbol{c}_g \bar{E} \tag{37}$$

であることに注意しなければならない.

$\overline{p\boldsymbol{v}}$ の評価は次のように行なう. (11) から圧力擾乱をもとめればよいのであるが, f はゆっくりとは変わらない (その微分が β である) 変数であることに注意しなければならない:

$$\beta \;=\; \frac{\partial f}{\partial y} \;=\; \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial Y}. \tag{38}$$

従って, p の振幅にもゆっくりとは変化しない成分が存在することになる. p は ε で次のように展開する.

$$p \;=\; \sum_n \varepsilon^n p_n e^{i\Theta/\varepsilon}. \tag{39}$$

ただし p_n は y に関しては必ずしもゆっくりとは変化しない関数である. (11) から p をもとめる. $\boldsymbol{v}$ を ε^1 次まで計算しておくと

$$u \;=\; -\frac{\partial \psi}{\partial y} \;=\; \left(-ilA_0 - \varepsilon\frac{\partial A_0}{\partial Y} - \varepsilon ilA_1\right)e^{i\Theta/\varepsilon} \tag{40}$$

$$v \;=\; \frac{\partial \psi}{\partial x} \;=\; \left(ikA_0 + \varepsilon\frac{\partial A_0}{\partial X} + \varepsilon ikA_1\right)e^{i\Theta/\varepsilon} \tag{41}$$

(11) に代入して

- $O(\varepsilon^0)$ の式

$$(-l\omega - ikf)A_0 \;=\; -\frac{1}{\rho}ikp_0. \tag{42}$$

- $O(\varepsilon^1)$ の式

$$-i\omega\frac{\partial A_0}{\partial Y} - il\frac{\partial A_0}{\partial T} - f\frac{\partial A_0}{\partial X} + (-i\omega - ikf)A_1 \;=\; -\frac{1}{\rho}ikp_1 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_0}{\partial X}. \tag{43}$$

を得る. よって

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \rho\left(f - i\omega\frac{l}{k}\right)A_0 && (44)\\
p_1 &= \rho\left\{\omega\frac{l}{k^2}\frac{\partial A_0}{\partial X} + \omega\frac{1}{k}\frac{\partial A_0}{\partial Y} + \frac{l}{k}\frac{\partial A_0}{\partial T} + \frac{l}{k}\frac{\partial}{\partial X}\left(\omega\frac{l}{k}\right)A_0 + \left(f - i\omega\frac{l}{k}\right)A_1\right\} && (45)
\end{aligned}
$$

結局, ε^1 次までで

$$
\begin{aligned}
\overline{pu} &= \frac{1}{2}\rho\omega\frac{l^2}{k}|A_0|^2 + \varepsilon\rho\left\{\frac{1}{2}\omega\frac{l^2}{k}(A_0A_1^* + A_0^*A_1) - \frac{1}{4}f\frac{\partial}{\partial Y}|A_0|^2\right\} && (46)\\
\overline{pv} &= -\frac{1}{2}\rho\omega l|A_0|^2 + \varepsilon\rho\left\{-\frac{1}{2}\omega l(A_0A_1^* + A_0^*A_1) + \frac{1}{4}f\frac{\partial}{\partial X}|A_0|^2\right\} && (47)
\end{aligned}
$$

分散関係, 群速度を用いて書きなおすと

$$
\begin{aligned}
\overline{pu} &= -\frac{1}{2}\rho\beta\frac{l^2}{k^2+l^2}|A_0|^2 + \varepsilon\rho\left\{\frac{1}{2}\omega\frac{l^2}{k}(A_0A_1^* + A_0^*A_1) - \frac{1}{4}f\frac{\partial}{\partial Y}|A_0|^2\right\}\\
&= \frac{1}{4}\rho\beta\frac{k^2-l^2}{k^2+l^2}|A_0|^2 - \frac{1}{4}\rho\beta|A_0|^2 + \varepsilon\rho\left\{\frac{1}{2}\omega\frac{l^2}{k}(A_0A_1^* + A_0^*A_1) - \frac{1}{4}f\frac{\partial}{\partial Y}|A_0|^2\right\}\\
&= c_{gx}\bar{E} - \frac{1}{4}\rho\beta|A_0|^2 + \varepsilon\rho\left\{\frac{1}{2}\omega\frac{l^2}{k}(A_0A_1^* + A_0^*A_1) - \frac{1}{4}f\frac{\partial}{\partial Y}(|A_0|^2)\right\}. && (48)\\
\overline{pv} &= \frac{1}{2}\rho\beta\frac{kl}{k^2+l^2}|A_0|^2 + \varepsilon\rho\left\{-\frac{1}{2}\omega l(A_0A_1^* + A_0^*A_1) + \frac{1}{4}f\frac{\partial}{\partial X}|A_0|^2\right\}\\
&= c_{gy}\bar{E} + \varepsilon\rho\left\{-\frac{1}{2}\omega l(A_0A_1^* + A_0^*A_1) + \frac{1}{4}f\frac{\partial}{\partial X}|A_0|^2\right\}. && (49)
\end{aligned}
$$

かくして, $O(\varepsilon^0)$ では

$$
\overline{p\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{c}_g\bar{E} - \frac{1}{4}\rho\beta|A_0|^2\hat{\boldsymbol{x}} \qquad (50)
$$

$\overline{p\boldsymbol{v}}$ は 群速度の方向からずれてしまうことがわかる.

しかしながら, フラックスの収束発散は$\partial f/\partial Y = \beta/\varepsilon$ であり, 従って $O(\varepsilon^1)$ からの寄与を考慮すれば

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}\overline{p\boldsymbol{v}} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}(\boldsymbol{c}_g\bar{E}) + \frac{\partial}{\partial X}\left(-\frac{1}{4}\rho\beta|A_0|^2\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\varepsilon\frac{1}{4}f\frac{\partial}{\partial X}|A_0|^2\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}(\boldsymbol{c}_g\bar{E}) - \frac{1}{4}\rho\beta\frac{\partial}{\partial X}|A_0|^2 + \frac{1}{4}\rho\beta\frac{\partial}{\partial X}|A_0|^2\\
&= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}(\boldsymbol{c}_g\bar{E}) && (51)
\end{aligned}
$$

$\overline{p\boldsymbol{v}}$ と $\boldsymbol{c}_g\bar{E}$ とのずれは非発散であり, 従ってエネルギーの正味の変化にはかかわりのないものであることがわかる.

9 シアー流中の伝播 : WKB 近似を用いた表現

以下では基本流 $U(y)$ がある場合のロスビー波を考察することにする.

9.1 局所分散関係

線型化したポテンシャル渦度保存則は (9) であった. 波束の振舞いを調べるために例によって次の形の解を求める.

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A_n(X, Y, T) e^{i\frac{\Theta(X,Y,T)}{\varepsilon}} \tag{52}$$

$$X = \varepsilon x, \qquad Y = \varepsilon y, \qquad T = \varepsilon t,$$
$$0 < \varepsilon \ll 1$$

局所的な波数, 振動数は次のように定義される.

$$k = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X}\Theta(X, Y, T) \tag{53}$$
$$l = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial Y}\Theta(X, Y, T) \tag{54}$$
$$\omega = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial T}\Theta(X, Y, T) \tag{55}$$

基本流 $U(y)$ は y 方向にゆっくり変化していると仮定する.

$$U \equiv U(Y)$$

(9) を (9) に代入して ε の各オーダーでまとめる. $O(\varepsilon^\circ)$ より局所分散関係が求まる.

$$\boxed{\omega = U(Y)k - \frac{\beta k}{k^2 + l^2}} \tag{56}$$

群速度は次のようになる

$$c_{gx} = U + \frac{\beta(k^2 - l^2)}{(k^2 + l^2)^2}, \tag{57}$$
$$c_{gy} = \frac{2\beta k l}{(k^2 + l^2)^2}. \tag{58}$$

9.2 波数・振動数の保存則

局所的波数, 振動数の変化の式は[1],

$$
\frac{\partial k}{\partial T} + c_{gx}\frac{\partial k}{\partial X} + c_{gy}\frac{\partial k}{\partial Y} = 0, \tag{59}
$$

$$
\frac{\partial l}{\partial T} + c_{gx}\frac{\partial l}{\partial X} + c_{gy}\frac{\partial l}{\partial Y} = -\frac{dU}{dY}k, \tag{60}
$$

$$
\frac{\partial \omega}{\partial T} + c_{gx}\frac{\partial \omega}{\partial X} + c_{gy}\frac{\partial \omega}{\partial Y} = 0. \tag{61}
$$

すなわち ω, k は $\boldsymbol{c}_g$ とともに動く系から見て保存する.

9.3 wave action 保存則

$O(\varepsilon^1)$ の展開より (後述)

$$
\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{k\bar{E}}{\hat{\omega}}\right) + \frac{\partial}{\partial X}\left(c_{gx}\frac{k\bar{E}}{\hat{\omega}}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(c_{gy}\frac{k\bar{E}}{\hat{\omega}}\right) = 0. \tag{62}
$$

ただし $\bar{E}, \hat{\omega}$ はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
\bar{E} &= \frac{1}{2}(\overline{u^2} + \overline{v^2}) \\
\hat{\omega} &= \omega - Uk
\end{aligned}
$$

$\dfrac{k\bar{E}}{\hat{\omega}}$ は波束について保存する. 波数保存の式 (62) を用いると

$$
\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}\right) + \frac{\partial}{\partial X}\left(c_{gx}\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(c_{gy}\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}\right) = 0. \tag{63}
$$

$\dfrac{\bar{E}}{\hat{\omega}}$ は波束について保存する. $\dfrac{\bar{E}}{\hat{\omega}}$ を wave action(波の作用) という.

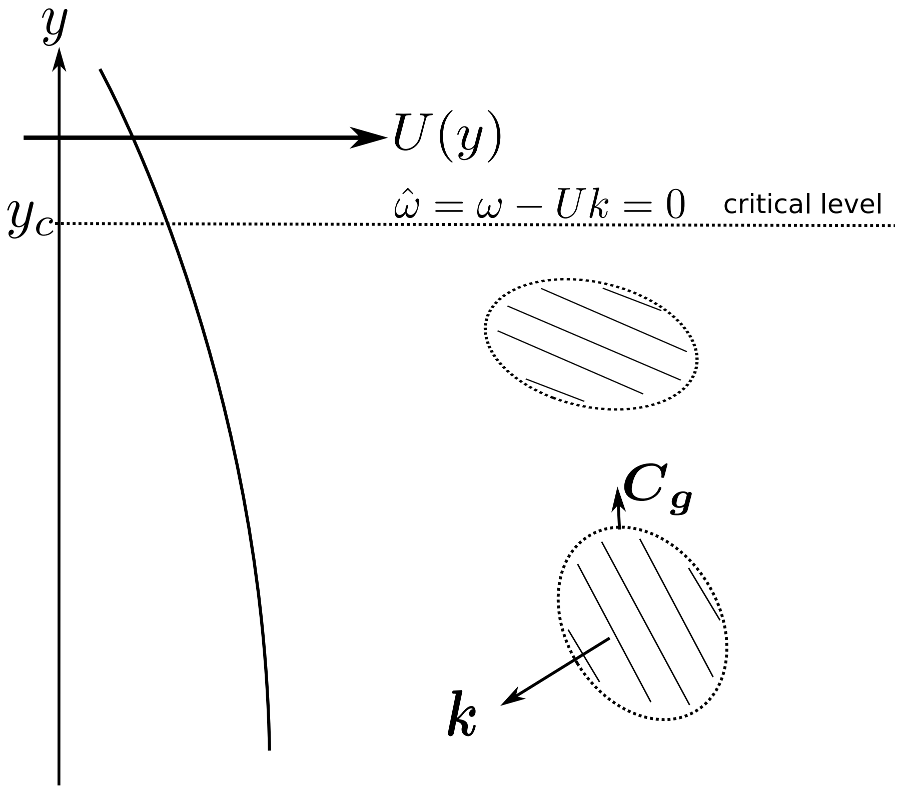


図 7: ロスビー波の波束の伝播

10　シアー流中の波束の伝播

波束は $\omega, k, \dfrac{\bar{E}}{\hat{\omega}}$ を保存しながら伝播してゆく. l は分散関係より

$$l^2 = -\frac{\beta k}{\hat{\omega}} - k^2 = \frac{\beta}{U(y) - c} - k^2 \tag{64}$$

を満たしながら変化してゆく.

$\hat{\omega} \to 0$ となる critical level y_c に近づくにつれて $l \to \infty$ となる. また群速度 c_{gy} は

$$c_{gy} = \frac{2\beta kl}{(k^2 + l^2)^2} \longrightarrow 0$$

となる. エネルギー $\int \bar{E} dV$ も 0 に近づいてゆく[1].

10.1　critical level

シアー流中のロスビー波の波束が critical level に達するまでの時間を計算する.

[1] このあたりの議論は厳密ではない. 波束の縮み方との兼合いの問題.

$$
\begin{aligned}
\hat{\omega} &\sim -kU_y(y_c)(y-y_c) \\
l^2 &= -\frac{\beta k}{\hat{\omega}} - k^2 \\
&\sim \frac{\beta}{U_y}\frac{1}{y-y_c} \\
c_{gy} &= \frac{2\beta kl}{(k^2+l^2)^2} \\
&\sim 2\beta k\left(\frac{\beta}{U_y}\frac{1}{y-y_c}\right)^{-\frac{3}{2}} \\
&\propto (y_c-y)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

y_1 から y_2 までに達するまでの時間 T は

$$
T = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{c_{gy}} \propto \frac{1}{\sqrt{y_c-y_2}} - \frac{1}{\sqrt{y_c-y_1}}
$$

$y_2 \to y_c$ のとき $T \to \infty$ となり波束は critical level に達することができない.

10.2　WKB 近似の妥当性

波束の伝播から critical level 付近の振舞いを考えたが, ロスビー波の場合はこの議論は正しくない. critical level 付近では, y 方向の波長程度で l が大きく変化するので波束の形 (52) として表せないからである.

波長 $\dfrac{2\pi}{l}$ と波長の変化するスケール $\left(\dfrac{1}{l}\dfrac{dl}{dy}\right)^{-1}$ の比は

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{l}\Big/\left(\frac{1}{l}\frac{dl}{dy}\right)^{-1}\right| &= \left|\frac{1}{l^2}\frac{dl}{dy}\right| = \frac{\beta U_y}{(U-c)^2}\cdot\left[\frac{\beta}{(U-c)} - k^2\right]^{-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{\beta U_y}{(U-c)^{\frac{3}{2}}\{\beta - k^2(U-c)\}^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

critical level 付近では $U - c \to 0$ となり, この比が大きくなる.

11 Rossby 波の wave action 保存則の導出

(52) を (9) に代入して ε の各オーダーでまとめる. $O(\varepsilon^{\circ})$ より

$$(-i\omega + Uik)\{-(k^2+l^2)\}A_0 + ik\beta A_0 = 0$$

これより局所分散関係がもとまる.

$$\omega = Uk - \frac{\beta k}{k^2+l^2}. \tag{65}$$

$0(\varepsilon^1)$ より

$$\begin{aligned}
&[(-i\omega + ikU)\{-(k^2+l^2)\} + ik\beta]A_1 \\
&+\left\{-(k^2+l^2)\left(\frac{\partial A_0}{\partial T} + U\frac{\partial A_0}{\partial X}\right) - A_0\left(\frac{\partial}{\partial T} + U\frac{\partial}{\partial X}\right)(k^2+l^2)\right. \\
&\left.+2(\omega - Uk)\left(k\frac{\partial A_0}{\partial X} + l\frac{\partial A_0}{\partial Y}\right) + (\omega - Uk)\left(\frac{\partial k}{\partial X} + \frac{\partial l}{\partial Y}\right)A_0 + \beta\frac{\partial A_0}{\partial X}\right\} = 0.
\end{aligned}$$

A_1 の係数は局所的分散関係 (65) より 0 となる. 残りの項は A_0 とその微分についてそれぞれまとめると

$$\begin{aligned}
&-(k^2+l^2)\frac{\partial A_0}{\partial T} \\
&+\{-(k^2+l^2)U + 2(\omega - Uk)k + \beta\}\frac{\partial A_0}{\partial X} \\
&+2(\omega - Uk)l\frac{\partial A_0}{\partial Y} \\
&+\left\{-\left(\frac{\partial}{\partial T} + U\frac{\partial}{\partial X}\right)(k^2+l^2) + (\omega - Uk)\left(\frac{\partial k}{\partial X} + \frac{\partial l}{\partial Y}\right)\right\}A_0 = 0.
\end{aligned} \tag{66}$$

ここで分散関係を表す多項式 P を導入する.

$$P \equiv (\omega - Uk)(k^2+l^2) + \beta k.$$

$P=0$ は分散関係を表わす. (66) 式中 $\frac{\partial A}{\partial T}, \frac{\partial A}{\partial X}, \frac{\partial A}{\partial Y}$ の係数に注目するとそれぞれ $-\frac{\partial P}{\partial \omega}, \frac{\partial P}{\partial k}, \frac{\partial P}{\partial l}$ に対応するので

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial \omega}\right)\frac{\partial A}{\partial T} + \left(\frac{\partial P}{\partial k}\right)\frac{\partial A}{\partial X} + \left(\frac{\partial P}{\partial l}\right)\frac{\partial A}{\partial Y} + DA_0 = 0. \tag{67}$$

ただし D は多項式

$$
D \equiv -\left(\frac{\partial}{\partial T} + U\frac{\partial}{\partial X}\right)(k^2+l^2) + (\omega - Uk)\left(\frac{\partial k}{\partial X} + \frac{\partial l}{\partial Y}\right),
$$

である.

ここで群速度 $\boldsymbol{c}_g$ を P で表わす. $dP = \left(\frac{\partial P}{\partial k}\right)dk + \left(\frac{\partial P}{\partial l}\right)dl + \left(\frac{\partial P}{\partial \omega}\right)d\omega = 0$ より

$$
\begin{aligned}
c_{gx} &= \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_l = -\left(\frac{\partial P}{\partial k}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial \omega}\right)^{-1} \\
c_{gy} &= \left(\frac{\partial \omega}{\partial l}\right)_k = -\left(\frac{\partial P}{\partial l}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial \omega}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

よって (67) は

$$
-\left(\frac{\partial P}{\partial \omega}\right)\left(\frac{\partial A_0}{\partial T} + c_{gx}\frac{\partial A_0}{\partial X} + c_{gy}\frac{\partial A_0}{\partial Y}\right) + DA_0 = 0. \tag{68}
$$

さて, 多項式 D を整理しよう. $\hat{\omega} \equiv \omega - Uk$ を導入する. $\hat{\omega}$ はシアー流のないときの分散関係から求められる振動数に等しい.

また,

$$
\begin{aligned}
\hat{c}_{gx} &\equiv \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial k} = \frac{\beta(k^2 - l^2)}{(k^2+l^2)^2}, \\
\hat{c}_{gy} &\equiv \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial l} = \frac{2\beta kl}{(k^2+l^2)^2} = c_{gy},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial Y}\left\{c_{gy}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\beta k}\right\} \\
&= \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial Y}\left\{c_{gy}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\beta}\right\} - c_{gy}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\beta k^2}\frac{\partial k}{\partial Y} \\
&= \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial Y}\left\{c_{gy}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\beta}\right\} - \frac{l}{k}\frac{\partial l}{\partial X} \\
&= \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial Y}\left\{c_{gy}\frac{(k^2+l^2)}{2\beta}\right\} - \frac{l}{k}\frac{\partial l}{\partial X}\left(\frac{l^2}{2}\right),
\end{aligned}
$$

$$
(\omega - Uk)\left(\frac{\partial k}{\partial X} + \frac{\partial l}{\partial Y}\right) = \hat{\omega}\left[\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{k^2}{2}\right) + \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial Y}\left\{c_{gy}\frac{(k^2+l^2)}{2\beta}\right\} - \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{l^2}{2}\right)\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\hat{\omega}}{k}\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{k^2-l^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial Y}\left\{c_{gy}\frac{(k^2+l^2)}{2\beta}\right\}\right] \\
&= -\frac{\beta}{k^2+l^2}\left[\frac{\partial}{\partial X}\left\{\hat{c}_{gx}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\beta}\right\}+\frac{\partial}{\partial Y}\left\{c_{gy}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\beta}\right\}\right].
\end{aligned}
$$

これらより D は

$$
\begin{aligned}
D &= -\left(\frac{\partial}{\partial T}+U\frac{\partial}{\partial X}\right)(k^2+l^2)-\frac{\beta}{k^2+l^2}\frac{\partial}{\partial X}\left\{\hat{c}_{gx}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\beta}\right\}-\frac{\beta}{k^2+l^2}\frac{\partial}{\partial Y}\left\{\hat{c}_{gy}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\beta}\right\} \\
&= -\frac{\beta}{k^2+l^2}\left[\frac{\partial}{\partial T}\frac{(K^2+l^2)^2}{2\beta}+\frac{\partial}{\partial X}\left(U\frac{(k^2+l^2)^2}{2\beta}\right)\right. \\
&\quad \left.+\frac{\partial}{\partial X}\left\{\hat{c}_{gx}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\beta}\right\}+\frac{\partial}{\partial X}\left(c_{gy}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\beta}\right)\right] \\
&= -\frac{\beta}{k^2+l^2}\left[\frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{(k^2+l^2)^2}{2\beta}\right\}+\frac{\partial}{\partial X}\left\{c_{gx}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\beta}\right\}+\frac{\partial}{\partial Y}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\beta}\right]
\end{aligned}
$$

(68) は,

$$
\begin{aligned}
&-(k^2+l^2)\left(\frac{\partial A_0}{\partial T}+c_{gx}\frac{\partial A_0}{\partial X}+c_{gy}\frac{\partial A_0}{\partial Y}\right) \\
&-\frac{\beta A_0}{k^2+l^2}\left[\frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{(k^2+l^2)^2}{2\beta}\right\}+\frac{\partial}{\partial X}\left\{c_{gx}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\beta}\right\}\right. \\
&\left.+\frac{\partial}{\partial X}\left\{c_{gx}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\beta}\right\}+\frac{\partial}{\partial Y}\left\{c_{gy}\frac{(k^2+l^2)}{2\beta}\right\}\right]=0
\end{aligned}
$$

各項に $\dfrac{k^2+l^2}{\beta}A_0$ をかけると

$$
\begin{aligned}
&\frac{(k^2+l^2)^2}{2\beta}\left(\frac{\partial}{\partial T}+c_{gx}\frac{\partial}{\partial X}+c_{gy}\frac{\partial}{\partial Y}\right)A_0^2 \\
&+A_0^2\left[\frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{(k^2+l^2)^2}{2\beta}\right\}+\frac{\partial}{\partial X}\left\{c_{gx}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\beta}\right\}+\frac{\partial}{\partial Y}\left\{c_{gx}\frac{(k^2+l^2)^2}{2\beta}\right\}\right]=0.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{(k^2+l^2)^2A_0^2}{2\beta}\right\}+\frac{\partial}{\partial X}\left\{c_{gx}\frac{(k^2+l^2)^2A_0^2}{2\beta}\right\}+\frac{\partial}{\partial Y}\left\{c_{gy}\frac{(k^2+l^2)^2A_0^2}{2\beta}\right\}=0. \quad (69)
$$

$\dfrac{(k^2+l^2)^2A_0^2}{2\beta}$ は波束についての保存量となる.

ところで

$$\begin{aligned}\frac{k\bar{E}}{\hat{\omega}} &\equiv \int_0^{2\pi} \frac{kE}{\hat{\omega}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{k^2+l^2}{\beta}(k^2+l^2)A_0^2 e^{2i\theta} d\theta \\ &= \frac{(k^2+l^2)^2 A_0^2}{2\beta}\end{aligned}$$

であるから (69) は

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{k\bar{E}}{\hat{\omega}}\right) + \frac{\partial}{\partial X}\left(c_{gx}\frac{k\bar{E}}{\hat{\omega}}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(c_{gy}\frac{k\bar{E}}{\hat{\omega}}\right) = 0. \tag{70}$$

さらに波数保存則 (59) を用いて

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}\right) + \frac{\partial}{\partial X}\left(c_{gx}\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(c_{gy}\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}\right) = 0. \tag{71}$$

これがロスビー波の wave action 保存則である.

12　波の擬運動量, 擬エネルギー

12.1　基礎方程式の再考

ロスビー波にともなう擬エネルギーあるいは擬運動量を計算し, 特に運動量のやり取りを見てみよう. 擬エネルギーあるいは擬運動量の空間積分値はロスビー波を生成する時に必要となった全エネルギー, あるいは, 全運動量に対応する.

線型擾乱に対する擬運動量あるいは擬エネルギーは振幅の 2 次のオーダーの量である. もう一度非線型の基礎方程式 (3) ∼ (5) に戻って 2 次のオーダーまで考慮した展開を行なう. 変数が基本場の周りで振幅に関して次のように展開されているものとしよう.

$$u = U(y) + u' + u^{(2)} + \cdots, \tag{72}$$
$$v = v' + v^{(2)} + \cdots, \tag{73}$$
$$p = P(y)p' + p^{(2)} + \cdots. \tag{74}$$

ただし, 添字 ’ は振幅に関して 1 次の量, 添字 (2) は振幅に関して 2 次のオーダーの量であることを示す.

さて, この展開を基礎方程式 (3) ∼ (5) に代入すれば振幅の 1 次の式は (6) ∼ (8) で得られていたものと全く同じである:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \tag{75}$$
$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{dU}{dy} - fv' = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}, \tag{76}$$
$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U\frac{\partial v'}{\partial x} + fu' = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y}. \tag{77}$$

この方程式の解として振幅関数 A と位相関数 θ とを使った波型の解が得られているものとしよう.

2 次の量に関する方程式は

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} = 0, \tag{78}$$
$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + U\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + v^{(2)}\frac{dU}{dy} - fv^{(2)} + \frac{\partial u'^2}{\partial x} + \frac{\partial u'v'}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x}, \tag{79}$$
$$\frac{\partial v^{(2)}}{\partial t} + U\frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} + fu^{(2)} + \frac{\partial u'v'}{\partial x} + \frac{\partial v'^2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^{(2)}}{\partial y}. \tag{80}$$

12.2　擬運動量

さて, x 方向に 1 波長分平均を行なう. (79) を平均すると

$$\frac{\partial \overline{u^{(2)}}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \;=\; 0. \tag{81}$$

ただし, 任意の量 α に対して

$$\overline{\frac{\partial \alpha}{\partial x}} \;=\; 0 \tag{82}$$

であることを用いている. また, 従って, 連続の式より

$$\overline{v^{(2)}} \;=\; 0 \tag{83}$$

に注意.

ところで, 波動解であることを用いると

$$\begin{aligned}
\overline{u'v'} &= -\overline{\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial x}} \\
&= -\frac{1}{2}kl|A_0|^2 \\
&= -\frac{2\beta kl}{(k^2+l^2)^2}\frac{(k^2+l^2)^2}{4\beta k}|A_0|^2 k \\
&= c_{gy}\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}\frac{k}{\rho}
\end{aligned} \tag{84}$$

従って

$$\frac{\partial \rho\overline{u^{(2)}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(c_{gy}\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}k\right) \;=\; 0. \tag{85}$$

あるいは波の作用の保存則を用いれば, k が保存する状況 (系が x 方向に対称である状況) では位相平均として

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}k\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(c_{gx}\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}k\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(c_{gy}\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}k\right) = 0 \tag{86}$$

ということを思い起こせばこの式をさらに x 平均してやることにより

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}k\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(c_{gy}\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}k\right) = 0. \tag{87}$$

従って

$$\frac{\partial \rho \overline{u^{(2)}}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}k\right) = 0. \tag{88}$$

もしも初期値に於て系が擾乱が存在しなかった (従って $u^{(2)} = 0$) とすれば

$$\rho \overline{u^{(2)}} = \frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}k = \frac{\bar{E}}{\hat{c}_x} \tag{89}$$

かくして 1 次のオーダーの波動が存在すれば 2 次のオーダーの運動量をともなう. その大きさは波の持つ作用と波数との積に等しい.

$$\frac{\bar{E}}{\hat{c}_x} = \frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}k \tag{90}$$

を波の擬運動量という.

12.3　擬エネルギー

これまで波のエネルギーとして $E \equiv \rho(u'^2 + v'^2)/2$ を用いてきた. この量は正定値であるので波の大きさを表す指標としては都合がよいので擾乱のエネルギーと呼ばれてよく利用されている. しかし, この量は擾乱が存在する場の全エネルギー ($\equiv E_t$) と基本場の全エネルギー ($\equiv E_0$) の差を近似する量ではない.

実際, 2 次の量まで考慮して運動エネルギーを計算すれば

$$\begin{aligned} E_t &\equiv \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2) \\ &= \frac{\rho}{2}(U^2 + 2Uu' + u'^2 + 2Uu^{(2)} + v'^2) \end{aligned} \tag{91}$$

擾乱が波型の解であるとして位相平均をすれば

$$\bar{E}_t = \frac{\rho}{2}(U^2 + \overline{u'^2} + 2U\overline{u^{(2)}} + \overline{v'^2}) \tag{92}$$

これと

$$E_0 \equiv \frac{\rho}{2}U^2 \tag{93}$$

との差をとれば

$$\bar{E}_p \equiv \frac{\rho}{2}(\overline{u'^2} + 2U\overline{u^{(2)}} + \overline{v'^2}) \tag{94}$$

$$= \bar{E} + \rho U \overline{u^{(2)}} \tag{95}$$

この量は $\bar{E}$ とは異なる.

$\bar{E}_p$ をもとめてみよう. まず E の変化の式は (75) ～ (77) により

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)E+\rho u'v'\frac{\partial U}{\partial y} = -\mathrm{div}(p'\boldsymbol{v}'). \tag{96}$$

さらに (79) から

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)(\rho U u^{(2)})+\rho U v^{(2)}\frac{dU}{dy}-\rho U f v^{(2)}+\rho U\frac{\partial u'^2}{\partial x}+\rho U\frac{\partial u'v'}{\partial y} = -U\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x} \tag{97}$$

この 2 つの式を足しあわせると

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)(E+\rho U u^{(2)})\\&\quad+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u'^2 U)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho u'v'U)+\rho U v^{(2)}\frac{dU}{dy}-v^{(2)}\frac{\partial P}{\partial y}=-\mathrm{div}(p'\boldsymbol{v}')-U\frac{\partial p^{(2)}}{\partial x}\end{aligned} \tag{98}$$

ただし基本場に関しての地衡流平衡 $\rho f U=-\partial P/\partial y$ を用いている. さらに連続の式を利用すれば E_p の時間変化は保存形に書き下すことができることがわかる:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(E_p)\\&\quad+\frac{\partial}{\partial x}(UE_p+\rho u'^2U+\rho\frac{1}{2}U^2u^{(2)}+u'p'+u^{(2)}P+Up^{(2)})\\&\quad+\frac{\partial}{\partial y}(\rho u'v'U+\rho\frac{1}{2}U^2v^{(2)}+v'p'+v^{(2)}P)=0.\end{aligned} \tag{99}$$

さて, E_p を擾乱が存在する領域全体 (波束全体) で積分する.

$$\begin{aligned}\int E_p &= \int E+\int \rho U u^{(2)}\\&= \int \bar{E}+\int \overline{\rho U u^{(2)}}\\&= \int \bar{E}+\int Uk\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}\\&= \int \omega\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}\end{aligned} \tag{100}$$

1 行目から 2 行目へは, 積分の評価を位相平均の積分で近似してある. 場が時間に依存しないとき, すなわち ω が変化しないときには波の作用は E_p と結びつけられているのである.

$$\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}\omega \tag{101}$$

を擬エネルギーという.

13 critical level 付近での定常解

$e^{ik(x-ct)}$ 型の波を励起させるときの critical level 付近での定常解を求める.

(9) に

$$\psi = \tilde{\psi}(y)e^{ik(x-ct)}$$

を代入すると

$$\frac{d^2\tilde{\psi}}{dy^2} + \left[\frac{\beta - U_{yy}}{U-c} - k^2\right]\tilde{\psi} = 0. \tag{102}$$

critical level 付近では (102) は次のように近似できる.

$$\frac{d^2\tilde{\psi}}{dy^2} + \frac{\beta - U_{yy}(y_c)}{U_y(y_c)(y-y_c)}\tilde{\psi} = 0. \tag{103}$$

これを解くと (後述)

$$\tilde{\psi} = \begin{cases} -iA\sqrt{y-y_c}H_1^{(2)}(-i2\sqrt{\alpha(y-y_c)}) & (y > y_c) \\ A\sqrt{y_c-y}H_1^{(2)}(2\sqrt{\alpha(y_c-y)}) & (y < y_c) \end{cases}$$

ただし $H_\nu^{(2)}(z)$ は第 2 種 Hankel 函数, $\alpha \equiv -\dfrac{\beta}{U_y(y_c)} > 0$, A は定数である. $y \sim 0$ での $H_1^{(2)}(z)$ の振舞いは

$$H_1^{(2)}(z) \sim -i\left(\frac{-1}{\pi}\frac{2}{z} + \frac{2}{\pi}\frac{z}{2}\ln\frac{z}{2} + \cdots\right)$$

ψ を $y = y_c$ で展開して critical level 付近での解が得られる. $y_c - y \equiv \xi$ と書き換えて

$$\begin{aligned} \sqrt{\xi}H_i^{(2)}(2\sqrt{\alpha\xi}) &\sim -i\left(-\frac{\sqrt{\xi}}{\pi}\cdot\frac{2}{2\sqrt{\alpha\xi}} + \frac{2\sqrt{\alpha\xi}}{\pi}\ln\sqrt{\alpha\xi}\right) \\ &= -i\left(-\frac{1}{\pi\sqrt{\alpha}} + \frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}\xi\ln\alpha\xi\right) \\ &\sim i\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} - \xi\ln\xi\right) \end{aligned}$$

内部重力波の場合と異なり $y \to y_c$ で $m \to \infty$ となるような解とはなっていない.

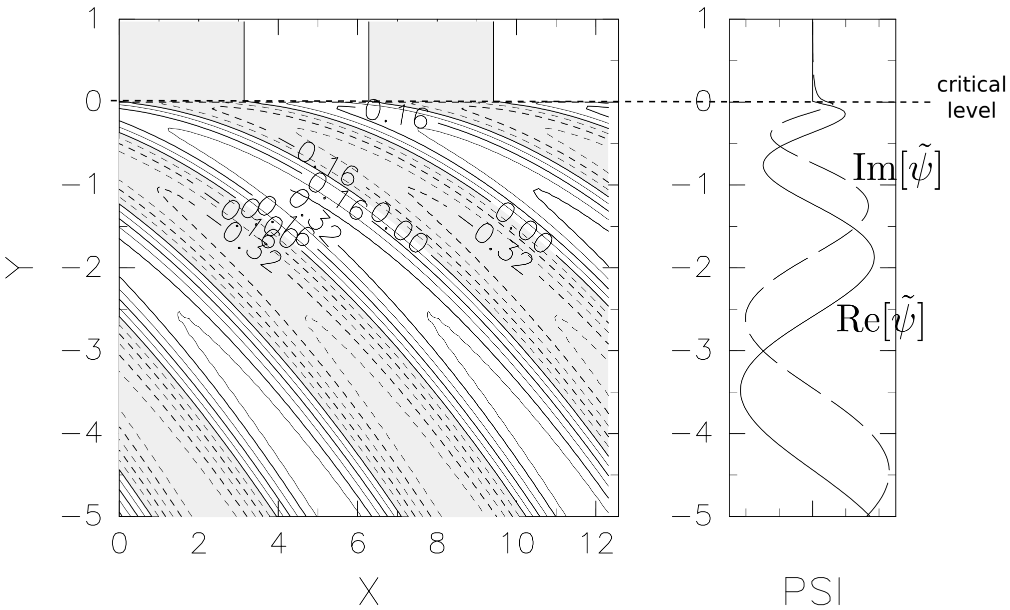


図 8: Rossby 波の critical level 付近での解 ($\alpha = 10, k = 1$)

critical level に近づくにつれて

$$
\begin{aligned}
u &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} \propto \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi \ln \xi) = \ln \xi + 1 \longrightarrow \infty, \\
v &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \propto \left(\frac{1}{\alpha} - \xi \ln \xi\right) \longrightarrow \frac{1}{\alpha}, \\
\bar{E} &= \frac{1}{2}(\overline{u^2} + \overline{v^2}) \propto (\ln \xi)^2 \longrightarrow \infty,
\end{aligned}
$$

となる.

14 ロスビー波の critical level 付近での定常解の導出

解く方程式は

$$\frac{d^2\tilde{\psi}}{dy^2} + \left[\frac{\beta - U_{yy}}{U - c} - k^2\right]\tilde{\psi} = 0 \tag{104}$$

仮定として

$$\frac{|\ U_{yy}(y_c)\ |}{U_y^2(y_c)} c_i \leq 1$$

とする.

$U - (c_r + ic_i) = 0$ となる点を $y = y_0$, $U - c_r = 0$ となる点を $y = y_c$ とすると[2]

$$\begin{aligned} y_0 &\sim y_c + \frac{ic_i}{U_y(y_c)}, \\ U - c &\sim U_y(y_c)(y - y_0), \end{aligned}$$

critical level の近傍では (104) 式は

$$\frac{d^2\tilde{\psi}}{dy^2} - \frac{\alpha}{y - y_0}\tilde{\psi} = 0,$$

ただし $\alpha \equiv -\dfrac{\beta - U_{yy}(y_c)}{U_y(y_c)} > 0$ である.

変数変換 $\xi = y_0 - y$ とおきかえる.

$$\frac{d^2\tilde{\psi}}{d\xi} + \frac{\alpha}{\xi} = 0. \tag{105}$$

(105) の一般解は

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_1 &= \sqrt{\xi} H_1^{(1)}(2\sqrt{\alpha\xi}) \\ \tilde{\psi}_2 &= \sqrt{\xi} H_1^{(2)}(2\sqrt{\alpha\xi}) \end{aligned}$$

ただし $H_\nu^{(i)}(z)$ は第 i 種 Hankel 函数である.

$\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$ が, y 方向どちら向きに伝播する解かを調べるために $\mathrm{Re}[\xi] > 0$ ($\mathrm{Re}[y - y_0] < 0$) での振舞いを見る.

[2] ここでの式変型はシリーズ '内部重力波～シアー流中の伝播' を参照せよ

Re[ξ] が十分大きいところでの Hankel 函数の振舞いは

$$H_1^{(1)}(2\sqrt{\alpha\xi}) \sim e^{i(2\sqrt{\alpha\xi}-\frac{3\pi}{4})}$$

局所的波数は

$$l = \frac{\partial}{\partial y}(2\sqrt{\alpha\xi}) = -\frac{\partial}{\partial\xi}(2\sqrt{\alpha\xi}) = -\sqrt{\frac{\alpha}{\xi}}.$$

したがって Re[ξ] > 0 のところで $\tilde{\psi}_1$ の表わす波の y 方向の波数 l は負である．その群速度は (8) より $c_{gy} < 0$ である．すなわち $\tilde{\psi}_1$ は y の負方向に伝播する解であることがわかる．

同様にして $\tilde{\psi}_2$ は y の正方向に伝播する解であることがわかる．いま，$y < y_c$ の領域から波を入射させるので，解として $\tilde{\psi}_2$ の方をとることにする．

$$\tilde{\psi} = \sqrt{\xi}H_1^{(2)}(2\sqrt{\alpha\xi}). \tag{106}$$

さて (106) の Re[ξ] < 0 (Re[$y - y_c$] > 0) における振舞いを調べよう．ξ を極座標表示する．

$$\xi = y_0 - y = \mid y_0 - y \mid e^{i\theta}.$$

(106) は

$$\tilde{\psi} = \mid y - y_0 \mid^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\theta}{2}} H_1^{(2)}(2\sqrt{\alpha \mid y - y_0 \mid} e^{\frac{i\theta}{2}}) \tag{107}$$

ξ の argument は $c_i > 0$ を考慮して

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Re}[\xi] > 0 & \text{のとき} & \theta \to 0 \\ \mathrm{Re}[\xi] < 0 & \text{のとき} & \theta \to -\pi \end{array}$$

Re[ξ] < 0 では $c_i \to 0,\ \ y_0 \to y_c$ として，

$$\tilde{\psi} = -i\sqrt{\mid y - y_0 \mid} H_1^{(2)}(-i2\sqrt{\alpha \mid y - y_0 \mid}) \tag{108}$$

となる．

以上，求まった解は

$$\tilde{\psi} = \begin{cases} -i\sqrt{y - y_c}H_1^{(2)}(-i2\sqrt{\alpha(y - y_c)}) & y > y_c \\ \sqrt{y_c - y}H_1^{(2)}(2\sqrt{\alpha(y_c - y)}) & y < y_c \end{cases}$$

15 参考文献

Ishioka, K., 2008 : A Spectral Method for Unbounded Domains and Its Application to Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics, IUTAM Symposium on Computational Physics and New Perspectives in Turbulence, IUTAM Bookseries Volume 4, pp. 291-296.

Pedlosky,J.,1979 : Geophysical Fluid Dynamics. Springer-Verlag. 710pp.

Whitham,G.B.,1974 : Linear and nonlinear waves. A Wiley-Interscience Publication,636pp.

岸保勘三郎, 佐藤信夫, 1986 : 新しい気象力学, 東京堂出版, 204pp.